

پاسخنامه تشریحی

۱

الف درست

ب نادرست

۲ دو حالت می توان در نظر گرفت:

(۱) n زوج است در این صورت می توان فرض کرد $n = 2k$ که $k \in \mathbb{Z}$ در نتیجه:

$$n^2 + 5n = 4k^2 + 10k = 2(\underbrace{2k^2 + 5k}_q) = 2q$$

پس $n^2 + 5$ عددی زوج است.(۲) n فرد است. در این صورت $n = 2k + 1$ که $k \in \mathbb{Z}$ بنابراین:

$$n^2 + 5n = 4k^2 + 4k + 1 + 10k + 5 = 4k^2 + 14k + 6 = 2(\underbrace{2k^2 + 7k + 3}_q) = 2q$$

پس در این حالت نیز $n^2 + 5n$ عددی فرد است بنابراین $n^2 + 5n$ همواره عددی زوج است.

۳

$$13 \equiv -4 \rightarrow (13)^2 \equiv (-4)^2 \rightarrow (13)^2 \equiv 16 \xrightarrow{16 \equiv -1} (13)^2 \equiv -1 \\ \rightarrow (13^2)^{2^0} \equiv (-1)^{2^0} \rightarrow (13)^{1^4} \equiv 1 \rightarrow r = 1$$

۴ گزینه ۱

۵ تعداد روزهای بین ۲۹ دی و ۳ تیرماه را به دست آورده و باقی مانده آن را تقسیم بر ۷ محاسبه می کنیم. سه شنبه را مطابق جدول زیر مبدأ فرض می کنیم:

روز هفته	سه شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه	جمعه	پنجشنبه	چهارشنبه
باقی مانده تقسیم بر ۷	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

با توجه به فاصله بین ۳ تیر و ۲۹ دی خواهیم داشت:

تیر	مرداد	شهریور	مهر	آبان	آذر	دی
۲۸	۳۱	۳۱	۳۰	۳۰	۳۰	۲۹

$$29 + 3(30) + 2(31) + 28 \equiv 6 \Rightarrow \text{چهارشنبه} \Rightarrow \text{روز به عقب} \Rightarrow 6$$

راهنمای تصحیح:

تیر	مرداد	شهریور	مهر	آبان	آذر	دی
۲۸	۳۱	۳۱	۳۰	۳۰	۳۰	۲۹

$$29 + 3(30) + 2(31) + 28 \equiv 6 \Rightarrow \text{چهارشنبه} \Rightarrow \text{روز به عقب} \Rightarrow 6 \quad (25\text{، نمره})$$

۶

$$60x + 70y = 1850 \rightarrow 6x + 7y = 185 \rightarrow 7y \equiv 185 \pmod{6} \rightarrow 185 - 6 \times 30 \equiv 5$$

$$\xrightarrow{7 \equiv 1} y \equiv 5 \rightarrow y = 6k + 5$$

$$6x + 7(6k + 5) = 185 \rightarrow 6x = 150 - 6 \times 7k \rightarrow x = 25 - 7k$$

بنابراین جواب های معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = 25 - 7k \\ y = 6k + 5 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

برای بدست آوردن جواب های صحیح و نامنفی معادله به فرم زیر عمل می کنیم:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 25 - 7k \geq 0 \rightarrow k \leq 3 \\ 6k + 5 \geq 0 \rightarrow k \geq 0 \end{cases}$$

در بین جواب‌های طبیعی معادله به ازای $x = 4$ و $x = 23$ و $y = x + y = 27$ کم‌ترین مقدار لازم برای تمبرها بدست می‌آید.

۷

الف ۳

۸

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q \Rightarrow 5 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 = 2q \Rightarrow q = 12$$

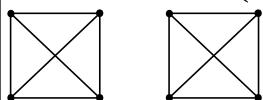
$$q + \bar{q} = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 12 + \bar{q} = \frac{8 \times 7}{2} \Rightarrow 12 + \bar{q} = 28 \rightarrow q = 16$$

۹

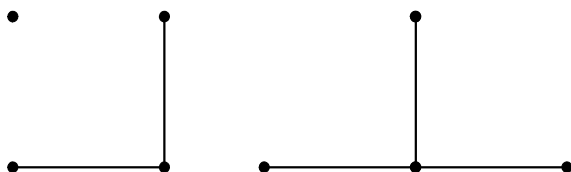
الف $5 + 8 - 1 = 12$

۱۰

$$rp = 2q \Rightarrow 3p = 2q \quad \begin{cases} 3p = 2q \\ q + 4 = 2p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 8 \\ q = 12 \end{cases}$$



۱۱



۱۲

الف می‌دانیم $\gamma(G) \leq 3$ بنابراین $\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{13}{5+1} \right\rfloor = 3$ پس داریم $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq \gamma(G) \leq 3$

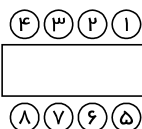
با توجه به اینکه $\{d, h, l\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است، لذا $\gamma(G) = 3$

ب

مجموعه‌های احاطه‌گر متفاوتی با این شرایط وجود دارد. برای مثال:

$$\{a, c, e, g, i, m\}, \{a, c, f, h, l\}, \{d, h, m, j\}, \{b, e, g, i, l\}$$

۱۳ برای جایگاه شماره ۱، هشت انتخاب وجود دارد. سپس برای جایگاه شماره ۵، یک انتخاب وجود دارد. (چون باید ۱ و ۵ برادر باشند). به همین ترتیب برای شماره ۲، شش انتخاب، برای شماره ۶، یک انتخاب، برای شماره ۳، چهار انتخاب، برای شماره ۷، یک انتخاب، برای شماره ۴، دو انتخاب و برای شماره ۸، یک انتخاب وجود دارد. پس تعداد کل حالات برابر است با:



$$8 \times 6 \times 4 \times 2 = 384$$

۱۴ جایگشت ۹ شیء برابر با ۹! است. اما چون ۳ شیء تکراری (a) و ۲ شیء تکراری (c) و ۳ شیء تکراری (d) وجود دارد، طبق قضیه جایگشت با تکرار، جواب برابر است با:

$$\frac{9!}{3!2!3!}$$

۱۵ می‌دانیم در معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی از رابطه $\binom{n+k-1}{k-1}$ به دست می‌آید. چون در معادله داده شده $x_i \geq 2$ است، از $x_1, x_2, \dots, x_k$ هر کدام ۲ واحد کم می‌کنیم تا معادله‌ای به فرم x های صحیح و نامنفی داشته باشیم. از طرفی x_1^2 برای چنین معادله‌ای مزاحم است و x_2 فقط می‌تواند یکی از اعداد ۲ یا ۳ را بپذیرد پس با جای گذاری این دو به جای x_2 خواهیم داشت:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16 \xrightarrow{x_1, x_2, x_3 \geq 2} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16 - 2 - 2 - 2 = 10$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 - 2 = 8 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 - 3 = 7 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

تعداد جواب $28 + 3 = 31$

راهنمای تصحیح:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16 \xrightarrow{x_1, x_2, x_3 \geq 2} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16 - 2 - 2 - 2 = 10$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 - 2 = 8 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 - 3 = 7 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3 \text{ (نمره ۲۵)}$$

تعداد جواب $28 + 3 = 31$ (نمره ۲۵)

۱۶ تعداد جواب‌های مسئله برابر تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ است که برابر است با:

$$\binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$$

۱۷

الف

درست؛ با تعویض جای دو سطر از مربع لاتین A و به‌دست آوردن مربع لاتین B ، ممکن است دو درایهٔ یکسان در A پیدا شود که در جایگاه‌های نظیر این دو در B نیز درایهٔ یکسان وجود داشته باشد. مثلاً:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 22 & 33 & 44 \\ 42 & 34 & 21 & 13 \\ 33 & 11 & 44 & 22 \\ 24 & 43 & 12 & 31 \end{bmatrix}$$

که در مربع لاتین به‌دست آمده از کنار هم قرار دادن اعداد A و B ، اعداد ۱۱، ۲۲، ۳۳ و ۴۴ تکراری‌اند.

راهنمای تصحیح:

درست (نمره ۲۵)

ب

نادرست؛ برای هر عدد طبیعی مانند n ، مربع لاتین $n \times n$ (مرتبهٔ n) وجود دارد.

راهنمای تصحیح:

نادرست (نمره ۲۵)

۱۸

کافی است، مربع لاتینی مثال بنزیم که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن یکسان باشد. مانند مربع لاتین شکل مقابل:

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

در صورت ترکیب دو مربع لاتین، مربع مقابل به دست می‌آید که در آن، هیچ عدد دو رقمی تکراری وجود ندارد.

۱۳	۲۲	۳۱
۲۱	۳۳	۱۲
۳۲	۱۱	۲۳

۱۹ یک رمز ۵ رقمی را به صورت $\overline{abcde}$ در نظر می گیریم که در آن a, b, c, d, e ارقام ۱ تا ۹ می باشند.

$$A = \{\overline{abcde} \mid a, b, c, d, e \neq ۷\} \Rightarrow |A| = ۸^۵$$

$$B = \{\overline{abcde} \mid a, b, c, d, e \neq ۲\} \Rightarrow |B| = ۸^۵$$

$$C = \{\overline{abcde} \mid a, b, c, d, e \neq ۳\} \Rightarrow |C| = ۸^۵$$

$$A \cap B = \{\overline{abcde} \mid a, b, c, d, e \neq ۷, ۲\} \Rightarrow |A \cap B| = ۷^۵$$

$$A \cap C = \{\overline{abcde} \mid a, b, c, d, e \neq ۷, ۳\} \Rightarrow |A \cap C| = ۷^۵$$

$$B \cap C = \{\overline{abcde} \mid a, b, c, d, e \neq ۲, ۳\} \Rightarrow |B \cap C| = ۷^۵$$

$$A \cap B \cap C = \{\overline{abcde} \mid a, b, c, d, e \neq ۲, ۳, ۷\} \Rightarrow |A \cap B \cap C| = ۶^۵$$

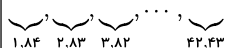
$$|S| = ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ = ۹^۵$$

$$|\overline{A \cap B \cap C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = |S| - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|)$$

$$= |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| = ۹^۵ - ۸^۵ - ۸^۵ - ۸^۵ + ۷^۵ + ۷^۵ + ۷^۵ - ۶^۵ = ۳۳۹۰$$

$$\text{حداکثر زمان لازم} : ۳۳۹۰ \times ۶ = ۳۳۹ \times ۶۰ \text{ s} = ۳۳۹ \text{ min}$$

۲۰ تعداد کبوترها = ۴۳ و تعداد لانه ها = ۴۲ و به صورت زیر هستند.



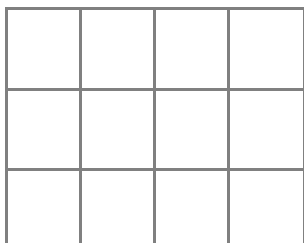
چنانچه قرار باشد کبوترها، لانه ها را اشغال کنند، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می گیرند و مجموع شان ۸۵ است.

۲۱

در شکل مقابل مستطیل ۸×۶ به مربع های ۲×۲ تقسیم شده است. قطر هر کدام از مربع ها برابر با $\sqrt{۸}$ خواهد بود. پس برای اینکه فاصله هیچ دو

نقطه ای بیش از $\sqrt{۸}$ نشود، حداکثر ۱۲ نقطه می توان انتخاب کرد (یک نقطه داخل هر مربع).

بنابراین با انتخاب ۱۳ نقطه، مطمئن خواهیم بود، حداقل یک جفت نقطه با فاصله کمتر از $\sqrt{۸}$ داریم.



۲۲ برای هر عضو از A یکی از ۴ عضو B را می توان نسبت داد. پس تعداد کل توابع برابر است با:

$$۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^۵ = ۱۰۲۴$$

طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یکی از اعضای B با بیش از یک عضو از A نسبت دارد. پس این تابع در هیچ حالتی نمی تواند یک به یک باشد.