

فصل اول : آشنایی با مبانی ریاضیات

درس اول : آشنایی با منطق ریاضی

پویش علمی
ماندگار البرز

گزاره‌ها و هم‌ارزی آن‌ها

(۱) به کمک جدول ارزش‌ها نشان دهید که $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim q \Rightarrow p$.

P	q	$\sim P$	$\sim P \wedge q$	$P \vee (\sim P \wedge q)$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow P$
و	و	ن	ن	و	ن	و
و	ن	ن	ن	و	و	و
ن	و	و	و	و	ن	و
ن	ن	و	ن	ن	و	ن

با مقایسه ستون‌ها هر
نیم و هفتم، هم‌ارزی
(پره‌می) شود.



سورها

اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 3\}$ دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره سوری $\forall x \in A; 2x - 1 \leq 4$ را مشخص کنید.

$x = -1, 0, 1, 2, 3$

پویش علمی
ماندگار البرز

$$2x - 1 \leq 4 \Rightarrow 2x \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{5}{2} \Rightarrow x \leq 2,5$$

$$\rightarrow \forall x \in A; x \leq 2,5$$

سوربا غلط است، زیرا $x = 3$ در A می باشد ولی در شرط $x \leq 2,5$ صدق نمی کند.



(۳) ارزش گزاره سوری $\frac{x^2-9}{x+3} = x-3$; $\forall x \in \mathbb{R}$ را با ذکر دلیل مشخص کرده و سپس نقیض آن را بنویسید.

$$\frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = x-3$$

سور بالا ارزش نادریست دارد زیرا $x = -3$ (در صورتی که مخرج صفر می‌شود)
این تساوی همی‌پس و نقیض آن عبارت است از:

$$\sim \left(\underbrace{\forall x \in \mathbb{R} ; \frac{x^2-9}{x+3} = x-3}_{P(x)} \right) \equiv \exists x \in \mathbb{R} ; \frac{x^2-9}{x+3} \neq x-3$$

عکس نقیض

۴) نقیض گزاره «اگر $x \leq 0$ ، آنگاه $x^2 \geq 0$ » را بنویسید.

$\frac{q}{\text{اگر}} \quad \frac{p}{\text{آنگاه}}$

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

نقیض آن عبارت است از:

$$(x \leq 0) \wedge (x^2 < 0)$$

پویش علمی
ماندگار البرز

(۵) ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آنگاه n نیز مضرب ۳ است.

اثر P : فرض q : حکم

با توجه به هم‌ارزی: $P \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim P$: عکس نقیض

کامیت از فرض $\sim q$ به حکم $\sim P$ برسیم.

$$\rightarrow n \text{ مضرب ۳ نیست: } \sim q: \text{ فرض} \begin{cases} n = 3k + 1 \xrightarrow{\text{توان}} n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3k' + 1 \\ n = 3k + 2 \xrightarrow{\text{توان}} n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3k'' + 1 \end{cases}$$

پس n^2 مضرب ۳ نیست، یعنی $\sim P$.



پویش علمی
ماندگار البرز



فصل ۱ — ۶
 ۲ — ۷
 ۳ — ۸
 ۴ — ۹

درس دوم: جبر مجموعه‌ها

تعداد زیر مجموعه‌ها

۶ اگر به مجموعه A سه عضو اضافه شود، تعداد زیر مجموعه‌های آن ۲۲۴ واحد اضافه خواهد شد. تعداد اعضای مجموعه A را تعیین کنید.

$$A: n \text{ عضو} \xrightarrow{+3} (n+3) \text{ عضو}$$

زیر مجموعه

$$2^n \xrightarrow{+224} 2^{n+3}$$

$$2^n + 224 = 2^{n+3} \rightarrow$$

$$2^n + 224 = 2^n \times 2^3 \xrightarrow{2^n = t}$$

$$t + 224 = 8t \rightarrow 7t = 224$$

$$t = \frac{224}{7} = 32 \rightarrow 2^n = 32 \rightarrow n = 5$$

پویش علمی
ماندگار البرز

اثبات به روش عضوگیری

(۷) به روش عضوگیری دلخواه نشان دهید که اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ ، آن‌گاه: $A \cap C \subseteq B \cup D$.

$$x \in A \cap C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \\ \wedge \\ x \in C \xrightarrow{C \subseteq D} x \in D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ \vee \\ x \in D \end{cases} \Rightarrow x \in B \cup D.$$

$$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$$



پویش علمی
ماندگار البرز



اثبات به کمک تعریف

۸) به کمک تعریف اجتماع، اشتراک و خواص گزاره‌ها نشان دهید که: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$$P \wedge (q \vee r) \equiv (P \wedge q) \vee (P \wedge r)$$

$$A \cap (B \cup C) = \left\{ x \in U \mid x \in A \wedge x \in (B \cup C) \right\} = \left\{ x \in U \mid \underbrace{x \in A}_P \wedge (\underbrace{x \in B}_q \vee \underbrace{x \in C}_r) \right\}$$

$$= \left\{ x \in U \mid (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \right\}$$

$$= \left\{ x \in U \mid x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \right\} = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

پویش علمی
ماندگارالبرز

اثبات به کمک جبر مجموعه‌ها

۹) درستی تساوی مقابل را به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

$$\text{سمت راست: } (A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)' = \underbrace{(A \cap B)}_M \cap (A' \cup C')$$

$$= M \cap (A' \cup C') = (M \cap A') \cup (M \cap C') = \left[\underbrace{(A \cap B)}_{B \cap A} \cap A' \right] \cup \left[(A \cap B) \cap C' \right]$$

$$= \underbrace{\left[B \cap \underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} \right]}_{\emptyset} \cup \left[A \cap (B \cap C') \right] = A \cap (B \cap C') = A \cap (B - C).$$

پویش علمی
ماندگارالبرز

۱۰ اگر A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، به روش جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

$$\begin{aligned} \text{پس داریم: } (A - B) \cup (A - C) &= (A \cap B') \cup (A \cap C') = A \cap (B' \cup C') \\ &= A - (B' \cup C')' \\ &= A - (B \cap C). \end{aligned}$$



۱۱) اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل $(A \cup B') \cap [(B \cup A) \cap (B' \cup A)]$ را به کمک جبر مجموعه‌ها ساده کنید.

$$(A \cup B') \cap [(B \cup A) \cap (B' \cup A)] = (A \cup B') \cap \underbrace{[A \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset}]}_A$$

$$= (A \cup B') \cap A \stackrel{\text{جیب}}{=} A$$



پویش علمی
ماندگار البرز



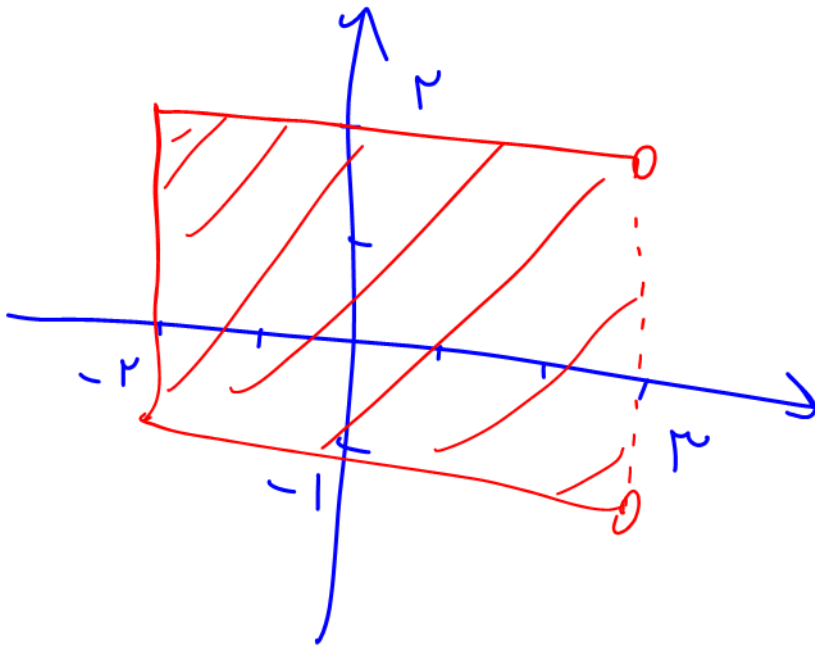
ضرب دکارتی

۱۲) در هر یک از قسمت‌های زیر، مجموعه $A \times B$ را رسم کنید.

الف) $A = \{-1, 2\}$ و $B = [-1, 2]$.

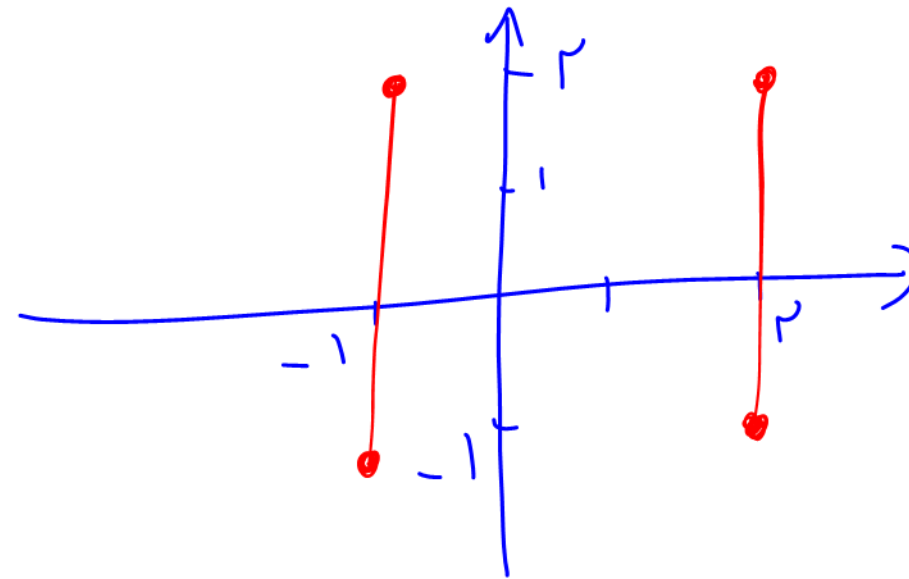
ب) $A = [-2, 3]$ و $B = [-1, 2]$.

$$A \times B = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 2\}$$



$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$= \{(a, b) \mid (a = -1 \vee a = 2), -1 \leq b \leq 2\}$$



پویش علمی
ماندگار البرز



(۱۳) اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، ثابت کنید که: $A \times B = B \times A \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$

حکم

اثبات: اگر $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$ ، حکم اثبات شده است.

(در غیر این صورت، یعنی اگر $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$ ، ثابت می‌کنیم $A = B$.)

$$\begin{array}{l}
 A \neq \emptyset \rightarrow x \in A \\
 B \neq \emptyset \rightarrow y \in B
 \end{array}
 \rightarrow (x, y) \in A \times B \xrightarrow{A \times B = B \times A} (x, y) \in B \times A \Rightarrow \begin{cases} x \in B \rightarrow A \subseteq B \\ y \in A \rightarrow B \subseteq A \end{cases} \rightarrow A = B$$



پویش علمی
ماندگار البرز



۱۴) اگر $A = \{2x+1, 3, -1\}$ و $B = \{2y+3, 5, z\}$ دو مجموعه باشد و $A \times B = B \times A$ ، بیشترین مقدار $x+y+z$ را به دست آورید.

$$\star A \times B = B \times A \Rightarrow \begin{cases} A = \emptyset \\ \vee \\ B = \emptyset \\ \vee \\ A = B \end{cases} \quad \frac{A \neq \emptyset}{B \neq \emptyset} \rightarrow \boxed{A = B}$$

$$\star \begin{cases} 5 \in B \xrightarrow{A=B} 5 \in A \rightarrow 2x+1=5 \rightarrow 2x=4 \rightarrow x=2 \\ 3 \in A \xrightarrow{''} 3 \in B \rightarrow \begin{cases} 2y+3=3, z=-1 \rightarrow y=0, z=-1 \\ 2y+3=-1, z=3 \rightarrow y=-2, z=3 \end{cases} \xrightarrow{x=2} \\ -1 \in A \xrightarrow{''} -1 \in B \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z = 2+0-1=1 \\ x+y+z = 2-2+3=3 \end{cases} \rightarrow \boxed{\text{Max}(x+y+z)=3}$$

