



فصل دوم: احتمال

درس اول: مبانی احتمال

فضای نمونه و پیشامد

۱) ظرفیت یک تاکسی، ۴ مسافر است. اگر راننده در مسیر رفت مجبور باشد حداقل یک مسافر سوار کند و فضای نمونه، تعداد مسافران در مسیر رفت و برگشت باشد،

الف) فضای نمونه را به شکل حاصل دکارتی بنویسید و تعداد اعضای آن را مشخص کنید.

ب) منظور از برآمد $(۳, ۰)$ در فضای نمونه چیست؟

پ) پیشامد آن را بنویسید که در مسیر برگشت، حداکثر دو مسافر سوار کند.

رفت: A

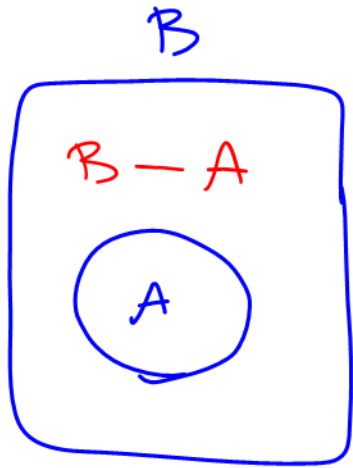
$$S = \{1, 2, 3, 4\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\} \rightarrow n(S) = n(A) \times n(B) = 4 \times 5 = 20$$

برگشت: B

$$(۳, ۰) \in S \rightarrow \begin{cases} \text{تعداد مسافران رفت} = ۳ \\ \text{تعداد مسافران برگشت} = ۰ \end{cases}$$

رفت: $\{1, 2, 3, 4\}$ برگشت: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

(۲) اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشند به طوری که $A \subseteq B$ ، ثابت کنید: $P(B - A) = P(B) - P(A)$.



فرض کنیم

با توجه به اینکه $A \subseteq B$ ، پس A و $B - A$ هر دو

نا سازگارند و طبق اصل احتمال داریم:

$$P(\underbrace{A \cup (B - A)}_B) = P(A) + P(B - A) \Rightarrow$$

$$P(B) = P(A) + P(B - A) \Rightarrow$$

$$P(B) - P(A) = P(B - A).$$

(۳) از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 200\}$ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم.

(الف) احتمال اینکه عدد انتخاب شده بر ۴ بخش‌پذیر بوده ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشد، را تعیین کنید.

(ب) احتمال اینکه عدد انتخاب شده نه بر ۴ و نه بر ۷ بخش‌پذیر باشد، چقدر است؟

$$S = \{1, 2, \dots, 200\} \rightarrow n(S) = 200$$

$$A = \text{اعداد زوج} \rightarrow n(A) = \left[\frac{200}{2} \right] = 100$$

$$B = 7 \quad // \rightarrow n(B) = \left[\frac{200}{7} \right] = 28$$

$$A \cap B = 14 \quad // \rightarrow n(A \cap B) = \left[\frac{200}{14} \right] = 14$$

$$\text{الف)} \quad P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{n(A)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{100}{200} - \frac{14}{200} = \frac{86}{200}$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad P(A' \cap B') &= 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - \left[\frac{100}{200} + \frac{28}{200} - \frac{14}{200} \right] \\ &= 1 - \frac{114}{200} = \frac{86}{200} \end{aligned}$$



پویش علمی
ماندگار البرز



درس دوم: احتمال غیر هم‌شانس

۴) یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که در هر پرتاب، احتمال مشاهده هر عدد، متناسب با همان عدد است. در پرتاب این تاس، احتمال مشاهده عددی زوج را به دست آورید.

$$S = \{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow P(S) = 1 \rightarrow P(1) + P(2) + P(3) + \dots + P(6) = 1$$

$$P(a) = ka$$

$$\underline{P(a) = ka} \rightarrow k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1$$

$$P(\{2, 4, 6\}) = ?$$

$$\rightarrow 12k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{12}$$

$$\rightarrow P(\{2, 4, 6\}) = P(2) + P(4) + P(6) = 2k + 4k + 6k = 12k = \frac{12}{12} = 1$$



پویش علمی
ماندگار البرز



(۵) فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی متناظر با ۳ برآمد به صورت $S = \{x, y, z\}$ است. اگر احتمال‌های متناظر با اعضای x, y و z ، یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، $P(\{x, z\})$ کدام است؟

$$S = \{x, y, z\} \xrightarrow{P(S)=1} P(x) + P(y) + P(z) = 1 \quad \text{①} \quad a + \frac{a}{4} + \frac{a}{16} = 1 \xrightarrow{\times 16}$$

دنباله هندسی: $P(x), P(y), P(z) \xrightarrow{P(x)=a} \begin{cases} P(x)=a \\ P(y)=\frac{a}{4} \\ P(z)=\frac{a}{16} \end{cases} \quad \text{①}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\times \frac{1}{4}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\times \frac{1}{4}}$

$$16a + 4a + a = 16 \Rightarrow 21a = 16 \Rightarrow a = \frac{16}{21}$$

$$P(\{x, z\}) = P(x) + P(z) = a + \frac{a}{16} = \frac{16a}{16} = \frac{16}{16} \times \frac{16}{21} = \frac{16}{21}$$



پویش علمی
ماندگار البرز



درس سوم: احتمال شرطی

پویش علمی
ماندگار البرز

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

۶) در پرتاب دو تاس، اگر بدانیم که مجموع دو تاس برابر ۹ شده است، احتمال اینکه هر دو تاس از ۳ بزرگتر باشند، چقدر است؟

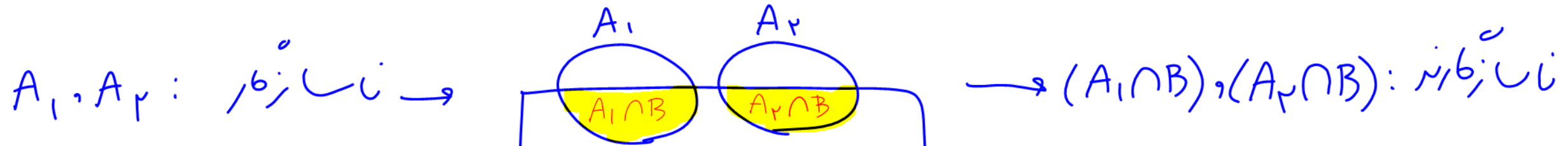
A

S (فضای نمونه)

$$S = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\} \quad (\text{مجموع } 9)$$

$$A = \{(4, 5), (5, 4)\} \quad (\text{هر دو تاس از } 3 \text{ بزرگتر}) \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(۷) اگر A_1 و A_2 دو پیشامد ناسازگار باشند، نشان دهید که $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$.



$$P(A_1 \cup A_2 | B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P(A_1 | B) + P(A_2 | B).$$

۸ دروازه بان یک تیم فوتبال، اگر روحیه خوبی داشته باشد، با احتمال ۶۰ درصد و اگر روحیه بدی داشته باشد، با احتمال ۳۰ درصد ضربه پنالتی را مهار می کند. (پیش از اولین ضربه پنالتی، روحیه این دروازه بان خوب است) احتمال آن را به دست آورید که این دروازه بان در سه ضربه پنالتی اول، دوم و سوم، دقیقاً دو ضربه آخر را مهار کند. (با مهار هر پنالتی، روحیه دروازه بان خوب و در غیر این صورت بد می شود.)

پنالتی نام مهار شود
 A_i :

$$P(A'_1 \cap A_2 \cap A_3) = \underbrace{P(A'_1)}_{\text{رو ضربه اول}} \cdot \underbrace{P(A_2 | A'_1)}_{\text{رو ضربه دوم}} \cdot \underbrace{P(A_3 | A'_1 \cap A_2)}_{\text{رو ضربه سوم}}$$

$$= (1 - 0.6) (0.3) (0.4) = 0.4 \times 0.3 \times 0.4 = 0.072$$

۹) محمد و سينا هر کدام با احتمال $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{3}$ به ورزشگاه می‌روند. احتمال رفتن محمد به ورزشگاه، به شرط رفتن سينا، $\frac{1}{4}$ است. اگر سينا به ورزشگاه نرفته باشد، احتمال اینکه محمد به ورزشگاه برود را تعیین کنید.

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(A|B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A|B') = ?$$

$$P(A|B) = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A - B)}{1 - P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$$



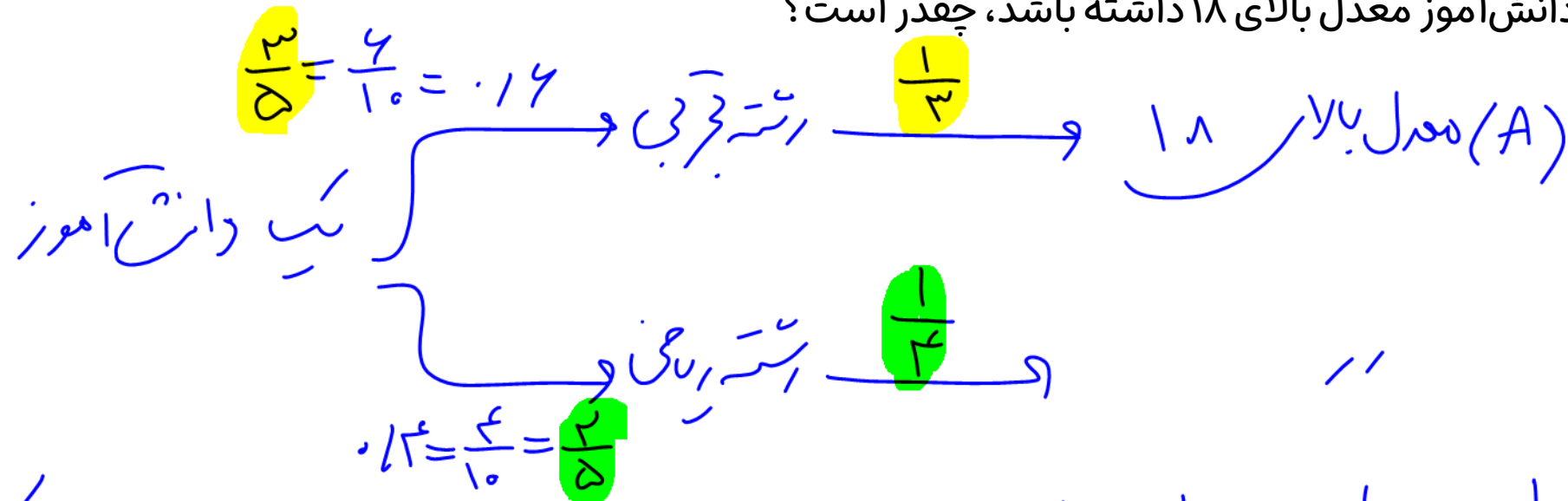
پویش علمی
ماندگار البرز



۱۰ در مدرسه‌ای ۶۰ درصد دانش‌آموزان در رشته تجربی و ۴۰ درصد دانش‌آموزان در رشته ریاضی تحصیل می‌کنند. در این مدرسه، $\frac{1}{3}$ دانش‌آموزان رشته تجربی و $\frac{1}{4}$ دانش‌آموزان رشته ریاضی، معدل بالای ۱۸ کسب کرده‌اند. دانش‌آموزی به تصادف از این مدرسه انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این دانش‌آموز معدل بالای ۱۸ داشته باشد، چقدر است؟



پویش علمی
ماندگار البرز



قانون احتمال کل $\rightarrow P(A) = \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10} = 0.3$

درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته

۱۱) در پرتاب دو تاس، فرض کنید A پیشامد عدد ۵ در تاس اول و B پیشامد مجموع ۹ در برآمدهای دو تاس باشند، مستقل بودن یا نبودن پیشامدهای A و B را بررسی کنید.



پویش علمی
ماندگارالبرز



$$A = \{(5, 1), (5, 2), \dots, (5, 6)\}$$

$$\rightarrow A \cap B = \{(5, 4)\}$$

$$B = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow \begin{cases} P(A \cap B) = \frac{1}{36} \\ P(A) \cdot P(B) = \frac{6}{36} \times \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{81} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{36} \neq \frac{1}{81}$$

مستقل نیستند: A, B (وابسته‌اند)

۱۲) اگر $P(A \cup B) = ۰/۹$ ، $P(B) = ۰/۷۵$ و A و B دو پیشامد مستقل باشند، حاصل $P(A - B)$ را به دست آورید.

$$P(A \cup B) = ۰/۹ \rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۹ \xrightarrow[\text{مستقل}]{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

$$\rightarrow P(A) + ۰/۷۵ - ۰/۷۵ P(A) = ۰/۹ \rightarrow ۰/۲۵ P(A) = ۰/۱۵ \rightarrow$$

$$P(A) = \frac{۰/۱۵}{۰/۲۵} = \frac{۱۵}{۲۵} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

$$P(A - B) = P(A) - \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A) \cdot P(B)} = ۰/۹ - (۰/۶ \times ۰/۷۵) = ۰/۹ - ۰/۴۵ = ۰/۱۵$$



۱۳) امتحانی شامل ۳ سؤال چهارگزینه‌ای است. دانش‌آموزی به طور تصادفی به هر سه سؤال پاسخ می‌دهد. احتمال آن که این شخص فقط به یک سؤال پاسخ درست دهد را به دست آورید.

متن این : A_i ها — پاسخ درست به سؤال i ام : A_i

۲ سؤال
× × ✓ ×
پویش علمی
ماندگار البرز

$$A_1 \cap A_2' \cap A_3' \rightarrow P(A_1 \cap A_2' \cap A_3') = P(A_1) \cdot P(A_2') \cdot P(A_3') \\ = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$$

فقط به سؤال اول پاسخ درست داده

$$P(\text{فقط به یک سؤال پاسخ درست}) = \binom{3}{1} \times \frac{9}{64} = 3 \times \frac{9}{64} = \frac{27}{64}$$

↓
یک سؤال درست
از ۳ سؤال



۱۴) امیر و بابک کفنی تیم ۱۱ نفره و الیا ^ر مدرس اند و قد صغیر و متوسط
 در این تیم برابر است. ^ر برای تیم قد امیر از بابک بلندتر است.

احتمال اینکه امیر از نظر بلندتر قد نفر هفتم باشد ^A چقدر است؟

A : قد بابک > قد امیر
 B : نفر هفتم = قد امیر

$P(B|A) = ?$

B

نفر یازدهم > ... > نفر دهم > نفر اول

A|B: نفر اول > ... > امیر > بابک > نفر دهم > نفر یازدهم

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{11} \times \frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{110}$$