پویش جهادی دبیران دبیرستان ماندگار البرز

MANDEGAR ALBORZ HIGH SCHOOL

۱۴۰۱-۱۴۰۲

به نام آنکه جان را فکرت آموخت

درس :

ریاضیات گسسته

مبحث : **نظریه‌ی اعداد**

اگر ریاضیات را به عنوان ملکه‌ی تمام علوم در نظر بگیریم، نظریه‌ی اعداد سلطان این ملکه است. «گاوس»

تهیه و تنظیم : مهندس ترکمن

قضیه تقسیم (الگوریتم تقسیم)

EX اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، آنگاه اعدادی صحیح و یکتا مانند q و r همواره وجود دارند بطوری که

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} \vdots & q \\ r & \end{array} \longrightarrow \boxed{\text{فرمول تقسیم} \quad a = bq + r \quad : \quad 0 \leq r < b \longleftarrow \text{شرط تقسیم}}$$

مقسوم ← a

مقسوم علیه ← b

خارج قسمت ← q

باقی مانده ← r

$0 \leq r < b$ ← باقی مانده همواره از مقسوم علیه کوچکتر است و همواره نامنفی است

$$\text{if } b \in \mathbb{Z} \xrightarrow[\text{تقسیم بر صفر بی معنی است}]{b \neq 0} 0 \leq r < |b|$$

تذکر ۱ در هر تقسیم از اعداد طبیعی اگر مقسوم از مقسوم علیه کوچکتر باشد، باقی مانده همان مقسوم است.

تذکر ۲ (سراسری) EX

در هر تقسیم از اعداد طبیعی، اگر خارج قسمت مخالف صفر باشد، آنگاه مقسوم همواره از ⑨⑥ برابر باقی مانده بزرگتر است.

اثبات

تذکر ۳ (سراسری) در دو تقسیم، اگر مقسوم و مقسوم علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، آنگاه

مثال عددی

تذکر ۴ در قضیه تقسیم همواره داریم $\boxed{}$

اثبات

مثال عددی

نتیجه :

مثال: تعداد مضرب‌های ۷ بین ۱ تا ۱۰۰ برابر است با ؟

سراسری چند عدد سه رقمی مضرب ۳۷ وجود دارد؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۶ ۳) ۲۵ ۴) ۲۴

حل چند مسأله‌ی مهم در تقسیم

EX **مسأله ۱** (مشابه سراسری) در یک تقسیم ۸۸ واحد به مقسوم و ۶ واحد به مقسوم علیه افزوده‌ام، خارج قسمت تغییری نکرده است ولی باقی‌مانده ۲ واحد کم شده است. خارج قسمت این تقسیم را بیابید.

مسأله ۲ چند عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰ وجود دارد که در تقسیم بر عدد ۴ باقی‌مانده‌ی ۳ داشته باشد؟

مسأله ۳ چند عدد طبیعی کوچکتر از ۵۰۰ وجود دارد که در تقسیم بر عدد طبیعی a خارج قسمت و باقی مانده به ترتیب ۱۱ و ۳۹ باشد!

EX **مسأله ۴** (مشابه سراسری) در یک تقسیم مقسوم علیه ۱۲۷ و باقی مانده دو برابر مکعب خارج قسمت است. بیشترین مقدار مقسوم را بیابید.

سراسری EX در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷ باقی‌مانده تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کمتر است. بزرگترین مقدار a مضرب کدام عدد است؟

۱) ۹
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۶

تست در یک تقسیم، مقسوم علیه ۲۳ و باقی‌مانده $\frac{1}{3}$ خارج قسمت است. بیشترین مقدار خارج قسمت کدام است؟

۱) ۶۹
۲) ۶۸
۳) ۶۷
۴) ۶۶

مسئله ۵ EX باقی‌مانده تقسیم اعداد صحیح m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ است. باقی‌مانده تقسیم عدد (۲m − ۵n) بر ۱۷ کدام است؟

مسئله ۶ در تقسیم عدد a بر ۶۳ باقی‌مانده ۱۷ است. اگر ۶۰ واحد به a اضافه کنیم، باقی‌مانده و خارج قسمت چه تغییری می‌کند؟

۱) سه واحد کم می‌شود - یک واحد اضافه می‌شود.
۲) سه واحد اضافه می‌شود - یک واحد اضافه می‌شود.
۳) سه واحد اضافه می‌شود - تغییر نمی‌کند.
۴) سه واحد کم می‌شود - دو واحد اضافه می‌شود.

مسئله ۷ در یک تقسیم مقسوم علیه ۵۳ و باقی‌مانده ۱۸ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد به طوری که خارج قسمت تغییری نکند؟

مسئله ۸ (شبیه سراسری) در یک تقسیم باقی‌مانده ۲۹ و خارج قسمت ۷ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم علیه اضافه کرد به طوری که خارج قسمت و مقسوم تغییری نکنند؟

مسئله ۹ (EX) باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد صحیح a بر ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۵۶ چقدر است؟

مسئله ۱۰ در تقسیم عدد ۷۱۵ بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت ۱۲ است. برای b چند جواب وجود دارد؟

مسئله ۱۱ (سراسری ۹۳) در یک تقسیم باقی‌مانده ۹۵ و مقسوم ۱۰۰۰ واحد بیشتر از مقسوم علیه است. خارج قسمت این تقسیم را بیابید.

سراسری در تقسیم عدد ۱۶۵ بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت مجذور باقی‌مانده است. چند عدد b می‌توان یافت؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

مسئله ۱۲ در یک تقسیم از اعداد طبیعی باقی‌مانده بیشترین مقدار خود را دارد و مقسوم ۱۲ برابر باقی‌مانده است. اجزای این تقسیم را بیابید.

سراسری در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b باقی‌مانده و خارج قسمت هر دو مساوی q اند. اگر ۳ واحد از مقسوم علیه کم شود، ۵ واحد به خارج قسمت اضافه شده و باقی‌مانده صفر می‌شود. مقادیر q کدام اند؟

۱) ۸ و ۵
۲) ۱۰ و ۵
۳) ۹ و ۴
۴) ۴ و ۸

تذکر

تست باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد صحیح a بر ۱۷ برابر ۱۱ است. اگر a مضرب ۳ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $\frac{a}{3}$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۷
۳) ۲ ۴) ۱۵

سراسری در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده ۱۷ و خارج قسمت ۲۵ می‌باشد. اگر a مضرب ۶ باشد، رقم دهگان کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷
۳) ۶ ۴) ۹

سراسری ۹۲ (خ ۹۹) در تقسیم عدد طبیعی سه رقمی a بر عدد طبیعی b، خارج قسمت ۲۱ و باقی‌مانده ۳۷ است. چند عضو از مجموعه جواب‌های a مضرب ۵ می‌باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

سراسری ۹۹ چند عدد طبیعی مضرب ۹ وجود دارد که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن اعداد بر ۴۳، با مجذور خارج قسمت برابر باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵
۳) ۶ ۴) ۷

سراسری ۱۴۰۰ اگر خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی $a>9$ بر ۱۱، ۳ واحد بیشتر از باقی‌ماندهٔ آن باشد، احتمال این که عدد $a-9$ بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۴۲}$ ۲) $\frac{۶}{۱۱}$
۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۱۱}$

نمایش اعداد صحیح به شکل‌های مختلف

مثال (EX): نشان دهید هر عدد صحیح به صورت $۳k$ یا $۳k+۲$ یا $۳k+۱$ است. $(k \in \mathbb{Z})$

$$\forall a \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{در تقسیم بر ۳}} a = ۳k + r \,, \quad ۰ \le r < ۳$$

$r = ۰ \longrightarrow a = ۳k$

یا

$r = ۱ \longrightarrow a = ۳k + ۱$

یا

$r = ۲ \longrightarrow a = ۳k + ۲$

به طور کلی

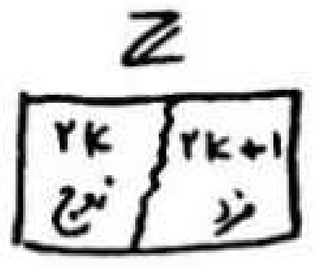
قضیه: اگر $b > ۱$ عددی طبیعی باشد، هر عدد صحیح را می‌توان به صورت bk یا $bk+۱$ یا ... یا $bk+(b-۱)$ نمایش داد. $(k \in \mathbb{Z})$

انواع $\mathbb{Z}$

مثلاً در مثال بالا $b = ۳$ می‌باشد.

اگر $b = ۵$، آنگاه هر عدد صحیح: $۵k$ ، $۵k+۱$ ، $۵k+۲$ ، $۵k+۳$ ، $۵k+۴$

اگر $b = ۲$، آنگاه هر عدد صحیح: $۲k$ (زوج) ، $۲k+۱$ (فرد)



مثال (EX): نشان دهید از هر سه عدد صحیح متوالی، همواره یکی مضرب ۳ است.

$$a \in \mathbb{Z} \longrightarrow \boxed{a \,,\ a+۱ \,,\ a+۲}$$

می‌دانیم

$a = ۳k \longrightarrow$ حکم ثابت شد

یا

$a = ۳k+۱ \xrightarrow{+۲} a+۲ = ۳k+۳ = ۳(\overbrace{k+۱}^{k' \in \mathbb{Z}}) = ۳k' \longrightarrow$ حکم ثابت شد

یا

$a = ۳k+۲ \xrightarrow{+۱} a+۱ = ۳k+۳ = \ldots$ 〃

نتیجه: از هر n عدد صحیح متوالی، همواره یکی مضرب n است.

مثال (EX): اگر a عدد صحیح دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

می‌دانیم

$a = ۳k \longrightarrow$ حکم ثابت شد

یا

$a = ۳k+۱ \xrightarrow{+۲} a+۲ = ۳k+۳ = ۳(\ldots) = ۳k' \longrightarrow$ حکم ثابت شد

یا

$a = ۳k+۲ \xrightarrow{+۴} a+۴ = ۳k+۶ = ۳(\ldots) = ۳k'' \longrightarrow$ 〃 〃

تمرین (EX / H.W): اگر n عددی صحیح باشد، ثابت کنید $(n^۳ - n)$ مضرب ۳ است.

$$n^۳ - n = n(n^۲ - ۱) = n(n-۱)(n+۱) \longrightarrow \ldots$$

تست حاصل ضرب هر دو عدد صحیح به شکل ۶k+۵ به کدام صورت است؟

۱) ۶k+۱ ✓ ۲) ۶k+۳ ۳) ۶k+۵ ۴) ۶k

$a=۶k+۵$ ، $b=۶k'+۵$ به شکل ۶k+۵ می باشند

$a.b=(۶k+۵).(۶k'+۵)=\underbrace{۳۶kk'+۳۰k+۳۰k'+۲۴}_{۶(\dots)}+۱ = ۶k''+۱$

× $۲۵=۶(\dots)+۱ \rightarrow ۶k+۱$ به شکل

حاصل ضرب هر دو عدد صحیح به شکل ۷k+۴ به چه صورت است؟

$a=۷k+۴$ ، $b=۷k'+۴$

× $۱۶=۷(\dots)+۲ \rightarrow ۷t+۲$ ✓

*نمایش اعداد صحیح به کمک باقی ماندهٔ منفی!! ☺

مثال: نشان دهید هر عدد صحیح به صورت ۳k+۲ ، به شکل ۳k-۱ نیز هست. (k∈Z)

$۳k+۲=۳k+۳-۱=۳(\underbrace{\dots}_{t})-۱ \rightarrow ۳k-۱$ به شکل است

مثال عددی:

$۸=۳k+۲ \quad (k \rightarrow ۲)$

$۸=۳k-۱ \quad (k \rightarrow ۳)$

نتیجه: **هر عدد صحیح به صورت ۳k یا ۳k±۱ است (k∈Z)**

تست مربع عددی که مضرب ۳ نیست، به کدام صورت است؟ (k∈Z)

۱) ۹k+۱
۲) ۳k+۱ ✓
۳) ۳k+۲
۴) ۹k+۲

a مضرب ۳ نیست

$a \rightarrow a \neq ۳k \rightarrow a=۳k\pm۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^۲=۹k^۲\pm۶k+۱ \rightarrow a^۲=۳(\dots)+۱$

● هیچ مربع کاملی به صورت ۳k+۲ نمی باشد.

● هر مربع کاملی که مضرب ۳ باشد، مضرب ۹ نیز هست!!
پس اگر عددی مضرب ۳ باشد و مضرب ۹ نباشد، مربع نیست.

if $a=۳k\pm۱ \rightarrow a^۲=۳(\dots)+۱$ ۳k+۱

if $a=۳k \rightarrow a^۲=۹k^۲$

تست کدام عدد مربع کامل است؟

۱) ۱۲۴۶۱۹ ۲) ۱۲۴۶۰۹ ✓ ۳) ۱۲۴۶۰۱ ۴) ۱۲۴۵۸۴

۱) جمع ارقام = ۲۳ = ۳k+۲ ← مربع نیست

۲) جمع ارقام = ۲۲ = ۳k+۱

۳) جمع ارقام = ۱۴ = ۳k+۲ ← مربع نیست

۴) جمع ارقام = ۲۴ ← مضرب ۳ است اما مضرب ۹ نیست پس مربع نیست!!

هر عدد صحیح به صورت $۶k$ یا $۶k\pm۱$ یا $۶k\pm۲$ یا $۶k\pm۳$ است.

مثال نشان دهید هر عدد صحیح به صورت $۵k$ یا $۵k\pm۱$ یا $۵k\pm۲$ است. $(k\in\mathbb{Z})$

$\left[\frac{۵}{۲}\right]$

می دانیم

$a=۵k$

$a=۵k+۱$

$a=۵k+۲$

$a=۵k+۳=\overbrace{۵k+۵}-۲=۵(\dots)-۲ \rightarrow$ به شکل $۵k-۲$ است

$a=۵k+۴=\underbrace{۵k+۵}-۱=۵(\dots)-۱ \rightarrow$ " $۵k-۱$ "

سراسری ۱۴۰۲ خ مجموع باقی مانده و خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۳ برابر ۱۷ است. احتمال اینکه باقی مانده تقسیم عدد $a-۸$ بر ۳۶ برابر ۲۱ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۱۳}$ ۲) $\frac{۵}{۱۳}$ ۳) $\frac{۴}{۱۳}$ ✓ ۴) $\frac{۳}{۱۳}$

$a=۱۳q+r\ ;\ ۰\le r<۱۳ \rightarrow \boxed{r=۰,۱,۲,\dots,۱۲} \rightarrow$ ۱۳ حالت ممکن

فرض مسئله $q+r=۱۷ \rightarrow r=۱۷-q\ (*)$

$a-۸=۳۶q'+۲۱ \leftarrow$ فرض

$a=۱۳q+۱۷-q=۱۲q+۱۷ \xrightarrow{-۸} a-۸=۱۲q+۹$

$\rightarrow ۱۲q+۹=۳۶q'+۲۱ \rightarrow ۱۲q=۳۶q'+۱۲ \xrightarrow{\div۱۲} q=۳q'+۱ \xrightarrow{(*)} r=۱۷-(۳q'+۱)$

$\rightarrow r=۱۶-۳q'=۱+\underbrace{۱۵-۳q'}=۳(\dots)+۱ \xrightarrow[\text{است}]{\text{به شکل } ۳k+۱} r=۱,۴,۷,۱۰ \rightarrow$ ۴ حالت مطلوب

سراسری مجموعهٔ اعداد طبیعی را به سه مجموعهٔ A، B و C افراز کرده‌ایم. اگر $A=\{n: n=۶k+۱, k\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{n: n=۶k-۱, k\in\mathbb{N}\}$، کدام عدد به مجموعهٔ C تعلق دارد؟

۱) ۱۱ ۲) ۲۹ ۳) ۳۳ ✓ ۴) ۳۷

$(۶k-۱)\in B$ $(۶k-۱)\in B$ $(۶k\pm۳)\in C$ $(۶k+۱)\in A$

سراسری مجموعهٔ اعداد طبیعی را به سه مجموعهٔ A، B و C افراز کرده‌ایم. اگر $A=\{n: n=۷k+۲, k\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{n: n=۷k-۳, k\in\mathbb{N}\}$، کدام دو عدد به یک مجموعه تعلق دارند؟

۱) ۱۳، ۲۱ ✓ ۲) ۱۳، ۲۳ ۳) ۲۱، ۳۲ ۴) ۲۳، ۳۲

$(۷k-۱)\in C$ $(۷k)\in C$ $(۷k+۲)\in A$ ✗ $(۷k-۳)\in B$

چند تذکر در مورد اعداد زوج و فرد

زوج = زوج ± زوج ± … ± زوج ± زوج

$\underbrace{\text{فرد ± … ± فرد ± فرد ± فرد}}_{n\text{تا}} = \begin{cases} \text{زوج} : n \text{ زوج} \\ \text{فرد} : n \text{ فرد} \end{cases}$

فرد = فرد ± زوج

(فرد = a.b.c…) ⟺ (… ∧ فرد = c ∧ فرد = b ∧ فرد = a)

زوج = ○ × زوج

$\begin{cases} a=\text{فرد} \iff a^n=\text{فرد} \\ a=\text{زوج} \iff a^n=\text{زوج} \end{cases} \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

مثال Ex ثابت کنید تفاضل مکعب های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

حل

$(n+۱)^۳-n^۳=\cancel{n^۳}+۳n^۲+۳n+۱-\cancel{n^۳}=۳n^۲+۳n+۱=۳\underbrace{n(n+۱)}_{۲k}+۱$

$=\underbrace{۶k}_{۲(۳k)}+۱=۲\underbrace{(۳k)}_{k'}+۱=۲k'+۱=$ فرد

فرد — زوج

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N}$

تعداد روش‌های انتخاب k شئ از n شئ

نکته حاصل ضرب n عدد صحیح متوالی همواره مضرب $\boxed{n}!$ است.

مثلاً

الف) حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متوالی مضرب ۲ (زوج) است. $\boxed{\forall a \in \mathbb{Z}:\ a(a+1) = \text{زوج}}$

زیرا از هر دو عدد صحیح متوالی همواره یکی زوج است.

ب) حاصل ضرب هر سه عدد صحیح متوالی مضرب ۶ = !۳ است.

اثبات / EX

$$(n+۱)(n+۲)(n+۳) = \frac{۱\times۲\times\cdots\times n\times(n+۱)(n+۲)(n+۳)}{۱\times۲\times\cdots\times n} = \frac{(n+۳)!}{n!} = \underbrace{۳!}_{۶}\times\frac{(n+۳)!}{۳!\,n!}$$

$$= ۶\underbrace{\binom{n+۳}{۳}}_{q\in\mathbb{N}} = ۶q \checkmark$$

سراسری اگر a عددی زوج باشد، $a(a^۲-۴)$ همواره بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟ محدودیت ☺ $a=۲k$

۱) ۱۸

۲) ۳۶

۳) ۴۸ ✓

۴) ۵۴

$$a(a^۲-۴) = ۲k(۴k^۲-۴) = ۸k(k^۲-۱)$$

$$= ۸\underbrace{k(k-۱)(k+۱)}_{\text{ضرب سه عدد متوالی} \to ۶q} = ۴۸q$$

عددگذاری $a=۴ \to$ $۴(۴^۲-۴) = ۴۸$ ☺

نکته دو برابر یک عدد فرد، هیچ‌گاه مربع کامل نیست. خلاصه $\boxed{a = \text{فرد} \Rightarrow ۲a \neq \text{مربع}}$

اثبات (به کمک برهان خلف): فرض می‌کنیم a عددی فرد است. نشان می‌دهیم ۲a مربع کامل نیست.

زیرا اگر ۲a مربع کامل باشد، پس:

$$\overset{\text{زوج}}{۲a} = n^۲ \Rightarrow n^۲ = \text{زوج} \Rightarrow n = \text{زوج} \Rightarrow \boxed{n=۲k}$$

$$\Rightarrow ۲a = (۲k)^۲ \Rightarrow ۲a = ۴k^۲ \xrightarrow{\div ۲} \underline{a = ۲k^۲ = \text{زوج}} \ \times \ \to$$ ۲a مربع کامل نیست

نتیجه: اگر یک عدد زوج را بر ۲ تقسیم کنیم و خارج قسمت فرد شود، آن عدد زوج قطعاً مربع نیست. اما اگر خارج قسمت زوج شود چیزی نمی‌توان گفت

مثال آیا عدد $\underset{\text{زوج}}{\overset{\text{جمع ارقام} = ۲۸ = ۳k+۱}{۲۳۵۸۴۶}}$ مربع کامل است؟ خیر

$$۲۳۵۸۴۶ \div ۲ = \underbrace{۱۱۷۹۲۳}_{\text{فرد}}$$

$$۲۳۵۸۴۶ = ۲\times۱۱۷۹۲۳ = ۲\times\text{فرد} \neq \text{مربع}$$

$$۱۸۴۶۷۰ = ۱۸۴۶۷\times۱۰^۱ \neq \text{مربع}$$

$$۲۶۷۹۰۰۰ = ۲۶۷۹\times۱۰^۳ \neq$$

⇦ به ذهن بسپاریم که

هر عدد طبیعی که به تعداد فرد رقم صفر ختم می‌شود، مربع نیست.

مربع هیچ عددی نمی‌تواند به ارقام ۲، ۳، ۷، ۸ ختم شود.

مثلاً اعداد ۱۹۵۶۸۴۳، ۲۲۵۶۹۳، ۱۵۴۸۹۷، ۴۵۹۶۴۸، ۲۶۷۴۶۰، ۱۸۵۴۰۰۰ هیچ کدام مربع نیستند!!

$$\begin{array}{r} ۵۴۸ \\ \times\ ۵۴۸ \\ \hline \cdots\boxed{۴} \end{array}$$

یکان عدد	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
یکان مربع عدد	۰	۱	۴	۹	۶	۵	۶	۹	۴	۱

مثال EX

الف) ثابت کنید هر عدد صحیح فرد به صورت $۴k+۱$ یا $۴k+۳$ است. $(k\in\mathbb{Z})$

ب) ثابت کنید مربع هر عدد فرد به صورت $۸t+۱$ است. $(t\in\mathbb{Z})$

الف) $\forall a\in\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{در تقسیم بر ۴}} \cancel{\underbrace{a=۴k}_{\text{زوج}}} \vee \boxed{\underbrace{a=۴k+۱}_{\text{فرد}}} \vee \cancel{\underbrace{a=۴k+۲}_{۲(--)=\text{زوج}}} \vee \boxed{\underbrace{a=۴k+۳}_{\text{فرد}}}$

ب) $a=\text{فرد} \xrightarrow{\text{طبق الف}} \begin{cases} a=۴k+۱ \rightarrow a^{۲}=\underbrace{۱۶k^{۲}+۸k}+۱=۸(\underbrace{----}_{t\in\mathbb{Z}})+۱=۸t+۱ \\ \text{یا} \\ a=۴k+۳ \rightarrow a^{۲}=۱۶k^{۲}+۲۴k+\underbrace{۹}_{۸+۱}=۸(\underbrace{....}_{t\in\mathbb{Z}})+۱=۸t+۱ \end{cases}$

راه ۲) $a=۲k+۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^{۲}=\underbrace{۴k^{۲}+۴k}+۱=۴\underbrace{k(k+۱)}_{۲t}+۱=۸t+۱$

نکته مهم EX

مربع هر عدد فرد همواره به صورت $\boxed{۸t+۱}$ ثابت ۱.

خلاصه ← $\boxed{a=\text{فرد} \Rightarrow a^{۲}=۸t+۱}$

مثال عددی: $a=۵ \rightarrow \underbrace{۵^{۲}}_{۲۵}=۸\underset{۳}{t}+۱$

$(۲۹۷۶۵۳)^{۲}$ | ۸

⋮

۱

به عبارت دیگر:

ثابت: باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر عدد ۸ همواره برابر ۱ است.

توجه عکس نکته بالا لزوماً درست نیست. به عبارت دیگر هر عددی که به صورت $۸t+۱$ می‌باشد لزوماً مربع نیست.

مثال عددی: $۱۷=۸\underset{۲}{t}+۱$ ← مربع نیست

سراسری: اگر a و b اعدادی فرد باشند، آنگاه بزرگترین عددی که $a^{۴}-b^{۴}$ همواره بر آن بخش‌پذیر می‌باشد کدام است؟ ☺ محدودیت

۱) ۸ ۲) ۱۶ ✓ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

$\begin{cases} a=\text{فرد} \rightarrow a^{۲}=۸t+۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^{۴}=۶۴t^{۲}+۱۶t+۱ \\ b=\text{فرد} \rightarrow b^{۲}=۸t'+۱ \xrightarrow{''} b^{۴}=۶۴t'^{۲}+۱۶t'+۱ \end{cases}$

$a^{۴}-b^{۴}=۶۴t^{۲}+۱۶t-۶۴t'^{۲}-۱۶t'=۱۶(....) \rightarrow$ مضرب ۱۶

فرد

مربع $\Rightarrow ۸t+۱$

$P\Rightarrow q \equiv \sim q\Rightarrow \sim P$

نتیجه:

~~$۸t+۱ \Rightarrow$ مربع~~

هر عدد فردی که به صورت $۸t+۱$ نباشد، مربع نیست.

(اگه به صورت $۸t+۱$ باشد، چیزی نمی‌توان گفت)

مثال آیا عدد ۱۹۷۴۶$\boxed{۳۲۵}$ مربع کامل است؟ خیر

جمع ارقام $=۳۷=۳k+۱$

فرد

بررسی می‌کنیم این عدد فرد، به صورت $۸t+۱$ هست یا نه.

۳۲۵ | ۸
۳۲۰ | ۴۰
۵

$\rightarrow ۸t+۵ \rightarrow$ به شکل $۸t+۱$ نیست $\rightarrow$ مربع نیست

بخش پذیری (تقسیم پذیری)

تعریف: عدد صحیح a بر عدد صحیح $b\neq 0$ بخش پذیر است هرگاه عددی صحیح مانند q یافت شود که $\boxed{a=b.q}$
Ex
$(r=0)$

قرارداد: صفر بر صفر بخش پذیر است
زیرا

مثلاً ۱۲ بر ۴ بخش پذیر است. زیرا $۱۲=۴\underbrace{(۳)}_{q\in Z}$

۱۲ بر ۵ بخش پذیر نیست. زیرا $۱۲=۵\underbrace{(?)}_{q\notin Z}$

نماد بخش پذیری

$$b \mid a$$

a بر b بخش پذیر (تقسیم پذیر) است.
a مضرب b است.

b شمارنده (مقسوم علیه) a است.
b سازه (عامل) a است.
b ، a را می شمارد (عاد می کند).

مثال عددی

$۲۱ \mid ۸۴ \longleftrightarrow$

$۵! \mid ۷! \longleftrightarrow$

$۳^{۵} \mid ۳^{۹} \longleftrightarrow$

مثال
Ex
اگر a ، b ، c و d چهار عدد صحیح غیر صفر باشند، از تساوی $ac=bd$ ، شش رابطهٔ عاد کردن نتیجه بگیرید.

بحث شهودی

مثال عددی

ویژگی های بخش پذیری

① صفر بر هر عدد صحیح بخش پذیر است.

به عبارت دیگر ☐ ← صفر مضرب همه اعداد صحیح است. که همه اعداد صحیح، شمارنده (مقسوم علیه) صفرند.

نتیجه: مجموعهٔ مقسوم علیه‌های صفر، برابر $\mathbb{Z}$ است.

② هر عدد صحیح بر ۱ و ۱- بخش پذیر است. یعنی ☐

③ هر عدد صحیح بر خودش و قرینه‌اش بخش پذیر است. یعنی ☐

نتیجه: هر عدد صحیح (مخالف ±۱)، دست کم چهار شمارنده دارد. (۱ و ۱- و خودش و قرینه‌اش)

$$\forall a\in\mathbb{Z}:\ D(a)=\{\pm 1, \dots, \pm a\}$$

④ EX اگر $a|b$، آنگاه ◁

الف) $\boxed{-a|b}$

مثال عددی

۳|۶ → -۳|۶

۲|۶ → -۲|۶

→ D(۶)={±۱, ±۲, ±۳, ±۶}

$x\in D(a) \Leftrightarrow -x\in D(a)$

ب) $\boxed{a|-b}$

مثال عددی

۳|۶ → ۳|-۶

۲|۶ → ۲|-۶

⋮

مجموعهٔ شمارنده‌های دو عدد قرینه، برابر است.

$\forall a\in\mathbb{Z}:\ D(a)=D(-a)$

پ) $\boxed{-a|-b}$

مثال عددی

۳|۶ → -۳|-۶

اثبات

⑤ EX

$$\boxed{a|b \xrightarrow[b\neq 0]{a\neq 0} |a|\leq|b|}$$

مثال عددی
$$\begin{cases} ۳|۶ \longrightarrow ۳\leq ۶ \ \checkmark \\ ۳|-۶ \longrightarrow ۳\leq |-۶| \ \checkmark \end{cases}$$

اثبات:

$$a|b \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} b=aq \xrightarrow[b\neq 0]{a\neq 0} q\neq 0$$

$$\longrightarrow |q|\geq 1 \xrightarrow{|a|\times} \underbrace{|a||q|}_{|b|}\geq |a|$$

تذکر
$$a|b \not\rightarrow b|a$$

مثال عددی

⑥ EX

( )

اثبات:

$$\begin{cases} a|b \longrightarrow \\ b|a \longrightarrow \end{cases}$$

مثال اگر a عددی صحیح باشد، نشان دهید:

الف) $\underset{(a\neq 0)}{a|1} \Longleftrightarrow a=\pm 1$ ب) $0|a \Longleftrightarrow a=0$

⑦ EX خاصیت تعدی بخش‌پذیری

( )

اثبات

مثال عددی

⑧ EX ([illegible])

الف) $a|b \xrightarrow{\forall k\in\mathbb{Z}} a|kb$

ب) $a|b \xrightarrow{\forall n\in\mathbb{N}} a|b^n$

مثال عددی

:) :)

اثبات الف
$$a|b \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} b=aq \xrightarrow{\times k\in\mathbb{Z}} kb=a(\underbrace{kq}_{q'\in\mathbb{Z}}) \rightarrow a|kb$$

اثبات (ب)
$$b=aq \xrightarrow{\text{توان } n} b^n=a^nq^n=a^1.\underbrace{a^{n-1}.q^n}_{q'\in\mathbb{Z}} \rightarrow a|b^n$$

تذکر عکس نکته‌ی فوق لزوماً درست نیست. یعنی

$$\begin{cases} a|kb \not\rightarrow a|b \\ a|b^n \not\rightarrow a|b \end{cases}$$

مثال عددی

مثال عددی

حالت خاص

:) :)

⑨ EX دو طرف بخش‌پذیری را می‌توان در هر عدد صحیح ضرب کرد یا به توان هر عدد طبیعی رساند و برعکس.

الف) $a|b \xrightarrow[(k\neq 0)]{\forall k\in\mathbb{Z}} ka|kb$

ب) $a|b \xleftrightarrow{\forall n\in\mathbb{N}} a^n|b^n$

مثال عددی

اثبات الف
$$a|b \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{q\in\mathbb{Z}}} b=a.q \underset{\div k\neq 0}{\overset{\times k\in\mathbb{Z}}{\rightleftarrows}} kb=ka.q \rightleftarrows ka|kb$$

اثبات (ب)
$$b=aq \xrightarrow[n\in\mathbb{N}]{\text{توان } n} b^n=a^n.\underbrace{q^n}_{q'\in\mathbb{Z}} \rightarrow a^n|b^n$$

تست اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $20|a$ و $a|300$ ، آن‌گاه برای a چند جواب وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸

۳) ۱۲ ۴) ۱۶

«بررسی توان‌های مختلف در عاد کردن»

سؤال / EX

الف) اگر $a|b$ ، آیا $a^2|b^3$ ؟

ب) اگر $a^2|b^3$ ، آیا $a|b$ ؟

اثبات / EX

سؤال / EX

الف) اگر $a|b$ ، آیا $a^3|b^2$ ؟

ب) اگر $a^3|b^2$ ، آیا $a|b$ ؟

نکته

$a^m|b^n \Rightarrow a^i|b^j$ برقرار است هرگاه

تست اگر $a^7|b^4$ ، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

۱) $a^2|b^3$

۲) $a^5|b^2$

۳) $a^8|b^5$

۴) $a^4|b^3$

⑮ دو طرف دو یا چند رابطهٔ بخش‌پذیری را می‌توان

$$\begin{cases} a_1 | b_1 \\ a_2 | b_2 \\ \vdots \\ a_n | b_n \end{cases} \Rightarrow (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n) \,|\, (b_1 \cdot b_2 \cdots b_n)$$

مثال عددی

مثال Ex اگر $a|b$ و $c|d$ ، نشان دهید $ac|bd$.

$$a|b \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} b = a.q$$
$$c|d \xrightarrow{q' \in \mathbb{Z}} d = c.q'$$
$$\xrightarrow{\times} bd = ac(\underbrace{q q'}_{q'' \in \mathbb{Z}}) \Rightarrow bd = (ac).q'' \Rightarrow ac|bd$$

مثال Ex آیا از این که $a|b$ و $c|d$ ، می‌توان نتیجه گرفت $(a \pm c)|(b \pm d)$ ؟

⑯ اگر عددی بر حاصل ضرب چند عدد صحیح بخش‌پذیر باشد، آن گاه ...

$$(a.b.c\ldots)|n \Rightarrow (a|n \wedge b|n \wedge c|n \wedge \ldots)$$

مثال عددی

$$\underbrace{(۲\times۳\times۴)}_{۲۴}|۴۸ \rightarrow \begin{cases} ۲|۴۸ \checkmark \\ ۳|۴۸ \checkmark \\ ۴|۴۸ \checkmark \end{cases}$$

تذکر : عکس نکتهٔ فوق لزوماً درست نیست. یعنی

(ن)

مثال عددی

حالت خاص :

EX ⑫ خیلی مهم

مثال عددی

$$(a|b \wedge a|c) \Rightarrow (a|(b\pm c) \wedge a|b.c)$$

اثبات

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} b=a.q \\ a|c \xrightarrow{q'\in\mathbb{Z}} c=a.q' \end{cases} \rightarrow b\pm c=a(\underbrace{q\pm q'}_{q''\in\mathbb{Z}}) \rightarrow a|b\pm c \quad , \quad b.c=a\underbrace{q.aq'}_{q_1\in\mathbb{Z}} \rightarrow a|b.c$$

تذکر۱ عکس نکته فوق لزوماً درست نیست.

$$\begin{cases} a|(b\pm c) \not\Rightarrow \begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \xrightarrow{\text{مثال نقض}} \\ a|b.c \not\Rightarrow \begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \xrightarrow{\text{مثال عددی}} \end{cases}$$

حالت خاص

تذکر۲ ویژگی ۱۲ قابل تعمیم است . به عبارت دیگر

$$\begin{cases} a|b_1 \\ a|b_2 \\ \vdots \\ a|b_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a|(b_1\pm b_2\pm\cdots\pm b_n) \\ a|(b_1.b_2\cdots b_n) \end{cases}$$

تذکر۳: اگر عددی ، مجموع یا تفاضل دو عدد صحیح را بشمارد ، یا هر دو را می‌شمارد یا هیچ کدام را .

$$a|(b\pm c) \Rightarrow [(a|b \wedge a|c) \vee (a\nmid b \wedge a\nmid c)]$$

تذکر۴ EX

اثبات :

مثال عددی

تذکر۵ EX در یک رابطه‌ی بخش‌پذیری همواره می‌توان مضرب دلخواهی از سمت چپ را به سمت راست اضافه یا کم کرد.

$$a|b \xrightarrow{\forall k\in\mathbb{Z}} a|ka\pm b$$

مثال EX ثابت کنید اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، آن گاه باقی مانده نیز همواره بر n بخش‌پذیر است .

مثال / EX اگر $a>۱$ و $a \mid ۹k+۴$ و $a \mid ۵k+۳$ ، ثابت کنید a عددی اول است .

مثال / EX اگر $a \in \mathbb{N}$ و $a \mid ۶m+۵$ و $a \mid ۴m+۷$ ، آن‌گاه a ها را بیابید.

تست / EX اگر $a \neq ۰$ عددی صحیح و دو عدد $(۶m+۵)$ و $(۷m+۶)$ بر a بخش‌پذیر باشند، آن‌گاه

۱) $a=\pm ۱$
۲) $a=\pm ۳$
۳) $a=\pm ۲$
۴) $a=\pm ۲, \pm ۳$

تست اگر $a \mid ۳m-۲n$ و $a \mid ۷m+۳n$ ، آن‌گاه برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟ (m و n نسبت به هم اولند)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

نکته

تمرین: / H.W / EX اگر n عددی صحیح باشد، ثابت کنید $۳ \mid n^۳-n$

تست / EX اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b \mid a+۲$ ، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(a^۲+b^۲+۳)$ بر ۸ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

تست اگر a ، b و c سه عدد طبیعی باشند و $a|b+c$ و $b|a$ ، آن‌گاه کدام گزینه درست نیست؟

۱) $b|c$ ۲) $b|a-c$

۳) $a|c$ ۴) $a|b^۲+bc$

مثال اگر $a+b|a$ ، نشان دهید $a+b|۵a+۳b$

توجه :

تمرین H.W اگر $۳a+۴b|۵a+۹b$ ، ثابت کنید $۳a+۴b$ همواره $۲۱b$ را عاد می‌کند.

مثال Ex اگر $k\in Z$ و $۵|۴k+۱$ ، ثابت کنید $۲۵|۱۶k^۲+۲۸k+۶$

سراسری ۹۶ خ Ex اگر عدد طبیعی به صورت $۲n+۱$ بر ۵ بخش پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی $۱۴n^۲+۱۹n+۶$ بر ۲۵ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

تست H.W اگر از $۸|۳n+۵$ ، بتوان $۶۴|۱۵n^۲+an+۱۵$ را نتیجه گرفت، آن‌گاه a کدام عدد می‌تواند باشد؟

(گزینه ۳)

۱) ۲۲ ۲) ۲۴

۳) ۳۲ ۴) ۴۲

تست اگر $a \mid ۳n^{۲}-۱$ و $a \mid ۵n+۴$ ، در این صورت برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

تست H.W اگر $a \mid ۳n+۵$ و $a \mid ۳n^{۲}-۲n+۶$ ، آن‌گاه مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار طبیعی a کدام است؟

(گزینه ۳)

۱) ۵
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۱۲

تست اگر $(n+۱)^{۲} \mid ۳n+۷$ ، آن‌گاه برای n چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

تست اگر $13 \mid 2a-3b+1$ و $13 \mid a+5b+k$ ، آن‌گاه کوچک‌ترین مقدار طبیعی k کدام است؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۸

سراسری به ازای چند مقدار طبیعی a ، عدد a^2+2 بر $a+2$ بخش‌پذیر است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) هیچ

توجه :

تست اگر $a-2 \mid 3a^2-2a+1$ ، آن‌گاه برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

تست اگر کسر $\frac{3a^2-2a+1}{a-2}$ برابر با یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

تست روی منحنی تابع $3x^2-xy-2x+2y+1=0$ چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

سراسری ۱۴۰۱ نقاط (a,b) روی منحنی $y=\frac{3x-1}{x+2}$ قرار دارند. اگر $a,b\in\mathbb{Z}$ باشند، چند نقطه با این ویژگی روی این منحنی قرار دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

یادآوری

الف) $(a-b) \mid (a^n-b^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

زیرا $a^n-b^n=(a-b)\underbrace{(\dots)}_{q\in\mathbb{Z}}$

ب) $(a+b) \mid (a^n-b^n)$ زوج $n\in\mathbb{N}$

مثلاً اتحادهای مزدوج $a^2-b^2=(a+b)(\dots)$

ج) $(a+b) \mid (a^n+b^n)$ فرد $n\in\mathbb{N}$

مثلاً اتحادهای چاق و لاغر $a^3+b^3=(a+b)(\dots)$

تست کدام گزینه درست است؟

۱) $(a+b) \mid \underbrace{(a+b)^2-2ab}_{a^2+b^2}$ (ن)

۲) $(a+b) \mid \overbrace{(a+b)^3-3a^2b-3ab^2}^{a^3+b^3}$ ✓

۳) $(a+b) \mid \underbrace{(a-b)^2+2ab}_{a^2+b^2}$ (ن)

۴) $(a+b) \mid \underbrace{(a-b)^3+3a^2b-3ab^2}_{a^3-b^3}$ (ن)

تست عدد $a^{12}+1$ بر کدام یک همواره بخش پذیر است؟

۱) a^2+1 ۲) a^3+1 ۳) a^4+1 ✓ ۴) a^6+1

$a^{12}+1=a^{4\times3}+1=(a^4)^3+1^3$

$\boxed{a^4+1 \mid (a^4)^3+1^3}$

$a^2+1 \mid a^{12}+1 \to \frac{12}{2}=$ زوج ✗

$a^3+1 \mid a^{12}+1 \to \frac{12}{3}=$ زوج ✗

$a^4+1 \mid a^{12}+1$ $\frac{12}{4}=$ فرد

نکته

$a^k+b^k \mid a^n-b^n$ درست است هرگاه $\frac{n}{k}=$ زوج

$a^k+b^k \mid a^n+b^n$ درست است هرگاه $\frac{n}{k}=$ فرد

$a^k-b^k \mid a^n-b^n$ " " " $\frac{n}{k}\in\mathbb{Z}$

تست عدد $a^{36}-1$ بر کدام یک همواره بخش پذیر نیست؟

۱) a^9-1 ۲) a^9+1 ۳) a^4-1 ۴) a^4+1 ✓

$a^4+1 \mid a^{36}-1$ $\frac{36}{4}=$ فرد ✗

$a^4-1 \mid a^{36}-1$ ✓ $\frac{36}{4}\in\mathbb{Z}$

$a^9+1 \mid a^{36}-1$ ✓ $\frac{36}{9}=$ زوج

$a^9-1 \mid a^{36}-1$ ✓ $\frac{36}{9}\in\mathbb{Z}$

تمرین H.W نشان دهید $45 \mid 7^{1398}-2^{1398}$

$\overbrace{7-2}^{5}$, $\underbrace{7+2}_{9}$ $\mid 7^{\overset{زوج}{1398}}-2^{\overset{زوج}{1398}}$

$$\begin{cases}\underbrace{7-2}_{5} \mid 7^{1398}-2^{1398}\\ \underbrace{7+2}_{9} \mid 7^{1398}-2^{1398}\end{cases}$$

سراسری مجموعه $\{n\in N : n<100 , 65|2^n+1\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷

۳) ۸ ۴) ۹

$65|2^n+1 \longrightarrow 2^6+1|2^n+1 \longrightarrow \frac{n}{6}$ = فرد $=2t+1$

شبیه سمت راست در می آید

$a^k+b^k|a^n+b^n$

$\frac{n}{k}$ = فرد

$\longrightarrow \boxed{n=12t+6}$

$\xrightarrow{n<100} 12t+6<100 \to t<\frac{94}{12}\simeq 7,...$

$\xrightarrow{t\in Z} t=7,6,...,1,0 \longrightarrow$ ۸ جواب ✓

تست ۱۴۰۳ مجموعه $\{n\in N : 82|3^n-1\}$ چند عضو دورقمی دارد؟

(گزینه ۳)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱

۳) ۲۳ ۴) ۲۵

$a^k+b^k|a^n-b^n$

($\frac{n}{k}$ = زوج)

$3^4+1|3^n-1$

$\longrightarrow \frac{n}{4}=\underset{\text{زوج}}{2t} \longrightarrow \boxed{n=8t}$

$\xrightarrow{10\le n\le 99} 10\le 8t\le 99 \longrightarrow ...$

تست اگر $n\in N$ و $n<200$ ، چند مقدار n ، در رابطه $35|3^n-2^n$ صدق می‌نماید؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱

۳) ۳۲ ۴) ۳۳ ✓

$3^3+2^3|3^n-2^n \longrightarrow \frac{n}{3}=\overset{\text{زوج}}{2t} \longrightarrow \boxed{n=6t}$

$\xrightarrow{n<200} 6t<200 \to t<\frac{200}{6}\simeq 33,... \xrightarrow{t\in N} \underline{t=1,2,...,33}$

ریشه ای بودم در خواب خاک های متبرک با باران در نگاه تو سبز شدم

برق از چشمانم برخاست نگاهم بارانی شد

تو با چشمانت مرا بنواز با تو خواهم ماند و با تو خواهم خواند ...

اعداد اول ← Prime «اولیه»

EX تعریف- عدد طبیعی (p>1) را اول می‌گوییم هرگاه جز بر ۱ و بر خودش بر هیچ عدد طبیعی دیگری بخش‌پذیر نباشد:

$$\underset{\text{طبیعی}}{a}\,|\,\underset{\text{اول}}{p} \Longrightarrow (a=1 \lor a=p)$$

مثلاً اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ... اول‌اند.

۲ تنها عدد زوج اول است و سایر اعداد اول فردند.

(۲ و ۳ تنها دو عدد اول متوالی‌اند)

سراسری تعداد اعداد اول کوچکتر از ۵۰۰

۱) ۲۵۰ است. ۲) بیشتر از ۲۵۰ است.

۳) بین ۲۵۰ و ۳۰۰ است. ۴) کمتر از ۲۵۰ است. ✓

اعداد طبیعی تا ۵۰۰

۲۵۰ تا زوج اند $\xrightarrow{\text{به جز ۲}}$ اول نیستند

۲۵۰ تا فرد ند ⟶ بعضی از اعداد فرد، اولند

(تعداد اعداد اول بین ۱ تا n $< \frac{n}{2}$)

تست اگر حاصل‌ضرب تمام اعداد اول بین ۱۰۰ و ۲۰۰ را با عدد یک جمع کنیم،

۱) عدد حاصل عامل اولی بین ۱۰۰ و ۲۰۰ دارد. ۲) عدد حاصل به صورت 2^n است.

۳) عدد حاصل عامل اولی کوچکتر از ۱۰۰ دارد. ✓ ۴) عدد حاصل یک عدد اول است.

تمام اعداد اول بین ۱۰۰ و ۲۰۰ همگی فردند ⟶ حاصل‌ضرب آنها فرد است $\xrightarrow{+1}$ عدد حاصل زوج است ⟶ ۲K ⟶ عدد حاصل عامل ② دارد. ← عدد اول کوچکتر از ۱۰۰

تست مجموع دو عدد اول متمایز ۹۹ است. حاصل‌ضرب این دو عدد کدام است؟

۱) ۷۴ ۲) ۱۴۶ ۳) ۱۹۴ ✓ ۴) ۲۰۲

$p \neq q$

$$\underset{\text{اول}}{p}+\underset{\text{اول}}{q}=\underbrace{99}_{\text{فرد}} \longrightarrow \begin{cases} p=\text{زوج} \xrightarrow{\text{اول}} \boxed{p=2} \\ q=\text{فرد} \longrightarrow \boxed{q=97} \end{cases} \longrightarrow p\times q=2\times 97=194\ ✓$$

سراسری اگر n عددی طبیعی باشد، تعداد اعداد اول بزرگتر از ۱ + !(۲n) و کوچکتر از ۲n + !(۲n) کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بیشتر از ۲ ۴) هیچ ✓

$$(2n)!+1 < \dots < (2n)!+2n$$

$$(2n)! = 1\times2\times3\times\dots\times(2n-1)\times(2n)$$

$$\underbrace{(2n)!+2}_{2(\dots)},\ \underbrace{(2n)!+3}_{3(\dots)},\ \dots,\ \underbrace{(2n)!+(2n-1)}_{(2n-1)(\dots)}$$

مضرب ۲ (اول نیست) | مضرب ۳ (اول نیست) | (2n-1) مضرب ⟶ اول نیست

تمرین H.W چند عدد اول مانند p وجود دارد که p، p+4 و p+8 هر سه اول باشند؟

مقداردهی

$P=2 \longrightarrow 2, 6, 10$ ✗

$P=3 \longrightarrow \boxed{3, 7, 11}$ ✓

نشان می‌دهیم به ازای $P>3$، هر سه عدد مذکور اول نخواهد بود

$$\underset{\text{اول}}{P>3} \longrightarrow P \neq 3k \longrightarrow \begin{cases} P=3k+1 \longrightarrow \\ \text{یا}\\ P=3k+2 \longrightarrow \end{cases}$$

مثال (EX) نشان دهید هر عدد اول بزرگتر از ۳ به صورت $\underbrace{۶k+۱ \text{ یا } ۶k+۵}_{۶k\pm۱}$ است $(k\in\mathbb{Z})$.

$$P>۳ \text{ اول} \xrightarrow{\text{در تقسیم بر ۶}} \underbrace{P=۶k}_{\text{مضرب ۶ (اول نیست)}} \vee \boxed{P=۶k+۱} \vee \underbrace{P=۶k+۲}_{۲(\dots) \text{ مضرب ۲ (اول نیست)}}$$

$$\vee \underbrace{P=۶k+۳}_{\substack{۳(\dots)\\ \text{اول نیست}}} \vee \underbrace{P=۶k+۴}_{\substack{۲(\dots)\\ \text{اول نیست}}} \vee \boxed{P=۶k+۵}$$

$$P>۳ \text{ اول} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} P=۶k\pm۱$$

مثال اگر $P>۳$ عددی اول باشد، ثابت کنید $۲۴ \mid P^۲-۱$.

$$P>۳ \xrightarrow{\text{می‌دانیم}} P=۶k\pm۱ \longrightarrow P^۲=\underbrace{۳۶k^۲\pm۱۲k}+۱ \longrightarrow P^۲-۱=۱۲(\underbrace{۳k^۲\pm k}_{۲q})$$

$$\longrightarrow P^۲-۱=۲۴q \longrightarrow ۲۴ \mid P^۲-۱$$

$$\hookrightarrow P^۲=۲۴q+۱$$

$$\left(\begin{array}{l} k=\text{زوج} \rightarrow \underbrace{۳k^۲}_{\text{زوج}} \pm \underbrace{k}_{\text{زوج}} = \text{زوج} \\ \text{یا} \\ k=\text{فرد} \rightarrow \underbrace{۳k^۲}_{\text{فرد}} \pm \underbrace{k}_{\text{فرد}} = \text{زوج} \end{array} \right)$$

$$P>۳ \Rightarrow P^۲=۲۴q+۱$$

باقیمانده تقسیم مربع هر عدد اول بزرگتر از ۳، بر ۲۴، برابر ۱ است.

تست (H.W) اگر a عددی اول و دو رقمی باشد، آن گاه عدد $۲a^۲-۲$ بر کدام یک بخش پذیر نیست؟ (گزینه ۴)

۱) ۲۴ ۲) ۴۸

۳) ۱۶ ۴) ۳۲

$a>۳$ اول

$$۲(۲۴q+۱)-۲=$$

نکته ۱ برای عدد اول P و اعداد طبیعی a و b:

$$\boxed{P=ab \xrightarrow{a<b} (a=۱ \wedge b=P)}$$

تست اگر P عددی اول و x و y دو عدد طبیعی باشند به طوری که $P+y^۲=x^۲$، در این صورت $x+y$ کدام است؟

۱) $P-۱$ ۲) P ✓

۳) $P+۱$ ۴) ۱

$$P=x^۲-y^۲ \rightarrow \underset{\text{اول}}{P}=(\underbrace{x-y}_{۱})(\underbrace{x+y}_{P})$$

نکته ۱

$$x^۲-y^۲=\underset{\text{اول}}{P} \Rightarrow x-y=۱ \Rightarrow \text{x و y دو عدد متوالی‌اند}$$

نکته ۲

$$x^۲-y^۲=\underset{\text{اول}}{P} \Rightarrow \begin{cases} x+y=P \\ x-y=۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} x=\frac{P+۱}{۲} \ , \ y=\frac{P-۱}{۲}$$

تذکر عددی که اول نباشد، مرکب (تجزیه پذیر) است. (عدد ۱ نه اول است و نه مرکب) 😮

مثال: اگر x و y اعداد طبیعی باشند و $x^۲-y^۲=۴۱$، آنگاه x و y را بیابید.

$$\text{دستگاه} \begin{cases} x-y=۱ \\ x+y=۴۱ \end{cases} \longrightarrow x=۲۱ \ , \ y=۲۰$$

تذکر ۲: طرز تشخیص اول بودن یک عدد طبیعی ← اگر یک عدد طبیعی بر هیچ یک از اعداد اول کوچکتر یا مساوی جذرش بخش پذیر نباشد، اول است. در غیر این صورت مرکب است.

مثال: آیا عدد ۱۲۷ اول است؟

$$\sqrt{۱۲۷} \simeq ۱۱,... \xrightarrow{\text{اعداد اول کوچکتر یا مساوی}} ۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱$$

۱۲۷ بر هیچ کدام بخش پذیر نیست ← (۱۲۷) اول است

تذکر ۳ (تجزیه استاندارد) ← تمام پایه‌ها اعدادی اول باشند و هیچ کدام از پایه‌ها تکرار نشوند.

مثال عددی

$۱۲ = ۳ \times ۴$ استاندارد نیست

$۱۲ = ۳ \times ۲ \times ۲$ استاندارد نیست

$۱۲ = ۳^۱ \times ۲^۲$ استاندارد است ✓

نکته ۲: عدد طبیعی $n = p_۱^{\alpha_۱} \cdot p_۲^{\alpha_۲} \dots p_k^{\alpha_k}$ (تجزیه استاندارد) مربع کامل است اگر و تنها اگر تمام $\{\alpha_i\}$ اعداد زوج باشند.

مثال عددی

$n = ۲^۴ \times ۳^۲ \times ۵^۶ =$ مربع

$n = ۲^۴ \times ۳^۳ \times ۵^۸ \neq$ مربع

مثال کوچکترین عدد طبیعی که باید در عدد $۶ \times ۸^۲ \times ۲^۳ \times ۱۵^۳$ ضرب کرد تا حاصل مربع کامل شود را بیابید:

$$۱۵^۳ \times ۲^۳ \times ۸^۲ \times ۶ = (۳^۳ \times ۵^۳) \times ۲^۳ \times (۲^۳)^۲ \times (۲^۱ \times ۳^۱) = \underbrace{۲^{۱۰} \times ۳^۴}_{ok} \times \underbrace{۵^۳}_{?} \xrightarrow{\times ۵} \text{مربع}$$

جواب ۵

مثال کوچکترین عدد طبیعی a را بیابید که مربع آن بر ۱۲۰ بخش پذیر باشد.

$$۱۲۰ \mid a^۲ \xrightarrow{\text{تجزیه}} ۲^۳ \times ۳^۱ \times ۵^۱ \mid a^۲ \xrightarrow[q \in \mathbb{Z}]{\text{تعریف}} \underbrace{a^۲}_{\text{مربع}} = \underbrace{۲^۳ \times ۳^۱ \times ۵^۱ \times q}_{\text{باید مربع باشد}} \longrightarrow q = ۲ \times ۳ \times ۵ \times k^۲$$

$$\rightarrow a^۲ = ۲^۴ \times ۳^۲ \times ۵^۲ \times k^۲$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} a = \underbrace{۲^۲ \times ۳ \times ۵}_{۶۰} \times k \xrightarrow{k=۱} \boxed{\min(a) = ۶۰}$$

راه تستی

$$\boxed{(p_۱^{\alpha_۱} \cdot p_۲^{\alpha_۲} \cdot p_۳^{\alpha_۳} \dots) \mid a^n \rightarrow (p_۱^{\lceil \frac{\alpha_۱}{n} \rceil} \cdot p_۲^{\lceil \frac{\alpha_۲}{n} \rceil} \cdot p_۳^{\lceil \frac{\alpha_۳}{n} \rceil} \dots) \mid a}$$

در مثال بالا

$$۱۲۰ \mid a^۲ \xrightarrow{\text{تجزیه}} ۲^۳ \times ۳^۱ \times ۵^۱ \mid a^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} ۲^{\lceil \frac{۳}{۲} \rceil} \times ۳^{\lceil \frac{۱}{۲} \rceil} \times ۵^{\lceil \frac{۱}{۲} \rceil} \mid a$$

$$\rightarrow \underbrace{۲^۲ \times ۳^۱ \times ۵^۱}_{۶۰} \mid a \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}]{\text{تعریف}} a = ۶۰k \xrightarrow{k=۱} \min(a) = ۶۰ \checkmark$$

$[x] = \lfloor x \rfloor =$ اولین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x

براکت (جزء صحیح) — کف

سقف $\lceil x \rceil =$ اولین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی x

تست اگر $۱۳۵|a^۲$ و $۱۱۲|b^۳$ ، آن‌گاه کمترین مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲۹
۲) ۵۳
۳) ۷۳
۴) ۷۹

$$۱۳۵|a^۲ \xrightarrow{\text{تجزیه}} ۵^۱\times۳^۳|a^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} ۵^{\lceil\frac{۱}{۲}\rceil}\times۳^{\lceil\frac{۳}{۲}\rceil}|a \to \underbrace{۵^۱\times۳^۲}_{۴۵}|a \to \min(a)=۴۵$$

$$۱۱۲|b^۳ \xrightarrow{\text{تجزیه}} ۲^۴\times۷^۱|b^۳ \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} ۲^{\lceil\frac{۴}{۳}\rceil}\times۷^{\lceil\frac{۱}{۳}\rceil}|b \to \underbrace{۲^۲\times۷^۱}_{۲۸}|b \to \min(b)=۲۸$$

$$\xrightarrow{+} ۷۳$$

سراسری مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی a که مضرب ۱۱ بوده و مربع آن بر ۳۱۵ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۲ ✓
۴) ۱۳

$$۳۱۵|a^۲ \xrightarrow{\text{تجزیه}} ۳^۲\times۵^۱\times۷^۱|a^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} ۳^۱\times۵^{\lceil\frac{۱}{۲}\rceil}\times۷^{\lceil\frac{۱}{۲}\rceil}|a$$

$$\to \underbrace{۳^۱\times۵^۱\times۷^۱}_{۱۰۵}|a \xrightarrow[(k\in\mathbb{Z})]{\text{تعریف}} a=۱۰۵k$$

$$\xrightarrow{\text{تعداد دهی } k=۱۱} \min(a)=۱۰۵\times۱۱=۱۱۵۵ \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} ۱۲ ✓$$

تست H.W چند عدد طبیعی a چهاررقمی وجود دارد که مضرب ۱۳ بوده و مکعب آن بر ۲۰۲۵ بخش‌پذیر باشد؟

(گزینه ۲)

۱) ۱۵
۲) ۱۶
۳) ۱۷
۴) ۱۸

$$۲۰۲۵|a^۳ \xrightarrow{\text{تجزیه}} \dots$$

تست چند عدد طبیعی a سه‌رقمی وجود دارد که دوازده برابر آن مربع کامل باشد؟

۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۱۳

$$۱۲a = \text{مربع} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \underbrace{۲^۲}_{\text{مربع}}\times \underbrace{۳\times a}_{\text{باید مربع باشد}} = \text{مربع} \Rightarrow ۳a=\text{مربع} \Rightarrow \boxed{a=۳k^۲}$$

$$\xrightarrow{۱۰۰\leq a\leq ۹۹۹} ۱۰۰\leq ۳k^۲\leq ۹۹۹ \xrightarrow{\div ۳} ۳۳,\dots\leq k^۲\leq ۳۳۳$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} ۵,\dots\leq k\leq ۱۸,\dots \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=۶,۷,\dots,۱۸ \to ۱۳ \text{ تا} ✓$$

تست H.W (گزینه ۳) چند عدد طبیعی a سه‌رقمی وجود دارد که مربع آن مضرب ۱۲ باشد؟ ۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۱۸۰

$$۱۲|a^۲ \xrightarrow{\text{تجزیه}} \dots$$

سراسری ۱۴۰۰ — تعداد اعداد طبیعی پنج رقمی مضرب ۱۸ که مربع کامل هستند کدام است؟ $(\sqrt{۱۰} \simeq ۳/۱۶)$

۱) ۳۵
۲) ۳۶ ✓
۳) ۳۷
۴) ۳۸

$$\begin{cases} a = \text{مربع} \\ a = ۱۸q \end{cases} \rightarrow ۱۸q = \text{مربع} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \underbrace{۳^۲}_{\text{مربع}} \times \underbrace{۲ \times q}_{\text{باید مربع باشد}} = \text{مربع} \rightarrow ۲q = \text{مربع}$$

$$\rightarrow q = ۲k^۲ \Rightarrow \boxed{a = ۱۸(۲k^۲) = ۳۶k^۲}$$

$$\xrightarrow{۱۰۰۰۰ \leqslant a < ۱۰۰۰۰۰} ۱۰۰۰۰ \leqslant ۳۶k^۲ < ۱۰۰۰۰۰ \xrightarrow{\text{جذر}} ۱۰۰ \leqslant ۶k < \overbrace{۱۰۰\underbrace{\sqrt{۱۰}}_{۳/۱۶}}^{۳۱۶}$$

$$\xrightarrow{\div ۶} ۱۶/... \leqslant k < ۵۲/... \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \boxed{k = ۱۷, ۱۸, ..., ۵۲}$$ ۳۶تا

سراسری ۱۴۰۰ خ — تعداد اعداد سه و چهار رقمی مضرب ۹ که مکعب کامل هستند کدام است؟ $(\sqrt[۳]{۱۰} \simeq ۲/۱۵)$

a

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶ ✓
۴) ۷

$$\begin{cases} a = \text{مکعب} \\ a = ۹q \end{cases} \rightarrow ۹q = \text{مکعب} \rightarrow ۳^۲ \times q = \text{مکعب} \rightarrow q = ۳k^۳$$

$$\hookrightarrow a = ۹(۳k^۳) = ۲۷k^۳ \xrightarrow{۱۰۰ \leqslant a < ۱۰۰۰۰} \underbrace{۱۰۰}_{\frac{۱۰۰۰}{۱۰}} \leqslant ۲۷k^۳ < \underbrace{۱۰۰۰۰}_{۱۰۰۰ \times ۱۰}$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \frac{۱۰}{\underbrace{\sqrt[۳]{۱۰}}_{۲/۱۵}} \leqslant ۳k < ۱۰ \times \underbrace{\sqrt[۳]{۱۰}}_{۲/۱۵} \rightarrow ۴/... \leqslant ۳k < ۲۱/...$$

$$\xrightarrow{\div ۳} ۱/... \leqslant k < ۷/... \rightarrow \boxed{k = ۲, ۳, ..., ۷}$$

۶ جواب

سراسری ۹۶ — چند عدد اول P وجود دارد که $۴۸P+۱$ مجذور کامل یک عدد طبیعی (n) باشد؟

۱) ۱
۲) ۲ ✓
۳) ۳
۴) ۴

$$\underbrace{\underbrace{۴۸P}_{\text{زوج}}+۱}_{\text{فرد}} = n^۲ \rightarrow n^۲ = \text{فرد} \rightarrow n = \text{فرد} \rightarrow n = ۲k+۱$$

$$\searrow ۴۸P = n^۲ - ۱ \rightarrow ۴۸P = (\underset{۲k+۱}{n} - ۱).(\underset{۲k+۱}{n} + ۱)$$

$$\rightarrow ۴۸P = (۲k)(\underbrace{۲k+۲}_{۲(k+۱)}) \rightarrow \overset{۱۲}{\cancel{۴۸}}P = \cancel{۴}\underbrace{k.(k+۱)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} \rightarrow ۱۲ \times P = \text{ضرب دو عدد متوالی}$$

$$۱۲ \times P = ۲ \times ۲ \times ۳ \times P = \underbrace{(۲ \times ۲)}_{۴} \times \underbrace{(۳ \times P)}_{?} = \underbrace{(۲ \times ۳)}_{۶} \times \underbrace{(۲ \times P)}_{?}$$

$$\rightarrow P = ۱۱, ۱۳ \rightarrow$$ ۲ جواب ✓

سراسری ۹۲ خ — چند عدد اول P وجود دارد که $۱۶۸P+۱$ مجذور کامل یک عدد طبیعی باشد؟

۱) ۳
۲) ۴ ✓
۳) ۵
۴) ۶

$$\underbrace{\underbrace{۱۶۸P}_{\text{زوج}}+۱}_{\text{فرد}} = n^۲ \xrightarrow{\text{طبق تست بالا}} \cdots \rightarrow \overset{۴۲}{\cancel{۱۶۸}}P = \cancel{۴}k.(k+۱)$$

$$\rightarrow ۴۲ \times P = \text{ضرب دو عدد متوالی} \rightarrow \boxed{P = ۴۱, ۴۳}$$

تجزیه

$$۲ \times ۳ \times ۷ \times P = \underbrace{(۲ \times ۳)}_{۶} \times \underbrace{(۷ \times P)}_{۷} = \underbrace{(۲ \times ۷)}_{۱۴} \times \underbrace{(۳ \times P)}_{۱۵} = \underbrace{(۳ \times ۷)}_{۲۱} \times \underbrace{(۲ \times P)}_{\substack{۲۰ \\ ۲۲}}$$

$۷ \rightarrow P = ۱$ ✗

$۱۵ \rightarrow \boxed{P = ۵}$

$۲۰ \rightarrow P = ۱۰$ ✗

$۲۲ \rightarrow \boxed{P = ۱۱}$

نکته ۳۲ (اختیاری) تعداد مقسوم علیه‌های مثبت عدد طبیعی $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ برابر است با

$$\boxed{d(n) = (\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)}$$

→ به توان‌ها یک واحد اضافه شود و اعداد حاصل در یکدیگر ضرب شود

بنابراین

یک عدد طبیعی "مربع کامل" است اگر و تنها اگر تعداد مقسوم علیه‌های مثبت آن عددی "فرد" باشد.

علت اگر p عددی اول باشد، مقسوم علیه‌های مثبت p^{α} عبارت‌اند از

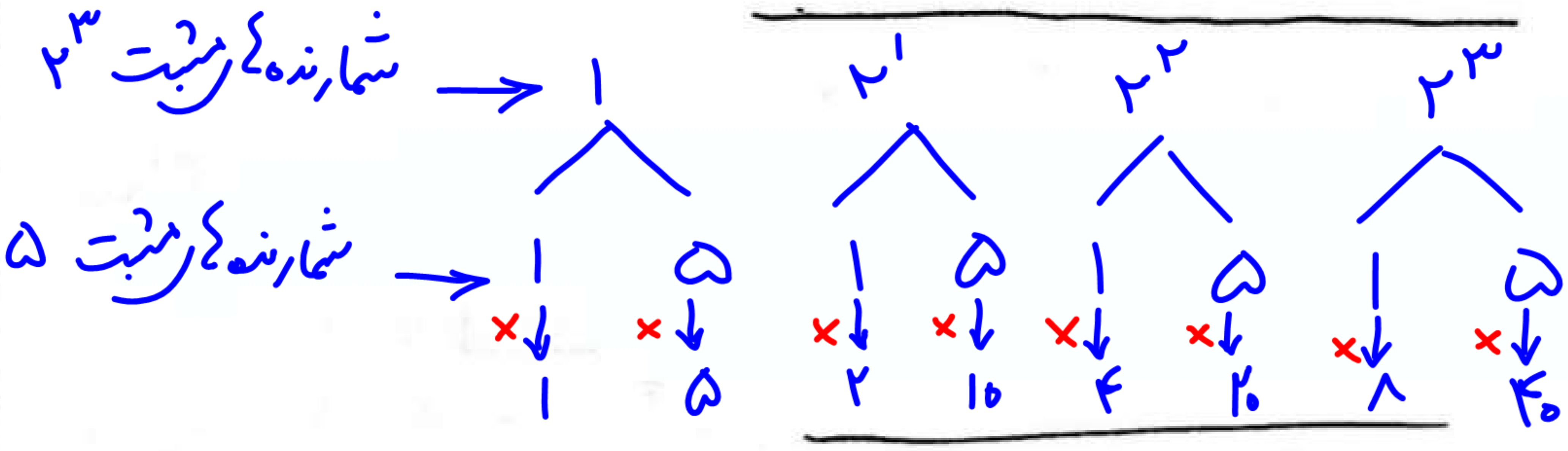
$$\underbrace{1, p^1, p^2, \dots, p^{\alpha}}_{\text{تا } (\alpha+1)} \longrightarrow d(p^{\alpha}) = \alpha+1$$

مثلاً شمارنده‌های مثبت عدد $۳^۵$ عبارت است از

$$\underbrace{۱, ۳^۱, ۳^۲, ۳^۳, ۳^۴, ۳^۵}_{\text{۶ تا}}$$

مثال عدد ۴۰ دارای چند شمارنده‌ی مثبت است؟

$$d(۴۰) \overset{\text{تجزیه}}{=} d(۲^۳ \times ۵^۱) = (۳+۱)(۱+۱) = ۸ \xrightarrow[\text{عبارت‌اند از}]{\text{این ۸ شمارنده}} \{۱, ۲, ۴, ۵, ۸, ۱۰, ۲۰, ۴۰\}$$



تست عدد ۳۵۲ در مجموعه‌ی Z دارای چند شمارنده است؟ ۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

$$d(۳۵۲) \overset{\text{تجزیه}}{=} d(۲^۵ \times ۱۱^۱) = (۵+۱)\cdot(۱+۱) = ۱۲ \xrightarrow{\text{در } Z} ۲\times ۱۲ = ۲۴$$

تست چند عدد مثبت a مضرب ۱۸ وجود دارد که $a \mid ۲۷۰۰$؟ ۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

$$\underbrace{a}_{۱۸q} \mid ۲۷۰۰ \longrightarrow \cancel{۱۸}q \mid \cancel{۱۸} \times ۱۵۰ \longrightarrow q \mid ۱۵۰ \longrightarrow d(۱۵۰) = d(۲^۱ \times ۳^۱ \times ۵^۲)$$

$$= (۱+۱)(۱+۱)(۲+۱) = ۱۲ \checkmark$$

تست عدد ۴۵۰۰۰ چند شمارنده‌ی طبیعی زوج دارد؟ ۱) ۶۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ✓ ۴) ۳۵

حل

$$\underset{۲q}{a} \mid \underset{۲\times ۲۲۵۰۰}{۴۵۰۰۰} \xrightarrow{\div ۲} q \mid ۲۲۵۰۰ \longrightarrow d(۲۲۵۰۰) = d(۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵^۴) = (۲+۱)(۲+۱)(۴+۱) = ۴۵$$

تست عدد ۴۵۰۰۰ چند شمارنده‌ی طبیعی فرد دارد؟ ۱) ۱۵ ✓ ۲) ۲۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

$$a \mid ۴۵۰۰۰ \xrightarrow{\text{تجزیه}} \underset{\text{فرد}}{a} \mid \cancel{۲^۳} \times \underbrace{۳^۲ \times ۵^۴} \longrightarrow d(۳^۲ \times ۵^۴) = (۲+۱)(۴+۱) = ۱۵ \checkmark$$

سراسری ☺ اگر تفاضل تعداد مقسوم علیه‌های مثبت دو عدد طبیعی $N=2^{\alpha}\times3^{\beta}$ و $\frac{N}{36}$ برابر ۱۴ باشد، حداقل N کدام است؟

۱) ۱۴۴
۲) ۲۱۶
۳) ۲۸۸ ✓
۴) ۴۳۲

$$d(N)-d\left(\frac{N}{36}\right)=14\rightarrow d(2^{\alpha}\times3^{\beta})-d(2^{\alpha-2}\times3^{\beta-2})=14$$

$$\left(\frac{N}{36}=\frac{2^{\alpha}\times3^{\beta}}{2^2\times3^2}=2^{\alpha-2}\times3^{\beta-2}\quad \alpha,\beta\geq2\right)$$

$$\rightarrow(\alpha+1)(\beta+1)-(\alpha-1)(\beta-1)=14$$

$$\rightarrow\cancel{\alpha\beta}+\alpha+\beta+\cancel{1}-(\cancel{\alpha\beta}-\alpha-\beta+\cancel{1})=14$$

$$\rightarrow2\alpha+2\beta=14\rightarrow\alpha+\beta=7$$

مقدار دهی

α	۲	۳	۴	۵
β	۵	۴	۳	۲

$$\rightarrow N=\boxed{2^2\times3^5}\ \text{یا}\ \boxed{2^3\times3^4}\ \text{یا}\ \boxed{2^4\times3^3}\ \text{یا}\ \boxed{2^5\times3^2=288}\ ✓$$

سراسری ۱۴۰۰ تعداد مقسوم علیه‌های مثبت عدد صحیح $x=2^m\times5^n$ از تعداد مقسوم علیه‌های مثبت عدد صحیح $\frac{x}{40}$، ۱۲ واحد بیشتر است. حداقل مقدار x کدام است؟

۱) ۶۴۰
۲) ۸۰۰ ✓
۳) ۱۰۰۰
۴) ۱۲۸۰

$$d(x)=d\left(\frac{x}{40}\right)+12\rightarrow d(x)-d\left(\frac{x}{40}\right)=12$$

$$\left(\frac{x}{40}=\frac{2^m\times5^n}{2^3\times5^1}=2^{m-3}\times5^{n-1}\quad m\geq3,\ n\geq1\right)$$

$$\rightarrow d(2^m\times5^n)-d(2^{m-3}\times5^{n-1})=12$$

$$\rightarrow(m+1)(n+1)-(m-2).(n)=12$$

$$\rightarrow\cancel{mn}+m+n+1-\cancel{mn}+2n=12$$

$$\rightarrow m+3n=11\ \xrightarrow{\text{مقداردهی}}$$

m	۳	۴	۵	۶	۷	۸
n	-	-	۲	-	-	۱

$$\rightarrow x=\underbrace{2^5\times5^2}_{800}\ \text{یا}\ 2^8\times5^1=1280$$

سراسری ۱۴۰۰ خارج H.W اگر تعداد مقسوم علیه‌های مثبت عدد صحیح $x=6^m\times10^n$، ۳۵ واحد از تعداد مقسوم علیه‌های مثبت عدد $15x$ کمتر باشد، اختلاف بزرگترین و کوچکترین مقدار ممکن برای x کدام است؟

(گزینه ۴)

۱) ۱۲۹۶
۲) ۲۳۰۴
۳) ۶۴۰۰
۴) ۸۷۰۴

نکته: $\sqrt{n^{d(n)}}$ = حاصل ضرب شمارنده‌های مثبت عدد طبیعی n

اختیاری

نکته مهم تعداد عوامل عدد اول P در !n برابر است با

$$\boxed{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^۲}\right]+\left[\frac{n}{p^۳}\right]+\cdots}$$

(قضیه لژاندر)

مثال: در !۲۸ چند عامل ۳ وجود دارد؟ (اگر $۳^k | ۲۸!$ ، حداکثر k کدام است؟)

$$\underbrace{\left[\frac{۲۸}{۳}\right]}_{۹}+\underbrace{\left[\frac{۲۸}{۳^۲}\right]}_{۳}+\underbrace{\left[\frac{۲۸}{۳^۳}\right]}_{۱}+\underbrace{\left[\frac{۲۸}{۳^۴}\right]}_{۰}=۱۳ \checkmark \xrightarrow{\text{یعنی}} ۲۸! \overset{\text{تجزیه}}{=} ۲^\alpha \times ۳^{۱۳} \times \cdots$$

تست ۱۴۰۰ (گزینه ۲) اگر !n بر $۵^۶$ بخش‌پذیر باشد، کمترین مقدار n کدام است؟ ۱) ۳۰ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۱

مثال: عدد !۱۰ را تجزیه کنید.

$$۱۰! = ۲^\alpha \times ۳^\beta \times ۵^\gamma \times ۷^\theta$$

$$\alpha = \text{تعداد عوامل ۲ در !۱۰} = \left[\frac{۱۰}{۲}\right]+\left[\frac{۱۰}{۲^۲}\right]+\left[\frac{۱۰}{۲^۳}\right]=۸$$

$$\beta = \text{〃 ۳ 〃 〃} = \left[\frac{۱۰}{۳}\right]+\left[\frac{۱۰}{۳^۲}\right]=۴$$

$$\gamma = \text{〃 ۵ 〃 〃} = \left[\frac{۱۰}{۵}\right]=۲$$

$$\theta = \text{〃 ۷ 〃 〃} = \left[\frac{۱۰}{۷}\right]=۱$$

$$\Rightarrow ۱۰! = ۲^۸ \times ۳^۴ \times ۵^۲ \times ۷^۱$$

نتیجه: در تجزیه اعداد به شکل فاکتوریل، هرچه عامل بزرگ‌تر باشد، توان (تعداد) آن کوچک‌تر است.

سراسری ۱۴۰۰ برای هر عدد طبیعی n داریم: $n! = ۲^{a_۱} \times ۳^{a_۲} \times ۵^{a_۳} \times \cdots$. مقدار $\sum_{i=۱}^{\infty} a_i$ به ازای $n=۲۰$ کدام است؟

۱) ۲۸
۲) ۳۲
۳) ۳۶
۴) ۴۰

تست اگر $۳۷!$ بر ۶^k بخش‌پذیر باشد، حداکثر k کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۱۷
۴) ۱۸

تست اگر $۲۷!$ بر ۸^k بخش‌پذیر باشد، حداکثر k کدام است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

تست H.W عدد $۲۷!$ بر ۱۲^k بخش‌پذیر است. حداکثر k کدام است؟ (کنکور ۸۴)

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۱

تعداد صفرهای سمت راست یک عدد طبیعی با تعداد عوامل ۱۰ موجود در آن عدد برابر است. پس تعداد عوامل ۲ و ۵ را می‌یابیم، هرکدام که تعدادش کمتر باشد، به همان تعداد صفر در سمت راست عدد وجود دارد.

مثال در سمت راست عدد $۲۴^۳ \times ۲۵^۵$ چند صفر وجود دارد؟

تمرین H.W در سمت راست عدد $۲۰^{۲۰} \times ۲۱^{۲۱} \times ۲۲^{۲۲} \times ۲۳^{۲۳} \times ۲۴^{۲۴} \times ۲۵^{۲۵}$ چند صفر وجود دارد؟ (جواب: ۷۰)

نتیجه : می‌دانیم در اعداد به شکل فاکتوریل، تعداد عوامل ۵ از تعداد عوامل ۲ کمتر است، پس:

تعداد صفرهای سمت راست $n!$ = تعداد عوامل ۵ در $n!$ = $\left[\frac{n}{۵}\right] + \left[\frac{n}{۵^۲}\right] + \cdots$

سراسری ۹۰ عدد $۷۵!$ مختوم به چند صفر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

تست در سمت راست عدد $100! + 200! + \cdots + 1000!$ چند صفر وجود دارد؟

۱) ۲۴

۲) ۲۵

۳) ۲۰۰

۴) ۲۴۹

تست در سمت راست عدد $\frac{600!}{60!} + \frac{400!}{40!}$ چند صفر وجود دارد؟

۱) ۸۹

۲) ۹۰

۳) ۹۲

۴) ۱۳۴

تست H.W در سمت راست عدد $25! \times 5^{30}$ چند صفر وجود دارد؟ (گزینه ۲)

۱) ۲۵

۲) ۲۶

۳) ۳۷

۴) ۳۸

.. نه، وصل ممکن نیست همیشه فاصله‌ای هست دچار باید بود

و عشق سفر به روشنی اهتزاز خلوت اشیاست

... و عشق صدای فاصله‌هاست صدای فاصله‌های غرق ابهامند....

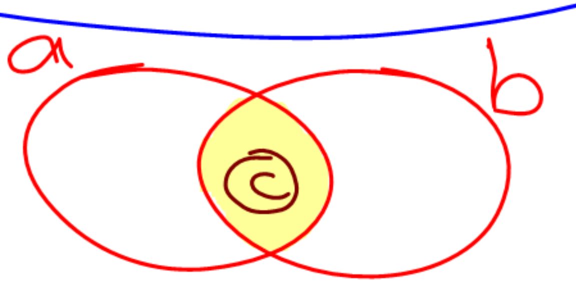
مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح (عامل - شمارنده)

مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح ← عددی است که هر دو عدد صحیح را می‌شمارد.

$\begin{cases} c\,|\,a \\ c\,|\,b \end{cases} \longrightarrow$ c شمارنده‌ی مشترک a, b

مثال عددی $\begin{cases} ۳\,|\,۱۲ \\ ۳\,|\,۱۸ \end{cases} \longrightarrow$ ۳ شمارنده‌ی مشترک ۱۲ و ۱۸

شهودی ←



بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح (ب.م.م) (GCD)

تعریف: عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b (که حداقل یکی غیر صفر است) می‌گوییم هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند:
EX

الف) $d\,|\,a \wedge d\,|\,b$ (d مقسوم علیه مشترک)

ب) $\forall m \in \mathbb{N} : (\underbrace{m\,|\,a \wedge m\,|\,b}) \Rightarrow m \leq d$

m هر مقسوم علیه مشترک a, b

d از هر مقسوم علیه مشترکی بزرگتر یا مساوی

(ب.م.م دو عدد صحیح a و b را با نماد (a,b) یا $a \sqcap b$ نشان می‌دهند)

مثال عددی

$(۱۲,۱۸)=۶ \rightarrow \begin{cases} \text{الف)}\ ۶\,|\,۱۲ \wedge ۶\,|\,۱۸ \ ✓ \\ \text{ب)}\ \forall m \in \mathbb{N} : (m\,|\,۱۲ \wedge m\,|\,۱۸) \xrightarrow{m=۱,۲,۳,۶} m \leq ۶ \ ✓ \end{cases}$

نتیجه ۱: ب.م.م دو عدد صحیح، در صورت وجود، همواره عددی طبیعی و یکتاست.

استثناء ← $(۰,۰)$ = وجود ندارد ← زیرا همه‌ی اعداد صحیح شمارنده‌ی صفرند و بزرگترین وجود ندارد.

نتیجه ۲: اگر $a \neq ۰$ عددی صحیح باشد، آنگاه

$$\boxed{(a,۰)=|a|}$$

مثال عددی $\begin{cases} (-۴,۰)=۴ \\ (۵,۰)=۵ \end{cases}$

توضیح: صفر را همه‌ی اعداد صحیح می‌شمارند، پس بزرگ‌ترین عدد طبیعی را می‌یابیم که a را بشمارد ← خودِ $|a|$

نتیجه ۳: "خاصیت جابجایی ب.م.م"

$$\boxed{(a,b)=(b,a)}$$

نتیجه ۴: اگر $a \in \mathbb{Z}$، آنگاه

$$\boxed{\underset{a\neq ۰}{(a,a)=|a|}}$$

مثال عددی ← $(-۴,-۴)=۴$

نتیجه ۵: علامت تأثیری در محاسبه‌ی ب.م.م ندارد.
(زیرا مجموعه مقسوم علیه‌های دو عدد قرینه برابر است.)

$$\boxed{(a,b)=(-a,b)=(a,-b)=(-a,-b)}$$

نتیجه ۶: اگر a و b دو عدد صحیح مخالف صفر باشند، آنگاه

$$\boxed{(a,b)=d \Rightarrow (d\,|\,a \wedge d\,|\,b)}$$

← ب.م.م، هر دو عدد خودش را می‌شمارد

بنابراین داریم

$$\boxed{\begin{cases} (a,b)\,|\,a \rightarrow (a,b) \leq |a| \\ (a,b)\,|\,b \rightarrow (a,b) \leq |b| \end{cases}}$$

$(a,b)\,|\,a \underset{\times}{\pm} b \qquad (a,b)\,|\,ma+nb$

مثال عددی $(۱۲,۱۸)=۶ \rightarrow \begin{cases} ۶\,|\,۱۲ \rightarrow ۶ \leq ۱۲ \\ ۶\,|\,۱۸ \rightarrow ۶ \leq ۱۸ \end{cases}$

$(۶,۱۲)=۶ \rightarrow \begin{cases} ۶\,|\,۶ \rightarrow ۶ \leq ۶ \\ ۶\,|\,۱۲ \rightarrow ۶ \leq ۱۲ \end{cases}$

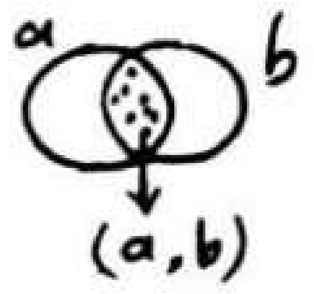
بحث شهودی در مورد "ب.م.م"

(یادآوری : "عاد کردن" شبیه "زیرمجموعه" است)

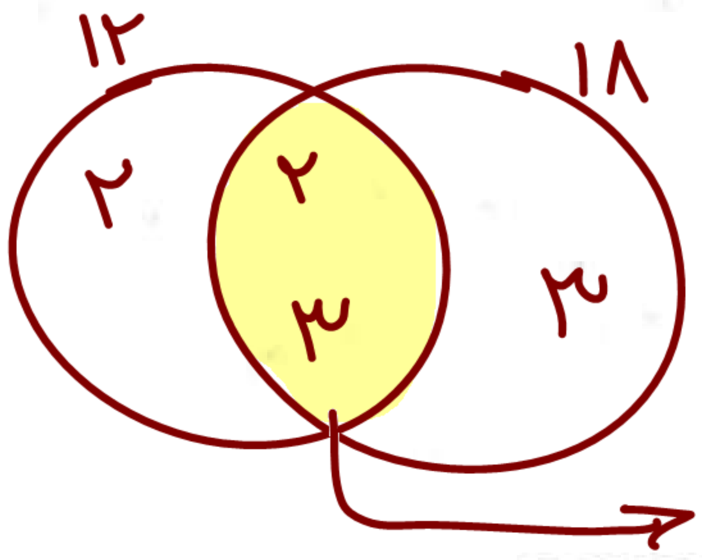
"ب.م.م" شبیه "اشتراک" است.

در مجموعه‌ها → $(A \cap B) \subseteq A \quad , \quad (A \cap B) \subseteq B$

در ب.م.م → $(a,b) \mid a \quad , \quad (a,b) \mid b$



مثال عددی



$۱۲ \sqcap ۱۸ = ۲ \times ۳ \rightarrow (۱۲,۱۸) = ۶$

بنابراین

پایه‌های مشترک با توان کمتر در هم ضرب می‌شوند $\underset{\text{پس از تجزیه}}{=\!=}$ ب.م.م دو عدد صحیح

محاسبه ب.م.م

روش ۱ : روش تجزیه)

EX

مثال عددی

$(۱۲ , ۱۸) = ۲^۱ \times ۳^۱ = ۶$

$۱۲ = ۲^۲ \times ۳^۱ \qquad ۱۸ = ۲^۱ \times ۳^۲$

$(۵۴ , ۱۲۰) = ۲^۱ \times ۳^۱ = ۶$

$۵۴ = ۲^۱ \times ۳^۳ \qquad ۱۲۰ = ۲^۳ \times ۳^۱ \times ۵^۱$

انسان‌های بزرگ اراده می‌کنند
و انسان‌های کوچک آرزو

انسان‌های بزرگ از خودشان توقع دارند و انسان‌های کوچک از دیگران !!!

*** یافتن ب.م.م اعداد پارامتری** ← ب.م.م مورد نظر را d فرض می‌کنیم و نتیجه ۶ را به کار می‌بریم.

سراسری خ EX اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد $۱۲n+۷$ و $۵n-۳$ دارای مقسوم علیه مشترک غیر ۱ باشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

۱) ۵۹ ۲) ۶۷ ۳) ۸۴ ۴) ۸۹

$$(۱۲n+۷,\ ۵n-۲)=d\neq ۱$$

$$\rightarrow\begin{cases} d\mid(۱۲n+۷)\times ۵\rightarrow d\mid \cancel{۶۰n}+۳۵\\ d\mid(۵n-۲)\times ۱۲\rightarrow d\mid \cancel{۶۰n}-۲٤\end{cases}\xrightarrow[\text{می‌شمارد}]{\text{تفاضل را}} d\mid ۵۹\xrightarrow[d\neq ۱]{d\in\mathbb{N}} d=۵۹ ✓$$

سراسری خ۹۹ در مجموعه اعداد طبیعی اگر $d=(۳n+۵\ ,\ ۳n^۲-۲n+۶)$ و $d\neq ۱$ باشد، عدد d کدام است؟

۱) ۴۱ ۲) ۴۷ ۳) ۴۳ ۴) ۵۳ ✓

$$\begin{cases} d\mid ۳n+۵ \xrightarrow{\text{ریشه}} n=-\frac{۵}{۳}\\ d\mid ۳n^۲-۲n+۶\end{cases}\longrightarrow d\mid \underbrace{۳(-\tfrac{۵}{۳})^۲-۲(-\tfrac{۵}{۳})+۶}_{\frac{۲۵}{۳}+\frac{۱۰}{۳}+\frac{۱۸}{۳}=\frac{۵۳}{\cancel{۳}}}\rightarrow d\mid ۵۳\xrightarrow[d\neq ۱]{d\in\mathbb{N}} d=۵۳$$

تست EX اگر $a\in\mathbb{Z}$، حاصل $(۲a-۱\ ,\ ۲a+۵)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ✓ ۳) ۳ ۴) ۴

$$(۲a-۱,۲a+۵)=d\rightarrow\begin{cases} d\mid \cancel{۲a}-۱\\ d\mid \cancel{۲a}+۵\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}} d\mid ۶\xrightarrow{d\in\mathbb{N}} d=۱,۲,۳,۶$$

اما $۲a-۱$ عددی فرد است و $۲\nmid ۲a-۱$ ، $۶\nmid ۲a-۱$. پس $\boxed{d=۱,۳}$

تست EX اگر a عددی فرد باشد، آنگاه $(۲a\ ,\ \overset{\text{فرد}}{a+۲})$ چند جواب دارد؟ (محدودیت)

۱) ۱ ✓ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه کلی

$$(۲a,a+۲)=d\Rightarrow\begin{cases} d\mid ۲a \longrightarrow d\mid \cancel{۲a}\\ d\mid(a+۲)\times ۲\rightarrow d\mid \cancel{۲a}+۴\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}} d\mid ۴\xrightarrow{d\in\mathbb{N}} d=۱ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۴$$

اما $a+۲$ فرد است، پس $d\neq ۲,۴$ ، لذا $\boxed{d=۱}$

راه عددگذاری

$$\overset{\text{فرد}}{a}=۳\rightarrow(\underbrace{۲(۳)}_{۶},\underbrace{۳+۲}_{۵})=۱ ✓$$

سراسری اگر عدد طبیعی n مضرب ۷ نباشد، (محدودیت) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $n^۲+۹n+۲۱$ و $n+۷$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱ یا ۳ ۳) ۱ یا ۵ ۴) ۱ یا ۷

حل تشریحی

$$(n^۲+۹n+۲۱\ ,\ n+۷)=d\rightarrow\begin{cases} d\mid \cancel{n^۲}+۹n+۲۱\\ d\mid(n+۷)\xrightarrow{\times n} d\mid \cancel{n^۲}+۷n\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}} d\mid \cancel{۲n}+۲۱ \quad;\quad d\mid(n+۷)\xrightarrow{\times ۲} d\mid \cancel{۲n}+۱۴\ \xrightarrow{\text{تفاضل}} d\mid ۷\rightarrow d=۱ \text{ یا } ۷$$

اما ~~d=۷~~ قابل قبول نیست زیرا اگر $۷\mid n+۷$ ($۷\mid ۷$)، آنگاه $۷\mid n$ که خلاف فرض است. پس $\boxed{d=۱}$

راه عددگذاری

$$\overset{}{n}=۲ \text{ (مضرب ۷ نباشد)}\rightarrow(\underbrace{۲+۷}_{۹},\ \underbrace{۲^۲+۹(۲)+۲۱}_{۴۳})=۱ ✓$$

تست ۱۴۰۰ اگر $\begin{cases}(a,۴)=۲\\(b,۴)=۲\end{cases}$ ، آنگاه $(a+b,۴)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ✓

(جواب: گزینه ۴)

$$\begin{cases}(a,۴)=۲\xrightarrow{\text{عددگذاری}} a=۲\\(b,۴)=۲\xrightarrow{\text{〃 〃}} b=۶\end{cases}\rightarrow(\underset{۲}{a}+\underset{۶}{b},۴)=(۸,۴)=۴$$

دو عدد نسبت به هم اول (مُتَباین)

EX

غیر اول

$(۱۰, ۲۱) = ۱$

۱۵ و ۲۱ نسبت به هم اولند

مثال عددی ←

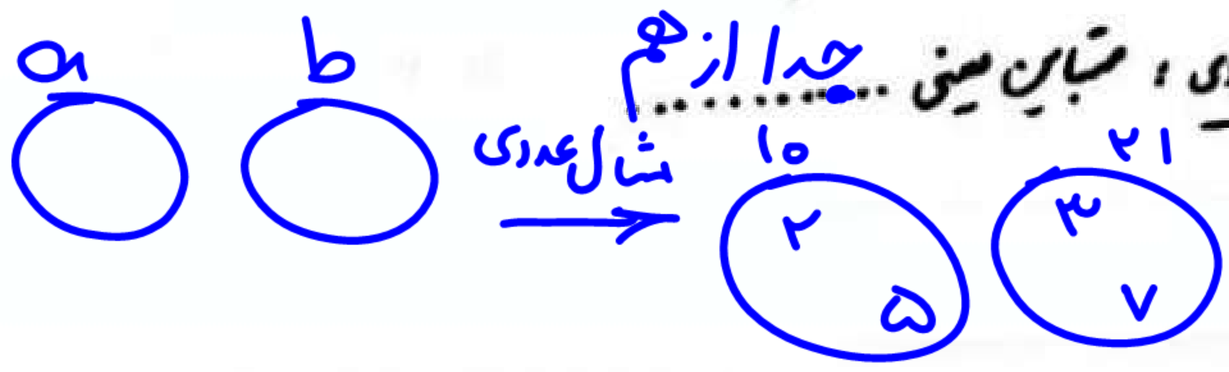
$(a, b) = ۱ \Longleftrightarrow$ a و b نسبت به هم اولند (متباین‌اند)

ممکن است a و b هیچ کدام عدد اول نباشند!!

بحث شهودی ، متباین یعنی ... جدا از هم

$(a, b) = ۱ \rightarrow a \sqcap b = ۱ \rightarrow$

$\downarrow$ ϕ



مثال عددی →

جدا از هم

$$\begin{cases} \phi \cap A = \phi \\ ۱ \sqcap a = ۱ \end{cases}$$

تذکر ۱: عدد ۱ نسبت به هر عدد صحیح اول است. $\forall a \in \mathbb{Z} : (a, ۱) = ۱$

تذکر ۲: اعداد زوج و فرد لزوماً نسبت به هم اول نیستند. ←

فرد = (فرد , زوج)

$(۱۲, ۹) = ۳$

اما عدد ۲ نسبت به هر عدد فرد اول است $(۲, \text{فرد}) = ۱$

تذکر ۳ / EX: هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اولند. $\forall a \in \mathbb{Z} : (a, a+۱) = ۱$

$(۸, ۹) = ۱$

زیرا $(a, a+۱) = d \rightarrow \begin{cases} d \mid \cancel{a} \\ d \mid \cancel{a}+۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid ۱ \rightarrow \boxed{d = ۱}$

مثال EX: ثابت کنید هر دو عدد صحیح و فرد متوالی ، نسبت به هم اول‌اند.

$(۲k+۱, ۲k+۳) = d \Longrightarrow \begin{cases} d \mid \cancel{۲k}+۱ \\ d \mid \cancel{۲k}+۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid ۲ \xrightarrow{d \in \mathbb{N}} d = ۱ \text{ یا } ۲$

دو عدد فرد متوالی

اما $\underline{۲k+۱}$ فرد است و $۲ \nmid ۲k+۱$ ، پس $\boxed{d = ۱}$

سراسری EX: به ازای چند عدد طبیعی و دورقمی n ، دو عدد به صورت $۲۵n+۹$ و $۱۱n+۴$ نسبت به هم اول‌اند؟

۱) ۸۶ ۲) ۸۷ ۳) ۸۹ ✓ ۴) ۹۰

$۹۹ - ۹ =$ تا ۹۰

$(۱۱n+۴, ۲۵n+۹) = d \rightarrow \begin{cases} d \mid (۱۱n+۴) \times ۲۵ \rightarrow d \mid \cancel{۲۵ \times ۱۱n} + ۱۰۰ \\ d \mid (۲۵n+۹) \times ۱۱ \rightarrow d \mid \cancel{۱۱ \times ۲۵n} + ۹۹ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid ۱ \rightarrow d = ۱$

if $|۱۱ \times ۹ - ۴ \times ۲۵| = ۱$ → $d = ۱$

این دو عدد همواره نسبت به هم اولند و به n بستگی ندارد $(\forall n \in \mathbb{Z})$

سراسری خ Now: به ازای اعداد طبیعی $۱ \leq n \leq ۵۰$ ، در چند حالت دو عدد $(۴n+۷)$ و $(۵n+۹)$ نسبت به هم اولند؟

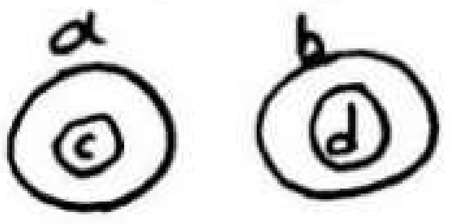
۱) ۴۵ ۲) ۴۸ ۳) ۳۲ ۴) ۵۰

من از پایان نترسیدم و آغاز کردم

تذکر ۴ (اختیاری): اگر دو عدد صحیح نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه شمارنده‌های آن‌ها نیز نسبت به هم اولند.

$$(a,b)=1 \xrightarrow[d|b]{c|a} (c,d)=1$$

شهودی

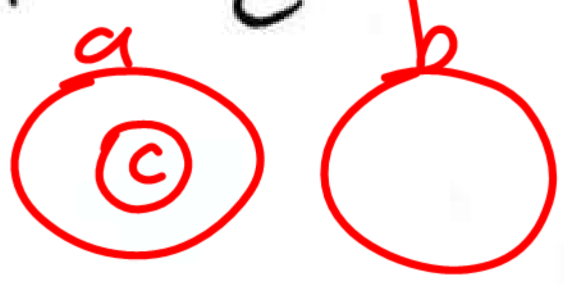


مثال عددی

$$(۱۰,۲۱)=۱ \xrightarrow[۷|۲۱]{۵|۱۰} (۵,۷)=۱$$

حالت خاص (اختیاری): اگر دو عدد صحیح نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه هر یک نسبت به شمارندهٔ دیگری نیز اول است.

$$\begin{cases}(a,b)=1 \xrightarrow{c|a} (c,b)=1 \\ (a,b)=1 \xrightarrow{d|b} (a,d)=1\end{cases}$$



$$\boxed{(P,a)=1 \text{ یا } P}$$

صحیح اول

زیرا:

$$\begin{cases}\text{if } p|a \xrightarrow{\;p\;\; a\;} \overset{\text{اشتراک}}{(p,a)=p} \\ \text{if } p\nmid a \xrightarrow{\;p\;\; a\;} (p,a)=1\end{cases}$$

$(۷,۱٤)=۷$

$(۷,۱۵)=۱$

نکته مهم EX قضیه

اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، $p\nmid a$، آن‌گاه $\boxed{(P,a)=1}$

(توجه کنید اگر $p|a$، آن‌گاه $(p,a)=p$)

اثبات: فرض می‌کنیم $(P,a)=d$، نشان می‌دهیم $d=1$. داریم:

$$(P,a)=d \Longrightarrow \begin{cases} d|P \xrightarrow{P \text{ اول است}} d=1 \text{ یا } P \xrightarrow{\text{فقط}} d=1 \\ d|a \quad (*)\end{cases}$$

زیرا (اگر $d=P$ باشد، آن‌گاه با توجه به $(*)$، $P|a$ و خلاف فرض است)

نتیجه ۱: اگر یک عدد اول، یک عدد صحیح را نشمارد، نسبت به آن اول است.

$۵\nmid ۱۲ \rightarrow (۵,۱۲)=۱$

$۸\nmid ۱۲ \rightarrow (۸,۱۲)=۴$

نتیجه ۲ EX: (هر دو عدد اول متمایز، نسبت به هم اولند) زیرا هیچ کدام دیگری را نمی‌شمارد. پس:

$$\boxed{(\underset{\text{اول}}{P},\underset{\text{اول}}{q})=1} \quad (P\neq q)$$

اثبات

$$(P,q)=d \rightarrow \begin{cases} d|P \xrightarrow{P \text{ اول است}} d=1 \text{ یا } P \\ d|q \xrightarrow{q \text{ اول است}} d=1 \text{ یا } q\end{cases} \xrightarrow{\cap} d=1$$

نتیجه ۳ (اختیاری): عدد اول P نسبت به تمام اعداد طبیعی کوچکتر از خودش اول است، زیرا هیچ کدام را نمی‌شمارد.

$$(P,1)=\cdots=(P,P-1)=1 \rightarrow \boxed{(P,(P-1)!)=1}$$

$$(۷,۱)=(۷,۲)=(۷,۳)=(۷,۴)=(۷,۵)=(۷,۶)=۱ \rightarrow (۷,۶!)=۱$$

نکات مهم ب.م.م (در حالت کلی)

① دو طرف ب.م.م را می‌توان در هر عدد صحیح غیر صفر ضرب کرد و یا به توان هر عدد طبیعی رساند.

الف) $(a,b)=d \xLeftrightarrow[k\neq 0]{k\in\mathbb{Z}} (ka,kb)=|k|d$

ب) $(a,b)=d \xLeftrightarrow{\forall n\in\mathbb{N}} (a^n,b^n)=d^n$

مثال عددی:

$$(۴,۶)=۲ \to \begin{cases} (\overbrace{۳\times۴}^{۱۲},\overbrace{۳\times۶}^{۱۸})=\overbrace{۳\times۲}^{۶} \\ (\underbrace{۴^۲}_{۱۶},\underbrace{۶^۲}_{۳۶})=\underbrace{۲^۲}_{۴} \end{cases}$$

مثال: اگر $(\underbrace{a^۳,b^۳}_{})-(\underbrace{۴a,۴b}_{})=۰$ آنگاه $(\underbrace{a,b}_{})$ کدام است؟

$$d \to d^۳-۴d=۰$$

$$\to d.(d^۲-۴)=۰ \to d=۰,-۲,\boxed{۲}$$ ✓

نتیجه: عمل فاکتورگیری در محاسبه ب.م.م مجاز است.

$$(ka,kb)=|k|(a,b) \quad (k\neq۰)$$

(محاسبه ب.م.م: روش فاکتورگیری) روش (۲)

مثال عددی: $(\underbrace{۷۸}_{۲\times۳۹},\underbrace{۱۰۴}_{۲\times۵۲})=?\to ۲(\underbrace{۳۹}_{۳\times۱۳},\underbrace{۵۲}_{۴\times۱۳})=۲\times۱۳\underbrace{(۳,۴)}_{۱}=۲۶$ ✓

سراسری: اگر b عددی فرد باشد و $a|b$، $a\neq۰$ آنگاه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $۱۸ab$ و $۱۲a^۲$ کدام است؟

۱) $۶a$ ۲) [✓ $۶a^۲$]

۳) $۶ab$ ۴) $۱۲ab$

$$a|b \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} \underbrace{b}_{فرد}=a.q \to \begin{cases} a=فرد \\ q=فرد \end{cases}$$

$$(۱۲a^۲,۱۸ab)=۶a(۲a,۳b)=۶a(۲a,۳aq)$$

$$=۶a^۲(۲,۳\underbrace{q}_{فرد})$$

$$=۶a^۲(\underbrace{۲,فرد}_{۱})=۶a^۲$$ ✓

زنگ بعد ساعت
۱۶:۳۰

(اختیاری) ② محاسبه ب.م.م ترکیب‌های خطی دو عدد صحیح

ضرایب a ضرایب b

$$\begin{vmatrix} m & n \\ r & s \end{vmatrix}=k \to \begin{cases} \text{if } |k|=1: & (ma+nb,ra+sb)=(a,b) \\ \text{if } |k|\neq1: & (ma+nb,ra+sb)\,|\,k(a,b) \end{cases}$$

مثال: اگر $(a,b)=۶$، حاصل $(۱۲a+۲۹b,۵a+۱۲b)$؟

ضرایب a ضرایب b

$$k=\begin{vmatrix} ۱۲ & ۲۹ \\ ۵ & ۱۲ \end{vmatrix}=-۱ \to |k|=۱ \to$$ جواب $=۶$ ✓

مثال H.W: اگر $(a,b)=۱$، حاصل $(۲a-b,a+۲b)$؟

$$k=\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}=۵\neq۱$$

(جواب: ۱ و ۵)

$$(۲a-b,a+۲b)\,|\,\underbrace{k(a,b)}_{۵\times۱}$$

$\to(۲a-b,a+۲b)=۱$ یا ۵ ✓

④ در ب.م.م همواره می‌توان

یک عدد را ثابت در نظر گرفت و مضربی از آن را به عدد دیگر اضافه یا کم کرد بدون آن که ب.م.م تغییر کند.

$$\begin{cases}(a,b)=(a,ka\pm b)\\(a,b)=(b,kb\pm a)\end{cases}\quad (k\in\mathbb{Z})$$

مثال عددی

$$(۱۲,۱۸)=\boxed{۶}\to(\underline{\underline{۱۲}},\underbrace{۱۸+۲\times۱۲}_{۴۲})=(۱۲,۴۲)=۶(\underbrace{۲,۷}_{۱})=\boxed{۶}$$

$$\to(\underline{\underline{۱۲}},\underbrace{۱۸-۱۲}_{۶})=(۱۲,۶)=\boxed{۶}$$

نتیجه مهم: از نکته‌ی فوق می‌توان برای محاسبه‌ی ب.م.م دو عدد صحیح استفاده کرد. براین ترتیب که عدد کوچکتر را ثابت در نظر می‌گیریم و مضربی از آن را از عدد دیگر کم می‌کنیم و این عمل را تکرار می‌کنیم تا یکی از اعداد صفر شود. (محاسبه ب.م.م)

روش کم کردن

روش (۲)

مثال عددی

$$(۱۱۹,\underline{\underline{۵۱}})=?\to(\underline{\underline{۵۱}},\underbrace{۱۱۹-۲\times۵۱}_{۱۷})=(۵۱,۱۷)$$

$$=(\underline{\underline{۱۷}},\underbrace{۵۱-۳\times۱۷}_{۰})=(۱۷,۰)=۱۷✓$$

تست بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و ab+1 کدام است؟

۱) a ۲) ۱ ✓ ۳) b ۴) a+1

$$(\underbrace{\underline{\underline{a}},\underline{\underline{ab}}}_{\text{خودش یا مضربش}}+1)=(\underline{\underline{a}},\cancel{ab}+1-\overset{b\text{ برابر}}{\cancel{b.a}})=(a,1)=1✓$$

تست به ازای مقادیر مختلف a>۳ ، بزرگترین مقدار بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد (۱۵a+۳) و (۱۵a-۱۲) کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱ ۳) ۳ ✓ ۴) ۵

$$(۱۵a+۳,۱۵a-۱۲)=(\underline{\underline{۱۵a+۳}},\cancel{۱۵a}-۱۲-(\cancel{۱۵a}+۳))$$

$$=(۱۵a+۳,۱۵)=(\underline{\underline{۱۵}},\cancel{۱۵a}+۳-\cancel{۱۵a})=(۱۵,۳)=۳$$

تست بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد (۱۶a+۱۸) و (۱۶a+۳۲) به ازای مقادیر مختلف a ، چند عدد متفاوت می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ✓ ۳) ۴ ۴) ۵

$$(۱۶a+۳۲,۱۶a+۱۸)=(\underline{\underline{۱۶a+۱۸}},\cancel{۱۶a}+۳۲-(\cancel{۱۶a}+۱۸))$$

$$=(۱۶a+۱۸,۱۴)=۲(\underbrace{۸a+۹,\overset{}{\underset{\text{اول}}{۷}}}_{۱\text{ یا }۷})=۲\times۱\text{ یا }۲\times۷$$

تست دو عدد ۶۰ و ۷۵ دارای چند شمارنده طبیعی مشترک اند؟

۱) ۲ [✓ ۲) ۴] ۳) ۶ ۴) ۸

تعداد شمارنده‌ها طبیعی (مثبت) ب.م.م دو عدد را می‌یابیم

$$(۶۰,۷۵)=(\underline{\underline{۶۰}},۷۵-۶۰)=(۶۰,۱۵)=(\underline{\underline{۱۵}},\underbrace{۶۰-۴\times۱۵}_{۰})=۱۵$$

$$\text{تعداد شمارنده‌ها طبیعی ۱۵}=d(۱۵)\overset{\text{تجزیه}}{=}d(۳^۱\times۵^۱)=(۱+۱)(۱+۱)=۴✓$$

④ اگر $a=\overset{\frown}{bq+r}$ $(0\le r<b)$، آنگاه $\boxed{(a,b)=(b,r)}$

به عبارت دیگر در قضیه‌ی تقسیم همواره داریم

(باقی‌مانده, مقسوم‌علیه) = (مقسوم‌علیه, مقسوم)

مثال عددی

$$\text{۳۵}=\text{۲۵}(\text{۱})+\text{۱۰}$$

$$(\underbrace{\text{۳۵},\text{۲۵}}_{\text{۵}})=(\underbrace{\text{۲۵},\text{۱۰}}_{\text{۵}})$$

اثبات

$$(a,b)=(\underset{\text{ثابت}}{\underline{b}},\underbrace{a-bq}_{r})\ \checkmark$$

برابر q

تست اگر دو عدد $a-1$ و a^2+3a+1 نسبت به هم اول باشند، کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

۱) $a=5k$ ۲) $a=5k+1$

۳) $a\neq 5k$ ۴) $a\neq 5k+1$ ✓

$$(a-1,a^2+3a+1)=1$$

$$\begin{array}{l|l} a^2+3a+1 & a-1 \\ \hline \vdots & q \\ \overline{\quad 5 \quad} & \end{array}$$

ریشه $\boxed{a=1}$

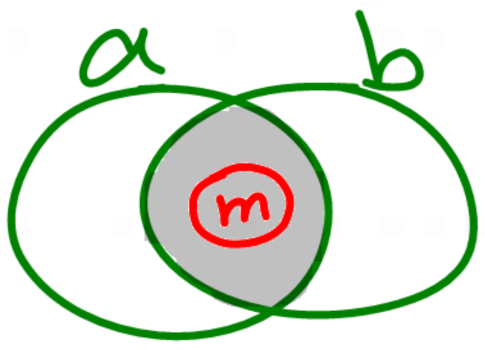
$$\Rightarrow a^2+3a+1=(a-1).q+5$$

$$\rightarrow (\underbrace{a^2+3a+1,a-1}_{1})=(a-1,5)\rightarrow(a-1,\overset{\text{اول}}{5})=1$$

$$\rightarrow 5\nmid a-1\rightarrow a-1\neq 5k\rightarrow \boxed{a\neq 5k+1}$$

---

⑤ اگر عددی، دو عدد صحیح را بشمارد، ب.م.م آن‌ها را نیز می‌شمارد.



$$(\underset{\subseteq}{m|a}\ \wedge\ \underset{\subseteq}{m|b})\Rightarrow m|(a,b)$$

$$m\subseteq(a\sqcap b)$$

مثال عددی

$$(3|12\ \wedge\ 3|18)\rightarrow 3|(\underbrace{12,18}_{6})\rightarrow 3|6\ \checkmark$$

تست باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد ۲۰۷ و ۳۵۳ بر عدد طبیعی b به ترتیب ۳ و ۱۳ است. برای b چند جواب وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ✓

۳) ۴ ۴) ۵

$$\begin{cases}207=b.q+3\ ,\ 3<b\\ 353=b.q'+13\ ,\ 13<b\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}204=b.q\rightarrow b|204\\ 340=b.q'\rightarrow b|340\end{cases}\xrightarrow{\text{ب.م.م}} b|(\underbrace{204,340}_{68=2^2\times 17})$$

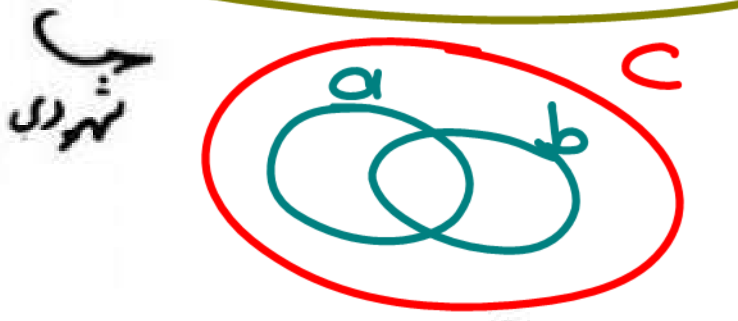
$$\xrightarrow[b>13]{\text{b شمارنده طبیعی ۶۸}} b=\underbrace{1,2,4}_{\times},\underbrace{17,34,68}_{\checkmark}$$

$$(\underline{204},\underbrace{340-204}_{136})=(\underline{136},\underbrace{204-136}_{68})=(\underline{68},\underbrace{136-2\times 68}_{0})=68$$

مضرب مشترک دو عدد صحیح ← عددی است که بر هر دو عدد صحیح بخش پذیر است.

$\begin{cases} a|c \\ b|c \end{cases} \rightarrow$ c مضرب مشترک b,a

مثال عددی ⟶ $\begin{cases} ۱۲|۷۲ \\ ۱۸|۷۲ \end{cases} \longrightarrow$ ۷۲ مضرب مشترک ۱۲ و ۱۸



$\square \mid$ مضرب

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد صحیح (ک.م.م)

تعریف: عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد صحیح و مخالف صفر a و b می‌گوییم، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند:
Ex

$$\begin{cases} \text{الف)}\ a|c \wedge b|c \quad (\text{c مضرب مشترک}) \\ \text{ب)}\ \forall m\in \mathbb{N}: \underbrace{(a|m \wedge b|m)}_{\text{m هر مضرب مشترک a, b}} \Rightarrow c\leq m \end{cases}$$

c از هر مضرب مشترکی کوچکتر یا مساوی

(ک.م.م دو عدد صحیح a و b را با نماد [a,b] یا $a \cup b$ نشان می‌دهند)

مثال عددی

$$[۱۲,۱۸]=۳۶ \rightarrow \begin{cases} \text{الف)}\ ۱۲|۳۶ \wedge ۱۸|۳۶ \\ \text{ب)}\ \forall m\in \mathbb{N}: (۱۲|m \wedge ۱۸|m) \xrightarrow{m=۳۶,۷۲,۱۰۸,\dots} ۳۶\leq m \ ✓ \end{cases}$$

نتیجه ۱: ک.م.م دو عدد صحیح، در صورت وجود، همواره عددی "طبیعی" و یکتاست.

$(۰,۰)=$ وجود ندارد

$(a,۰)=|a|$

نتیجه ۲: اگر a عددی صحیح باشد، آنگاه $\boxed{[a,۰]= \text{وجود ندارد}}$

توضیح: کوچکترین عدد طبیعی که هم بر a و هم بر صفر بخش پذیر باشد، وجود ندارد.

نتیجه ۳: اگر a و b دو عدد صحیح مخالف صفر باشند، آنگاه

$$\boxed{\begin{cases} a|[a,b] \\ b|[a,b] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a\leqslant [a,b] \\ b\leqslant [a,b] \end{cases}}$$

مثال عددی

$$[۱۲,۱۸]=۳۶ \rightarrow \begin{cases} ۱۲|۳۶ \rightarrow ۱۲\leqslant ۳۶ \\ ۱۸|۳۶ \rightarrow ۱۸\leqslant ۳۶ \end{cases}$$

$$[۱۲,۶]=۱۲ \rightarrow \begin{cases} ۱۲|۱۲ \rightarrow ۱۲\leqslant ۱۲ \\ ۶|۱۲ \rightarrow ۶\leqslant ۱۲ \end{cases}$$

نتیجه ۴: اگر $a\neq ۰$ عددی صحیح باشد، آن‌گاه $\boxed{[a,a]=|a|}$ ← مثال عددی $[-۴,-۴]=۴$

سراسری اگر a و b دو عدد ~~صحیح~~ طبیعی باشند و $[a,b]=\frac{a+b}{۲}$ ، آنگاه $a-b$ کدام است؟

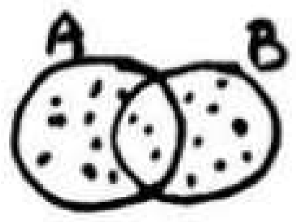
۱) ۱
۲) a
۳) ۰ ✓
۴) b

$$\text{می‌دانیم}\begin{cases} a\leqslant [a,b] \\ b\leqslant [a,b] \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \begin{cases} a\leqslant \frac{a+b}{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۲a\leqslant a+b \xrightarrow{-a} a\leqslant b \\ b\leqslant \frac{a+b}{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۲b\leqslant a+b \xrightarrow{-b} b\leqslant a \end{cases} \rightarrow a=b$$

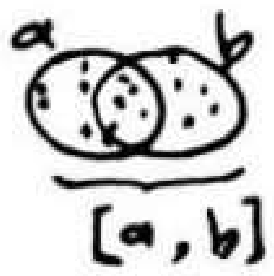
بحث شهودی درمورد "ک.م.م"

یادآوری | "عاد کردن" شبیه "زیرمجموعه" است.
"ب.م.م" شبیه "اشتراک" است.

"ک.م.م" شبیه "اجتماع" است.

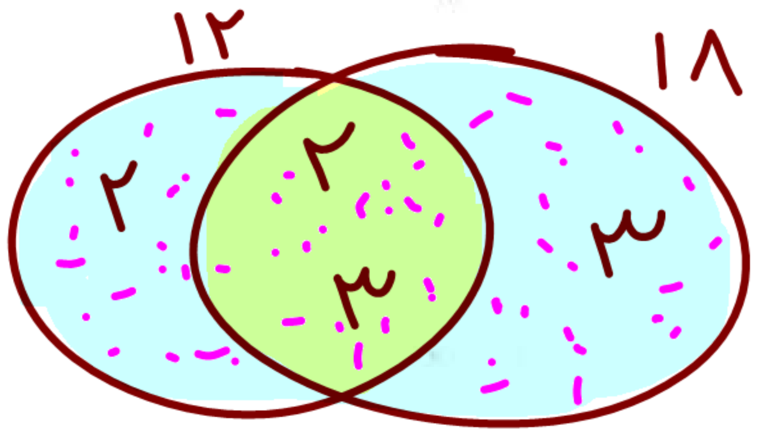


در مجموعه‌ها ⟵ $A \subseteq (A \cup B)$, $B \subseteq (A \cup B)$



در ک.م.م ⟵ $a \mid [a,b]$, $b \mid [a,b]$

مثال عددی



$$\rightarrow \begin{cases} ۱۲ \sqcap ۱۸ = ۲\times۳ = ۶ \rightarrow (۱۲,۱۸)=۶ \\ ۱۲ \sqcup ۱۸ = ۲\times۲\times۳\times۳=۳۶ \rightarrow [۱۲,۱۸]=۳۶ \end{cases}$$

مثال عددی $\underbrace{(۱۲,۱۸)}_{۶} \mid \underbrace{[۱۲,۱۸]}_{۳۶}$ ✓

نتیجه: $\boxed{\begin{matrix}(a,b) \mid [a,b] \\ (A\cap B)\subseteq(A\cup B)\end{matrix}}$

بنابراین

ک.م.م دو عدد صحیح $\overset{\text{پس از تجزیه}}{=\!=}$ پایه‌های مشترک و غیرمشترک با توان بیشتر در هم ضرب می‌شوند

EX

محاسبهٔ ک.م.م: (روش تجزیه)

مثال عددی $[۱۲,۱۸] = ۲^۲ \times ۳^۲ = ۳۶$ ، $۱۲ = ۲^۲\times۳^۱$ ، $۱۸ = ۲^۱\times۳^۲$

$[۴۵,۱۲۰] = ۲^۳\times۳^۲\times۵^۱ = ۳۶۰$ ✓ ، $۴۵ = ۳^۲\times۵^۱$ ، $۱۲۰ = ۲^۳\times۳^۱\times۵^۱$

تذکر روش دیگر برای محاسبهٔ ک.م.م دو عدد صحیح غیرصفر:

$$\boxed{[a,b] = \frac{|a.b|}{(a,b)}}$$

مثال عددی ⟵ $[۱۲,۱۸] = \frac{\overset{۲}{\cancel{۱۲}}\times۱۸}{(۱۲,۱۸)} = ۳۶$ ، $(۱۲,۱۸) = \cancel{۶}$

حالت خاص ⟵ $(a,b)=۱ \Longleftrightarrow [a,b]=|ab|$

$[a,b].(a,b)=|ab|$

$[۵,۷] = ۵\times۷=۳۵$

تست اگر ک.م.م دو عدد $A=۲^۲\times۳^۲\times۵\times۷^۲$ و B برابر $D=۲^۲\times۳^۲\times۵^۲\times۷^۲$ باشد، مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دو رقمی B؟

۱) ۹
۲) ۱۲ ✓
۳) ۱۴
۴) ۱۸

$[\underbrace{۲^۲\times۳^۲\times۵^۱\times۷^۲}_{A}, B] = ۲^۲\times۳^۲\times۵^۲\times۷^۲ \rightarrow \boxed{B=۵^۲\times k}$ ، $k \rightarrow ۲^\alpha\times۳^\beta\times۷^\gamma \; (۰\leq\alpha,\beta,\gamma\leq۲)$

$۵^۲$ حتماً در B وجود دارد

مقدار $k=۳$ ⟵ بزرگ‌ترین دو رقمی $B=۷۵$ ⟵ مجموع ارقام ۱۲ ✓

سراسری دو عدد $A=۲^۳\times۳^۴\times۵^۳\times۷^۲$ و $B=۲^۵\times۳^۲\times۵^\alpha\times۱۱^۱$ دارای ۲۴ مقسوم علیه مشترک مثبت و غیر یکی می‌باشند. تعداد تمام مقسوم علیه‌های مثبت کوچک‌ترین مضرب مشترک این دو عدد کدام است؟

تعداد مقسوم علیه‌های مثبت ب.م.م

۱) ۳۶۰
۲) ۴۸۰
۳) ۵۴۰
۴) ۷۲۰ ✓

$d((A,B)) = ۲۴ \rightarrow d(۲^۳\times۳^۲\times۵^\alpha) = ۲۴ \rightarrow (۳+۱)(۲+۱)(\alpha+۱)=۲۴ \rightarrow \boxed{\alpha=۱}$

عدد ۱ جزء مقسوم علیه‌های مشترک و مثبت هر دو عدد حساب شده

$d[A,B] = d(۲^۵\times۳^۴\times۵^۳\times۷^۲\times۱۱^۱) = (۵+۱)(۴+۱)(۳+۱)(۲+۱)(۱+۱) = ۷۲۰$ ✓

سراسری ۹۸ غ

Ex

حاصل $[\underbrace{(۶۲۷, ۴۲۹)}_{۳۳=۳\times۱۱}, ۱۵۴]$ کدام است؟ ۱) ۴۶۲ ✓ ۲) ۴۷۸ ۳) ۵۰۶ ۴) ۹۲۴

$۱۵۴ \rightarrow ۲\times۷\times۱۱$

$\rightarrow ۲\times۳\times۷\times۱۱ = ۴۶۲$ ✓

$$(۶۲۷,۴۲۹) = (۴۲۹\ ,\ \underbrace{۶۲۷-۴۲۹}_{۱۹۸}) = (۱۹۸\ ,\ \underbrace{۴۲۹-۲\times۱۹۸}_{۳۳}) = (۳۳,\ \underbrace{۱۹۸-۶\times۳۳}_{۰}) = (۳۳,۰) = ۳۳$$

نکته ۱: اگر عددی بر دو عدد صحیح غیرصفر بخش پذیر باشد، آن گاه بر ک.م.م آن نیز بخش پذیر است.

$$(\underset{\subseteq}{a|m} \ \wedge\ \underset{\subseteq}{b|m}) \Rightarrow \underset{\text{اجتماع}}{[a,b]}|m$$

مثال عددی: $(۱۲|۷۲ \ \wedge\ ۱۸|۷۲) \Rightarrow [\underbrace{۱۲,۱۸}_{۳۶}]|۷۲$ ✓

تست: چند عدد سه رقمی طبیعی وجود دارد که مضرب ۱۲ بوده و مربع آن بر ۱۸۹ بخش پذیر باشد؟

۱) ۲
۲) ۳ ✓
۳) ۴
۴) ۵

$$۱۸۹|a^۲ \rightarrow ۳^۳\times۷^۱|a^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} ۳^{\lceil\frac{۳}{۲}\rceil}\times۷^{\lceil\frac{۱}{۲}\rceil}|a$$

$$\rightarrow ۳^۲\times۷^۱|a$$

$$۱۲|a \rightarrow ۲^۲\times۳^۱|a$$

$$\xrightarrow{\text{ک.م.م}} \underbrace{[۳^۲\times۷^۱, ۲^۲\times۳^۱]}_{۲^۲\times۳^۲\times۷^۱|a}|a$$

$$\rightarrow ۲۵۲|a \rightarrow a=۲۵۲q \xrightarrow{۱۰۰\leq a\leq ۹۹۹} q=۱,۲,۳ \rightarrow \text{۳ جواب}$$

تست H.W: کوچک‌ترین عضو پنج رقمی مجموعه $\{x\in\mathbb{N} : \underbrace{۲۷۰|x \ \wedge\ ۱۱۲|x}\}$ در تقسیم بر عدد ۱۱ چه باقی مانده‌ای دارد؟

$[۲۷۰,۱۱۲]|x$

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

(گزینه ۲)

نکته ۲ EX برای دو عدد صحیح و غیر صفر a و b:

الف)

ب.م.م = لاغره

$a|b \Longleftrightarrow \underbrace{(a,b)}=|a|$

شهودی

$a \sqcap b = a$

ب)

ک.م.م = چاقه

$a|b \Longleftrightarrow \underbrace{[a,b]}=|b|$

شهودی

$a \sqcup b = b$

$$A \subseteq B$$

$$A \cap B = A \longleftrightarrow A \cup B = B$$

نتیجه

$$(a,b)=|a| \overset{a|b}{\longleftrightarrow} [a,b]=|b|$$

مثال عددی:

$$(۴,۸)=۴ \overset{۴|۸}{\longleftrightarrow} [۴,۸]=۸$$

اثبات الف) EX باید دو شرط موجود در تعریف ب.م.م را برای $|a|$ بررسی کنیم:

شرط اول

$\underbrace{|a|\,|\,a}_{\text{هر عدد صحیح خودش را می‌شمارد}}$ و $\underbrace{|a|\,|\,b}_{\text{طبق فرض که } a|b\text{، درست است}}$ → شرط اول برقرار است

شرط دوم

$$\forall m \in \mathbb{N} ;\ \underline{m|a} \wedge m|b \Rightarrow m \leqslant |a|$$

از ویژگی‌های عاد کردن ↓

$$|m| \leqslant |a| \xrightarrow{m>0} m \leqslant |a|$$ → شرط دوم برقرار است

اثبات ب) EX باید دو شرط موجود در تعریف ک.م.م را برای $|b|$ بررسی کنیم:

شرط اول

$\underbrace{a\,|\,|b|}_{\text{طبق فرض که } a|b\text{، درست است.}}$ و $\underbrace{b\,|\,|b|}_{\text{درست}}$ → شرط اول برقرار است

شرط دوم

$$\forall m \in \mathbb{N} ;\ a|m \wedge \underline{b|m} \Rightarrow |b| \leqslant m$$

از ویژگی‌های عاد کردن ↓

$$|b| \leqslant |m| \xrightarrow{m>0} |b| \leqslant m$$ → شرط دوم برقرار است

مهارتی اگر $n \in N$ و a^n بر b^n بخش پذیر باشد، آنگاه کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $(a,b^{۲})=b^{۲}$ ۲) $[a^{۲},b]=a^{۲}$ ۳) $(a,b)=|b|$ ۴) $[a,b]=|a|$

$$b^n | a^n \longrightarrow b|a \xrightarrow{\overset{a}{\boxed{b}}} (a,b)=|b| \,,\ [a,b]=|a|$$

گز۳ ✓ گز۴ ✓

چاق، چاق‌تر می‌شود

$$b|a^{۲} \xrightarrow{\overset{a^{۲}}{\boxed{b}}} \underbrace{[a,b]}_{\text{اجتماع}}=a^{۲}$$

گز۲ ✓

تذکر۱ $(a,b)=[a,b] \Leftrightarrow |a|=|b|$ ← همانند $A\cap B=A\cup B \Leftrightarrow A=B$

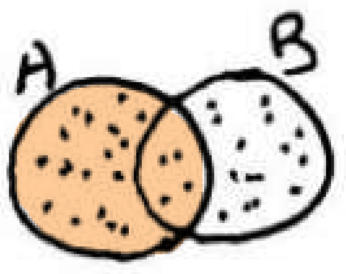
$\underbrace{(a,b)}_{\text{اشتراک}}$ $\underbrace{[a,b]}_{\text{اجتماع}}$

تذکر۲ خاصیت جذب ← ۲ ویژگی دارد < هم اجتماع، هم اشتراک دیده شود

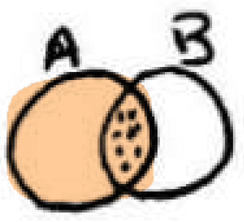
یک حرف تکراری است ← جواب: همان حرف تکراری است

$$(a,[a,b])=|a| \quad , \quad [a,(a,b)]=|a|$$

$$a\sqcap(a\sqcup b)=|a| \qquad a\sqcup(a\sqcap b)=|a|$$



$A\cap(A\cup B)=A$



$A\cup(A\cap B)=A$

تذکر۳ خاصیت توزیع پذیری (اختیاری)

$$(a,[b,c])=[(a,b),(a,c)]$$

$$a\sqcap(b\sqcup c)=(a\sqcap b)\sqcup(a\sqcap c)$$

$$[a,(b,c)]=([a,b],[a,c])$$

$$a\sqcup(b\sqcap c)=(a\sqcup b)\sqcap(a\sqcup c)$$

مثال مهم / Ex: اگر $m\in Z$ و $m\neq ۰$، حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $(\underbrace{[m^{۲},m]}_{m^{۲}},m^{۵})=(m^{۲},m^{۵})=m^{۲}$ ✓

$m|m^{۲} \nearrow m^{۲}$ $\qquad m^{۲}|m^{۵}$

ب) $[\underbrace{(۲m,۶m^{۳})}_{۲m},۳m]=[۲m,۳m]=|m|\underbrace{[۲,۳]}=۶|m|$ ✓

$۲m|۶m^{۳} \to ۲m$ $\qquad (۲,۳)=۱ \longrightarrow ۲\times۳=۶$

پ) $[m^{۷},\underbrace{(m^{۴},m^{۸})}_{m^{۴}}]=[m^{۷},m^{۴}]=|m^{۷}|$ ✓

$m^{۴}|m^{۸} \nearrow m^{۴}$ $\qquad m^{۴}|m^{۷}$

نکات مهم ب.م.م و ک.م.م در یک نگاه

برای سه عدد صحیح وغیرصفر a و b و c داریم:

$\begin{cases} a \mid [a,b] \\ b \mid [a,b] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq [a,b] \\ b \leq [a,b] \end{cases}$	$\begin{cases} (a,b) \mid a \\ (a,b) \mid b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a,b) \leq \lvert a \rvert \\ (a,b) \leq \lvert b \rvert \end{cases}$
جابجایی $[a,b]=[b,a]$	$(a,b)=(b,a)$
$[a,b,c]=[[a,b],c]=[a,[b,c]]$ شرکت پذیری	$(a,b,c)=((a,b),c)=(a,(b,c))$
$a \mid b \iff [a,b]=\lvert b \rvert$	$a \mid b \iff (a,b)=\lvert a \rvert$
$[a,1]=\lvert a \rvert$	$(a,1)=1$
$[a,0]=??$	$(a,0)=\lvert a \rvert$ $(0,0)=??$
$[a,(a,b)]=\lvert a \rvert$ جذب	$(a,[a,b])=\lvert a \rvert$ جذب
$[a,b]=c \overset{k\in\mathbb{Z}}{\underset{k\neq 0}{\iff}} [ka,kb]=\lvert k \rvert c$	$(a,b)=d \overset{k\in\mathbb{Z}}{\underset{k\neq 0}{\iff}} (ka,kb)=\lvert k \rvert d$
$[a,b]=c \overset{\forall n\in\mathbb{N}}{\iff} [a^n,b^n]=c^n$	$(a,b)=d \overset{\forall n\in\mathbb{N}}{\iff} (a^n,b^n)=d^n$
$[a,b]=[-a,b]=[a,-b]=[-a,-b]$	$(a,b)=(-a,b)=(a,-b)=(-a,-b)$
خودتوانی $[a,a]=\lvert a \rvert$	$(a,a)=\lvert a \rvert$
پایه‌های مشترک وغیرمشترک با توان بیشتر = ک.م.م	پایه‌های مشترک با توان کمتر = ب.م.م
$(a,b)=[a,b] \iff \lvert a \rvert = \lvert b \rvert$	

سراسری اگر a عددی صحیح ومخالف صفر باشد، حاصل $[\underbrace{(a,a^2)}, (a,b)]$ کدام است؟

۱) 1 [✓ ۲) $\lvert a \rvert$] ۳) a^2 ۴) a

$a \mid a^2 \to a$

$\rightsquigarrow [a,(a,b)] \overset{\text{جذب}}{=} \lvert a \rvert$

متباین سازی

اگر دو عدد صحیح غیرصفر را بر ب.م.م آن ها تقسیم کنیم، دو عدد نسبت به هم اول حاصل می‌شود. یعنی:

$$\boxed{(a,b)=d \Longleftrightarrow \left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1}$$

مثال عددی

$$(۱۲,۱۸)=۶ \Longleftrightarrow \left(\underset{\underset{۲}{\downarrow}}{\frac{۱۲}{۶}},\underset{\underset{۳}{\downarrow}}{\frac{۱۸}{۶}}\right)=۱ \checkmark$$

نتیجه: با توجه به این که $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ دو عدد صحیح اند (زیرا $d|a$ و $d|b$)، پس داریم:

$$\frac{a}{d}=a'\in\mathbb{Z} \Rightarrow a=a'.d$$

$$\frac{b}{d}=b'\in\mathbb{Z} \Rightarrow b=b'.d$$

$$(a',b')=1$$

$$[a,b]=\frac{ab}{(a,b)}=\frac{a'.\cancel{d}.b'.d}{\cancel{d}}=a'.b'.d$$

(a و b مثبت اند)

بنابراین

برای دو عدد صحیح و غیرصفر a و b، که $(a,b)=d$، اعدادی صحیح و یکتا مانند a' و b' همواره وجود دارند که

$$(\overset{\frac{a}{d}}{a'},\overset{\frac{b}{d}}{b'})=1 \quad , \quad a=a'.d \;,\; b=b'.d \;,\; [a,b]=a'.b'.d$$

تست چند جفت عدد طبیعی وجود دارد که ب.م.م آنها برابر ۱۲ و ک.م.م آنها ۳۶۰ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ [✓ ۴) ۴]

$$\begin{cases} d=(a,b)=۱۲ \\ [a,b]=۳۶۰ \end{cases} \longrightarrow a'.b'.\underbrace{d}_{۱۲}=۳۶۰ \longrightarrow a'.b'=\frac{۳۶۰}{۱۲}=۳۰$$

$$\xrightarrow{(a',b')=1} \begin{cases} a'=۱ \\ b'=۳۰ \end{cases} , \begin{cases} a'=۲ \\ b'=۱۵ \end{cases} , \begin{cases} a'=۳ \\ b'=۱۰ \end{cases} , \begin{cases} a'=۵ \\ b'=۶ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{d=۱۲} \begin{cases} a=۱\times۱۲=۱۲ \\ b=۳۰\times۱۲=۳۶۰ \end{cases} , \begin{cases} a=۲\times۱۲=۲۴ \\ b=۱۵\times۱۲=۱۸۰ \end{cases} , \begin{cases} a=۳\times۱۲=۳۶ \\ b=۱۰\times۱۲=۱۲۰ \end{cases} , \begin{cases} a=۵\times۱۲=۶۰ \\ b=۶\times۱۲ \end{cases}$$

سراسری ۹۴ مجموع دو عدد طبیعی ۲۷۷۲ و بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک آنها ۲۳۱ و مخالف عدد کوچک‌تر است. تفاضل دو عدد کدام است؟

۱) ۳۶۰
۲) ۴۶۲ ✓
۳) ۶۹۳
۴) ۹۲۴

$$\begin{cases} d=(a,b)=۲۳۱\neq b \\ a+b=۲۷۷۲ \to a'.d+b'.d=۲۷۷۲ \to \underbrace{d}_{۲۳۱}.(a'+b')=۲۷۷۲ \end{cases}$$

$(a>b)$

$$\to a'+b'=\frac{۲۷۷۲}{۲۳۱}=۱۲ \xrightarrow{(a',b')=1} \begin{cases} a'=11 \\ b'=1 \end{cases} , \boxed{\begin{cases} a'=۷ \\ b'=۵ \end{cases}}$$

$\hookrightarrow b=1\times۲۳۱=۲۳۱=d$ ✗

$$\text{جواب}=a-b=a'.d-b'.d=(a'-b').\underbrace{d}_{۲۳۱}=(۷-۵)\times۲۳۱=۴۶۲$$ ✓

سراسری ۹۵ بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد طبیعی برابر ۱۸ و تفاضل مربعات این دو عدد ۲۲۶۸ است. رقم یکان عدد بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۲ ✓
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

$$\begin{cases} d=(a,b)=18 \\ a^2-b^2=۲۲۶۸ \to (a'd)^2-(b'd)^2=۲۲۶۸ \to \underbrace{d^2}_{18^2=۳۲۴}\times(a'^2-b'^2)=۲۲۶۸ \end{cases}$$

$$\to a'^2-b'^2=\frac{۲۲۶۸}{۳۲۴}=۷$$

$$\to \underbrace{(a'-b')}_{1}.\underbrace{(a'+b')}_{۷}=\underbrace{۷}_{\text{اول}} \to \begin{cases} a'-b'=1 \\ a'+b'=۷ \end{cases} \to a'=۴ , b'=۳$$

$$\to a=\underbrace{۴\times18}_{۷۲} , b=\underbrace{۳\times18}_{۵۴}$$

سراسری ۹۹ کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، ۶۰ برابر بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک آن‌هاست. اگر مجموع دو عدد ۱۳۶ باشد، تفاضل آن دو عدد کدام است؟

۱) ۴۲
۲) ۴۸
۳) ۵۲
۴) ۵۶ ✓

$$\underbrace{[a,b]}_{a'.b'.\cancel{d}}=۶۰\underbrace{(a,b)}_{\cancel{d}} \to a'.b'=۶۰$$

$$\xrightarrow{(a',b')=1} \begin{cases} a'=۶۰ \\ b'=1 \end{cases} , \begin{cases} a'=۲۰ \\ b'=۳ \end{cases} , \begin{cases} a'=1۵ \\ b'=۴ \end{cases} , \boxed{\begin{cases} a'=1۲ \\ b'=۵ \end{cases}}$$

$$a+b=1۳۶ \to a'.d+b'.d=1۳۶ \to d.(a'+b')=1۳۶$$

$$\to d=\frac{1۳۶}{a'+b'}\in \mathbb{N} \xrightarrow[b'=۵]{a'=1۲} d=8 \to a-b=(\underset{1۲}{a'}-\underset{۵}{b'}).\underbrace{d}_{8}=۵۶$$ ✓

تست H.W اگر $d\neq 1$ بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد طبیعی a و b و $d+ab=۴۹۷$ باشد، آن‌گاه کوچک‌ترین مضرب مشترک a و b کدام است؟

(گزینه ۲)

۱) ۴۹۷
۲) ۷۰
۳) ۳۵
۴) ۱۴

همنهشتی همنهشتی همنهشتی

هم‌نهشتی در $\mathbb{Z}$

Ex **تعریف:** دو عدد صحیح a و b را به پیمانه‌ی عدد طبیعی m، هم‌نهشت می‌گوییم، هرگاه تفاضل a و b مضربی از m باشد.

$$\boxed{a \overset{m}{\equiv} b \iff \underset{(k\in\mathbb{Z})}{a-b=m.k} \ \text{یا} \ m|a-b}$$

مثال عددی $\longrightarrow$

۲۷ $\overset{۵}{\equiv}$ ۱۲ (۵|$\underbrace{۲۷-۱۲}_{۱۵}$)

۱۷ $\overset{۶}{\not\equiv}$ ۱۰ (۶∤$\underbrace{۱۷-۱۰}_{۷}$)

تست Ex کدام دو عدد در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۲ صادق است؟

۱) ۲۰ و ۶۳ ۲) ۲۳ و ۱۲

۳) ۲۴ و ۵۸ ۴) ۵۹ و ۲۳ ✓

۱۲ | $\underbrace{۵۹-۲۳}_{۳۶}$ $\rightarrow$ ۵۹ $\overset{۱۲}{\equiv}$ ۲۳ ✓

$a \overset{1}{\equiv} b \Leftrightarrow 1|a-b$

تذکر ۱: هر دو عدد صحیح به پیمانه‌ی یک هم‌نهشت اند. لذا از این پس پیمانه را عددی طبیعی و بزرگتر از یک فرض می‌کنیم.

تذکر ۲: هر دو عدد صحیح مساوی با هر پیمانه‌ای، با هم هم‌نهشت اند. یعنی

$$a=b \underset{\not\Leftarrow}{\overset{\forall m\in\mathbb{N}}{\Longrightarrow}} a \overset{m}{\equiv} b$$

$m|\underbrace{a-b}_{0}$

تذکر ۳: هر عدد صحیح، با هر پیمانه‌ای، با خودش هم‌نهشت است. یعنی

$$\forall a\in\mathbb{Z} : a \overset{m}{\equiv} a$$

$\hookrightarrow m|\underbrace{a-a}_{0}$ ✓

خاصیت انعکاسی

تذکر ۴: هر عدد صحیح، به پیمانه‌ی خودش، با صفر هم‌نهشت است. یعنی

$$\forall a\in\mathbb{Z} ; a \overset{|a|}{\equiv} 0$$

$\rightarrow a|a-0$ ✓

تذکر ۵: هم‌نهشتی، یک رابطه‌ی دوسویه است. یعنی

$$a \overset{m}{\equiv} b \iff b \overset{m}{\equiv} a$$

تذکر ۶: Ex هم‌نهشتی، خاصیت تعدی دارد. یعنی

$$(a \overset{m}{\equiv} b \ \wedge \ b \overset{m}{\equiv} c) \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$$

(۲۷ $\overset{۵}{\equiv}$ ۱۲ $\wedge$ ۱۲ $\overset{۵}{\equiv}$ ۷) $\Longrightarrow$ ۲۷ $\overset{۵}{\equiv}$ ۷ ✓

اثبات

$$\left.\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\text{تعریف}} m|a-\cancel{b} \\ b \overset{m}{\equiv} c \xrightarrow{\text{〃}} m|\cancel{b}-c \end{cases}\right\} \xrightarrow[\text{می‌شمارد}]{\text{مجموع را}} m|a-c \xrightarrow{\text{تعریف}} a \overset{m}{\equiv} c \ ✓$$

چند ویژگی مهم

ویژگی ① Ex دو طرف رابطه‌ی هم‌نهشتی را می‌توان، بدون تغییر پیمانه، با یک عدد صحیح دلخواه، جمع یا تفریق کرد.

$$\boxed{a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\forall c\in\mathbb{Z}} \begin{cases} (a+c) \overset{m}{\equiv} (b+c) \\ (a-c) \overset{m}{\equiv} (b-c) \end{cases}}$$

اثبات $\longrightarrow$

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\text{تعریف}} m|a-b$$

$$\rightarrow m|a-b+c-c$$

$$\rightarrow m|(a+c)-(b+c)$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف}} a+c \overset{m}{\equiv} b+c \ ✓$$

مثال عددی

۲۷ $\overset{۵}{\equiv}$ ۱۲ $\xrightarrow{+۱۰}$ ۳۷ $\overset{۵}{\equiv}$ ۲۲ ✓

(۵|$\underbrace{۲۷-۱۲}_{۱۵}$) (۵|$\underbrace{۳۷-۲۲}_{۱۵}$)

ویژگی ② ضرب یک عدد صحیح در دو طرف هم‌نهشتی به دو صورت است:

Ex

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\forall c\in\mathbb{Z}} \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bc & \text{(بدون تغییر پیمانه)} \\ ac \overset{mc}{\equiv} bc & \text{(با '' '')} \end{cases}$$

مثال عددی $\longrightarrow$ $۷ \overset{۳}{\equiv} ۴ \xrightarrow{\times ۲} \underbrace{۷\times۲}_{۱۴} \overset{۳}{\equiv} \underbrace{۴\times۲}_{۸}$ ✓

$\xrightarrow{\times ۲} \underbrace{۷\times۲}_{۱۴} \overset{۳\times۲}{\equiv} \underbrace{۴\times۲}_{۸}$ ✓

اثبات: $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\text{تعریف}} m \mid a-b \xrightarrow{\text{چاق، چاق‌تر می‌شود}} m \mid (a-b).c \rightarrow m \mid ac-bc \rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$ ✓

$\xrightarrow{\text{باهم چاق شدن}} m.c \mid (a-b).c \rightarrow \dots$

ویژگی ③ دو طرف رابطهٔ هم نهشتی را می‌توان، بدون تغییر پیمانه، به توان هر عدد طبیعی رساند.

Ex

$$\boxed{a \overset{m}{\equiv} b \underset{\not\Longleftarrow}{\overset{\forall n\in\mathbb{N}}{\Longrightarrow}} a^n \overset{m}{\equiv} b^n}$$

اثبات $\longrightarrow$ $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\text{تعریف}} m \mid a-b \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} m \mid (a-b).k$

$\rightarrow m \mid (a-b)\underbrace{(a^{n-1}+a^{n-2}b^1+\dots+b^{n-1})}_{k\in\mathbb{Z}}$

$\rightarrow m \mid a^n-b^n \rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

مثال عددی: $۷ \overset{۳}{\equiv} ۴ \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{۷^۲}_{۴۹} \overset{۳}{\equiv} \underbrace{۴^۲}_{۱۶}$ ✓

$۲۵ \overset{۱۲}{\equiv} ۴۹ \xrightarrow{\text{جذر}} ۵ \overset{۱۲}{\not\equiv} ۷$

ویژگی ④ دو طرف دو یا چند رابطه هم نهشتی با پیمانهٔ یکسان را، می‌توان با هم جمع یا تفریق نمود و یا در یکدیگر ضرب کرد، بدون آن که پیمانه تغییر کند.

Ex

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd \quad , \quad ad \overset{m}{\equiv} bc \\ (a+c) \overset{m}{\equiv} (b+d) \quad , \quad (a+d) \overset{m}{\equiv} (b+c) \\ (a-c) \overset{m}{\equiv} (b-d) \quad , \quad (a-d) \overset{m}{\equiv} (b-c) \end{cases}$$

اثبات:

$$\left.\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\text{تعریف}} m \mid a-b \xrightarrow{\times c} m \mid ac-bc \\ c \overset{m}{\equiv} d \xrightarrow{''} m \mid c-d \xrightarrow{\times b} m \mid bc-bd \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{مجموع را می‌شمارد}} m \mid ac-bd$$

$\rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd$

$$\left.\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\text{تعریف}} m \mid a-b \rightarrow m \mid (a+c)-(b+c) \\ c \overset{m}{\equiv} d \xrightarrow{''} m \mid c-d \rightarrow m \mid (b+c)-(b+d) \end{cases}\right\} \xrightarrow{''\ ''} m \mid (a+c)-(b+d)$$

$\rightarrow (a+c) \overset{m}{\equiv} (b+d)$

با عشق ممکن است تمام محال‌ها

ویژگی ⑤ هم‌نهشتی یعنی (هم باقی‌مانده شدن)

قضیهٔ هم باقی‌ماندگی (حساب پیمانه‌ای)
EX

$$\boxed{a \overset{m}{\equiv} b \Longleftrightarrow \text{a و b هر دو در تقسیم بر m هم باقی‌مانده اند}}$$

اثبات : فرض می‌کنیم باقی‌مانده‌ی تقسیم دو عدد صحیح a و b بر عدد طبیعی m ، هر دو مساوی r می‌باشند.
اکنون نشان می‌دهیم a و b به پیمانهٔ m ، هم‌نهشت اند. داریم :

$$\begin{cases} a = mq + r \;;\; 0 \leqslant r < m \\ b = mq' + r \;;\; 0 \leqslant r < m \end{cases}$$

که $a - b = mq - mq' = m\underbrace{(q - q')}_{q'' \in \mathbb{Z}}$

$\rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$

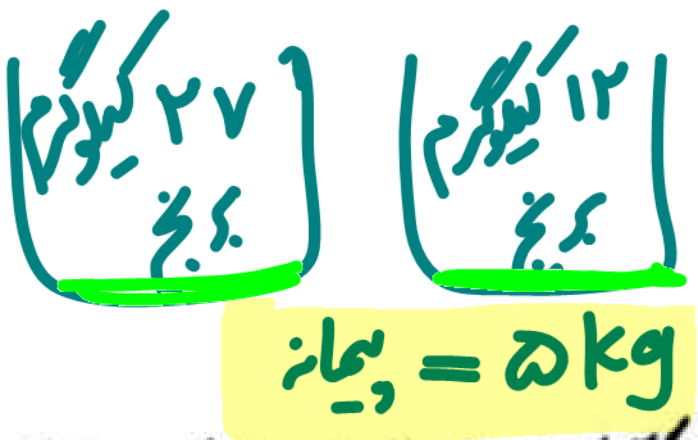
اثبات حالت عکس : به عهدهٔ شما ☺

مثال عددی

$۲۷ \overset{۵}{\equiv} ۱۲$

باقی‌مانده تقسیم ۲۷ بر ۵ = ②

باقی‌مانده تقسیم ۱۲ بر ۵ = ②



تمرین دو عدد ۶۸ و ۱۴۵ در تقسیم بر عدد طبیعی $m \neq 1$ باقی‌ماندهٔ یکسان دارند. باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۶۰ بر m ؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ✓ ۴) ۷

$۱۴۵ \overset{m}{\equiv} ۶۸ \xrightarrow{\text{تعریف}} m \mid \underbrace{۱۴۵ - ۶۸}_{۷۷} \xrightarrow[m \neq 1]{\text{شمارنده طبیعی}\ m\ ۷۷} m = ۷, ۱۱, ۷۷$

دکوله ← $m = ۷۷$

$$\begin{array}{r|l} ۱۶۰ & m = ۷۷ \\ \underline{-۱۵۴} & ۲ \\ ⑥ & \end{array}$$

ویژگی ⑥ همواره می‌توان به یک طرف (یا دو طرف) رابطهٔ هم‌نهشتی، مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد.

$$\boxed{a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\forall k,t \in \mathbb{Z}} \begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \pm mk \\ a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk \end{cases}}$$

$$\xrightarrow{\text{اثبات}} \begin{cases} \left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ 0 \overset{m}{\equiv} mk \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\pm} a \overset{m}{\equiv} b \pm mk \\ \left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ mt \overset{m}{\equiv} mk \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\pm} \dots \end{cases}$$

مثال عددی

$۲۷ \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \rightarrow ۱۷ \rightarrow ۲۲ \rightarrow ۲۷ \rightarrow \dots$

$۱۲ \rightarrow ۷ \rightarrow ۲ \rightarrow -۳ \rightarrow \dots$

نتیجهٔ قضیهٔ هم باقی ماندگی : ارتباط قضیهٔ تقسیم و همنهشتی

باقیمانده $\overset{\text{مقسوم علیه}}{\equiv}$ مقسوم

به عبارت دیگر در قضیه تقسیم همواره داریم

$$\boxed{a = m.q + r \xLeftrightarrow{0 \le r < m} a \overset{m}{\equiv} r}$$

$$a - r = m.q \rightarrow m \mid a - r$$

مثال عددی

$$۲۷ = ۵(\dots) + ۲ \Longleftrightarrow ۲۷ \overset{۵}{\equiv} ۲$$

$$\text{تقسیم؟} \longleftarrow ۲۷ \overset{۵}{\equiv} ⑫ ?$$

تست Ex باقی ماندهٔ تقسیم a بر ۱۳ برابر ۹ است. باقی ماندهٔ تقسیم $a^۲ - ۲a$ بر ۱۳ کدام است؟

همنهشتی

۱) ۱۰ ۲) ۹

۳) ۱۲ ۴) ۱۱

$$a = ۱۳q + ۹ \xrightarrow{\text{تبدیل به همنهشتی}} a \overset{۱۳}{\equiv} ۹$$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^۲ \overset{۱۳}{\equiv} ۸۱ \\ \xrightarrow{\times ۲} ۲a \overset{۱۳}{\equiv} ۱۸ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{کم}} a^۲ - ۲a \overset{۱۳}{\equiv} \underbrace{۸۱ - ۱۸}_{\cancel{۶۳}} \rightarrow ⑪ \checkmark$$

$$\begin{array}{r|l} ۶۳ & ۱۳ \\ \hline -۵۲ & ۴ \\ \hline ۱۱ & \end{array} \rightarrow ۶۳ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۱$$

$$(a^۲ - ۲a \overset{۱۳}{\equiv} ۶۳ \,,\, ۶۳ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۱) \xrightarrow{\text{تعدی}} a^۲ - ۲a \overset{۱۳}{\equiv} ۱۱ \checkmark$$

اگر عدد سمت راست قرار است باقی مانده را نشان دهد و بزرگتر از پیمانه است، پیمانه پیمانه از آن بری دارم تا کوچکتر از پیمانه و نامنفی شود

» » » » » » » و منفی باشد، » » به آن اضافه کنید تا اولین عدد نامنفی مشخص گردد.

تست اگر $a = ۵k + ۳$، آن گاه باقی ماندهٔ تقسیم عدد $a + a^۲ + a^۳ + a^۴$ بر ۵ کدام است؟

[✓ ۱) ۰] ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

مضرب پیمانه $\rightarrow$ ۰

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{۵}{\equiv} ۳ \\ a^۲ \overset{۵}{\equiv} ۹ \\ a^۳ \overset{۵}{\equiv} ۲۷ \\ a^۴ \overset{۵}{\equiv} ۸۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} a + a^۲ + a^۳ + a^۴ \overset{۵}{\equiv} \cancel{۱۲۰} \rightarrow ۰ \checkmark$$

تست اگر a عددی فرد باشد، باقی ماندهٔ تقسیم عدد $a^۲ + ۶$ بر ۲، ۴ و ۸ به ترتیب کدام است؟

۱) ۱،۱،۱

۲) ۱،۳،۷ ✓

۳) ۱،۳،۵

۴) صفر،صفر،صفر

$$a = \text{فرد} \longrightarrow a^۲ = ۸t + ۱ \xrightarrow{+۶} a^۲ + ۶ = \cancel{۸t} + ⑦ \quad (۰)$$

$$۷ \overset{۲}{\equiv} ۱$$

$$۷ \overset{۴}{\equiv} ۳$$

$$۷ \overset{۸}{\equiv} ۷$$

تست اگر $\begin{cases} a \overset{۷}{\equiv} ۲ \\ a \overset{۳}{\equiv} ۰ \end{cases}$، آن گاه باقی ماندهٔ تقسیم a بر ۲۱ ؟

۱) ۰ ۲) ۹ ✓

۳) ۱۱ ۴) ۱۸

$$\left\{\begin{array}{l} a \overset{۷}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\times ۳} ۳a \overset{۲۱}{\equiv} ۶ \xrightarrow{\times ۲} ۶a \overset{۲۱}{\equiv} ۱۲ \\ a \overset{۳}{\equiv} ۰ \xrightarrow{\times ۷} ۷a \overset{۲۱}{\equiv} ۰ \rightsquigarrow ۷a \overset{۲۱}{\equiv} ۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{کم}} a \overset{۲۱}{\equiv} -۱۲ \rightarrow ⑨$$

یک پیمانه اضافه شود

مثال : باقی مانده تقسیم اعداد صحیح m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ است. باقی مانده تقسیم عدد $(۲m - ۵n)$ بر ۱۷ کدام است؟

☺

$$\left\{\begin{array}{l} m \overset{۱۷}{\equiv} ۵ \xrightarrow{\times ۲} ۲m \overset{۱۷}{\equiv} ۱۰ \\ n \overset{۱۷}{\equiv} ۳ \xrightarrow{\times ۵} ۵n \overset{۱۷}{\equiv} ۱۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{کم}} ۲m - ۵n \overset{۱۷}{\equiv} -۵ \rightarrow ⑫ \checkmark$$

تست EX باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $\sum_{n=1}^{۱۰۰۰} n!$ بر ۱۲؟

۱) ۰ ۲) ۴ [✓ ۳) ۹] ۴) ۱۱

$$\sum_{n=1}^{۱۰۰۰} n! = \underbrace{\underbrace{۱!}_{۱}+\underbrace{۲!}_{۲}+\underbrace{۳!}_{۶}}_{۹} + \underbrace{\underbrace{۴!}_{۲۴} + \underbrace{۵!}_{۵\times ۴!} + \dots + ۱۰۰۰!}_{۰} \overset{۱۲}{\equiv} ۹ ✓$$

$$\left(k! \overset{m}{\equiv} ۰ \xrightarrow{\forall n \geq k} n! \overset{m}{\equiv} ۰\right)$$

تست EX باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۱! + ۲! + ۳! + \dots + ۱۰۰!$ بر عدد ۹۰ کدام است؟

۱) ۶۳ ✓ ۲) ۵۳ ۳) ۱۰ ۴) ۸۳

$$\underbrace{\underbrace{۱!}_{۱} + \underbrace{۲!}_{۲} + \underbrace{۳!}_{۶} + \underbrace{۴!}_{۲۴} + \underbrace{۵!}_{\cancel{۱۲۰} \to ۳۰}}_{۶۳} + \underbrace{\underbrace{۶!}_{\cancel{۷۲۰}} + \dots}_{۰} \overset{۹۰}{\equiv} \boxed{۶۳}$$

تست EX اگر اول مرداد ماه در یک سال روز یکشنبه (مبدا) باشد، ۷ اسفند در همان سال، کدام روز هفته است؟

یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	شنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

توضیح: مبدأ را صفر و سایر روزهای هفته را به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ درنظر می‌گیریم.

کل روزهای مورد نظر $= (\overset{\text{مرداد}}{۳۱} - \overset{\text{مبدا}}{۱}) + \overset{\text{شهریور}}{۳۱} + \underbrace{۵ \times ۳۰}_{\text{(مهر تا بهمن)}} + \underbrace{۷}_{\text{تا ۷ اسفند}} = ۲۱۸ \overset{۷}{\equiv} ۱ \to$ دوشنبه ✓

مبدا (روز اول مرداد می‌باشد که کنار می‌رود)

تمرین H.W اگر سوم تیرماه دوشنبه (مبدا) باشد، سوم اسفندماه همان سال کدام روز هفته است؟ (جواب: شنبه)

دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$(\overset{\text{تیرماه}}{۳۱} - \overset{\text{اول و دوم و سوم تیر}}{۳}) + \underbrace{۲ \times ۳۱}_{\text{مرداد و شهریور}} + \underbrace{۵ \times ۳۰}_{\text{مهر تا بهمن}} + \underbrace{۳}_{\text{تا ۳ اسفند}} = ۲۴۳ \overset{۷}{\equiv} ۵ \to$$ شنبه ✓

تست EX اگر روز بیست و نهم اسفند، سه‌شنبه (مبدا) باشد، آن‌گاه بیست و هشتم خرداد ماه همان سال، کدام روز هفته است؟

سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$\overset{\text{اسفند}}{۲۹} \xrightarrow{\text{تقویم به عقب می‌رود}} \overset{\text{خرداد}}{۲۸} ?$$

$$(\overset{\text{اسفند}}{۲۹} - \overset{\text{مبدا}}{۱}) + \overbrace{۵ \times ۳۰}^{\text{بهمن تا مهر}} + \overset{\text{شهریور، مرداد، تیر}}{۳ \times ۳۱} + \overbrace{\underbrace{۴}_{\text{روز خرداد}}}^{۳۱، ۳۰، ۲۹، ۲۸} = ۲۷۵ \overset{۷}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\times(-)} -۲ \overset{۷}{\equiv} ۵ \to$$ یکشنبه ✓

روش ۱: از مبدا، ۲ روز به عقب بروید. ← ۲۸ خرداد یکشنبه است ☺

تست اگر بیستم فروردین ماه روز دوشنبه (مبدا) باشد، چهارمین شنبه بهمن ماه همان سال کدام روز ماه است؟

۱) ۲۷ ✓ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۰

دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

بررسی می‌کنیم که اول بهمن کدام روز هفته است؟؟

$$(\overset{\text{فروردین}}{۳۱} - \overset{\text{۲۰ روز اول حذف}}{۲۰}) + \overbrace{۵ \times ۳۱}^{\text{اردیبهشت تا شهریور}} + \overbrace{۴ \times ۳۰}^{\text{مهر تا آذر}} + \overset{\text{اول بهمن}}{۱} = ۲۸۷ \overset{۷}{\equiv} ۰$$

اول بهمن، دوشنبه است. ← … ← ششم بهمن: اولین شنبه بهمن

$$۶ \xrightarrow{+۷} ۱۳ \xrightarrow{+۷} ۲۰ \xrightarrow{+۷} \boxed{۲۷} ✓$$

مثال: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۳^{۶۲}$ بر ۱۳ ؟ EX

توانی از عدد پایه می‌یابیم (آزمون و خطا یا روش ضرب‌های متوالی) که به پیمانهٔ داده‌شده با ۱ یا ۱- یا صفر همنهشت شود

$۳^{۶۲} \overset{۱۳}{\equiv} ? \rightarrow ۳^۱ \overset{۱۳}{\equiv} ۳ ,\ ۳^۲ \overset{۱۳}{\equiv} ۹ ,\ \underbrace{۳^۳}_{۲۷} \overset{۱۳}{\equiv} \boxed{۱} \xrightarrow{\text{توان ۲۰}} (۳^۳)^{۲۰} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \rightarrow ۳^{۶۰} \overset{۱۳}{\equiv} ۱$ ☺

$\xrightarrow{\times ۳^۲} ۳^۲ \times ۳^{۶۰} \overset{۱۳}{\equiv} ۳^۲ \rightarrow ۳^{۶۲} \overset{۱۳}{\equiv}$ (۹) ✓

سراسری EX باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲^{۴۱}$ بر ۲۱ ؟

$۲^{۴۱} \overset{۲۱}{\equiv} ? \rightarrow \underbrace{۲^۵}_{۳۲} \overset{۲۱}{\equiv} ۱۱ \xrightarrow{\times ۲} ۲^۶ \overset{۲۱}{\equiv} \cancel{۲۲} \rightarrow ۱$ ☺

$\xrightarrow{\text{توان ۶}} (۲^۶)^۶ \overset{۲۱}{\equiv} ۱ \rightarrow ۲^{۳۶} \overset{۲۱}{\equiv} ۱$

$\xrightarrow{\times ۲^۵} ۲^۵ \times ۲^{۳۶} \overset{۲۱}{\equiv} ۲^۵ \rightarrow ۲^{۴۱} \overset{۲۱}{\equiv} \cancel{۳۲} \rightarrow$ (۱۱) ✓

سراسری EX باقی‌ماندهٔ تقسیم $۳^{۴۸}$ بر ۱۱ ؟

$۳^{۴۸} \overset{۱۱}{\equiv} ? \rightarrow \underbrace{۳^۳}_{۲۷} \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \xrightarrow{\times ۳} ۳^۴ \overset{۱۱}{\equiv} \cancel{۱۵} \rightarrow ۴$

$\xrightarrow{\times ۳} ۳^۵ \overset{۱۱}{\equiv} \cancel{۱۲} \rightarrow ۱$ ☺ $\xrightarrow{\text{توان ۹}} (۳^۵)^۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۱$

$\rightarrow ۳^{۴۵} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۳^۳} ۳^۳ \times ۳^{۴۵} \overset{۱۱}{\equiv} ۳^۳ \rightarrow ۳^{۴۸} \overset{۱۱}{\equiv} \cancel{۲۷} \rightarrow$ (۵)

سراسری EX باقی‌ماندهٔ تقسیم $۳^{۵۱۱}$ بر ۸۰ ؟

$۳^{۵۱۱} \overset{۸۰}{\equiv} ? \rightarrow \underbrace{۳^۴}_{۸۱} \overset{۸۰}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان ۱۲۷}} (۳^۴)^{۱۲۷} \overset{۸۰}{\equiv} ۱ \rightarrow ۳^{۵۰۸} \overset{۸۰}{\equiv} ۱$

$$\begin{array}{r|l} ۵۱۱ & ۴ \\ \hline \vdots & ۱۲۷ \\ ۳ & \end{array}$$

$\xrightarrow{\times ۳^۳} ۳^{۵۱۱} \overset{۸۰}{\equiv}$ (۲۷) ✓

سراسری ۹۶ EX به ازای کدام مقادیر n از اعداد طبیعی، عبارت $۵^{۶n+۴} + ۵^{۳n+۲} + ۱$ بر عدد ۳۱ بخش‌پذیر است؟

۱) فقط اعداد فرد ۲) فقط اعداد زوج ۳) فقط اعداد مضرب ۵ [✓ ۴) تمام اعداد]

$\underbrace{۵^۳}_{۱۲۵} \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان n}} ۵^{۳n} \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۵^۲} ۵^{۳n+۲} \overset{۳۱}{\equiv} \cancel{۲۵} \rightarrow -۶ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۵^{۶n+۴} \overset{۳۱}{\equiv} \cancel{۳۶} \rightarrow ۵$

$۵^{۶n+۴} + ۵^{۳n+۲} + ۱ \overset{۳۱}{\equiv} \overbrace{۵ + ۲۵ + ۱}^{\cancel{۳۱} \rightarrow ۰}$

این عدد همواره بر ۳۱ بخش‌پذیر است $(\forall n \in \mathbb{N})$

مثال باقی‌ماندهٔ تقسیم $۳^{۵۷} + ۴^{۵۷} + ۵^{۵۷} + ۶^{۵۷}$ بر ۱۲ ؟

$\underbrace{۳^۳}_{۲۷} \overset{۱۲}{\equiv} ۳ \xrightarrow{\times ۳} ۳^۴ \overset{۱۲}{\equiv} ۹ \xrightarrow{\times ۳} ۳^۵ \overset{۱۲}{\equiv} \cancel{۲۷} \rightarrow ۳ \rightarrow \cdots \xrightarrow{\text{متناوب}} ۳^{۵۷} \overset{۱۲}{\equiv}$ (۳)

$\underbrace{۴^۲}_{۱۶} \overset{۱۲}{\equiv} ۴ \xrightarrow{\times ۴} ۴^۳ \overset{۱۲}{\equiv} \cancel{۱۶} \rightarrow ۴ \rightarrow \cdots \rightarrow ۴^{۵۷} \overset{۱۲}{\equiv}$ (۴)

$۵^۲ \overset{۱۲}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان ۲۸}} ۵^{۵۶} \overset{۱۲}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۵} ۵^{۵۷} \overset{۱۲}{\equiv}$ (۵)

$۶^۲ \overset{۱۲}{\equiv} ۰ \xrightarrow{\times ۶} ۶^۳ \overset{۱۲}{\equiv} ۰ \xrightarrow{\times ۶} \cdots \rightarrow ۶^{۵۷} \overset{۱۲}{\equiv}$ (۰)

$\xrightarrow{+} ۱۲ \overset{۱۲}{\equiv} ۰$ ✓

مثال: باقی‌ماندهٔ تقسیم $۳^{۵۷}$ بر ۷ ؟ EX

$۳^{۵۷} \overset{۷}{\equiv} ? \rightarrow ۳^۲ \overset{۷}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\times ۳} ۳^۳ \overset{۷}{\equiv} \cancel{۶} \rightarrow -۱ \xrightarrow{\text{توان ۱۹}} (۳^۳)^{۱۹} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۱۹} \rightarrow ۳^{۵۷} \overset{۷}{\equiv} -۱ \rightarrow$ (۶) ✓

سراسری باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲^{۵۰۰}$ بر ۱۳ ؟

$۲^{۵۰۰} \overset{۱۳}{\equiv} ? \rightarrow \underbrace{۲^۴}_{۱۶} \overset{۱۳}{\equiv} ۳ \xrightarrow{\times ۲} ۲^۵ \overset{۱۳}{\equiv} ۶ \xrightarrow{\times ۲} ۲^۶ \overset{۱۳}{\equiv} \cancel{۱۲} \rightarrow -۱$

$\xrightarrow{\text{توان ۸۳}} (۲^۶)^{۸۳} \overset{۱۳}{\equiv} (-۱)^{۸۳} \rightarrow ۲^{۴۹۸} \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\times ۲^۲} ۲^{۵۰۰} \overset{۱۳}{\equiv} \cancel{-۴} \rightarrow$ (۹) ✓

$$\begin{array}{r|l} ۵۰۰ & ۶ \\ \hline \vdots & ۸۳ \\ ۲ & \end{array}$$

سراسری ۹۲ عدد $۱۳ \times ۷^{۵۴} + a$ بر ۴۳ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین مقدار طبیعی a کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ [✓ ۴) ۳۰]

$$۱۳ \times \cancel{۷^{۵۴}}_{۱} + a \overset{۴۳}{\equiv} ۰ \to ۱۳ + \underbrace{a}_{۳۰ \checkmark} \overset{۴۳}{\equiv} ۰ \to a \overset{۴۳}{\equiv} \cancel{-۱۳}\ ۳۰ \checkmark$$

تست‌گزینه → ۳۰ ✓

تعریف → $a - ۳۰ = ۴۳k \to \boxed{a = ۴۳k + ۳۰}$

$$\left(\underbrace{۷^{۲}}_{۴۹} \overset{۴۳}{\equiv} ۶ \xrightarrow{\times ۷} ۷^{۳} \overset{۴۳}{\equiv} \cancel{۴۲}\ -۱ \xrightarrow{\text{توان ۱۸}} (۷^{۳})^{۱۸} \overset{۴۳}{\equiv} (-۱)^{۱۸} \to ۷^{۵۴} \overset{۴۳}{\equiv} ۱\right)$$

تست اگر $n \in \mathbb{N}$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $n^{۲۰۰}+۸$ بر ۵ چند مقدار متفاوت می‌تواند باشد؟

نمایش اعداد صحیح

۱) ۱ [✓ ۲) ۲] ۳) ۳ ۴) ۴

می‌دانیم $n \in \mathbb{N} \xrightarrow{\text{در تقسیم بر ۵}}$

$n = ۵k \xrightarrow{\text{در مسئله}} (\cancel{۵k})^{۲۰۰} + ۸ \overset{۵}{\equiv} ③ \checkmark$

یا

$n = ۵k \pm ۱ \xrightarrow{''} (\cancel{۵k}\underbrace{\pm ۱}_{۱})^{۲۰۰} + ۸ \overset{۵}{\equiv} ۹ \to ④ \checkmark$

یا

$n = ۵k \pm ۲ \xrightarrow{''} (\cancel{۵k}\underbrace{\pm ۲}_{۲^{۲۰۰}})^{۲۰۰} + ۸ \overset{۵}{\equiv} \underbrace{\cancel{۲^{۲۰۰}}_{۱} + ۸}_{۹} \overset{۵}{\equiv} ۴$ تکراری

$$۲^{۲} \overset{۵}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{توان ۱۰۰}} ۲^{۲۰۰} \overset{۵}{\equiv} ۱$$

سراسری ۱۴۰۰ اگر m بزرگ‌ترین عدد طبیعی باشد که $(۱۰ - m)! \overset{۳۶}{\equiv} \cancel{۳۶}\ ۰$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $m^{۱۲۳}$ بر ۱۵ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ [✓ ۳) ۴] ۴) ۶

کمترین → min → اولین عدد فاکتوریلی که مضرب ۳۶ باشد → $۶! = ۷۲۰ \to$ مضرب ۳۶

$۱۰ - m = ۶ \to \boxed{m = ۴}$

$$۴^{۱۲۳} \overset{۱۵}{\equiv} ? \to ۴^{۲} \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان ۶۱}} ۴^{۱۲۲} \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۴} ۴^{۱۲۳} \overset{۱۵}{\equiv} ④ \checkmark$$

تست اگر $b - ۷a \overset{۱۷}{\equiv} ۵c$، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$b \overset{۱۷}{\equiv} ۷a + ۵c$

جدول ارزش مکانی

$$\overline{abc} = a \times ۱۰۰ + b \times ۱۰ + c \overset{۱۷}{\equiv} ۱۰۰a + ۱۰(۷a + ۵c) + c$$

$$\overset{۱۷}{\equiv} \underbrace{۱۷۰a}_{۰} + \underbrace{۵۱c}_{۰} \overset{۱۷}{\equiv} ۰ \checkmark$$

سراسری ۹۹ عدد چهاررقمی $\overline{aabb}$، مجذور عدد دورقمی $\overline{cc}$ است. $a - b$ کدام است؟

۱) ۲ [✓ ۲) ۳] ۳) ۴ ۴) ۵

$a \neq ۰$

مربع → $b \neq ۲, ۳, ۷, ۸$

$$\overline{aabb} = (\overline{cc})^{۲} \xrightarrow{\text{جدول}} ۱۰۰۰a + ۱۰۰a + ۱۰b + b = (۱۰c + c)^{۲}$$

$$\to ۱۱۰۰a + ۱۱b = ۱۱^{۲} \times c^{۲} \xrightarrow{\div ۱۱} \boxed{۱۰۰a + b = ۱۱ \times c^{۲}}\ (*) \to \cancel{۱۰۰}_{۱}a + b \overset{۱۱}{\equiv} ۰$$

مضرب ۱۱

$$\to a + b \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \to a + b = \text{مضرب ۱۱}\quad ۱ \le a + b \le ۱۸ \to a + b = ۱۱ \xrightarrow{\text{مقداردهی}}$$

a	۲	۵	۶	۷
b	۹	۶	۵	۴

۷ و ۴ → $a - b = ۳$ ؛ در (*) صدق می‌کند

اگر در (*) قرار گیرند، برای c جوابی وجود ندارد

$$\left.\begin{matrix} ۱\cancel{۰} \le a \le ۹ \\ ۰ \le b \le ۹ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} ۱ \le a + b \le ۱۸$$

سراسری ۹۹ خ پنج برابر عدد دورقمی $\overline{aa}$ را در سمت چپ $\overline{aa}$ قرار داده و آن را m می‌نامیم. m هم‌نهشت کدام عدد زیر، به پیمانهٔ ۱۸۳۷ است؟

[✓ ۱) صفر] ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$$b = ۵ \times \overline{aa} \overset{\text{جدول}}{=} ۵ \times (۱۰a + a) = ۵۵ \times a$$

$$m = \overline{baa} \overset{\text{جدول}}{=} \underbrace{b}_{۵۵a} \times ۱۰۰ + a \times ۱۰ + a = \underbrace{۵۵۱۱}_{\text{مضرب پیمانه}}\, a \overset{۱۸۳۷}{\equiv} ۰ \checkmark$$

تست عدد شش رقمی $\overline{ababab}$ به کدام پیمانهٔ زیر، ممکن است با صفر هم‌نهشت نباشد؟

۱) ۷
۲) ۱۳
[✓ ۳) ۳۱]
۴) ۳۷

$$\overline{ababab} = \overline{ab}\times 10^{۴} + \overline{ab}\times 10^{۲} + \overline{ab}$$
$$= \overline{ab}\times \underbrace{10101}_{\substack{\text{تجزیه}\\ ۳\times۷\times۱۳\times۳۷}} \overset{۳۷\ \text{یا}\ ۱۳\ \text{یا}\ ۷\ \text{یا}\ ۳}{\equiv} 0$$

$۳۵۳۵۳۵ = ۳۵۰۰۰۰ + ۳۵۰۰ + ۳۵$

تست هفت برابر عدد شش رقمی $\overline{abcabc}$ مربع کامل است. بزرگ‌ترین مقدار عدد سه رقمی $\overline{abc}$ در پیمانهٔ ۱۵ با کدام عدد هم‌نهشت است؟

۱) صفر
۲) ۱
[✓ ۳) ۲]
۴) ۱۲

$$۷\times\overline{abcabc} = n^{۲} \rightarrow ۷\times(\overline{abc}\times ۱۰۰۰ + \overline{abc}) = n^{۲}$$
$$\rightarrow ۷\times\underbrace{۱۰۰۱}_{۷\times۱۴۳}\times\overline{abc} = n^{۲} \rightarrow \underbrace{۷^{۲}}_{\text{مربع}}\times\underbrace{۱۴۳\times\overline{abc}}_{\text{باید مربع باشد}} = \underbrace{n^{۲}}_{\text{مربع}}$$
$$\rightarrow \overline{abc} = ۱۴۳\times k^{۲} \xrightarrow{\text{مقدار دهی}}$$

k	۱	۲
$\overline{abc}$	۱۴۳	$\boxed{۵۷۲}$

$$\boxed{۵۷۲} \rightarrow ۵۷۲ \overset{۱۵}{\equiv} ② \checkmark$$

تست H.W عدد شش رقمی $\overline{ababab}$، برابر با حاصل ضرب ۱۱۱ در یک مربع کامل است. عدد $\overline{abba}$ در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۷ با کدام عدد هم‌نهشت است؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۵

(گزینه ۴)

سراسری تعداد عضوهای مجموعهٔ $\{n\in\mathbb{N} : ۶۵\,|\,۲^n+۱\}$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰ کدام است؟

۶ (۱
۷ (۲
[✓ ۸ (۳]
۹ (۴

حل

$$۲^n+۱ \overset{۶۵}{\equiv} ۰ \longrightarrow ۲^n \overset{۶۵}{\equiv} -۱$$

از طرفی $\underbrace{۲^۶}_{۶۴} \overset{۶۵}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{توان } k} ۲^{۶k} \overset{۶۵}{\equiv} (-۱)^k$

$$\Bigg\} \xrightarrow{\text{تشابه}} n=۶k \quad (k\ \text{فرد})$$

$$\xrightarrow[t\in\mathbb{Z}]{k=۲t+۱} n=۶(۲t+۱)=۱۲t+۶ \xrightarrow[n<۱۰۰]{n\in\mathbb{N}} ۱۲t+۶<۱۰۰ \to t<\frac{۹۴}{۱۲}\simeq ۷/\dots$$

$$\xrightarrow{t\in\mathbb{Z}} t=\underbrace{۰,۱,\dots,۷}_{\text{۸ جواب}}$$ ✓

راه سریع → $\boxed{a^k+b^k\,|\,a^n+b^n \quad (\frac{n}{k}=\text{فرد})}$

$$\underbrace{۶۵}_{\text{به شکل سمت راست}}|\,۲^n+۱ \to ۲^۶+۱\,|\,۲^n+۱ \to \frac{n}{۶}=۲t+۱ \to \boxed{n=۱۲t+۶}$$

سراسری ۹۲ به ازای چند عدد طبیعی n کوچکتر از ۵۰، عدد $۷^n+۴۲$ بر ۴۳ بخش‌پذیر است؟

$(۴۳\,|\,۷^n+۴۲)$

به شکل سمت راست در نمی‌آید

۶ (۱
۷ (۲
[✓ ۸ (۳]
۹ (۴

$$\to ۷^n+۴۲ \overset{۴۳}{\equiv} ۰ \to ۷^n \overset{۴۳}{\equiv} \cancel{-۴۲}\ ۱ \to \boxed{۷^n \overset{۴۳}{\equiv} ۱}$$

از طرفی $\underbrace{۷^۲}_{۴۹} \overset{۴۳}{\equiv} ۶ \xrightarrow{\times ۷} ۷^۳ \overset{۴۳}{\equiv} \cancel{۴۲}\ -۱ \xrightarrow{\text{توان } ۲t} \boxed{۷^{۶t} \overset{۴۳}{\equiv} ۱} \xrightarrow{\text{تشابه}} n=۶t$

$$n<۵۰ \to ۶t<۵۰ \to t<\frac{۵۰}{۶}\simeq ۸/\dots \xrightarrow{t\in\mathbb{N}} t=۱,۲,\dots,۸$$

سراسری ۹۴ خ H.W تعداد اعداد دو رقمی a به طوری که $۱۱^a \overset{۱۹}{\equiv} ۱$ کدام است؟

(گزینه ۴)

۲۵ (۱
۲۷ (۲
۲۸ (۳
۳۰ (۴

سراسری ۹۱ اگر $۶^n-۳^n$ مضرب ۲۵ باشد، کوچکترین مقدار طبیعی n کدام است؟

۱۰ (۱
۱۵ (۲
۱۶ (۳
[✓ ۲۰ (۴]

$$\underbrace{۲۵}_{\text{به شکل سمت راست در نمی‌آید}}|\,۶^n-۳^n \to \underbrace{۶^n}_{۳^n\times ۲^n}-۳^n \overset{۲۵}{\equiv} ۰ \to ۳^n\times ۲^n \overset{۲۵}{\equiv} ۳^n$$

$$\xrightarrow{\div ۳^n} \boxed{۲^n \overset{۲۵}{\equiv} ۱}$$

از طرفی $\underbrace{۲^۵}_{۳۲} \overset{۲۵}{\equiv} ۷ \xrightarrow{\text{توان } ۲} ۲^{۱۰} \overset{۲۵}{\equiv} \cancel{۴۹}\ -۱ \xrightarrow{\text{توان } ۲t} \boxed{۲^{۲۰t} \overset{۲۵}{\equiv} ۱}$

$$n=۲۰t \xrightarrow{t=۱} \min(n)=۲۰$$

تمرین H.W باقی‌ماندهٔ تقسیم $(۱+۲+\dots+۵۲۸)^{۵۲۸}$ بر ۵۲۸ ؟ (جواب: صفر)

(یادآوری: $۱+۲+\dots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$)

$$\underbrace{۱+۲+\dots+۵۲۸}_{\frac{\cancel{۵۲۸}^{۲۶۴}\times ۵۲۹}{\cancel{۲}}}$$

$$(۲۶۴\times \cancel{۵۲۹}_{۱})^{۵۲۸} \overset{۵۲۸}{\equiv} \underbrace{۲۶۴}_{۲k}\times ۲۶۴\times ۲۶۴\times\dots$$

$$\underbrace{۵۲۸\times k\times ۲۶۴\times\dots}_{\text{مضرب پیمانه}} \rightarrow ۰ \checkmark$$

$$(۱+۲+\dots+n)^{n} \overset{n}{\equiv} ۰$$

مثال Ex برای $n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$، ثابت کنید

$$\boxed{(a+b)^{n} \overset{ab}{\equiv} a^{n}+b^{n}}$$

به کمک بسط دوجمله‌ای خیام داریم:

$$(a+b)^{n}=\underbrace{\binom{n}{0}}_{۱}\times a^{n}+\overbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^{2}+\dots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}}^{\text{مضرب } ab\ \rightarrow\ ۰}+\underbrace{\binom{n}{n}}_{۱}b^{n} \Rightarrow (a+b)^{n} \overset{ab}{\equiv} a^{n}+b^{n}$$

نتیجه: $(a+b)^{n} \overset{ab}{\equiv} a^{n}+b^{n} \rightarrow (a+b)^{n}-a^{n}-b^{n} \overset{ab}{\equiv} ۰$

مثال Ex ثابت کنید عدد $۲۳^{۱۰۰}-۱۱^{۱۰۰}-۱۲^{۱۰۰}$ بر عدد ۱۳۲ همواره بخش‌پذیر است.

$n=۱۰۰$, $a=۱۱$, $b=۱۲$

$$(۱۱+۱۲)^{۱۰۰}-۱۱^{۱۰۰}-۱۲^{۱۰۰} \overset{۱۱\times۱۲}{\equiv} ۰ \rightarrow \underbrace{۲۳^{۱۰۰}-۱۱^{۱۰۰}-۱۲^{۱۰۰}}_{\text{مضرب ۱۳۲}} \overset{۱۳۲}{\equiv} ۰ \checkmark$$

● Ex اگر عددی پیمانه را بشمارد، می‌تواند به جای پیمانه قرار گیرد.

«شمارندهٔ پیمانه، به جای پیمانه»

$$\boxed{a \overset{m}{\equiv} b \underset{\not\leftarrow}{\xrightarrow{n|m}} a \overset{n}{\equiv} b}$$

تعریف $\rightarrow m|a-b \xrightarrow[\text{تعدی}]{n|m} n|a-b \rightarrow$ تعریف

تست اگر a مضرب ۱۶ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $(۱۷a+۱)^{۴}+(۱۷a+۲)^{۴}+\dots+(۱۷a+۵)^{۴}$ بر ۴ ؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۰

$$a \overset{۱۶}{\equiv} ۰ \xrightarrow{۴|۱۶} a \overset{۴}{\equiv} ۰ \xrightarrow{\times ۱۷} ۱۷a \overset{۴}{\equiv} ۰$$

$$\overset{۴}{\equiv} \underbrace{۱+\underbrace{۲^{۴}}_{۰}+\underbrace{۳^{۴}}_{\underbrace{-۱}_{۱}}+\underbrace{۴^{۴}}_{۰}+\underbrace{۵^{۴}}_{\underbrace{۱}_{۱}}}_{۳}$$

تست H.W باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۸ برابر ۷ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲a+۱$ بر ۴ ؟ (گزینهٔ ۱)

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) ۰

مثال Ex: اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$، $\underbrace{(m,n)=d}_{(d|m\ ,\ d|n)}$، آن‌گاه ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{d|m} a \overset{d}{\equiv} b \\ b \overset{n}{\equiv} c \xrightarrow{d|n} b \overset{d}{\equiv} c \end{cases} \rightarrow (a \overset{d}{\equiv} b \wedge b \overset{d}{\equiv} c) \xrightarrow{\text{تعدی}} a \overset{d}{\equiv} c \checkmark$$

هرگاه عدد پایه بزرگتر از پیمانه باشد، ...

به جای عدد پایه، باقی‌ماندهٔ تقسیم آن را بر پیمانه بنویسید.

مثال Ex باقی‌ماندهٔ تقسیم $(۱۸۶)^{۱۶}$ بر عدد ۷ ؟

$(\underset{۴}{\cancel{۱۸۶}})^{۱۶} \overset{۷}{\equiv} ? \rightarrow ۴^{۱۶} \overset{۷}{\equiv} ?$

$\rightarrow ۴^{۲} \overset{۷}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\times ۴} ۴^{۳} \overset{۷}{\equiv} \underset{۱}{\cancel{۸}} \xrightarrow{توان ۵} ۴^{۱۵} \overset{۷}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۴} ۴^{۱۶} \overset{۷}{\equiv} ④$ ✓

$۱۸۶ \div ۷ \Rightarrow$ باقی‌مانده ۴

$\rightarrow ۱۸۶ \overset{۷}{\equiv} ٤ \rightarrow (۱۸۶)^{۱۶} \overset{۷}{\equiv} ۴^{۱۶}$

مثال باقی‌ماندهٔ تقسیم $(\underset{۷}{\cancel{۱۳۹۱}})^{۱۳۹۲} + (\underset{۶}{\cancel{۱۳۹۰}})^{۱۳۹۱}$ بر عدد ۸ ؟

$۱۳۹۰ \div ۸ \Rightarrow$ باقی‌مانده ۶

$\overset{۸}{\equiv} \underbrace{\overset{-۲}{\cancel{۶}}\,^{۱۳۹۱}}_{-۲^{۱۳۹۱} = \underbrace{-۲^{۳}}_{۰} \times ۲^{۱۳۸۸}} + \underbrace{\overset{-۱}{\cancel{۷}}\,^{۱۳۹۲}}_{۱} \overset{۸}{\equiv} ①$ ✓

مثال اگر a مضرب ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $(\underset{۰}{a}+۱۰۰۱)^{۳}+(۲\underset{۰}{a}+۱۰۰۲)^{۳}+\dots+(۷\underset{۰}{a}+۱۰۰۷)^{۳}$ بر ۷ ؟

$۱۰۰۱ \div ۷ \Rightarrow$ باقی‌مانده ۰

$\overset{۷}{\equiv} \underbrace{۰ + \cancel{۱} + \cancel{۲^{۳}} + \cancel{۳^{۳}} + \underset{\cancel{-۳^{۳}}}{۴^{۳}} + \underset{\cancel{-۲^{۳}}}{۵^{۳}} + \underset{\underbrace{-۱}_{\cancel{-۱}}}{۶^{۳}}}_{۵}$ ✓

تمرین H.W باقی‌ماندهٔ تقسیم $(a+۱۰۰۱)^{۳}+(a+۱۰۰۲)^{۳}+\dots+(a+۱۰۰۶)^{۳}$ بر ۶ ؟ (جواب: ۳)

$n^{۳}-n = n(n-۱)(n+۱) \rightarrow$ مضرب ۶

$\Rightarrow n^{۳}-n \overset{۶}{\equiv} ۰ \rightarrow n^{۳} \overset{۶}{\equiv} n$

سراسری ۹۶ خ به ازای کدام مقادیر n از اعداد طبیعی، عبارت $۲^{n+۱}+۲^{n+۴}+۵^{۲n+۱}$ بر عدد ۲۳ بخش‌پذیر است؟

۱) تمام اعداد ✓ ۲) فقط اعداد فرد ۳) فقط اعداد زوج ۴) فقط اعداد مضرب ۴

$\underbrace{۵^{۲n}}_{(۵^{۲})^{n}} \times ۵^{۱} + \underbrace{۲^{n} \times \underbrace{۲^{۴}}_{۱۶} + ۲^{n} \times \underbrace{۲^{۱}}_{۲}}_{۱۸ \times ۲^{n}}$

$(۵^{۲})^{n} \times ۵^{۱}$

$= \underbrace{\underbrace{(\underset{۲}{\cancel{۲۵}})^{n} \times ۵}_{۵ \times ۲^{n}} + ۱۸ \times ۲^{n}}_{۲۳ \times ۲^{n}} \overset{۲۳}{\equiv} ۰$

همواره بخش‌پذیر است

مضرب پیمانه

● قضیهٔ فرما ←

اگر a عددی صحیح و P عددی اول باشد و $(a, P)=1$ ، آنگاه $\boxed{a^{P-1} \overset{P}{\equiv} 1}$

مثال: باقی ماندهٔ تقسیم $۷^{۵۶}$ بر ۱۹ را بیابید.

تست باقی ماندهٔ تقسیم عدد $۸^{۳۰} + ۵^{۶۲}$ بر ۴۱ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۲۶

۳) ۱۲ ٤) ۲۴

سراسری ۱٤۰۲ خ اگر m کوچکترین عدد طبیعی باشد که $m!$ بر ۳۵ بخش پذیر باشد، آنگاه باقی ماندهٔ تقسیم $m^{۳۳۲}$ بر ۳۱ کدام است؟

۱) صفر ۱۶

۳) ۵ ٤) ۲۵

٤) ۹

تست باقی ماندهٔ تقسیم $۸^{۶۷}$ بر ۱۱ کدام است؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

٤) ۳

سراسری اگر عدد $a + ۷^{۲۰۰}$ مضرب ۱۹ باشد، کوچکترین مقدار طبیعی a کدام است؟

۱) ۶

۲) ۸

۳) ۲

۴) ۵

تست مجموع ارقام بزرگترین عدد سه رقمی a که $a + (۱۳۸۹)^{۱۰۰}$ بر ۱۱ بخش پذیر باشد، کدام است؟

۱) ۲۴

۲) ۲۵

۳) ۲۶

٤) ۲۷

هشدار برای هر پیمانه ای که عدد اول است، قضیهٔ فرما لزوماً کارساز نیست. زیرا ممکن است، قضیهٔ فرما، توان بسیار بزرگتری ارائه نماید

مثال / **EX** باقی ماندهٔ تقسیم $۹ \times (۷ + ۲^{۱۱})$ بر عدد ۲۳ کدام است؟

سراسری ۹۸ خ / **EX** باقی ماندهٔ تقسیم $۵^{۲۰}$ بر ۴۱ کدام است؟

سراسری ۹۸ اگر عدد $۷^{۱۳} + a$ بر ۲۳ بخش‌پذیر باشد، کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

تست H.W باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $\sum_{n=1}^{۱۰۰} n^{۱۹۸}$ بر ۱۹ کدام است؟

(جواب: گزینهٔ ۱)

۱) ۰ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

● پیمانه‌های مرکب (دو هم‌نهشتی یکسان با پیمانه‌های مختلف)

$$\boxed{\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a \equiv b \\ a \equiv b \end{cases}}$$

$\xrightarrow[(m,n)=1]{\text{حالت خاص}}$ ( ) خیلی مهم

تست باقی‌ماندهٔ تقسیم $۷^{۱۰۰۲} + ۶^{۱۰۰۲}$ بر ۴۲ کدام است؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

تست باقی‌ماندهٔ تقسیم $۷^{۱۰۰}$ بر ۱۵ کدام است؟

۱) ۱۴

۲) ۴

۳) ۱۱

۴) ۱

تست باقی‌ماندهٔ تقسیم $۵^{۱۰۰}$ بر ۳۵ کدام است؟

۱) ۵

۲) ۱۰

۳) ۲۵

۴) ۳۰

تست باقی‌ماندهٔ تقسیم $۳^{۱۰۰۰}$ بر ۵۶ کدام است؟

۱) ۳۱
۲) ۳۳
۳) ۲۵
۴) ۲۴

تست
H.W
باقی‌ماندهٔ تقسیم $۳^{۱۳۸۸}$ بر ۱۱۰ کدام است؟

(گزینه ۲)

۱) ۱۵
۲) ۷۱
۳) ۵۸
۴) ۳۲

سراسری باقی‌ماندهٔ تقسیم $(-۶)^{۴۴}$ بر ۳۳ کدام است؟

۱) ۱۸-
۲) ۱۵-
۳) ۱۵
۴) ۱۸

سراسری باقی ماندهٔ تقسیم $۲^{۴۲} - ۳^{۴۲}$ بر ۳۵ کدام است؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۵

سراسری خ
H.W
باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲^{۶۰} - ۳^{۶۰} + ۶^{۶۰}$ بر ۳۵ کدام است؟

(گزینه ۱)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۰

سراسری
☺
اگر $\begin{cases} a \overset{۷}{\equiv} ۲ \\ a \overset{۳}{\equiv} ۰ \end{cases}$ و $a > ۲۱$، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۲۱ کدام است؟

۱) ۰
۲) ۹
۳) ۱
۴) ۴

سراسری ۹۸ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۶ و ۱۱ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۶۶ کدام است؟

۱) ۲۹
۲) ۳۲
۳) ۴۰
۴) ۴۱

تست
H.W
اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۱ برابر ۴ و بر ۱۳ برابر ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a+5$ بر ۱۴۳ کدام است؟

(گزینه ۱)

۱) ۶۴
۲) ۵۴
۳) ۸۹
۴) ۷۹

تست باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵۶ چقدر است؟ ☺

۱) ۴۱
۲) ۴۷
۳) ۵۱
۴) ۵۴

سراسری ۹۴ خ اگر باقی‌مانده تقسیم عددی بر ۹ و ۱۳ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۳۹ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۲۰
۳) ۲۱
۴) ۲۴

تست H.W باقی‌مانده تقسیم عددی بر ۶ و ۱۶ به ترتیب ۳ و ۵ است. باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۲۴ کدام است؟
(گزینه ۱)

۱) ۲۱
۲) ۲۲
۳) ۱۸
۴) ۱۹

سراسری خ اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۹ و ۷ به ترتیب ۵ و ۶ باشد، باقی‌مانده تقسیم a بر ۶۳ چگونه است؟

۱) عدد اول
۲) مضرب ۲
۳) مضرب ۳
۴) مضرب ۵

سراسری ۹۵ باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی N بر عدد ۳۱ برابر ۲۶ است. اگر این عدد را بر ۴۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده برابر با خارج قسمت می‌شود. رقم یکان عدد بزرگتر N کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۷

سراسری ۹۴ چند عدد سه رقمی طبیعی وجود دارد که مضرب ۱۱ بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر ۴ و ۵ برابر ۱ باشد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

سراسری ۹۷ خ باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی A بر اعداد ۵، ۷ و ۱۱ به ترتیب ۲، ۴ و ۸ می‌باشد. باقی‌مانده تقسیم بزرگترین عدد سه رقمی A بر عدد ۲۳ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۱
۴) ۱۴

سراسری تعدادی لیوان را در بسته‌های ۱۶ تایی قرار داده‌ام، ۳ لیوان باقی مانده است. همان تعداد لیوان را در بسته‌های ۲۸ تایی قرار داده‌ام، باز هم ۳ لیوان باقی مانده است. حداقل تعداد لیوان‌ها مضرب کدام عدد است؟

۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۲
۴) ۲۳

سراسری ۱۴۰۳ باقی ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۲۹ برابر ۱۲ است. اگر $a+۱۷$ مضرب ۲۱ باشد، رقم وسط کوچکترین مقدار طبیعی a کدام است؟

(گزینه ۴)

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

سراسری باقی ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۱۲، ۱۵ و ۳۲ به ترتیب ۵، ۸ و ۲۵ است. مجموع ارقام کوچکترین مقدار طبیعی a؟

۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۴
۴) ۱۵

سراسری ۹۷ باقی ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی A بر عدد ۲۳ برابر ۵ و باقی ماندهٔ تقسیم دو برابر عدد A بر ۱۷ برابر ۹ می‌باشد. باقی ماندهٔ تقسیم بزرگترین عدد سه رقمی A بر عدد ۱۲ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۷

سراسری ۹۹ اگر عدد $۲^n-۱$ بر عدد ۲۱۷ بخش پذیر باشد، تعداد اعداد دو رقمی n کدام است؟

خ ۹۹ اگر عدد $۲^n-۱$ بر عدد ۱۰۵ 〃 〃 ، 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 ؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

تقسیم دو طرف هم‌نهشتی بر یک عدد صحیح

EX

حالت خاص :

مثال عددی

سراسری از رابطهٔ هم‌نهشتی $64 \overset{12}{\equiv} 8a$ کدام نتیجه‌گیری حاصل می‌شود؟

۱) $a+8=3k$ ۲) $a+5=3k$

۳) $a+2=3k$ ۴) $a+1=3k$

سراسری از رابطهٔ هم‌نهشتی $15a \overset{30}{\equiv} 20b$ کدام نتیجه‌گیری همواره درست نیست ؟

۱) $3a \overset{30}{\equiv} 4b$

۲) $3a \overset{6}{\equiv} 4b$

۳) $b \overset{3}{\equiv} 0$

۴) $a \overset{2}{\equiv} 0$

سراسری H.W از رابطهٔ هم‌نهشتی $9a \overset{18}{\equiv} 6b$ کدام نتیجه‌گیری نادرست است ؟ (گزینه ۲)

۱) $a \overset{2}{\equiv} 0$ ۲) $a \overset{6}{\equiv} 2$

۳) $b \overset{3}{\equiv} 0$ ۴) $3a \overset{6}{\equiv} 2b$

سراسری H.W از رابطهٔ هم‌نهشتی $36a \overset{84}{\equiv} 192$ ، کدام نتیجه‌گیری نادرست است ؟ (گزینه ۲)

۱) $a \overset{7}{\equiv} 3$ ۲) $a \overset{7}{\equiv} 4$

۳) $2a \overset{7}{\equiv} -1$ ۴) $3a \overset{7}{\equiv} 2$

سراسری اگر $(a^2-1, m)=1$ و $a^3-a^2-a+1 \overset{m}{\equiv} a^2-1$ ، آنگاه

۱) $m|a+1$ ۲) $m|a-1$

۳) $m|a+2$ ۴) $m|a-2$

تست باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۱۷ برابر ۱۱ است. اگر a مضرب ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $\frac{a}{3}$ بر ۱۷ کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۱۱

۳) ۳ ۴) ۱۵

سراسری عدد $7^{15}+a$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است. کوچکترین مقدار طبیعی a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰

۳) ۱۱ ۴) ۱۲

تست های عاد کردن و ب.م.م به کمک هم‌نهشتی

سراسری ۹۳ / خ ۹۵ اگر n عددی طبیعی و دو عدد ۵n-۲ و ۷n+۳ دارای مقسوم علیه مشترک غیر ۱ باشد، تعداد اعداد دو رقمی n کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

سراسری خ به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد ۱۱n+۷ و ۹n+۲ نسبت به هم اول نیستند. کوچکترین مقدار n در این حالت، مضرب کدام است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

حل

$$(۱۱n+۷ , ۹n+۲)=d \to \begin{cases} d|۱۱n+۷ \xrightarrow{\times ۹} d|۹۹n+۶۳ \\ d|۹n+۲ \xrightarrow{\times ۱۱} d|۹۹n+۲۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d|٤۱$$

$$\xrightarrow[d\neq ۱]{d\in \mathbb{N}} d=٤۱ \to \begin{cases} ۴۱|۱۱n+۷ \\ ۴۱|۹n+۲ \to ۹n+۲ \overset{۴۱}{\equiv} ۰ \to ۹n \overset{۴۱}{\equiv} -۲ \to ۹n \overset{۴۱}{\equiv} \underbrace{-۲+۴\times ۴۱}_{۱۶۲} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(۴۱,۹)=۱]{\div ۹} n \overset{۴۱}{\equiv} ۱۸ \xrightarrow{\text{تعریف}} n=۴۱k+۸ \xrightarrow{k=۰} \min(n)=۱۸ \xrightarrow{\text{تست گزینه}} \text{مضرب ۲}$$

سراسری خ به ازای هر عدد طبیعی $n \leq n_۰$، دو عدد ۲n+۷ و ۱۱n-۳ نسبت به هم اول‌اند. بیشترین مقدار $n_۰$ کدام است؟

۱) ۳۵
۲) ۳۷
۳) ۳۹
۴) ۴۰

سراسری ۹۸ / خ ۹۸ به ازای بعضی از مقادیر $n\in \mathbb{N}$، اگر $a|۱۳n+۳$ و $a|۷n+۴$ و $a\neq ۱$ باشد، آن‌گاه مجموع ارقام کوچکترین عدد n کدام است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

سراسری خ ۹۲ به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، دو عدد ۹n+۲ و ۱۱n-۵ نسبت به هم غیراول‌اند؟ (گزینه ۱)

۲۰۳

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

کلاس های هم‌نهشتی

EX

می دانیم در تقسیم بر هر عدد طبیعی به تعدادی برابر با همان عدد طبیعی، باقی مانده وجود دارد. به عبارت دیگر مجموعهٔ اعداد صحیح به تعداد باقی‌مانده‌های ایجاد شده افراز می گردد که به هر کدام یک کلاس هم نهشتی می گوییم. به طور کلی:

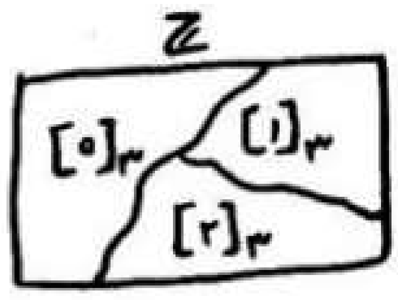
قضیه:

تعریف کلاس هم نهشتی → $[i]_m =$

مثال عددی EX رابطهٔ هم نهشتی به پیمانهٔ ۳ را در نظر بگیریم. داریم

۳ کلاس

$$\begin{cases} [0]_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x \overset{3}{\equiv} 0\} \longrightarrow 3k \\ [1]_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x \overset{3}{\equiv} 1\} \longrightarrow 3k+1 \\ [2]_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x \overset{3}{\equiv} 2\} \longrightarrow 3k+2 \end{cases}$$



سراسری به ازای کدام مقدار a مجموعهٔ تمام دسته های هم نهشتی به پیمانهٔ ۵ به صورت $\{[0],[a],[a^2],[a^3],[a^4]\}$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۵
۴) ۴

نکته ۱ «مفهوم تعلق به یک کلاس هم نهشتی»

EX **سراسری** عدد ۲۰۹- به کدام کلاس هم نهشتی به پیمانه ۱۲ تعلق دارد؟

۱) [۷] ۲) [۹]
۳) [۷-] ۴) [۹-]

سراسری ۹۱ در رابطهٔ هم باقی‌مانده بر ۱۱، عدد 5^{10} به کدام دسته هم نهشتی تعلق دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳
۳) ۵ ۴) ۷

سراسری یک رابطهٔ هم نهشتی مجموعهٔ Z را به ۱۵ کلاس هم نهشتی افراز کرده است و عدد سه رقمی $\overline{6a4}$ به کلاس ۹ تعلق دارد. برای a چند جواب وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

نکته ۲

* چند عدد متعلق به یک کلاس هم‌نهشتی، یعنی همگی به پیمانه داده شده هم‌نهشت‌اند.

سراسری دو عدد ۲۴ و ۱۸۵ در یک دسته‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m قرار دارند. اگر $(m,7)=1$، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد m^m بر ۷ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

سراسری سه عدد ۴۱، a و ۱۳۲ در یک کلاس هم‌نهشتی قرار دارند. کوچک‌ترین عدد سه رقمی a به طوری که مجموعه‌ی Z به تعداد کمتری کلاس هم‌نهشتی افراز شود، کدام است؟

۱) ۱۰۱
۲) ۱۰۲
۳) ۱۰۳
۴) ۱۰۴

سراسری یک رابطه‌ی هم‌نهشتی مجموعه‌ی Z را به ۵ کلاس هم‌نهشتی افراز کرده است. کدام دو عدد در یک کلاس‌اند؟

۱) ۱۳ و ۲۵
۲) ۱۲ و ۳۷
۳) ۱ و ۲۵
۴) ۱ و ۳۷

تست ۳.۷ اگر a عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، با کدام پیمانه گزاره‌ی $[a^2]=1$ همواره درست نیست؟ (جواب: گزینه‌ی ۳)

۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۲۴

تست چند عدد طبیعی دو رقمی به کلاس هم‌نهشتی $[268]_{15}$ تعلق دارد؟

۱) ۳
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۸

قاعده‌های بخش‌پذیری مهم

● بخش‌پذیری بر ۳ و ۹ «مهم»

EX

$$\boxed{\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \overset{9\text{ یا }3}{\equiv}}$$

$10 \overset{9\text{ یا }3}{\equiv} 1$

$10^k \overset{9\text{ یا }3}{\equiv} 1 : \forall k \in \mathbb{N}$

مثال عددی / EX

سراسری عدد پنج رقمی $\overline{۴۱a۷b}$ بر ۹ بخش‌پذیر است. $a+b$ کدام است؟ ۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

تست چند عدد به صورت $\overline{۵۱xy۳۲}$ بر ۳۶ بخش‌پذیر است؟ ۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

● بخش‌پذیری بر ۱۱ «مهم» EX

$$\boxed{\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \overset{11}{\equiv}}$$

$10 \overset{11}{\equiv} -1$

$10^2 \overset{11}{\equiv} 1$

$10^3 \overset{11}{\equiv} -1$

$\vdots$

مثال عددی / EX

سراسری عدد شش رقمی $\overline{۵a۷b۴۴}$ بر ۴۴ تقسیم‌پذیر است. باقی‌مانده‌ی تقسیم این عدد بر ۹ کدام است؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

تست عدد $\overline{۱ab۵۶۲}$ بر ۹۹ بخش‌پذیر است. باقی‌مانده‌ی تقسیم این عدد بر ۱۲۲ کدام است؟

۱) ۶۲
۲) صفر
۳) ۷۴
۴) ۱۲۰

سراسری عدد شش رقمی $\overline{a۶۳b۲۹}$ بر عدد ۹۹ بخش‌پذیر است. رقم a کدام است؟ ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

سراسری خ **۱۴۰۳** عدد پنج رقمی $\overline{۵abb۶}$ بر عدد ۹۹ بخش‌پذیر است. رقم b کدام است؟ ۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸ (گزینه ۴)

تست **H.W** مجموع ارقام بزرگترین عدد به صورت $\overline{۳۴xy۵}$ که بر ۳۳ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟ (گزینه ۳)

۱) ۲۹
۲) ۲۱
۳) ۲۴
۴) ۲۷

$$\left\{\begin{aligned}&\overline{۳۴xy۵}\overset{۳}{\equiv}۰\rightarrow ۳+۴+x+y+۵\overset{۳}{\equiv}۰\rightarrow \underbrace{x+y}_{\text{مضرب ۳}}\overset{۳}{\equiv}۰\\&\overline{۳۴xy۵}\overset{۱۱}{\equiv}۰\rightarrow ۵-y+x-۴+۳\overset{۱۱}{\equiv}۰\rightarrow x-y\overset{۱۱}{\equiv}-۴\overset{۱۱}{\equiv}۷\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{مقداردهی}}\begin{array}{c|c}x & \\ y & \end{array}$$

تست **H.W** چند عدد پنج رقمی به صورت $\overline{۸۲y۶x}$ وجود دارد که بر ۹۹ بخش‌پذیرند؟ ۱) ۱ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸

(جواب گزینه‌ی ۴)

● بخش‌پذیری بر $\underline{8}$

اختیاع $\boxed{\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \overset{8}{\equiv}}$

$$\begin{cases} 10 \overset{8}{\equiv} 2 \\ 10^2 \overset{8}{\equiv} 4 \\ 10^3 \overset{8}{\equiv} 0 \rightarrow 10^4 \overset{8}{\equiv} 0 \rightarrow \cdots \end{cases}$$

__تست__ مجموع باقی‌مانده‌های تقسیم عدد ۷۳۶۵۲۱ بر ۸ ، ۹ و ۱۱ کدام است؟ ۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

__سراسری ۹۶خ__ تعداد اعداد شش رقمی $\overline{abaaba}$ که مضرب ۸۸ باشند ، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۶

● بخش‌پذیری بر __۴ و ۲۵__

EX

$\boxed{\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \overset{25 \text{ یا } 4}{\equiv}}$

$$\begin{cases} 10 \overset{4}{\equiv} 2 \\ 10^2 \overset{4}{\equiv} 0 \rightarrow 10^3 \overset{4}{\equiv} 0 \rightarrow \cdots \end{cases}$$

$\frac{\text{مثال عددی}}{\text{EX}}$

__سراسری ۹۵خ__ چند عدد پنج رقمی به صورت $\overline{a35b2}$ بخش‌پذیر بر ۳۶ موجود است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

__سراسری ۹۷خ__ عدد پنج رقمی $N = \overline{a73b8}$ بر ۴۴ بخش‌پذیر است. باقی‌مانده تقسیم کوچکترین عدد N بر ۹ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

تست مجموع دو عدد $\overline{۴b۵۶}$ و $\overline{۲۳۳a}$ بر ۴۴ بخش‌پذیر است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۷
۳) ۹   ۴) ۱۱

حل

$(\overline{۲۳۳a}+\overline{۴b۵۶} \overset{۴}{\equiv} ۰ \to \overline{۳a}+\underset{\text{مضرب ۴}}{۵۶} \overset{۴}{\equiv} ۰ \to \overline{۳a} \overset{۴}{\equiv} ۰ \to a=۲ \text{ یا } ۶$

$\overline{۲۳۳a}+\overline{۴b۵۶} \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \to (a-۳+۳-۲)+(۶-۵+b-۴) \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \to a+b \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \xrightarrow{\boxed{a=۲}} b \overset{۱۱}{\equiv} ۳ \to \boxed{b=۳}$

پس $a+b=۵$

$(\text{if } a=۶ \to ۶+b \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \to b \overset{۱۱}{\equiv} -۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰ \to b=۱۰ \ ✱)$

سراسری ۹۷ عدد پنج رقمی $N=\overline{۸۷۴۶b}$ مضرب ۳۶ می‌باشد. باقی‌مانده‌ی تقسیم بزرگ‌ترین عدد N بر ۱۱ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

سراسری ۱۴۰۰ میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد سه رقمی $\overline{aba}$ که مضرب ۱۲ باشند، کدام است؟

۱) ۳۴۸
۲) ۵۴۰
۳) ۵۷۰
۴) ۵۷۴

● بخش‌پذیری بر ۲، ۵ و ۱۰

Ex

$$\boxed{\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \overset{\text{۲ یا ۵ یا ۱۰}}{\equiv}}$$

$۱۰^k \overset{\text{۲ یا ۵ یا ۱۰}}{\equiv} ۰ \quad (\forall k \in \mathbb{N})$

مثال عددی

نتیجه:

سراسری EX اگر $S = ۱! + ۲! + \dots + ۵۰۰!$ ، آنگاه رقم یکان $S^۲$ ؟

تست ۱۴۰۱ خ رقم یکان عدد $(۲! + ۴! + ۶! + \dots + ۲۶!)(۱! + ۳! + ۵! + \dots + ۲۵!)$ ؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

مثال: EX رقم یکان دو عدد ۲−۳a و ۲a+۵ یکسان است. رقم یکان $۵a^۲ + ۷$ کدام است؟

سراسری ۱۴۰۱ دو عدد $a^۲ - ۱$ و ۱۴a+۶ رقم یکان برابری دارند. رقم یکان $a^۲ + a$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۷
۴) ۸

تست EX H.W رقم یکان عدد $(۷۲۹)^۱ + \dots + (۷۲۹)^{۷۲۸} + (۷۲۹)^{۷۲۹}$ ؟ ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۸ ۴) ۹ (گزینه ۴)

قضیه‌ی نیوتن

مثال عددی

به طور کلی داریم

سراسری رقم یکان هر عدد طبیعی با رقم یکان کدام یک از توان های خودش همواره برابر است؟

۱) توان سوم ۲) توان چهارم ۳) توان پنجم ۴) توان ششم

سراسری اگر $a^p = ۱۰k + ۷$ ، آنگاه رقم یکان عدد $a^{p+۴}$ ؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۷

تست اگر a عددی طبیعی باشد، رقم یکان کدام عدد همواره صفر است؟

۱) $a^{۹۳}-a$

۲) $a^{۹۱}-a$

۳) $a^{۹۲}-a$

۴) $a^{۹۰}-a$

---

* **نکته مهم:** برای یافتن رقم یکان اعداد به شکل a^n ، ابتدا n را بر ۴ تقسیم می‌کنیم، داریم

$$n = ۴k + r \quad : \quad ۰ \leq r < ۴$$

الف)

ب)

EX مثال (سراسری) رقم یکان هر یک از اعداد زیر را بیابید.

الف) ۴×۷^{۱۷}

ب) $۱ + ۲^{۱۰۱} + ۳^{۱۰۲} + ۴^{۱۰۳}$

پ) $۱۳^{۱۵}$

ت) $(۸۴۵۶۲۹۷)^{۱۲۳۴۷}$

ث) $۱۸^{۲۰}$

مثال: رقم یکان $۷^{۶^{۱۳^{۱۴^{۱۵}}}}$ را بیابید.

تست رقم یکان عدد $(۱۳۷۸)^{۱۳۷۸!} + (۱۳۷۹)^{۱۳۷۹!}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۹

۳) ۵ ۴) ۷

معادله‌ی هم‌نهشتی

به شکل کلی زیر مطرح است

$$\boxed{ax \overset{m}{\equiv} b} \qquad (a,b \in \mathbb{Z})$$

$ax \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow[☺]{تعریف}$

نتیجه: معادله‌ی هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ جواب دارد اگر و تنها اگر ◯

EX

مثال عددی
EX

معادله‌ی هم‌نهشتی $۴x \overset{۲}{\equiv} ۳$ جواب ندارد ، زیرا

معادله‌ی هم‌نهشتی $۴x \overset{۳}{\equiv} ۲$ جواب دارد ، زیرا

سراسری معادله‌ی هم‌نهشتی $۶x \overset{۹}{\equiv} ۲a+۵$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح دارای جواب است. a کدام است ؟

۱) $۱+۲k$ ۲) $۲+۳k$
۳) $۱+۳k$ ۴) $۳+۲k$

سراسری ۱۴۰۱ خ معادله‌ی هم‌نهشتی $ax \overset{۵}{\equiv} n^۲+۴n$, $ax \overset{۵}{\equiv} ۲n+۱$ دارای جواب هستند. سه برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و ۵ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۹
۳) ۶ ۴) ۳

حل معادله‌ی هم‌نهشتی : به کمک ویژگی‌های هم‌نهشتی

مثال: همه‌ی اعداد صحیح مانند a را بیابید که ۵ برابر آنها به علاوه‌ی ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.
EX

مثال: معادله‌های هم‌نهشتی زیر را حل کنید.
EX

ب) $۵x \overset{۱۳}{\equiv} ۳$

الف) $۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹$

ت) $۵۱x \overset{۶}{\equiv} ۱۱$

پ) $۶x \overset{۹}{\equiv} ۱۵$

سراسری ۱۴۰۳ رقم یکان کوچکترین عدد طبیعی سه رقمی x که در معادلهٔ $۱۱x \overset{۱۳}{\equiv} ۹$ صدق می‌کند کدام است؟

(گزینه ۴)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۶

سراسری خ معادلهٔ $۷۲x \overset{۳۱}{\equiv} ۱$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی سه رقمی چند جواب دارد؟

۱) ۲۹
۲) ۳۰
۳) ۳۲
۴) ۳۳

سراسری ۹۴ اگر عدد $۲x^۲ - x - ۶$ مضرب ۵۳ باشد، رقم یکان بزرگترین عدد سه رقمی x کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

نکته

$$\boxed{ab \overset{\overset{\text{اول که}}{p}}{\equiv} ۰ \Longrightarrow a \overset{p}{\equiv} ۰ \vee b \overset{p}{\equiv} ۰}$$

$$۲x^۲ - x - ۶ \overset{۵۳}{\equiv} ۰ \xrightarrow{\text{تجزیه}} (۲x+۳)(x-۲) \overset{\overset{\text{اول که}}{۵۳}}{\equiv} ۰ \longrightarrow ۲x+۳ \overset{۵۳}{\equiv} ۰ \vee x-۲ \overset{۵۳}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۲ \overset{۵۳}{\equiv} ۰ \rightarrow x \overset{۵۳}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\text{تعریف}} x = ۵۳k+۲ \xrightarrow{k=۱۸} \underset{\text{بزرگترین سه رقمی}}{x} = ۹۵۶ \xrightarrow{\text{رقم یکان}} ۶ \\ ۲x+۳ \overset{۵۳}{\equiv} ۰ \rightarrow ۲x \overset{۵۳}{\equiv} \underbrace{-۳}_{۵۰} \xrightarrow[(۵۳,۲)=۱]{\div ۲} x \overset{۵۳}{\equiv} ۲۵ \xrightarrow{\text{تعریف}} x = ۵۳k+۲۵ \\ \xrightarrow{k=۱۸} \underset{\text{بزرگترین سه رقمی}}{x} = ۹۷۹ \xrightarrow{\text{رقم یکان}} ۹ \checkmark \end{cases}$$

ساقی سیم ساق من گر همه دُرد می‌دهد
کیست که تن چو جام می جمله دهن نمی‌کند

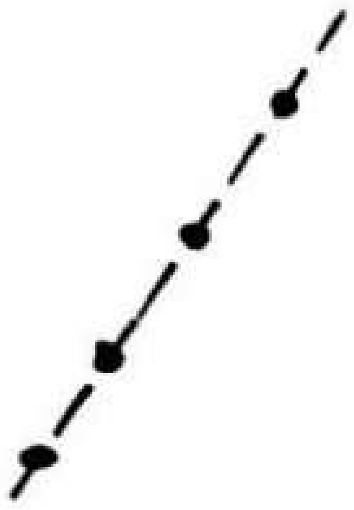
معادله‌ی سیاله (دیوفانتی)

معادله‌ی "سیاله" دو متغیری خطی

به شکل کلی زیر مطرح است

$$ax + by = c$$ ضرایب $a, b, c \in \mathbb{Z}$

مثلاً معادله‌ی سیاله‌ی $۳x + ۴y = ۸$ دو متغیری خطی است.



$\begin{cases} x = ۰ \\ y = ۲ \end{cases}$ یک جواب , ...

شرط وجود جواب

EX

مثال عددی
EX

معادله‌ی سیاله‌ی $۶x + ۱۵y = ۲۱$ جواب دارد ، زیرا

" " $۸x + ۱۲y = ۲۲$ جواب ندارد ، زیرا

سراسری به ازای کدام مقدار b معادله‌ی $(۱۵ + b)x + by = ۲۰$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۵
۳) ۱۵ ۴) ۳۰

سراسری به ازای کدام عدد طبیعی n ، معادله‌ی خط $۲۴x + ۳۹y = ۲n + ۱$ در مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ جواب دارد!

۱) ۲۹ ۲) ۳۳
۳) ۳۷ ۴) ۴۱

تست معادله‌ی سیاله‌ی $۳x + ۶y = a^2 + ۲$ به ازای چند مقدار $a \in \{۱, ۲, ۳, ..., ۲۰\}$ جواب دارد؟ (گزینه ۳)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲
۳) ۱۴ ۴) ۲۰

حل معادله سیاله دو متغیری خطی : به کمک تبدیل به معادله هم‌نهشتی

(معادله سیاله یا جواب ندارد یا بی‌شمار جواب صحیح دارد.)

EX

$$ax+by=c \Longrightarrow \begin{cases} ax-c=b(-y) \overset{\text{تعریف هم‌نهشتی}}{\Longrightarrow} ax \overset{|b|}{\equiv} c \\ \text{یا} \\ by-c=a(-x) \overset{''}{\Longrightarrow} by \overset{|a|}{\equiv} c \end{cases}$$

مثال: معادله سیاله خطی $۷x+۵y=۱۱$ را حل کنید.

Ex

تمرین Ex H.W: معادله سیاله خطی $۵x-۹y=۱۳$ را حل کنید.

سراسری مجموع ارقام کوچکترین عدد طبیعی سه رقمی x که در معادله $۵۷x-۸۷y=۳۴۲$ صدق می‌کند کدام است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

$$۵۷x-۸۷y=۳۴۲ \xrightarrow{\div ۳} ۱۹x-۲۹y=۱۱۴ \xrightarrow{\text{تبدیل به هم‌نهشتی}} ۱۹x-\underset{\text{ب}}{۲۹y} \overset{۲۹}{\equiv} ۱۱۴$$

$$\longrightarrow ۱۹x \overset{۲۹}{\equiv} ۱۱۴ \xrightarrow[(۲۹,۱۹)=۱]{\div ۱۹} x \overset{۲۹}{\equiv} ۶$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف}} x=۲۹k+۶ \,,\, k\in\mathbb{Z} \xrightarrow[\text{مقداردهی}]{k=۴} \underset{\text{کوچکترین سه رقمی طبیعی}}{x}=۱۲۲ \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} ۵ \checkmark$$

سراسری ۱۴۰۱ خ اگر ل بزرگ‌ترین عدد سه رقمی باشد که در معادله سیاله خطی $۱۵x+۲۱y=۹$ صدق کند، مقدار قرینه x کدام است؟

۱) ۱۳۹۸
۲) ۱۳۹۹
۳) ۱۳۹۱
۴) ۱۳۹۰

سراسری ۹۸ خ
سراسری ۱۴۰۱

معادله سیاله $۹x + ۱۳y = ۷۲۵$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

تست
H.W

معادله سیاله خطی $۱۳x + ۱۹y = ۲۴۳$ در بازهٔ صحیح $-۱۰۰ < x, y < ۱۰۰$ چند جواب دارد؟
(گزینه ۲)

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۳

سراسری ۹۰
(۹۵)

اگر $(۳۵۷, ۶۲۹) = ۳۵۷x + ۶۲۹y$ ، آنگاه کوچکترین عدد مثبت $x + y$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۱
۴) ۱۰

حل

$$(۳۵۷, ۶۲۹) = ۱۷ \xrightarrow{\text{معادله سیاله}} ۳۵۷x + ۶۲۹y = ۱۷$$

۱۷×۲۱ $\quad$ ۱۷×۳۷

$$\xrightarrow{\div ۱۷} ۲۱x + ۳۷y = ۱$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل به هم‌نهشتی}} ۲۱x \overset{۳۷}{\equiv} ۱ \longrightarrow ۲۱x \overset{۳۷}{\equiv} ۱ \longrightarrow$$

مثال / Ex به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

سراسری ۹۸ / Ex قیمت هر واحد از دو نوع کالا به ترتیب ۲۲۰ و ۱۴۰ تومان است. با مبلغ ۱۹۰۰۰ تومان، به چند طریق می‌توان از این دو نوع کالا خریداری کرد؟

۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۱۳

سراسری ۹۳ / H.W به چند طریق می‌توان با ۳۷۰۰ ریال تمبرهای ۱۵۰ و ۲۵۰ ریالی خرید؟

(گزینه ۳)

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

سراسری خ برای خرید کتاب به قیمت ۷۵۵۰ تومان، به تعداد A بن ۲۰۰ تومانی و B بن ۱۵۰ تومانی پرداخت نموده‌ایم. حداقل A+B کدام است؟ ← کمترین تعداد بن پرداخت شده؟

۱) ۳۵
۲) ۳۶
۳) ۳۷
۴) ۳۸

مثال / Ex به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلوئی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلوئی وزن کرد؟

$$۳x + ۵y = ۲۳ \longrightarrow ۳x \overset{۵}{\equiv} \underset{۳}{\cancel{۲۳}} \xrightarrow[(۵,۳)=۱]{\div ۳} x \overset{۵}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{تعریف}} \boxed{x = ۵k+۱}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله سیاله}} ۳(۵k+۱) + ۵y = ۲۳ \Longrightarrow ۱۵k + ۵y = ۲۰ \xrightarrow{\div ۵} \boxed{y = -۳k+۴}$$

$$\xrightarrow{\text{جواب‌های حسابی}} \left.\begin{cases} x \geqslant ۰ \rightarrow ۵k+۱ \geqslant ۰ \rightarrow k \geqslant -\frac{۱}{۵} \\ y \geqslant ۰ \rightarrow -۳k+۴ \geqslant ۰ \rightarrow k \leqslant \frac{۴}{۳} \end{cases}\right\} \xrightarrow[k\in\mathbb{Z}]{\cap} k = ۰, ۱ \rightarrow \text{۲ روش}$$

مثال / Ex تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایره هم مرکز، تیراندازی می‌کند. اگر به دایره با شعاع کوچکتر بزند، ۵ امتیاز و اگر به دایره بزرگتر و خارج دایره کوچکتر بزند، ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر همه تیرها به صفحه هدف اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد، چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟

تمرین / EX / H.W شخصی در یک مسابقه علمی شرکت کرده است و به سوال‌های ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و در مجموع ۷۴ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به دست آورد؟

حل معادلهٔ سیالهٔ دو متغیری خطی به کمک حدس یک جواب آن

اختیاری

اگر یک جواب معادلهٔ سیاله را داشته باشیم، سایر جواب‌ها به کمک قضیهٔ زیر بدست می‌آید:

قضیه : اگر اعداد صحیح x_0 و y_0 یک جواب (حدسی) معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ باشند و $d=(a,b)$، که $d|c$، آن‌گاه سایر جواب‌ها (جواب‌های کلی) عبارت اند از:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \end{cases} \quad (k \in Z)}$$

سراسری : اگر x و y جواب‌های معادلهٔ سیالهٔ $9x+11y=18$ باشند، $x+y$ کدام است؟

۱) $۲+۲k$
۲) $۲+۳k$
۳) $۳+۲k$
۴) $۳+۳k$

ماسه‌ها فراموش کارترین رفیقان ساحلند پا به پایت می‌کشند آنقدر که گاهی سماجتشان در همراهی تو صدارت را در می‌آورد اما کافی است تا اندک بادی بوزد یا خرده موجی برخیزد تا بکلی همیشه از خاطر ضعیفشان رد پایت پاک شود ... ما از نسل ماسه نیستیم از نسل صدفیم صدفهایی که به پاس اقامتی چندروزه در دریا برای همیشه صدای دریا را بر گوش شنوائی زمزمه میکنند ...

اثبات مستقیم (استدلال استنتاجی)

$P \Longrightarrow Q$

فرض ‏ ‏ حکم

EX

روش نتیجه‌گیری با استفاده از مطالبی که درستی آن‌ها نشان داده شده است یا حقایقی که درستی آن‌ها پذیرفته شده است.

قضیه‌ها (مسئله‌ها)

اصل‌ها

مثال: هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات کنید.
EX

الف) مجموع دو عدد فرد، عددی زوج است.

حل

$$\begin{cases} a = \text{فرد} \Rightarrow a = ۲k+۱ \\ b = \text{فرد} \Rightarrow b = ۲k'+۱ \end{cases} \rightarrow a+b = ۲k+۲k'+۲ = ۲(\underbrace{k+k'+۱}_{k''}) = ۲k'' = \text{زوج}$$

ب) حاصل ضرب سه عدد متوالی طبیعی، بر ۶ بخش‌پذیر است.

(صفحهٔ ۹ جزوه)

پ) مجموع (تفاضل) هر دو عدد گویا، عددی گویا ست./ حاصل ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

فاقد عامل مشترک

حل

$$\begin{cases} a = \text{عددی گویا} \xrightarrow{q\neq ۰} a = \frac{p}{q} \quad (\text{نسبت به هم اول‌اند } q \text{ و } p) \\ b = \text{عددی گویا} \xrightarrow{q'\neq ۰} b = \frac{p'}{q'} \quad (\text{" " " } q' \text{ و } p') \end{cases} \xrightarrow{\pm} a \pm b = \frac{p}{q} \pm \frac{p'}{q'} = \frac{\overbrace{pq' \pm p'q}^{p''}}{\underbrace{qq'}_{q''\neq ۰}} = \frac{p''}{q''} = \text{گویا}$$

✓

ت) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه ۴k+۱ مربع کامل است.

حل

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{k = n\cdot(n+۱)} \Longrightarrow ۴k+۱ = ۴n\cdot(n+۱)+۱ = ۴n^۲+۴n+۱ = (۲n+۱)^۲ = \text{مربع}$$

ث) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^۲+b^۲$ زوج است.

a و b هردو فردند

$$\begin{cases} a = ۲k+۱ \longrightarrow a^۲ = ۴k^۲+۴k+۱ \\ b = ۲k'+۱ \longrightarrow b^۲ = ۴k'^۲+۴k'+۱ \end{cases} \longrightarrow a^۲+b^۲ = \underbrace{۴k^۲+۴k'^۲+۴k+۴k'+۲}_{۲(\cdots\cdots) = ۲k'' = \text{زوج}}$$

✓

ج) مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

حل

$$n = \text{فرد} \Rightarrow \underset{k\in\mathbb{Z}}{n = ۲k+۱} \longrightarrow n^۲ = ۴k^۲+۴k+۱ = \underbrace{۴k(k+۱)}_{\text{زوج}}+۱ = \text{فرد}$$

$$n = \text{فرد} \Rightarrow \underset{k\in\mathbb{Z}}{n = ۲k+۱} \rightarrow n^۳ = ۸k^۳+۱۲k^۲+۶k+۱ = ۲(\underbrace{۴k^۳+۶k^۲+۳k}_{k'\in\mathbb{Z}})+۱ = ۲k'+۱ = \text{فرد}$$

چ) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی، همان عدد وسطی است.

$$\text{پنج عدد طبیعی متوالی} \rightarrow (n-۲), (n-۱), \underbrace{n}_{\text{عدد وسط}}, (n+۱), (n+۲)$$

$$\rightarrow \text{میانگین} = \frac{(n-۲)+(n-۱)+n+(n+۱)+(n+۲)}{۵} = n \longleftarrow \text{عدد وسطی}$$

$$a+۱, a+۲, \underline{\underline{a+۳}}, a+۴, a+۵ \longrightarrow \bar{a} = \frac{۵a+۱۵}{۵} = a+۳$$

اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها (روش استباع)

بر اساس هم‌ارزی مقابل:

$$\boxed{(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)}$$

کارت ملی — یا — گواهینامه — کار انجام می‌شود

کارت ملی — و — گواهینامه

مثال: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، عدد $n^۲-۵n+۷$ عددی فرد است.
EX

حل: برای n دو حالت وجود دارد (از نظر زوج و فرد بودن):

$$n = \text{زوج} \longrightarrow \underset{(k\in N)}{n=۲k} \Rightarrow n^۲-۵n+۷=(۲k)^۲-۵(۲k)+۷$$

$$= \underbrace{\underbrace{۴k^۲}_{\text{زوج}}-\underbrace{۱۰k}_{\text{زوج}}}_{\text{زوج}}+\underbrace{۷}_{\text{فرد}} = \text{فرد}$$

یا

$$n = \text{فرد} \longrightarrow \underset{(k\in N)}{n=۲k+۱} \Rightarrow n^۲-۵n+۷=(۲k+۱)^۲-۵(۲k+۱)+۷$$

$$= ۴k^۲+۴k+۱-۱۰k-۵+۷$$

$$= \underbrace{\underbrace{۴k^۲}_{\text{زوج}}-\underbrace{۶k}_{\text{زوج}}}_{\text{زوج}}+\underbrace{۳}_{\text{فرد}} = \text{فرد}$$

یعنی با فرض زوج یا فرد بودن n، عدد $n^۲-۵n+۷$ همواره فرد است.

مثال: ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=۰$، آن‌گاه $a=۰$ یا $b=۰$.
EX

اثبات با در نظر گرفتن تمام حالات

a دو حالت دارد:

$$a=۰ \longrightarrow \text{حکم ثابت شد}$$

یا

$$a\neq ۰ \longrightarrow a^{-1}\ \text{وجود دارد} \longrightarrow \underset{\text{فرض شد}}{ab=۰} \xrightarrow{a^{-1}} \underbrace{a^{-1}.a}_{۱}.b=\underbrace{a^{-1}\times ۰}_{۰} \rightarrow b=۰ \quad \text{حکم ثابت شد}$$

$$a,b\in \mathbb{R} : ab=۰ \Longrightarrow (a=۰ \vee b=۰)$$

مثال: اگر $A=\{۳,۴\}$ یک زیرمجموعه از مجموعهٔ $S=\{۱,۲,\dots,۶\}$ و $n\in S$ باشد، ثابت کنید اگر عدد $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ یک عدد زوج باشد، آن‌گاه $n\in A$.
EX

حل: با در نظر گرفتن همه حالت‌ها برای $n\in S$ داریم:

$$n=۱ \rightarrow \frac{۱^۲(۱+۱)^۲}{۴}=۱ \quad \text{فرد} \ \times$$

$$n=۲ \rightarrow \frac{۲^۲(۲+۱)^۲}{۴}=۹ \quad \text{فرد} \ \times$$

$$n=۳ \rightarrow \frac{۳^۲(۳+۱)^۲}{۴}=۳۶ \quad \text{زوج} \ ✓$$

$$n=۴ \rightarrow \frac{۴^۲(۴+۱)^۲}{۴}=۱۰۰ \quad \text{زوج} \ ✓$$

$$n=۵ \rightarrow \frac{۵^۲(۵+۱)^۲}{۴}=۲۲۵ \quad \text{فرد} \ \times$$

$$n=۶ \rightarrow \frac{۶^۲(۶+۱)^۲}{۴}=۴۴۱ \quad \text{فرد} \ \times$$

پس فقط برای $n=۳,۴$، عدد مذکور زوج است و در نتیجه $n\in A$.

نکته اگر عدد $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ ، زوج باشد، آنگاه $\boxed{n=۴k}$ یا $\boxed{n=۴k-۱}$

اثبات:

$$\frac{n^۲.(n+۱)^۲}{۴} = \text{زوج} \rightarrow \left(\frac{n.(n+۱)}{۲}\right)^۲ = \text{زوج} \rightarrow \frac{n(n+۱)}{۲} = \underbrace{۲t}_{\text{زوج}}$$

$$\rightarrow n.(n+۱) = \underbrace{۴t}_{\text{مضرب ۴}} \rightarrow \begin{cases} n = \text{مضرب ۴} \rightarrow n = ۴k \\ \text{یا} \\ n+۱ = \text{مضرب ۴} \rightarrow n+۱ = ۴k \rightarrow n = ۴k-۱ \end{cases}$$

تست به ازای چند مقدار $n \in \{۱, ۲, \dots, ۳۰\}$ ، عدد $\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$ زوج است؟

۱) ۷ ۲) ۱۴ ✓
۳) ۶ ۴) ۱۲

$$\begin{cases} n=۴k \longrightarrow \underset{\text{بین ۱ تا ۳۰}}{\text{تعداد مضارب ۴}} = \left[\frac{۳۰}{۴}\right] = ۷ \rightarrow ۴, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۰, ۲۴, ۲۸ \\ \text{یا} \\ n = ۴k-۱ \rightarrow ۱ \leq ۴k-۱ \leq ۳۰ \xrightarrow{+۱} ۲ \leq ۴k \leq ۳۱ \xrightarrow{\div ۴} \frac{۱}{۲} \leq k \leq ۷, \dots \rightarrow \boxed{k = ۱, \dots, ۷} \end{cases}$$

چند مجموع مهم:

الف) $۱ + ۲ + \dots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$

ب) $۱^۲ + ۲^۲ + \dots + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

پ) $\underbrace{۱^۳ + ۲^۳ + \dots + n^۳}_{\text{مجموع مکعب‌های اعداد طبیعی متوالی شروع از عدد ۱}} = \underbrace{\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲}_{\text{مربع مجموع همان اعداد}}$

به ازای چند مقدار $n \in \{۱, ۲, \dots, ۴۷\}$ ، عدد $\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$ زوج است؟

$$\begin{cases} n = ۴k \longrightarrow \text{تعداد مضارب ۴} = \left[\frac{۴۷}{۴}\right] = \boxed{۱۱} \\ \text{یا} \\ n = ۴k-۱ \longrightarrow ۱ \leq ۴k-۱ \leq ۴۷ \\ \xrightarrow{+۱} ۲ \leq ۴k \leq ۴۸ \xrightarrow{\div ۴} \frac{۱}{۲} \leq k \leq ۱۲ \\ \rightarrow \boxed{k = ۱, ۲, \dots, ۱۲} \end{cases}$$

۲۳ جواب ✓

مثال نقض ← مثالی که یک گزاره کلی را رد می‌کند.

مثال درستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.
Ex

اعداد مرسن ←

الف) برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد $۲^n-۱$ اول است.

مثال نقض ← $n=۴ \rightarrow ۲^۴-۱=۱۵ \neq$ اول

بی‌نهایت عدد اول به صورت $۲^n-۱$ وجود دارد.
اگر عدد $۲^n-۱$ اول باشد، آنگاه n اول است.

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y، تساوی $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ برقرار است.

مثال نقض ← $x=۴ , y=۹ \Rightarrow \sqrt{۴+۹}=\sqrt{۴}+\sqrt{۹} \Rightarrow \sqrt{۱۳} \neq ۲+۳$

پ) برای هر دو عدد حقیقی نامنفی x و y، تساوی $\sqrt{x.y}=\sqrt{x}\times\sqrt{y}$ برقرار است.

مثال نقض ← $x=-۱ , y=-۴ \rightarrow \underbrace{\sqrt{(-۱)(-۴)}}_{۲}=\underbrace{\sqrt{-۱}\times\sqrt{-۴}}_{\text{بی معنی}}$

ت) برای هر دو عدد حقیقی x و y، تساوی $[x+y]=[x]+[y]$ برقرار است.

مثال نقض ← $x=۲,۳ , y=۶,۷ \rightarrow [۲,۳+۶,۷]=[۲,۳]+[۶,۷] \rightarrow ۹ \neq ۲+۶$

بی‌نهایت عدد اول به صورت $۲^{۲^n}+۱$ وجود دارد.
اگر عدد $۲^m+۱$ اول باشد، آنگاه m توانی از ۲ است یعنی $m=۲^n$

اعداد فرما ←

ث) به ازای همه عددهای طبیعی n، عدد $۲^{۲^n}+۱$ عددی اول است.

مثال نقض ← $n=۵ \rightarrow ۲^{۲^۵}+۱=۲^{۳۲}+۱=۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷=۶۴۱\times۶۷۰۰۴۱۷ \neq$ اول

ج) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. (تناقض)

مثال نقض ← $\begin{cases} a=۲+\sqrt{۳} & \text{(گنگ)} \\ b=۲-\sqrt{۳} & \text{(گنگ)} \end{cases} \rightarrow a+b=۴ \neq$ گنگ

$\left(\begin{matrix} a=\sqrt{۳} \\ b=-\sqrt{۳} \end{matrix} \rightarrow a+b=۰\right.$ گویا)

چ) حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

مثال نقض ← $\begin{cases} a=۲+\sqrt{۳} \\ b=۲-\sqrt{۳} \end{cases} \rightarrow a.b=(۲+\sqrt{۳}).(۲-\sqrt{۳})=۴-۳=۱ \neq$ گنگ

$\left(\begin{matrix} a=\sqrt{۲} \\ b=\sqrt{۸} \end{matrix} \rightarrow ab=۴\right.$ گویا)

ح) A، B و C سه مجموعه از مرجع U باشند،

اگر $A\cup B=A\cup C$، آنگاه $B=C$
اگر $A\cap B=A\cap C$، آنگاه $B=C$
اگر $A-B=A-C$، آنگاه $B=C$

مثال نقض برای اولی ← $A=\{a,b,c,d\} , B=\{c,e\} , C=\{d,e\}$

$A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$
$A\cup C=\{a,b,c,d,e\}$ $\rightarrow A\cup B=A\cup C$ اما $B\neq C$

عکس نقیض یک گزاره شرطی با خودش هم ارز است

اثبات غیرمستقیم (روش برهان خُلف)

$$\left(\underset{\text{فرض}}{p} \Rightarrow \underset{\text{حکم}}{q} \equiv \underset{\text{نقیض حکم}}{\sim q} \Rightarrow \underset{\text{نقیض فرض}}{\sim p}\right)$$

Ex

در این روش، فرض می‌کنیم حکم نادرست است (فرضِ خُلف). پس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض خلف، به یک نتیجهٔ غیرممکن یا نتیجه‌ای متضاد با فرض می‌رسیم (تناقض) و از آن جا با توجه به منطقی بودن تمام مراحل، معلوم می‌شود که فرضِ نادرستی حکم (فرضِ خلف) باطل است و درستی حکم ثابت می‌شود.

مثال: ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.
Ex

حل: فرض کنیم ۲ عددی گویا و x عددی گنگ است. نشان می‌دهیم $۲+x$ یک عدد گنگ است (حکم).
برهان خلف: فرض می‌کنیم (فرض خلف) $۲+x$ گنگ نیست، پس $۲+x$ عددی گویا است.
از آن جایی که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است، پس $\underbrace{(۲+x)-۲}_{x}$ عددی گویا است
که با فرض گنگ بودن x در تناقض است. پس فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌گردد.

مثال: ثابت کنید حاصل ضرب هر عدد گویای غیرصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.
Ex

حل: فرض کنیم ۲ عددی گویا و غیرصفر و x عددی گنگ است. نشان می‌دهیم $۲x$ عددی گنگ است (حکم)
برهان خلف: فرض می‌کنیم (فرض خلف) $۲x$ گنگ نیست، پس $۲x$ عددی گویا است. می‌دانیم
معکوس هر عدد گویا، عددی گویا است و چون حاصل ضرب دو عدد گویا همواره گویا می‌باشد،
پس $(۲x)(\frac{۱}{۲})$، یعنی x، باید گویا باشد که با فرض گنگ بودن x در تناقض است.

مثال: ثابت کنید عکس هر عدد گنگ، عددی گنگ است.
Ex

حل: فرض می‌کنیم x عددی گنگ است. نشان می‌دهیم $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ می‌باشد (حکم).
برهان خلف: فرض می‌کنیم (فرض خلف) $\frac{1}{x}$ گنگ نیست. پس $\frac{1}{x}$ گویا است. اما چون
معکوس هر عدد گویا، عددی گویا است، پس $\frac{1}{\frac{1}{x}}$، یعنی x باید گویا باشد، که با فرض
گنگ بودن x در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

نتیجه:

≠۰ گویا	گنگ	×
گنگ	?	گنگ
گویا	گنگ	≠۰ گویا

گویا	گنگ	±
گنگ	?	گنگ
گویا	گنگ	گویا

مثال: EX

اگر α و β دو عدد گنگ باشند و $\alpha+\beta$ عددی گویا باشد، ثابت کنید دو عدد $\alpha-\beta$ و $\alpha+۲\beta$ گنگ اند.

$$\alpha+۲\beta = \underbrace{\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{گویا}} + \underbrace{\beta}_{\text{گنگ}}}_{\text{گنگ}} \checkmark$$

$$\alpha-\beta = \underbrace{\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{گویا}} + \underbrace{\underbrace{(-۲)}_{\text{گویای غیرصفر}}\underbrace{\beta}_{\text{گنگ}}}_{\text{گنگ}}}_{\text{گنگ}} \checkmark$$

مثال EX

$a_۱$ ، $a_۲$ و $a_۳$ عددهایی صحیح هستند و $b_۱$ ، $b_۲$ و $b_۳$ همان اعداد، ولی به ترتیب دیگری می‌باشند.
ثابت کنید $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ عددی زوج است.

مثال عددی

$$\begin{cases} a_۱ = ۳ \\ a_۲ = -۵ \\ a_۳ = ۸ \end{cases} \qquad \begin{cases} b_۱ = -۵ \\ b_۲ = ۸ \\ b_۳ = ۳ \end{cases}$$

$$(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳) = (\underbrace{۳-(-۵)}_{۸})(\underbrace{-۵-۸}_{-۱۳})(\underbrace{۸-۳}_{۵}) = \text{زوج}$$

اثبات (برهان خلف): فرض می‌کنیم $(a_۱-b_۱).(a_۲-b_۲).(a_۳-b_۳)$ زوج نیست و فرد است
پس هرکدام از اعداد $a_۱-b_۱$ ، $a_۲-b_۲$ و $a_۳-b_۳$ نیز فردند.

اما

$$(a_۱-b_۱)+(a_۲-b_۲)+(a_۳-b_۳) = (\underbrace{a_۱+a_۲+a_۳}_{K}) - (\underbrace{b_۱+b_۲+b_۳}_{K}) = ۰ \rightarrow \text{زوج}$$

✗

زیرا جمع سه عدد فرد، باید عددی فرد بشود، حال آن که صفر عددی زوج است
پس فرض خلف باطل است و حکم ثابت است.

همیشه فاصله‌ای هست دچار باید بود
و عشق صدای فاصله‌هاست صدای فاصله‌هایی که غرق ابهامند

اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز)

$$(\underbrace{P}\Longleftrightarrow\underbrace{Q})$$

Ex

در این روش برای اثبات درستی (نادرستی) یک گزاره، با استفاده از عملیات و قوانین درست ریاضی، درستی (نادرستی) گزارهٔ هم‌ارز با آن گزاره را نشان می‌دهیم و این عملیات را تا جایی ادامه می‌دهیم که به یک گزارهٔ همیشه درست (همیشه نادرست) برسیم. در این صورت حکم هم‌ارز با آن نیز درست (نادرست) است.

مثال: اگر $a, b \in \mathbb{R}$، کدام یک از ترکیب های دوشرطی زیر درست است؟ ؟؟

Ex

ن الف) $a=b \Longleftrightarrow a^۲=b^۲$

$$\left(a^۲=b^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} \underbrace{|a|=|b|}_{\text{درست}}\right)$$

✓ ب) $a=b \Longleftrightarrow a^۳=b^۳$

ن پ) $a<b \Longleftrightarrow a^۲<b^۲$

$$-۴<۲ \longrightarrow \underset{\text{غ}}{(-۴)^۲<۲^۲}$$

✓ ت) $a<b \Longleftrightarrow a^۳<b^۳$

مثال: اگر $a>۰$، ثابت کنید $\boxed{a+\frac{۱}{a}\geq ۲}$

Ex

اثبات بازگشتی : شروع از حکم

$$✓\ a+\frac{۱}{a}\geq ۲ \overset{a\cdot}{\Longleftrightarrow} a^۲+۱\geq ۲a \Longleftrightarrow a^۲-۲a+۱\geq ۰ \Longleftrightarrow (a-۱)^۲\geq ۰$$

گزارهٔ همیشه درست

مثال: ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

Ex

حل: برای دو عدد نامنفی a و b نشان می‌دهیم $\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}$

$$✓\ \frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab} \Longleftrightarrow a+b\geq ۲\sqrt{ab} \Longleftrightarrow a+b-۲\sqrt{ab}\geq ۰ \Longleftrightarrow \underbrace{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲\geq ۰}_{\text{گزارهٔ همیشه درست}}$$

مثال: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید

Ex

$$\boxed{a^۲+ab+b^۲\geq ۰}$$

جملهٔ حاصل‌ضربی ← شروع با حکم و سپس ضرب در ۲

حل

$$a^۲+ab+b^۲\geq ۰ \Longleftrightarrow ۲\underbrace{a^۲}_{a^۲+a^۲}+۲ab+۲\underbrace{b^۲}_{b^۲+b^۲}\geq ۰ \Longleftrightarrow \overbrace{a^۲+b^۲+۲ab}+\overbrace{a^۲+b^۲}\geq ۰$$

$$\Longleftrightarrow (a+b)^۲+a^۲+b^۲\geq ۰$$

گزارهٔ همیشه درست

مثال: اگر x و y دو عدد حقیقی غیرصفر باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲$

Ex

حل/

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲ \Longleftrightarrow \frac{x^۲+y^۲}{xy}\geq ۲ \Longleftrightarrow x^۲+y^۲\geq ۲xy \Longleftrightarrow x^۲-۲xy+y^۲\geq ۰$$

$$\Longleftrightarrow (x-y)^۲\geq ۰$$

گزارهٔ همیشه درست

مثال : برای دو عدد حقیقی x و y نشان دهید
Ex

$$\boxed{x^۲+y^۲+۱ \geq xy+x+y}$$

حل $x^۲+y^۲+۱ \geq xy+x+y \iff ۲x^۲+۲y^۲+۲ \geq ۲xy+۲x+۲y$

$$\iff \overset{x^۲+x^۲}{۲x^۲}+\overset{y^۲+y^۲}{۲y^۲}+\overset{۱+۱}{۲}-۲xy-۲x-۲y \geq ۰ \iff \underbrace{x^۲-۲xy+y^۲}_{}+\underbrace{x^۲-۲x+۱}_{}+\underbrace{y^۲-۲y+۱}_{} \geq ۰$$

$$\iff (x-y)^۲+(x-۱)^۲+(y-۱)^۲ \geq ۰$$ گزاره همیشه درست

مثال: برای سه عدد حقیقی x، y و z نشان دهید
Ex

$$\boxed{x^۲+y^۲+z^۲ \geq xy+yz+zx}$$

✓ $x^۲+y^۲+z^۲ \geq xy+yz+zx \iff ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲ \geq ۲xy+۲yz+۲zx$

$$\iff ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲-۲xy-۲yz-۲zx \geq ۰$$

$$\iff \underbrace{x^۲-۲xy+y^۲}_{}+\underbrace{y^۲-۲yz+z^۲}_{}+\underbrace{z^۲-۲zx+x^۲}_{} \geq ۰$$

$$\iff (x-y)^۲+(y-z)^۲+(z-x)^۲ \geq ۰$$ گزاره همیشه درست

مثال : اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن $n^۲$ هم ارزند؟
Ex

$$n = \text{زوج} \iff n^۲ = \text{زوج}$$

حل: اگر n زوج باشد، آنگاه $n=۲k$، که $k \in \mathbb{N}$، پس
$n^۲=(۲k)^۲=۴k^۲=۲\underbrace{(۲k^۲)}_{k' \in \mathbb{Z}}=۲k'$
یعنی $n^۲$ نیز زوج است. حال نشان می‌دهیم که اگر $n^۲$ زوج باشد، آنگاه n نیز زوج است.
برهان خلف: فرض می‌کنیم n زوج نیست، پس n فرد است. یعنی $n=۲k+۱$، پس

$$n^۲=(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۲\underbrace{(۲k^۲+۲k)}_{k' \in \mathbb{Z}}+۱=۲k'+۱ \neq \text{زوج}$$

که با فرض زوج بودن $n^۲$ متناقض است. پس فرض خلف باطل است.

تمرین : اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید
Ex.
H.W

الف) $y^۲+۱ \geq ۲x(y-x+۱)$

ب) $\dfrac{x}{y^۲}+\dfrac{y}{x^۲} \geq \dfrac{۱}{x}+\dfrac{۱}{y} \qquad (x,y>۰)$

مثال : عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^۳ < x^۲$

EX

اثبات وجودی

(یک مورد کافی است)

$S=(-\infty,۰)\cup(۰,۱)$

$x=-۲ \longrightarrow (-۲)^۳<(-۲)^۲$

مثال : آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که $(\underset{۰}{x}+\underset{\text{هرچه}}{y})^۲=x^۲+y^۲$

EX

$S=(x\in\mathbb{R} \wedge y=۰) \vee (x=۰ \wedge y\in\mathbb{R})$

مثال: آیا اعداد حقیقی و ناصفر a و b وجود دارند که $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}=\frac{۱}{a+b}$

EX

خیر

$(a+b\neq ۰)$

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}=\frac{۱}{a+b} \Longleftrightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{۱}{a+b} \Longleftrightarrow (a+b)^۲=ab \Longleftrightarrow a^۲+b^۲+ab=۰$$

$$\Longleftrightarrow ۲a^۲+۲b^۲+۲ab=۰ \Longleftrightarrow (a^۲+b^۲+۲ab)+a^۲+b^۲=۰$$

$$\Longleftrightarrow (a+b)^۲+a^۲+b^۲=۰ \Longleftrightarrow a+b=a=b=۰$$

خلاف فرض

نکته اگر a ، b ، c و d چهار عدد حقیقی باشند، برای اثبات نامساوی $(ac+bd)^۲\leqslant(a^۲+b^۲)(c^۲+d^۲)$ به کمک اثبات بازگشتی (روش گزاره‌ی هم‌ارز) ، کدام رابطهٔ همیشه درست به دست می‌آید؟

۱) $(ab+cd)^۲\geqslant ۰$ ۲) $(ad-bc)^۲\geqslant ۰$ ✓ ۳) $a^۲+b^۲+c^۲+d^۲\geqslant ۰$ ۴) $(ac-bd)^۲\geqslant ۰$

$$(ac+bd)^۲\leqslant(a^۲+b^۲)(c^۲+d^۲)$$

$$\Longleftrightarrow \cancel{a^۲c^۲}+\cancel{b^۲d^۲}+۲acbd\leqslant \cancel{a^۲c^۲}+a^۲d^۲+b^۲c^۲+\cancel{b^۲d^۲}$$

$$\Longleftrightarrow ۰\leqslant a^۲d^۲+b^۲c^۲-۲abcd$$

$$\Longleftrightarrow ۰\leqslant (ad-bc)^۲$$

گزاره همیشه درست