پویش جهادی دبیران دبیرستان ماندگار البرز



۱۴۰۲-۱۴۰۱

به نام آنکه جان را فکرت آموخت

درس :

ریاضیات گسسته

مبحث :

نظریهٔ اعداد



اگر ریاضیات را به عنوان ملکه‌ی تمام علوم در نظر بگیریم ، نظریه‌ی اعداد سلطان این ملکه است. "گاوس"

تهیه و تنظیم : مهندس ترکمن

CamScanner

CamScanner

قضیه تقسیم (الگوریتم تقسیم)

Ex اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، آنگاه اعدادی صحیح و یکتا مانند q و r همواره وجود دارند به طوری که

$$a = bq + r \quad : \quad 0 \leq r < b$$

شرط تقسیم ⟵ فرمول تقسیم

a: مقسوم — b: مقسوم علیه — q: خارج قسمت — r: باقی‌مانده

باقی‌مانده همواره از مقسوم‌علیه کوچکتر است و همواره نامنفی است

$$\frac{a}{r} \;\Big|\; \frac{b}{q}$$

if $b \in \mathbb{Z} \xrightarrow[\text{تقسیم بر صفر بی‌معنی است}]{b \neq 0} 0 \leq r < |b|$

تذکر ۱ در هر تقسیم از اعداد طبیعی اگر مقسوم از مقسوم‌علیه کوچکتر باشد، باقی‌مانده همان مقسوم است.

تذکر ۲ (اساسی) Ex

در هر تقسیم از اعداد طبیعی، اگر خارج قسمت مخالف صفر باشد، آنگاه مقسوم همواره از (۹۶) برابر باقی‌مانده بزرگ‌تر است.

اثبات

تذکر ۳ (اساسی) در هر تقسیم، اگر مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر عدد صحیح h بخش‌پذیر باشند، آنگاه

مثال عددی

تذکر ۴ در قضیه تقسیم همواره داریم

اثبات

مثال عددی

نتیجه:

مثال: تعداد مضرب‌های ۷ بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ برابر است با ؟

سراسری چند عدد سه‌رقمی مضرب ۳۷ وجود دارد؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۶ ۳) ۲۵ ۴) ۲۴

حل چند مسأله‌ی مهم در تقسیم

مسأله ۱ (مشابه سراسری) Ex: در یک تقسیم ۸۸ واحد به مقسوم و ۶ واحد به مقسوم‌علیه افزوده‌ایم، خارج قسمت تغییری نکرده است ولی باقی‌مانده ۲ واحد کم شده است. خارج قسمت این تقسیم را بیابید.

مسأله ۲ چند عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰ وجود دارد که در تقسیم بر عدد ۴ باقی‌مانده‌ی ۳ داشته باشد؟

مسأله ۳ چند عدد طبیعی کوچکتر از ۵۰۰ وجود دارد که در تقسیم بر عدد طبیعی b خارج قسمت و باقی‌مانده به ترتیب ۱۱ و ۳۹ باشد!

مسأله ۴ Ex (مشابه سراسری): در یک تقسیم مقسوم‌علیه ۱۷۷ و باقی‌مانده دو برابر مکعب خارج قسمت است. بیشترین مقدار مقسوم را بیابید.

CamScanner

Ex **مسئله** در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷ باقی‌مانده تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کمتر است. بزرگترین مقدار a مضرب کدام عدد است؟

۱) ۹
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۶

تست در یک تقسیم، مقسوم علیه ۲۳ و باقی‌مانده $\frac{1}{3}$ خارج قسمت است. بیشترین مقدار خارج قسمت کدام است؟

۱) ۶۹
۲) ۶۸
۳) ۶۷
۴) ۶۶

Ex **مسئله** باقی‌مانده تقسیم اعداد صحیح m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ است. باقی‌مانده تقسیم عدد $(3m-5n)$ بر ۱۷ کدام است؟

مثال ۶ در تقسیم عدد a بر ۶۳ باقی‌مانده ۱۷ است. اگر ۶۰ واحد به a اضافه کنیم، باقی‌مانده و خارج قسمت چه تغییری می‌کنند؟

۱) سه واحد کم می‌شود - یک واحد اضافه می‌شود.
۲) سه واحد اضافه می‌شود - یک واحد اضافه می‌شود.
۳) سه واحد اضافه می‌شود - تغییر نمی‌کند.
۴) سه واحد کم می‌شود - دو واحد اضافه می‌شود.

مثال ۷ در یک تقسیم مقسوم علیه ۵۳ و باقی‌مانده ۱۸ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد به طوری که خارج قسمت تغییری نکند؟

مثال ۸ (مشابه سابق) در یک تقسیم باقی‌مانده ۲۹ و خارج قسمت ۷ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم علیه اضافه کرد به طوری که خارج قسمت و مقسوم تغییری نکنند؟

CamScanner

مسأله ۹ / Ex باقی مانده‌ی تقسیم عدد صحیح a بر ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ است. باقی مانده‌ی تقسیم a بر ۵۶ چقدر است؟

مسأله ۱۰ در تقسیم عدد ۷۱۵ بر عدد طبیعی a، خارج قسمت ۱۲ است. برای a چند جواب وجود دارد؟

مسأله ۱۱ در یک تقسیم باقی مانده ۹۵ و مقسوم ۱۰۰۰ واحد بیش‌تر از مقسوم علیه است. خارج قسمت این تقسیم را بیابید.
(سراسری)

سراسری در تقسیم عدد ۱۶۵ بر عدد طبیعی a، خارج قسمت مجذور باقی مانده است. چند عدد a می‌توان یافت؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

مسأله ۱۲ در یک تقسیم از اعداد طبیعی باقی مانده بیش‌ترین مقدار خود را دارد و مقسوم ۱۲ برابر باقی مانده است. اجزای این تقسیم را بیابید.

سراسری در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b باقی مانده و خارج قسمت هر دو مساوی q اند. اگر ۳ واحد از مقسوم علیه کم شود، ۵ واحد به خارج قسمت اضافه شده و باقی مانده صفر می‌شود. مقادیر q کدام‌اند؟

۱) ۵ و ۸ ۲) ۵ و ۱۰
۳) ۴ و ۹ ۴) ۸ و ۴

CamScanner
CamScanner

نکته

تست باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد صحیح a بر ۱۷ برابر ۱۱ است. اگر a مضرب ۳ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $\frac{a}{3}$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۷
۳) ۲ ۴) ۱۵

سراسری در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده ۱۷ و خارج قسمت ۲۵ می‌باشد. اگر a مضرب ۶ باشد، رقم دهگان کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷
۳) ۶ ۴) ۹

سراسری ۹۲ (خ۹۹) در تقسیم عدد طبیعی سه رقمی a بر عدد طبیعی b، خارج قسمت ۲۱ و باقی‌مانده ۳۷ است. چند عضو از مجموعه جواب‌های a مضرب ۵ می‌باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

سراسری ۹۹ چند عدد طبیعی مضرب ۹ وجود دارد که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن اعداد بر ۴۳۰، با مجذور خارج قسمت برابر باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵
۳) ۶ ۴) ۷

سراسری ۱۴۰۰ اگر خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی $a>9$ بر ۱۱، ۳ واحد بیشتر از باقی‌ماندهٔ آن باشد، احتمال این که عدد $a-9$ بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{13}{22}$ ۲) $\frac{6}{11}$
۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{11}$

CamScanner

نمایش اعداد صحیح به شکل‌های مختلف

مثال: نشان دهید هر عدد صحیح به صورت $3k$ یا $3k+1$ یا $3k+2$ است. $(k\in\mathbb{Z})$

$\forall a\in\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{در تقسیم بر ۳}} a=3k+r,\ 0\le r<3$

$r=0 \rightarrow a=3k$

یا $r=1 \rightarrow a=3k+1$

یا $r=2 \rightarrow a=3k+2$



به طور کلی

قضیه: اگر $b>1$ عددی طبیعی باشد، هر عدد صحیح را می‌توان به صورت bk یا $bk+1$ یا ... یا $bk+(b-1)$ نمایش داد. $(k\in\mathbb{Z})$

مثلاً در مثال بالا $b=3$ می‌باشد.

$\mathbb{Z}$

$2k$	$2k+1$
زوج	فرد

اگر $b=2$، آنگاه هر عدد صحیح به صورت $2k$ (زوج) یا $2k+1$ (فرد) است.

اگر $b=5$، آنگاه هر عدد صحیح به صورت $5k$ یا $5k+1$ یا $5k+2$ یا $5k+3$ یا $5k+4$ است.

مثال: نشان دهید از هر سه عدد صحیح متوالی، همواره یکی مضرب ۳ است.

$a\in\mathbb{Z} \longrightarrow \boxed{a,\ a+1,\ a+2}$

می‌دانیم $a=3k$ یا $a=3k+1$ یا $a=3k+2$

$a=3k$ → حکم ثابت شد

$a=3k+1 \xrightarrow{+2} a+2=3k+4=3(k+1)=3k'$ $(k'\in\mathbb{Z})$ → حکم ثابت شد

$a=3k+2 \xrightarrow{+1} a+1=3k+4=\dots$ ″

نتیجه: از هر n عدد صحیح متوالی، همواره یکی مضرب n است.

مثال: اگر a عدد صحیح دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ مضرب ۳ است.

$a=3k$ → حکم ثابت شد

می‌دانیم $a=3k+1 \xrightarrow{+2} a+2=3k+3=3(\dots)=3k'$ → حکم ثابت شد

یا $a=3k+2 \xrightarrow{+4} a+4=3k+6=3(\dots)=3k''$ → ″ ″

تمرین H.W: اگر n عددی صحیح باشد، ثابت کنید (n^3-n) مضرب ۳ است.

$n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)\longrightarrow\dots$

ثبت حاصل ضرب هر دو عدد صحیح به شکل $6k+5$ به کدام صورت است؟

۱) $6k+1$ ✓ ۲) $6k+3$ ۳) $6k+5$ ۴) $6k$

$a=6k+5$ } به شکل $6k+5$ می‌باشند
$b=6k'+5$

$a\cdot b=(6k+5)\cdot(6k'+5)=36kk'+30k+30k'+24+1$

$=6(\dots)+1 \rightarrow$ به شکل $6k+1$

$25=6(\dots)+1$ ×

حاصل ضرب هر دو عدد صحیح به شکل $4+7k$ به چه صورت است؟

$a=7k+4$
$b=7k'+4$

$16=7(\dots)+2 \rightarrow 7t+2$ ✓

*نمایش اعداد صحیح به کمک باقی‌ماندهٔ منفی!! ☺

مثال: نشان دهید هر عدد صحیح به صورت $3k+2$، به شکل $3k-1$ نیز هست. $(k\in\mathbb{Z})$

$3k+2=3k+3-1=3(\dots)-1 \rightarrow$ به شکل $3k-1$ است

(t)

مثال عددی:
$8=3\times 2+2$ (2)
$8=3\times 3-1$ (3)

نتیجه: هر عدد صحیح به صورت $3k$ یا $3k\pm1$ است $(k\in\mathbb{Z})$

ثبت مربع عددی که مضرب ۳ نیست، به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $9k+1$
۲) $3k+1$ ✓
۳) $3k+2$
۴) $9k+2$

$a \rightarrow a\neq 3k \rightarrow a=3k\pm1$ (a مضرب ۳ نیست)

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} a^2=9k^2\pm6k+1$

$\rightarrow a^2=3(\dots)+1$

- هیچ مربع کاملی به صورت $3k+2$ نمی‌باشد.
- هر مربع کاملی که مضرب ۳ باشد، مضرب ۹ نیز هست!!

if $a=3k\pm1 \rightarrow a^2=3(\dots)+1$ ($3k+1$)
if $a=3k \rightarrow a^2=9k^2$

پس اگر عددی مضرب ۳ باشد و مضرب ۹ نباشد، مربع نیست.

ثبت کدام عدد مربع کامل است؟

۱) ۱۲۴۶۱۹ — جمع ارقام $=23=3k+2$ ← مربع نیست
۲) ۱۲۴۶۰۹ ✓ — جمع ارقام $=22=3k+1$
۳) ۱۲۴۶۰۱ — جمع ارقام $=14=3k+2$ ← مربع نیست
۴) ۱۲۴۵۸۴ — جمع ارقام $=24$ ← مضرب ۳ است اما مضرب ۹ نیست پس مربع نیست!!

CamScanner

هر عدد صحیح به صورت $6k$ یا $6k\pm1$ یا $6k\pm2$ یا $6k\pm3$ است.

درس: ریاضیات گسسته	مبحث: نظریه اعداد - نمایش اعداد صحیح	تنظیم: ترکمن	صفحه: ۸

مثال نشان دهید هر عدد صحیح به صورت $5k$ یا $5k\pm1$ یا $5k\pm2$ است. $(k\in\mathbb{Z})$

$[\frac{5}{2}]$

می‌دانیم:
- $a=5k$
- $a=5k+1$
- $a=5k+2$
- $a=5k+3=\overbrace{5k+5}^{5(\dots)}-2=5(\dots)-2$ → به شکل $5k-2$ است
- $a=5k+4=\underbrace{5k+5}_{5(\dots)}-1=5(\dots)-1$ → به شکل $5k-1$ است

سراسری ۱۴۰۱ خارج مجموع باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۳ برابر ۱۷ است. احتمال این‌که باقی‌مانده تقسیم عدد $a-8$ بر ۳۶ برابر ۲۱ باشد، کدام است؟

$a=13q+r\ ;\ 0\le r<13$

$r=0,1,2,\dots,12$ → ۱۳ حالت ممکن

فرض مسئله: $q+r=17$ → $r=17-q$ (*)

$a=13q+17-q=12q+17$

فرض: $a-8=36q'+21$

$a-8=12q+9$

$\to 12q+9=36q'+21 \to 12q=36q'+12 \xrightarrow{\div 12} q=3q'+1 \xrightarrow{(*)} r=17-(3q'+1)$

$\to r=16-3q'=1+15-3q'=3(\dots)+1$ → به شکل $3k+1$ است $\to r=1,4,7,10$ → ۴ حالت مطلوب

۱) $\frac{4}{13}$ ۲) $\frac{5}{13}$ ۳) $\frac{4}{13}$ ✓ ۴) $\frac{3}{13}$

سراسری مجموعهٔ اعداد طبیعی را به سه مجموعهٔ A، B، C افراز کرده‌ایم. اگر $A=\{n: n=6k+1, k\in\mathbb{N}\}$، $B=\{n: n=6k-1, k\in\mathbb{N}\}$، کدام عدد به مجموعهٔ C تعلق دارد؟

۱) ۱۱ ($6k-1\in B$) ۲) ۲۹ ($6k-1\in B$) ۳) ۳۳ ($6k\pm3\in C$) ✓ ۴) ۳۷ ($6k+1\in A$)

سراسری مجموعهٔ اعداد طبیعی را به سه مجموعهٔ A، B، C افراز کرده‌ایم. اگر $A=\{n: n=7k+2, k\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{n: n=7k-3, k\in\mathbb{N}\}$، کدام دو عدد به یک مجموعه تعلق دارند؟

۱) ۱۳ و ۲۱ ($7k\in C$، $7k-1\in C$) ✓ ۲) ۱۳ و ۲۳ ۳) ۲۱ و ۳۲ ۴) ۲۳ و ۳۲ ($7k-3\in B$، $7k+2\in A$)

چند تذکر در مورد اعداد زوج و فرد

$(a=\text{فرد} \wedge b=\text{فرد} \wedge c=\text{فرد} \wedge \dots) \iff (a.b.c\dots=\text{فرد})$

$\text{زوج}\times\bigcirc=\text{زوج}$

$$\begin{cases} a=\text{فرد} \iff a^n=\text{فرد} \\ a=\text{زوج} \iff a^n=\text{زوج} \end{cases} \quad (\forall n\in\mathbb{N})$$

$\text{زوج}=\text{زوج}\pm\dots\pm\text{زوج}$

$\text{فرد}\pm\dots\pm\text{فرد}=\begin{cases}\text{زوج} & : n\ \text{فرد} \\ \text{فرد} & : n\ \text{زوج}\end{cases}$

n تا

$\text{فرد}=\text{فرد}\pm\text{زوج}$

مثال Ex ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

حل

$$(n+1)^3-n^3=n^3+3n^2+3n+1-n^3=3n^2+3n+1=3\underbrace{n(n+1)}_{2k}+1$$

(زوج × زوج = زوج)

$$=\underbrace{6k}_{2(3k)}+1=2(\underbrace{3k}_{k'})+1=2k'+1=\text{فرد}$$

CamScanner

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N}$ ← تعداد روش‌های انتخاب k شیء از n شیء

نکته حاصل ضرب n عدد صحیح متوالی همواره مضرب $n!$ است.

مثلاً

الف) حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متوالی مضرب ۲ (زوج) است.

$\forall a \in \mathbb{Z}: \quad a(a+1) = \text{زوج}$

زیرا از هر دو عدد صحیح متوالی همواره یکی زوج است.

ب) حاصل ضرب هر سه عدد صحیح متوالی مضرب $3! = 6$ است.

اثبات / Ex

$$(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1\times 2\times \cdots \times n\times (n+1)(n+2)(n+3)}{1\times 2\times \cdots \times n} = \frac{(n+3)!}{n!} = \underbrace{3!}_{6}\times \frac{(n+3)!}{3!\,n!}$$

$$= 6\binom{n+3}{3} = 6q \quad (q \in \mathbb{N}) \checkmark$$

بررسی محدودیت ☺ اگر a عددی زوج باشد، $a(a^2-4)$ همواره بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

$a = 2k$

$$a(a^2-4) = 2k(4k^2-4) = 8k(k^2-1)$$

$$= 8k(k-1)(k+1) = 48q$$

ضرب سه عدد متوالی ← $6q$

بررسی
۱) ۱۸
۲) ۳۶
۳) ۴۸ ✓
۴) ۵۴

عددگذاری $a=4$ →

$4(4^2-4) = 48$ ☺

نکته

خلاصه: هیچ‌گاه مربع کامل نیست ← $a = \text{فرد} \Rightarrow 2a \neq \text{مربع}$

اثبات (به کمک برهان خلف): فرض می‌کنیم a عددی فرد است. نشان می‌دهیم $2a$ مربع کامل نیست.

زیرا اگر $2a$ مربع کامل باشد، پس: $n = 2k$ ← $n = \text{زوج} \Rightarrow n^2 = \text{زوج}$ ← $2a = n^2$

$\Rightarrow 2a = (2k)^2 \Rightarrow 2a = 4k^2 \xrightarrow{\div 2} a = 2k^2 = \text{زوج}$ ✗ ← $2a$ مربع کامل نیست

نتیجه: اگر یک عدد زوج را بر ۲ تقسیم کنیم و خارج قسمت فرد شود، آن عدد زوج قطعاً مربع نیست. اما اگر خارج قسمت زوج شود چیزی نمی‌توان گفت

مثال آیا عدد 23586 مربع کامل است؟ خیر

جمع ارقام $= 28 = 3k+1$

$23586 \mid 2$

11793 ← فرد

$23586 = 2 \times 11793 = 2 \times \text{فرد} \neq \text{مربع}$ ← زوج

$184670 = 18467 \times 10^1 \neq$ مربع

$26790000 = 2679 \times 10^3 \neq$ "

به ذهن بسپاریم که

هر عدد طبیعی که به تعداد فرد رقم صفر ختم می‌شود، مربع نیست.

مربع هیچ عددی نمی‌تواند به ارقام ۲، ۳، ۷، ۸ ختم شود.

مثلاً اعداد 1956842، 22569، 15489، 459648، 26746، 1854 هیچ‌کدام مربع نیستند!!

رقم یکان عدد	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
رقم یکان مربع عدد	۰	۱	۴	۹	۶	۵	۶	۹	۴	۱

5481×5481 ← ...۱

CamScanner

درس: ریاضیات گسسته	مبحث: نظریه اعداد ـ نمایش اعداد صحیح	تنظیم: ترکمن	صفحه: ۵۱

مثال Ex الف) ثابت کنید هر عدد صحیح فرد به صورت $4k+1$ یا $4k+3$ است. $(k\in\mathbb{Z})$

ب) ثابت کنید مربع هر عدد فرد به صورت $8t+1$ است. $(t\in\mathbb{Z})$

الف) $\forall a\in\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{در تقسیم بر ۴}} a=\underbrace{4k}_{\text{زوج}} \vee \underbrace{a=4k+1}_{\text{فرد}} \vee \underbrace{a=4k+2}_{\text{زوج}=2(\cdots)} \vee \underbrace{a=4k+3}_{\text{فرد}}$

ب) $a=$ فرد $\xrightarrow{\text{طبق الف}}$ $\begin{cases} a=4k+1 \to a^2=16k^2+8k+1=8(\underbrace{\cdots\cdots}_{t\in\mathbb{Z}})+1=8t+1 \\ \text{یا} \\ a=4k+3 \to a^2=16k^2+24k+9=8(\underbrace{\cdots\cdots}_{t\in\mathbb{Z}})+1=8t+1 \end{cases}$

$a=2k+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1=8t+1$ ($4k(k+1)=2t$)

نکته مهم Ex مربع هر عدد فرد همواره به صورت $8t+1$ است.

خلاصه $a=$ فرد $\Rightarrow a^2=8t+1$

به عبارت دیگر:

باقی‌مانده‌ی تقسیم مربع هر عدد فرد بر عدد ۸ همواره برابر ۱ است.

مثال عددی $a=5 \to 5^2=8t+1$ ($25=8\times3+1$)

$(29763)^2 \mid 8$ ، $\vdots$ ، 1

توجه عکس نکته بالا لزوماً درست نیست. به عبارت دیگر هر عددی که به صورت $8t+1$ می‌باشد لزوماً مربع نیست

مثال عددی $17=8t+1$ ($t=2$) مربع نیست

محدودیت بررسی: اگر a و b اعدادی فرد باشند، آنگاه بزرگترین عددی که a^4-b^4 همواره بر آن بخش‌پذیر می‌باشد کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ✓ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

$\begin{cases} a=\text{فرد} \to a^2=8t+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^4=64t^2+16t+1 \\ b=\text{فرد} \to b^2=8t'+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} b^4=64t'^2+16t'+1 \end{cases}$

$a^4-b^4=64t^2+16t-64t'^2-16t'=16(\cdots) \to$ ضرب ۱۶

نتیجه: هر عدد فردی که به صورت $8t+1$ نباشد، مربع نیست.

(اگر به صورت $8t+1$ باشد، چیزی نمی‌توان گفت)

$8t+1 \Rightarrow$ مربع ✗

فرد $\Rightarrow 8t+1$

$P\Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim P$

مثال آیا عدد $19746\underbrace{325}_{\text{فرد}}$ مربع کامل است؟ خیر

جمع ارقام $= 37 = 3k+1$

بررسی می‌کنیم این عدد فرد، به صورت $8t+1$ هست یا نه.

$325 \mid 8$ ، 320 ، 40 ، 5

$\to 8t+5 \to$ به شکل $8t+1$ نیست $\to$ مربع نیست

بخش پذیری (تقسیم پذیری)

تعریف: عدد صحیح a بر عدد صحیح $b \neq 0$ بخش پذیر است هرگاه عدد صحیح مانند q یافت شود که $a = bq$ $(r=0)$

Ex

مثلاً ۱۲ بر ۴ بخش پذیر است. زیرا $12 = 4(3)$ ($3 \in \mathbb{Z}$)

۱۲ بر ۵ بخش پذیر نیست. زیرا $12 = 5(?)$ ($? \notin \mathbb{Z}$)

قرارداد: صفر بر صفر بخش پذیر است زیرا

نماد بخش پذیری

$b \mid a$

a بر b بخش پذیر (تقسیم پذیر) است.
a مضرب b است.

b شمارنده (مقسوم علیه) a است.
b سازه (عامل) a است.
b ، a را می شمارد (عاد می کند).

مثال عددی

$۲۱ \mid ۸۴$ ⟷

$۷! \mid ۵!$ ⟷

$۳^۵ \mid ۳^۹$ ⟷

مثال Ex اگر a ، b ، c ، d چهار عدد صحیح غیر صفر باشند، از تساوی $ac = bd$ ، شش رابطهٔ عاد کردن نتیجه بگیرید:

بحث شهودی

مثال عددی

درس: ریاضیات گسسته	مبحث: نظریه اعداد- بخش پذیری	تنظیم: ترکمن	صفحه: ۱۲

ویژگی‌های بخش پذیری

① صفر بر هر عدد صحیح بخش پذیر است.

به عبارت دیگر [ ] ← صفر مضرب همه اعداد صحیح است.
که همه اعداد صحیح، شمارنده (مقسوم‌علیه) صفرند.

نتیجه: مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر، برابر $\mathbb{Z}$ است.

② هر عدد صحیح بر ۱ و ۱- بخش پذیر است. یعنی [ ]

③ هر عدد صحیح بر خودش و قرینه‌اش بخش پذیر است. یعنی [ ]

نتیجه: هر عدد صحیح (مخالف ۰) ، دست کم چهار شمارنده دارد. (۱، ۱-، خودش و قرینه‌اش)

$$\forall a \in \mathbb{Z}: \quad D(a) = \{\pm 1, \dots, \pm a\}$$

④ Ex اگر $a \mid b$ ، آنگاه

(الف) $a \mid b \Rightarrow -a \mid b$

مثال عددی

$3 \mid 6 \rightarrow -3 \mid 6$

$2 \mid 6 \rightarrow -2 \mid 6$

$\rightarrow D(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

$x \in D(a) \Leftrightarrow -x \in D(a)$

(ب) $a \mid b \Rightarrow a \mid -b$

مثال عددی

$3 \mid 6 \rightarrow 3 \mid -6$

$2 \mid 6 \rightarrow 2 \mid -6$

$\vdots$

مجموعهٔ شمارنده‌های دو عدد قرینه، برابر است.

$\forall a \in \mathbb{Z}: D(a) = D(-a)$

(پ) $a \mid b \Rightarrow -a \mid -b$

مثال عددی

$3 \mid 6 \rightarrow -3 \mid -6$

اثبات

EX ۵ $a|b \xrightarrow[b\neq 0]{a\neq 0} |a|\leq|b|$

مثال عددی: $\begin{cases} 3|6 \rightarrow 3\leq 6 \ \checkmark \\ 3|-6 \rightarrow 3\leq|-6| \ \checkmark \end{cases}$

اثبات:

$a|b \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} b=aq \xrightarrow[b\neq 0]{a\neq 0} q\neq 0$

$\rightarrow |q|\geq 1 \xrightarrow{|a|\times} \underbrace{|a||q|}_{|b|} \geq |a|$

تذکر: $a|b \nrightarrow b|a$

مثال عددی

EX ۶

( )

اثبات:

$\begin{cases} a|b \rightarrow \\ b|a \rightarrow \end{cases}$ ( )

مثال: اگر a عددی صحیح باشد، نشان دهید:

الف) $a|1 \Leftrightarrow a=\pm 1$ $\quad$ ب) $0|a \Leftrightarrow a=0$ $\quad$ $(a\neq 0)$

EX ۷ خاصیت تعدی بخش‌پذیری

( )

اثبات

مثال عددی

EX ۸ (تمرین)

الف) $a|b \xrightarrow{\forall k\in\mathbb{Z}} a|kb$

ب) $a|b \xrightarrow{\forall n\in\mathbb{N}} a|b^n$

مثال عددی →

اثبات الف: $a|b \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} b=aq \xrightarrow{\times k\in\mathbb{Z}} kb=a(\underbrace{kq}_{q'\in\mathbb{Z}}) \rightarrow a|kb$

اثبات (ب): $b=aq \xrightarrow{\text{توان } n} b^n=a^nq^n=a^1.a^{n-1}.\underbrace{q^n}_{q'\in\mathbb{Z}} \rightarrow a|b^n$

تذکر: عکس نکته‌ی فوق لزوماً درست نیست. یعنی

مثال عددی → $\begin{cases} a|kb \nrightarrow a|b \\ a|b^n \nrightarrow a|b \end{cases}$ ← حالت خاص

EX ۹ دو طرف بخش‌پذیری را می‌توان در هر عدد صحیح ضرب کرد یا به توان هر عدد طبیعی رساند و برعکس.

الف) $a|b \xrightarrow[(k\neq 0)]{\forall k\in\mathbb{Z}} ka|kb$

ب) $a|b \xrightarrow{\forall n\in\mathbb{N}} a^n|b^n$

مثال عددی

اثبات الف: $a|b \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} b=aq \xrightarrow[\div k\neq 0]{\times k\in\mathbb{Z}} kb=ka.q \rightarrow ka|kb$

اثبات (ب): $b=aq \xrightarrow{\text{توان } n} b^n=a^n.q^n \rightarrow a^n|b^n$ $\quad q'\in\mathbb{Z}$

تست اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $20 \mid a$ و $300 \mid a$، آن‌گاه برای a چند جواب وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸

۳) ۱۲ ۴) ۱۶

«بررسی توان های مختلف در اعداد کران»

سئوال Ex

الف) اگر $b \mid a$، آیا $b^3 \mid a^2$؟

ب) اگر $b^3 \mid a^2$، آیا $b \mid a$؟

اثبات Ex

سئوال Ex

الف) اگر $b \mid a$، آیا $b^2 \mid a^3$؟

ب) اگر $b^2 \mid a^3$، آیا $b \mid a$؟

نکته $b^j \mid a^i \Rightarrow a^m \mid b^n$ برقرار است برگاه

تست اگر $b^4 \mid a^7$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

۱) $b^3 \mid a^2$

۲) $b^2 \mid a^3$

۳) $b^5 \mid a^8$

۴) $b^3 \mid a^4$

(۱۰) دوطرف دو یا چند رابطهٔ بخش‌پذیری را می‌توان

$$\begin{cases} a_1 \mid b_1 \\ a_2 \mid b_2 \\ \vdots \\ a_n \mid b_n \end{cases} \Rightarrow (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n) \mid (b_1 \cdot b_2 \cdots b_n)$$

مثال عددی

مثال Ex: اگر $a|b$, $c|d$ ، نشان دهید $ac|bd$.

$$a|b \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} b = a.q \quad \xrightarrow{\times} \quad bd = ac(\underbrace{qq'}_{q''\in\mathbb{Z}}) \Rightarrow bd = (ac).q'' \Rightarrow ac|bd$$
$$c|d \xrightarrow{q'\in\mathbb{Z}} d = c.q'$$

مثال Ex: آیا از این که $a|b$, $c|d$ ، می‌توان نتیجه گرفت $(a\pm c)|(b\pm d)$ ؟

(۱۱) اگر عددی بر حاصل ضرب چند عدد صحیح بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه ...

$$(a.b.c\ldots)|n \Rightarrow (a|n \wedge b|n \wedge c|n \wedge \ldots)$$

مثال عددی

$$(2\times3\times4)|48 \rightarrow \begin{cases} 2|48 \checkmark \\ 3|48 \checkmark \\ 4|48 \checkmark \end{cases}$$
($2\times3\times4 = 24$)

تذکر: عکس نکتهٔ فوق لزوماً درست نیست. بعضی

(۱۱)

مثال عددی

حالت خاص:

خلاصهم (۱۲) Ex

مثال عددی

$$(a|b \wedge a|c) \Rightarrow (a|(b\pm c) \wedge a|b.c)$$

اثبات:

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} b=a.q \\ a|c \xrightarrow{q'\in\mathbb{Z}} c=a.q' \end{cases} \rightarrow b\pm c = a(\underbrace{q\pm q'}_{q''\in\mathbb{Z}}) \rightarrow a|b\pm c \quad , \quad b.c = a\underbrace{q}_{q_1\in\mathbb{Z}}.aq' \rightarrow a|b.c$$

تذکر۱ عکس نکته فوق لزوماً درست نیست.

$$\begin{cases} a|(b\pm c) \not\Rightarrow \begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} & \text{مثال عددی} \\ a|b.c \not\Rightarrow \begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} & \text{مثال عددی} \end{cases}$$

حالت خاص

تذکر۲ ویژگی ۱۲ قابل تعمیم است. به عبارت دیگر

$$\begin{cases} a|b_1 \\ a|b_2 \\ \vdots \\ a|b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a|(b_1\pm b_2\pm\cdots\pm b_n) \\ a|(b_1.b_2\ldots b_n) \end{cases}$$

تذکر۳: اگر عددی، مجموع یا تفاضل دو عدد صحیح را بشمارد، یا هر دو را می‌شمارد یا هیچ کدام را.

$$a|(b\pm c) \Rightarrow [(a|b \wedge a|c) \vee (a\nmid b \wedge a\nmid c)]$$

تذکر۴ Ex

اثبات:

مثال عددی

تذکر۵ Ex درک رابطه بخش‌پذیری همواره می‌توان مضرب دلخواهی از سمت چپ را به سمت راست اضافه یا کم کرد.

$$a|b \xrightarrow{\forall k\in\mathbb{Z}} a|\underbrace{ka}\pm b$$

مثال Ex ثابت کنید اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، آن‌گاه باقی‌مانده نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

CamScanner

مثال Ex: اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$، ثابت کنید a عددی اول است.

مثال Ex: اگر $a\in N$ و $a|6m+5$, $a|4m+7$، آن گاه a را بیابید.

تست Ex: اگر $a\neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(7m+6)$ و $(6m+5)$ بر a بخش پذیر باشند، آن گاه

۱) $a=\pm 1$

۲) $a=\pm 3$

۳) $a=\pm 2$

۴) $a=\pm 2,\pm 3$

تست: اگر $a|3m-2n$, $a|7m+3n$، آن گاه برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟ (m و n نسبت به هم اولند)

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

نکته

تمرین Ex: H.W: اگر n عددی صحیح باشد، ثابت کنید $3|n^3-n$

Ex

تست: اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $a+2|b$ ، در این صورت باقی ماندهٔ تقسیم عدد (a^2+b^2+3) بر ۸ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

قضیه اگر a ، b و c سه عدد طبیعی باشند و $a|b+c$ ، $a|b$ ، آن‌گاه کدام گزینه درست نیست؟

۱) $b|c$ ۲) $b|a-c$

۳) $a|c$ ۴) $a|b^2+bc$

مثال اگر $a+b|a$ ، نشان دهید $a+b|5a+4b$

توجه:

تمرین H.W اگر $3a+4b|5a+9b$ ، ثابت کنید $3a+4b$ همواره $21b$ را عاد می‌کند.

مثال Ex اگر $k\in\mathbb{Z}$ و $5|4k+1$ ، ثابت کنید $25|16k^2+28k+6$

سراسری ۹۶ Ex اگر عدد طبیعی به صورت $2n+1$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی $14n^2+19n+6$ بر ۲۵ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

تست H.W اگر از $3n+5|8$ به توان n ، $15n^2+an+15|64$ را نتیجه گرفت، آن‌گاه a کدام عدد می‌تواند باشد؟ (گزینه ۳)

۱) ۲۲ ۲) ۲۴

۳) ۳۴ ۴) ۴۲

CamScanner

تست: اگر $a|3n^2-1$ و $a|5n+4$، در این صورت برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

تست: اگر $a|3n+5$ و $a|3n^2-2n+6$، آن‌گاه مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار طبیعی a کدام است؟ (کنکور ۹۳)
H.W

۵) ۵
۷) ۷
۸) ۸
۱۲) ۱۲

تست: اگر $3n+7|(n+1)^2$، آن‌گاه برای n چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

CamScanner

تست: اگر $13 \mid 2a-3b+1$ و $13 \mid a+5b+k$، آن‌گاه کوچکترین مقدار طبیعی k کدام است؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۸

تست: به ازای چند مقدار طبیعی a، عدد a^2+2 بر $a+2$ بخش پذیر است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) هیچ

توجه:

تست: اگر $a-2 \mid 3a^2-2a+1$، آن‌گاه برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

تست: اگر کسر $\frac{3a^2-2a+1}{a-2}$ برابر با یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

تست: روی منحنی تابع $3x^2-xy-2x+2y+1=0$ چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

سراسری ۱۴۰۱: نقاط (a,b) روی منحنی $y=\frac{3x-1}{x+2}$ قرار دارند. اگر $a,b \in \mathbb{Z}$ باشند، چند نقطه با این ویژگی روی این منحنی قرار دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

CamScanner

یادآوری

الف) $(a-b)\mid(a^n-b^n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

زیرا $a^n-b^n=(a-b)(\underbrace{\dots}_{q\in\mathbb{Z}})$

ب)

$(a+b)\mid(a^n-b^n)$ $\forall$ زوج $n\in\mathbb{N}$	$(a+b)\mid(a^n+b^n)$ $\forall$ فرد $n\in\mathbb{N}$
مثلاً اتحادهای مزدوج $a^2-b^2=(a+b)(\dots)$	مثلاً اتحادهای چاق و لاغر $a^3+b^3=(a+b)(\dots)$

تست کدام گزینه درست است؟

۱) $(a+b)\mid(a+b)^2-2ab$ (a^2+b^2)

۲) $(a+b)\mid(a+b)^3-3a^2b-3ab^2$ ✓ (a^3+b^3)

۳) $(a+b)\mid(a-b)^2+2ab$ (a^2+b^2)

۴) $(a+b)\mid(a-b)^3+3a^2b-3ab^2$ (a^3-b^3)

تست عدد $a^{12}+1$ بر کدام یک همواره بخش‌پذیر است؟

۱) a^2+1

۲) a^3+1

۳) a^4+1 ✓

۴) a^6+1

$a^{12}+1=a^{4\times3}+1=(a^4)^3+1^3$

$a^4+1\mid(a^4)^3+1^3$

$a^4+1\mid a^{12}+1$ ($\frac{12}{4}=$ فرد)

$a^3+1\mid a^{12}+1\to\frac{12}{3}=$ زوج ✗

$a^2+1\mid a^{12}+1\to\frac{12}{2}=$ زوج ✗

نکته $a^k+b^k\mid a^n-b^n$ درست است هرگاه $\frac{n}{k}=$ زوج

$a^k+b^k\mid a^n+b^n$ درست است هرگاه $\frac{n}{k}=$ فرد

$a^k-b^k\mid a^n-b^n$ $\quad\quad\quad$ $\frac{n}{k}\in\mathbb{Z}$

تست عدد $a^{36}-1$ بر کدام یک همواره بخش‌پذیر نیست؟

۱) a^9-1 $\quad$ $a^9-1\mid a^{36}-1$ ✓ ($\frac{36}{9}\in\mathbb{Z}$)

۲) a^9+1 $\quad$ $a^9+1\mid a^{36}-1$ ✓ ($\frac{36}{9}=$ زوج)

۳) a^4-1 $\quad$ $a^4-1\mid a^{36}-1$ ✓ ($\frac{36}{4}\in\mathbb{Z}$)

۴) a^4+1 $\quad$ $a^4+1\mid a^{36}-1$ ✗ ($\frac{36}{4}=$ فرد)

تمرین نشان دهید $43\mid 7^{1398}-2^{1398}$

$\begin{cases}7-2\mid 7^{1398}-2^{1398}\\ 7+2\mid 7^{1398}-2^{1398}\end{cases}$

$7-2\mid 7^{1398}-2^{1398}$ ($\frac{1398}{5}$ زوج)

$7+2\mid 7^{1398}-2^{1398}$ ($\frac{1398}{9}$ زوج)

CamScanner

سراسری: مجموعه $\{n\in\mathbb{N} : n<100 , 65 \mid 2^n+1\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷
۳) ۸ ۴) ۹

$65 \mid 2^n+1 \longrightarrow 2^6+1 \mid 2^n+1 \longrightarrow \frac{n}{6}=$ فرد $=2t+1$

$\longrightarrow \boxed{n=12t+6}$

$n<100 \longrightarrow 12t+6<100 \longrightarrow t<\frac{94}{12}\simeq 7,\dots$

$t\in\mathbb{Z} \longrightarrow t=7,6,\dots,1,0 \longrightarrow$ ۸ جواب ✓

نبیه سمت راست در می آید

$a^k+b^k \mid a^n+b^n$ ، $\frac{n}{k}=$ فرد

تست H.W مجموعه $\{n\in\mathbb{N} : 18 \mid 3^n-1\}$ چند عضو دورقمی دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱
۳) ۲۳ ۴) ۲۵

$18 \mid 3^n-1 \longrightarrow 3^2+1 \mid 3^n-1 \longrightarrow \frac{n}{2}=$ زوج $=2t \longrightarrow \boxed{n=4t}$

$10\le n\le 99 \longrightarrow 10\le 4t\le 99 \longrightarrow \dots$

(گزینه ۲)

$a^k+b^k \mid a^n-b^n$ ، $(\frac{n}{k}=$ زوج$)$

تست اگر $n\in\mathbb{N}$ ، $n<200$ ، چند مقدار n ، در رابطه $35 \mid 3^n-2^n$ صدق می‌نماید؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱
۳) ۳۲ ۴) ۳۳

$35 \mid 3^n-2^n \longrightarrow 3^3+2^3 \mid 3^n-2^n \longrightarrow \frac{n}{3}=2t \xrightarrow{2\nmid} \boxed{n=6t}$

$n<200 \longrightarrow 6t<200 \longrightarrow t<\frac{200}{6}\simeq 33,\dots \xrightarrow{t\in\mathbb{N}} t=1,2,\dots,33$

ریشه‌ای بودم در خاک خاک‌های متبرک با بالش در نگاه تو سبز شدم

برق از چشمانم بر خلوت نگاهم بارانی شد

تو با چشمانت مرا بنواز با تو خواهم ماند و با تو خواهم خواند . . .

اعداد اوّل ← Prime "اولیه"

EX تعریف- عدد طبیعی $p>1$ را اول می‌گوییم هرگاه جز بر ۱ و بر خودش بر هیچ عدد طبیعی دیگری بخش‌پذیر نباشد.

$$a \mid p \Rightarrow (a=1 \ \vee \ a=p)$$

(a: طبیعی، p: اول)

مثلاً اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ... اول‌اند.

۲ تنها عدد زوج اول است و سایر اعداد اول فردند.

(۲ و ۳ تنها دو عدد اول متوالی‌اند)

مسأله تعداد اعداد اول کوچکتر از ۵۰۰

۱) ۲۵۰ است. ۲) بیشتر از ۲۵۰ است.

۳) بین ۲۵۰ و ۳۰۰ است. ۴) کمتر از ۲۵۰ است. ✓

اعداد طبیعی تا ۵۰۰ ← اول نیستند ← به جز ۲ ← ۲۵۰ تا زوج‌اند

بخشی از اعداد فرد، اولند ← ۲۵۰ تا فردند

(تعداد اعداد اول بین ۱ تا n $< \frac{n}{2}$)

تست اگر حاصل‌ضرب تمام اعداد اول بین ۱۰۰ و ۲۰۰ را با عدد یک جمع کنیم،

۱) عدد حاصل عامل اولی بین ۱۰۰ و ۲۰۰ دارد. ۲) عدد حاصل به صورت 2^n است.

۳) عدد حاصل عامل اولی کوچکتر از ۱۰۰ دارد. ✓ ۴) عدد حاصل یک عدد اول است.

تمام اعداد اول بین ۱۰۰ و ۲۰۰ همگی فردند

حاصل‌ضرب آنها فرد است $\xrightarrow{+1}$ عدد حاصل زوج است $= 2k$

عدد حاصل عامل ۲ دارد. ← عدد اول کوچکتر از ۱۰۰

تست مجموع دو عدد اول متمایز ۹۹ است. حاصل‌ضرب این دو عدد کدام است؟ ۱) ۷۴ ۲) ۱۴۶ ۳) ۱۹۴ ✓ ۴) ۲۰۲ ($p \neq q$)

$p+q=99$ (اول + اول = فرد)

$\Rightarrow$ یا $p=2$ (زوج، اول) یا $q=2$

$p=2 \Rightarrow q=97$

$\Rightarrow p \times q = 2 \times 97 = 194$ ✓

مسأله اگر n عددی طبیعی باشد، تعداد اعداد اول بزرگتر از $(2n)!+1$ و کوچکتر از $(2n)!+2n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بیشتر از ۲ ۴) هیچ

$$(2n)!+1 < \cdots < (2n)!+2n$$

$$(2n)!+2,\ (2n)!+3,\ \cdots,\ (2n)!+(2n-1)$$

$2(\cdots)$ مضرب ۲ (اول نیست)

$3(\cdots)$ مضرب ۳ (اول نیست)

$(2n-1)(\cdots)$ مضرب $(2n-1)$ اول نیست

$(2n)! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n)$

تمرین H.W چند عدد اول مانند p وجود دارد که p، $p+4$ و $p+8$ هر سه اول باشند!

مقادیر p

$p=2 \rightarrow 2, 6, 10$ ✗

$p=3 \rightarrow 3, 7, 11$ ✓

نشان می‌دهیم به ازای $p>3$، هر سه عدد مذکور اول نخواهد بود

$p>3$ اول $\rightarrow p \neq 3k \rightarrow$ یا $p=3k+1 \rightarrow$ یا $p=3k+2 \rightarrow$

CamScanner

مثال Ex نشان دهید هر عدد اول بزرگتر از ۳ به صورت $6k+1$ یا $6k+5$ است $(k\in\mathbb{Z})$.

$6k\pm1$

اول $p>3$ $\xrightarrow{\text{در تقسیم بر ۶}}$ $p=6k$ ∨ $p=6k+1$ ∨ $p=6k+2$ ∨ $p=6k+3$ ∨ $p=6k+4$ ∨ $p=6k+5$

- $p=6k$: مضرب ۶ (اول نیست)
- $p=6k+2=2(\dots)$: مضرب ۲ (اول نیست)
- $p=6k+3=3(\dots)$: اول نیست
- $p=6k+4=2(\dots)$: اول نیست

$$p>3 \text{ اول} \Rightarrow p=6k\pm1$$

مثال اگر $p>3$ عددی اول باشد، ثابت کنید $24\mid p^2-1$.

$p>3$ می‌دانیم $\rightarrow p=6k\pm1 \rightarrow p^2=36k^2\pm12k+1 \rightarrow p^2-1=12(3k^2\pm k)$

$3k^2\pm k$: $k=$ زوج $\rightarrow 3k^2\pm k=$ زوج ($3k^2$: زوج، k: زوج)؛ $k=$ فرد $\rightarrow 3k^2\pm k=$ زوج ($3k^2$: فرد، k: فرد)

$\rightarrow p^2-1=24q \rightarrow 24\mid p^2-1$

$\hookrightarrow p^2=24q+1$

$$p>3 \Rightarrow p^2=24q+1$$

باقیماندهٔ تقسیم مربع هر عدد اول بزرگتر از ۳ بر ۲۴، برابر ۱ است.

تست H.W اگر a عددی اول و دو رقمی باشد، آن‌گاه عدد $2a^2-2$ بر کدام یک بخش‌پذیر نیست؟ (گزینه ۴)

$a>3$ اول $\Rightarrow 2(24q+1)-2=$

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

نکته ۱ برای عدد اول p و اعداد طبیعی a و b:

$$p=ab \xrightarrow{a<b} (a=1 \text{ و } b=p)$$

تست اگر p عددی اول و x و y دو عدد طبیعی باشند به طوری که $p+y^2=x^2$، در این صورت $x+y$ کدام است؟

$p=x^2-y^2 \rightarrow p=(x-y)(x+y)$ (p: اول؛ $x-y=1$؛ $x+y=p$)

۱) $p-1$ ۲) p ✓ ۳) $p+1$ ۴) ۱

نکته ۱.۵ $x^2-y^2=p$ (اول) $\Rightarrow x-y=1 \Rightarrow$ x و y دو عدد متوالی‌اند

نکته ۲.۵ $x^2-y^2=p$ (اول) $\Rightarrow \begin{cases} x+y=p \\ x-y=1 \end{cases}$ حل دستگاه $\rightarrow x=\frac{p+1}{2}$ ، $y=\frac{p-1}{2}$

تذکر عددی که اول نباشد، مرکب است. (عدد ۱ نه اول است و نه مرکب) ☺

(تجزیه‌پذیر)

مثال: اگر x و y اعداد طبیعی باشند و $x^2-y^2=41$، آن‌گاه x و y را بیابید.

دستگاه $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=41 \end{cases} \rightarrow x=21$ ، $y=20$

CamScanner

تذکر۲ : طرز تشخیص اول بودن یک عدد طبیعی ← اگر یک عدد طبیعی بر هیچ یک از اعداد اول کوچکتر یا مساوی جذرش بخش پذیر نباشد، اول است. در غیر این صورت مرکب است.

مثال : آیا عدد ۱۲۷ اول است؟

$\sqrt{127} \simeq 11,\ldots$ → اعداد اول کوچکتر یا مساوی → ۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱

۱۲۷ بر هیچ کدام بخش پذیر نیست → ۱۲۷ اول است (۱۲۷)

تذکر۳ (تجزیه استاندارد) ← تمام پایه‌ها اعدادی اول باشند و هیچ کدام از پایه‌ها تکرار نشوند.

مثال عددی

$12 = 3^1 \times 2^2$ ✓ استاندارد است

$12 = 3 \times 2 \times 2$ استاندارد نیست

$12 = 3 \times 4$ استاندارد نیست

نکته۲ عدد طبیعی $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ (تجزیه استاندارد) مربع کامل است اگر و تنها اگر تمام α_i ها اعدادی زوج باشند

مثال عددی

$n = 2^4 \times 3^2 \times 5^6 =$ مربع

$n = 2^4 \times 3^3 \times 5^8 \neq$ مربع

مثال کوچکترین عدد طبیعی که باید در عدد $15^3 \times 2^3 \times 8^2 \times 6$ ضرب کرد تا حاصل مربع کامل شود را بیابید:

جواب

$15^3 \times 2^3 \times 8^2 \times 6 = (3^3 \times 5^3) \times 2^3 \times (2^3)^2 \times (2^1 \times 3^1) = \underbrace{2^{10}}_{ok} \times 3^4 \times \underbrace{5^3}_{?} \xrightarrow{\times 5}$ مربع

مثال کوچکترین عدد طبیعی a را بیابید که مربع آن بر ۱۲۰ بخش پذیر باشد.

$120 \mid a^2 \xrightarrow{\text{تجزیه}} 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \mid a^2 \xrightarrow[q \in \mathbb{Z}]{\text{تعریف}} \underbrace{a^2}_{\text{مربع}} = \underbrace{2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times q}_{\text{باید مربع باشد}}$

$\rightarrow q = 2 \times 3 \times 5 \times k^2$

$\rightarrow a^2 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times k^2$

$\xrightarrow{\text{جذر}} a = \underbrace{2^2 \times 3 \times 5}_{60} \times k \xrightarrow{k=1} \min(a) = 60$

راه کلی

$(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots) \mid a^n \rightarrow (p_1^{\lceil \frac{\alpha_1}{n} \rceil} \cdot p_2^{\lceil \frac{\alpha_2}{n} \rceil} \cdot p_3^{\lceil \frac{\alpha_3}{n} \rceil} \cdots) \mid a$

در مثال بالا

$120 \mid a^2 \xrightarrow{\text{تجزیه}} 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \mid a^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 2^{\lceil \frac{3}{2} \rceil} \times 3^{\lceil \frac{1}{2} \rceil} \times 5^{\lceil \frac{1}{2} \rceil} \mid a$

$\rightarrow \underbrace{2^2 \times 3^1 \times 5^1}_{60} \mid a \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}]{\text{تعریف}} a = 60k \xrightarrow{k=1} \min(a) = 60$ ✓

$\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor =$ اولین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x (براکت: جزء صحیح، کف)

$\lceil x \rceil =$ اولین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی x سقف

CamScanner

تست: اگر $a^2 | 135$ و $b^3 | 112$، آن‌گاه کمترین مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲۹
۲) ۵۳
۳) ۷۳
۴) ۷۹

$135 | a^2 \xrightarrow{\text{تجزیه}} 5^1 \times 3^3 | a^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 5^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} | a \rightarrow \underbrace{5^1 \times 3^2}_{45} | a \rightarrow \min(a) = 45$

$112 | b^3 \xrightarrow{\text{تجزیه}} 2^4 \times 7^1 | b^3 \xrightarrow{\text{جذر}} 2^{\frac{4}{3}} \times 7^{\frac{1}{3}} | b \rightarrow \underbrace{2^2 \times 7^1}_{28} | b \rightarrow \min(b) = 28$

$\xrightarrow{+} 73$

سراسری: مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی a که مضرب ۱۱ بوده و مربع آن بر ۳۱۵ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۱۳

$315 | a^2 \xrightarrow{\text{تجزیه}} 3^2 \times 5 \times 7^1 | a^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 3^1 \times 5^{\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{1}{2}} | a$

$\rightarrow \underbrace{3^1 \times 5^1 \times 7^1}_{105} | a \xrightarrow[(k \in \mathbb{Z})]{\text{تعریف}} a = 105k$

$\xrightarrow{k=11 \text{ مقدار}} \min(a) = 105 \times 11 = 1155 \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} 12$ ✓

تست: چند عدد طبیعی a چهار رقمی وجود دارد که مضرب ۱۳ بوده و مکعب آن بر ۲۰۲۵ بخش‌پذیر باشد؟ (سنجش ۲)

۱) ۱۵
۲) ۱۶
۳) ۱۷
۴) ۱۸

$2025 | a^3 \xrightarrow{\text{تجزیه}} \dots$

تست: چند عدد طبیعی a سه رقمی وجود دارد که دوازده برابر آن مربع کامل باشد؟

۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۱۳

$12a = \square \xrightarrow{\text{تجزیه}} 2^2 \times 3 \times a = \square \Rightarrow 3a = \square \Rightarrow a = 3k^2$

(مربع: 2^2 و باید مربع باشد)

$100 \leq a \leq 999 \rightarrow 100 \leq 3k^2 \leq 999 \xrightarrow{\div 3} 33,\dots \leq k^2 \leq 333$

$\xrightarrow{\text{جذر}} 5,\dots \leq k \leq 18,\dots \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 6, 7, \dots, 18 \rightarrow 13$ تا ✓

تست: چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که مربع آن مضرب ۱۲ باشد؟ ۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۱۸۰ (سنجش ۳)

$12 | a^2 \xrightarrow{\text{تجزیه}} \dots$

سراسری ۱۴۰۰: تعداد اعداد طبیعی پنج رقمی مضرب ۱۸ که مربع کامل هستند کدام است؟ ($\sqrt{10} \simeq 3/16$)

۱) ۳۵
۲) ۳۶ ✓
۳) ۳۷
۴) ۳۸

$\begin{cases} a = \text{مربع} \\ a = 18q \end{cases} \rightarrow 18q = \text{مربع} \xrightarrow{\text{تجزیه}} 3^2 \times 2 \times q = \text{مربع} \rightarrow 2q = \text{مربع}$

(3^2: مربع — $2 \times q$: باید مربع باشد)

$\rightarrow q = 2k^2 \Rightarrow \boxed{a = 18(2k^2) = 36k^2}$ (مربع)

$10000 \leq a < 100000 \rightarrow 10000 \leq 36k^2 < 100000 \xrightarrow{\text{جذر}} 100 \leq 6k < 100\sqrt{10}$ ($100\sqrt{10} = 316$, $\sqrt{10} = 3/16$)

$\xrightarrow{\div 6} 16/\ldots \leq k < 52/\ldots \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \boxed{k = 17, 18, \ldots, 52}$ ✓ ۳۶

سراسری ۱۴۰۰ خ: تعداد اعداد سه و چهار رقمی مضرب ۹ که مکعب کامل هستند کدام است؟ ($\sqrt[3]{10} \simeq 2/15$)

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶ ✓
۴) ۷

$\begin{cases} a = \text{مکعب} \\ a = 9q \end{cases} \rightarrow 9q = \text{مکعب} \rightarrow 3^2 \times q = \text{مکعب} \rightarrow q = 3k^3$

$\rightarrow a = 9(3k^3) = 27k^3 \xrightarrow{100 \leq a < 10000} \underbrace{100}_{1000/10} \leq 27k^3 < \underbrace{10000}_{1000 \times 10}$

ریشه سوم $\rightarrow \frac{10}{\sqrt[3]{10}} \leq 3k < 10 \times \sqrt[3]{10}$ ($\sqrt[3]{10} = 2/15$)

$\rightarrow 4/\ldots \leq 3k < 21/\ldots \xrightarrow{\div 3} 1/\ldots \leq k < 7/\ldots \rightarrow \boxed{k = 2, 3, \ldots, 7}$ ✓ ۶ جواب

سراسری ۹۶: چند عدد اول p وجود دارد که $48p+1$ مجذور کامل یک عدد طبیعی n باشد؟

۱) ۱
۲) ۲ ✓
۳) ۳
۴) ۴

$48p+1 = n^2 \rightarrow n^2 = \text{فرد} \rightarrow n = \text{فرد} \rightarrow n = 2k+1$ ($48p+1$: زوج، فرد)

$\rightarrow 48p = n^2 - 1 \rightarrow 48p = (n-1).(n+1)$ ($n-1 = 2k+1$، $n+1 = 2k+1$)

$\rightarrow 48p = (2k)(\underbrace{2k+2}_{2(k+1)}) \rightarrow 48p = 4k.(k+1)$ (۱۲)

ضرب دو عدد متوالی $\rightarrow 12 \times p =$ ضرب دو عدد متوالی

$12 \times p = 2 \times 2 \times 3 \times p = (\underbrace{2 \times 2}_{4}) \times (\underbrace{3 \times p}_{?}) = (\underbrace{2 \times 3}_{6}) \times (\underbrace{2 \times p}_{?}) \rightarrow p = 11, 13$ ✓ ۲ جواب

سراسری ۹۲: چند عدد اول p وجود دارد که $168p+1$ مجذور کامل یک عدد طبیعی باشد؟

۱) ۳
۲) ۴ ✓
۳) ۵
۴) ۶

$168p+1 = n^2$ (زوج، فرد) — طبق تست بالا — $\ldots \rightarrow 168p = 4k.(k+1)$ (۴۲)

ضرب دو عدد متوالی $\rightarrow 42 \times p \rightarrow \boxed{p = 41, 43}$

تجزیه: $2 \times 3 \times 7 \times p = (\underbrace{2 \times 3}_{6}) \times (\underbrace{7 \times p}_{7}) = (\underbrace{2 \times 7}_{14}) \times (\underbrace{3 \times p}_{15}) = (\underbrace{3 \times 7}_{21}) \times (\underbrace{2 \times p}_{20}) \rightarrow p = 10$ ✗

$\rightarrow p = 11$ ✓

CamScanner

نکته ۳۳ تعداد مقسوم علیه‌های مثبت عدد طبیعی $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ برابر است با

$$d(n) = (\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$$

→ به توان‌ها یک واحد اضافه شود و اعداد حاصل در یکدیگر ضرب شود

اختیاری

نتیجه: یک عدد طبیعی "مربع کامل" است اگر و تنها اگر تعداد مقسوم علیه‌های مثبت آن عددی "فرد" باشد.

علت اگر p عددی اول باشد، مقسوم علیه‌های مثبت p^α عبارت‌اند از $\underbrace{1, p^1, p^2, \cdots, p^\alpha}_{\text{تا } (\alpha+1)} \longrightarrow d(p^\alpha) = \alpha+1$

مثلاً شمارنده‌های مثبت عدد 3^5 عبارت است از $\underbrace{1, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5}_{\text{۶ تا}}$

مثال عدد ۴۰ دارای چند شمارنده‌ی مثبت است؟

$$d(40) \overset{\text{تجزیه}}{=} d(2^3 \times 5^1) = (3+1)(1+1) = 8 \xrightarrow[\text{عبارت اندازه}]{\text{این ۸ شمارنده}} \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$$

شمارنده‌های مثبت 2^3 → $1, 2^1, 2^2, 2^3$

شمارنده‌های مثبت 5 → $1, 5$

1	5	2	10	4	20	8	40

تست عدد ۳۵۲ در مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ دارای چند شمارنده است؟ ۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

$$d(352) \overset{\text{تجزیه}}{=} d(2^5 \times 11^1) = (5+1)\cdot(1+1) = 12 \xrightarrow{\text{در } \mathbb{Z}} 2 \times 12 = 24$$

تست چند عدد مثبت a مضرب ۱۸ وجود دارد که $a \mid 2700$؟ ۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

$$\underbrace{a}_{18q} \mid 2700 \longrightarrow 18q \mid 18 \times 150 \longrightarrow q \mid 150 \longrightarrow d(150) = d(2^1 \times 3^1 \times 5^2) = (1+1)(1+1)(2+1) = 12$$

تست عدد ۴۵۰۰۰ چند شمارنده‌ی طبیعی زوج دارد؟ ۱) ۶۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۳۵

حل $\underbrace{a}_{2q} \mid \underbrace{45000}_{2 \times 22500} \xrightarrow{\div 2} q \mid 22500 \longrightarrow d(22500) = d(2^2 \times 3^2 \times 5^4) = (2+1)(2+1)(4+1) = 45$

تست عدد ۴۵۰۰۰ چند شمارنده‌ی طبیعی فرد دارد؟ ۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

$$a \mid 45000 \overset{\text{تجزیه}}{\longrightarrow} \underbrace{a}_{\text{فرد}} \mid 2^3 \times 3^2 \times 5^4 \longrightarrow d(3^2 \times 5^4) = (2+1)(4+1) = 15$$

سراسری اگر تفاضل تعداد مقسوم علیه‌های مثبت دو عدد طبیعی $N=2^{\alpha}\times 3^{\beta}$ و $\frac{N}{36}$ برابر ۱۴ باشد، حداقل N کدام است؟ ☺

۱) ۱۴۴
۲) ۲۱۶
۳) ۲۸۸ ✓
۴) ۴۳۲

$$d(N)-d\left(\frac{N}{36}\right)=14 \rightarrow d(2^{\alpha}\times 3^{\beta})-d(2^{\alpha-2}\times 3^{\beta-2})=14$$

$$\left(\frac{N}{36}=\frac{2^{\alpha}\times 3^{\beta}}{2^{2}\times 3^{2}}=2^{\alpha-2}\times 3^{\beta-2},\ \alpha,\beta\geq 2\right)$$

$$\rightarrow (\alpha+1)(\beta+1)-(\alpha-1)(\beta-1)=14$$

$$\rightarrow \alpha\beta+\alpha+\beta+1-(\alpha\beta-\alpha-\beta+1)=14$$

$$\rightarrow 2\alpha+2\beta=14 \rightarrow \alpha+\beta=7$$

مقادیر ممکن:

α	۲	۳	۴	۵
β	۵	۴	۳	۲

$$\rightarrow N=2^{2}\times 3^{5} \text{ یا } 2^{3}\times 3^{4} \text{ یا } 2^{4}\times 3^{3} \text{ یا } 2^{5}\times 3^{2}=288 \checkmark$$

سراسری ۱۴۰۰ تعداد مقسوم علیه‌های مثبت عدد صحیح $x=2^{m}\times 5^{n}$ از تعداد مقسوم علیه‌های مثبت عدد صحیح $\frac{x}{40}$، ۱۲ واحد بیشتر است. حداقل مقدار x کدام است؟

۱) ۶۴۰
۲) ۸۰۰ ✓
۳) ۱۰۰۰
۴) ۱۲۸۰

$$d(x)=d\left(\frac{x}{40}\right)+12 \rightarrow d(x)-d\left(\frac{x}{40}\right)=12$$

$$\left(\frac{x}{40}=\frac{2^{m}\times 5^{n}}{2^{3}\times 5^{1}}=2^{m-3}\times 5^{n-1},\ m\geq 3,\ n\geq 1\right)$$

$$\rightarrow d(2^{m}\times 5^{n})-d(2^{m-3}\times 5^{n-1})=12$$

$$\rightarrow (m+1)(n+1)-(m-2)(n)=12$$

$$\rightarrow mn+m+n+1-mn+2n=12$$

$$\rightarrow m+3n=11$$

مقادیر ممکن:

m	۳	۴	۵	۶	۷	۸
n	-	-	۲	-	-	۱

$$\rightarrow x=\underbrace{2^{5}\times 5^{2}}_{800} \text{ یا } 2^{8}\times 5^{1}=1280$$

سراسری ۱۴۰۰ خ H.W اگر تعداد مقسوم علیه‌های مثبت عدد صحیح $x=6^{m}\times 10^{n}$، ۳۵ واحد از تعداد مقسوم علیه‌های مثبت عدد $15x$ کمتر باشد، اختلاف بزرگترین و کوچکترین مقدار ممکن برای x کدام است؟ (گزینه ۴)

۱) ۱۲۹۶
۲) ۴۳۰۴
۳) ۶۴۰۰
۴) ۸۷۰۴

متذکر می‌شود: حاصل ضرب شمارنده‌های مثبت عدد طبیعی n $=\sqrt{n^{d(n)}}$

اختیاری

نکته ۴ تعداد عوامل عدد اول P در $n!$ برابر است با:

(قضیه لژاندر)

$$\left[\frac{n}{P}\right] + \left[\frac{n}{P^2}\right] + \left[\frac{n}{P^3}\right] + \cdots$$

مثال: در $28!$ چند عامل ۳ وجود دارد؟ (اگر $3^k \mid 28!$ ، حداکثر k کدام است؟)

$$28! \overset{\text{تجزیه}}{=} 2^{\alpha} \times 3^{13} \times \cdots \xrightarrow{\text{یعنی}} 13 \checkmark = \underbrace{\left[\frac{28}{3}\right]}_{9} + \underbrace{\left[\frac{28}{3^2}\right]}_{3} + \underbrace{\left[\frac{28}{3^3}\right]}_{1} + \underbrace{\left[\frac{28}{3^4}\right]}_{0}$$

سراسری ۱۴۰۰ اگر $n!$ بر 6^5 بخش‌پذیر باشد، کمترین مقدار n کدام است؟ ۱) ۳۰ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۱

(گزینه ۲)

مثال: عدد $10!$ را تجزیه کنید.

$$10! = 2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 5^{\gamma} \times 7^{\theta}$$

$\alpha =$ تعداد عوامل ۲ در $10! = \left[\frac{10}{2}\right] + \left[\frac{10}{2^2}\right] + \left[\frac{10}{2^3}\right] = 8$

$\beta =$ " ۳ " " $= \left[\frac{10}{3}\right] + \left[\frac{10}{3^2}\right] = 4$

$\gamma =$ " ۵ " " $= \left[\frac{10}{5}\right] = 2$

$\theta =$ " ۷ " " $= \left[\frac{10}{7}\right] = 1$

$$\Rightarrow 10! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^1$$

نتیجه: در تجزیه‌ی اعداد به شکل فاکتوریل، هرچه عامل بزرگ‌تر باشد، توان آن کوچک‌تر است.

(تعداد)

سراسری ۱۴۰۰ برای هر عدد طبیعی n داریم: $n! = 2^{a_1} \times 3^{a_2} \times 5^{a_3} \times \cdots$. مقدار $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ به ازای $n=20$ کدام است؟

۱) ۲۸
۲) ۳۲
۳) ۳۶
۴) ۴۰

تست: اگر $!۳۷$ بر ۶^k بخش‌پذیر باشد، حداکثر k کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۱۷
۴) ۱۸

تست: اگر $!۲۷$ بر ۸^k بخش‌پذیر باشد، حداکثر k کدام است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

تست ۳۰۱ عدد $!۲۷$ بر ۱۲^k بخش‌پذیر است. حداکثر k کدام است؟ (گنر ۸۴)

۱) ۶
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۱

تعداد صفرهای سمت راست یک عدد طبیعی n با تعداد عوامل ۱۰ موجود در آن عدد برابر است.

پس تعداد عوامل ۲ و ۵ را می‌یابیم، هرکدام که تعدادش کمتر باشد، به همان تعداد صفر در سمت راست عدد وجود دارد.

مثال: در سمت راست عدد $۲۴^۳ \times ۲۵^۵$ چند صفر وجود دارد؟

تمرین ۳۰۲ در سمت راست عدد $۲۰^{۲۰} \times ۲۱^{۲۱} \times ۲۲^{۲۲} \times ۲۳^{۲۳} \times ۲۴^{۲۴} \times ۲۵^{۲۵}$ چند صفر وجود دارد؟ (جواب: ۷۰)

نتیجه: می‌دانیم در اعداد به شکل فاکتوریل، تعداد عوامل ۵ از تعداد عوامل ۲ کمتر است، پس:

$$\text{تعداد صفرهای سمت راست } n! = \text{تعداد عوامل ۵ در } n! = \left[\frac{n}{۵}\right] + \left[\frac{n}{۵^۲}\right] + \cdots$$

سراسری ۹۰: عدد $!۷۵$ مختوم به چند صفر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

تست درسمت راست عدد $1000! + \dots + 200! + 100!$ چند صفر وجود دارد؟

۱) ۲۴
۲) ۲۵
۳) ۲۰۰
۴) ۲۴۹

تست درسمت راست عدد $\frac{600!}{60!} + \frac{400!}{40!}$ چند صفر وجود دارد؟

۱) ۸۹
۲) ۹۰
۳) ۹۲
۴) ۱۳۴

تست H.W درسمت راست عدد $5^{30} \times 30!$ چند صفر وجود دارد؟ (گزینه ۲)

۱) ۲۵
۲) ۲۶
۳) ۳۷
۴) ۳۸

... نه، قصه ممکن نیست همیشه فاصله‌گیری هست چهارباغ بهبهان

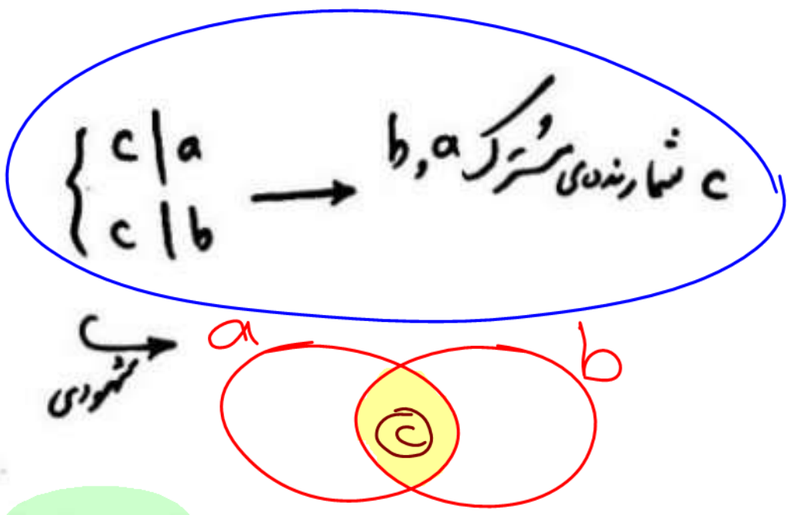
و عشق سفر به رودشتی هست از خلوت اشتیاق هست

... و عشق صمیمی فاصله‌هاست صدای فاصله‌ها را عمیق‌تر می‌کند ...

مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح (یا عامل یا شمارنده)

عددی است که هر دو عدد صحیح را می‌شمارد.

مثال عددی: $\begin{cases} 3 \mid 12 \\ 3 \mid 18 \end{cases} \longrightarrow$ ۳ شمارنده‌ی مشترک ۱۲ و ۱۸



بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح (ب.م.م) (GCD)

تعریف: عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b (که حداقل یکی غیر صفر است) می‌گوییم، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) $d \mid a \wedge d \mid b$ (d مقسوم علیه مشترک)

ب) $\forall m \in \mathbb{N}: (m \mid a \wedge m \mid b) \Rightarrow m \leq d$ (d از هر مقسوم علیه مشترکی بزرگتر یا مساوی m هر مقسوم علیه مشترک a و b)

(ب.م.م دو عدد صحیح a و b را با نماد (a,b) یا $a \cap b$ نشان می‌دهیم)

مثال عددی

$(12,18)=6 \rightarrow$ الف) $6 \mid 12 \wedge 6 \mid 18$ ✓

ب) $\forall m \in \mathbb{N}: (m \mid 12 \wedge m \mid 18) \xrightarrow{m=1,2,3,6} m \leq 6$ ✓

نتیجه ۱: ب.م.م دو عدد صحیح، در صورت وجود، همواره عددی طبیعی و یکتاست.

استثناء: $(0,0)$ وجود ندارد زیرا همه‌ی اعداد صحیح شمارنده‌ی صفرند و بزرگترین وجود ندارد.

نتیجه ۲ اگر $a \neq 0$ عددی صحیح باشد، آنگاه $(a,0)=|a|$

مثال عددی: $(-4,0)=4$، $(5,0)=5$

توضیح: صفر را همه‌ی اعداد صحیح می‌شمارند، پس بزرگترین عدد طبیعی‌ای یابیم که a را بشمارد $\rightarrow$ خود $|a|$

نتیجه ۳ "خاصیت جابه‌جایی ب.م.م" $(a,b)=(b,a)$

نتیجه ۴ اگر $a \in \mathbb{Z}$، آنگاه $(a,a)=|a|$ $\quad a \neq 0$

مثال عددی: $(-4,-4)=4$

نتیجه ۵ علامت تأثیری در محاسبه‌ی ب.م.م ندارد.

$$(a,b)=(-a,b)=(a,-b)=(-a,-b)$$

(زیرا مجموعه مقسوم علیه‌های دو عدد قرینه برابر است.)

نتیجه ۶ اگر a و b دو عدد صحیح مخالف صفر باشند، آنگاه

$(a,b)=d \Rightarrow (d \mid a \wedge d \mid b)$ $\longrightarrow$ ب.م.م، هر دو عدد خودش را می‌شمارد

بنابراین داریم:

$(a,b) \mid a \rightarrow (a,b) \leq |a|$

$(a,b) \mid b \rightarrow (a,b) \leq |b|$

مثال عددی: $(12,18)=6 \rightarrow \begin{cases} 6 \mid 12 \rightarrow 6 \leq 12 \\ 6 \mid 18 \rightarrow 6 \leq 18 \end{cases}$

$(6,12)=6 \rightarrow \begin{cases} 6 \mid 6 \rightarrow 6 \leq 6 \\ 6 \mid 12 \rightarrow 6 \leq 12 \end{cases}$

$(a,b) \mid a \pm b$ $\quad$ $(a,b) \mid ma+nb$

CamScanner

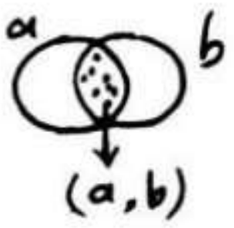
بحث شهودی در مورد "ب.م.م"

(یادآوری: "عاد کردن" شبیه "زیرمجموعه" است)

↩ "ب.م.م" شبیه "اشتراک" است.

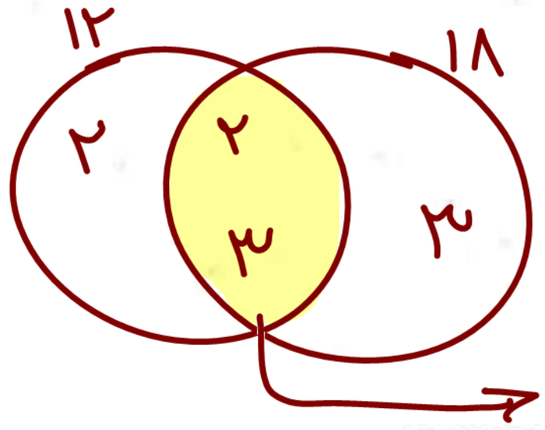


$(A \cap B) \subseteq A \quad , \quad (A \cap B) \subseteq B$ ← در مجموعه‌ها



$(a,b) \mid a \quad , \quad (a,b) \mid b$ ← در ب.م.م

مثال عددی



$۱۲ \sqcap ۱۸ = ۲ \times ۳ \rightarrow (۱۲,۱۸) = ۶$

نتیجه: پایه‌های مشترک با توان کمتر در هم ضرب می‌شوند ← پس از تجزیه ← ب.م.م دو عدد صحیح

نتیجه برای محاسبه ب.م.م

(روش ۱: روش تجزیه)

EX

مثال عددی

$(۱۲, ۱۸) = ۲^۱ \times ۳^۱ = ۶$

$۱۲ = ۲^۲ \times ۳^۱$ ، $۱۸ = ۲^۱ \times ۳^۲$

$(۵۴, ۱۲۰) = ۲^۱ \times ۳^۱ = ۶$

$۵۴ = ۲^۱ \times ۳^۳$ ، $۱۲۰ = ۲^۳ \times ۳^۱ \times ۵^۱$

انسان‌های بزرگ ایده می‌دهند

و انسان‌های کوچک آرزو

انسان‌های بزرگ از نخستین توقع دارند و انسان‌های کوچک از دیگران !!!

★ یافتن ب.م.م اعداد پارامتری ← ب.م.م مورد نظر را d فرض می‌کنیم و نتیجه ۶ را به کار می‌بریم.

مثال اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد $12n+7$ و $5n-2$ دارای مقسوم علیه مشترک غیر ۱ باشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

۱) ۵۹ ✓ ۲) ۶۷ ۳) ۸۴ ۴) ۸۹

$(12n+7, 5n-2) = d \neq 1$

$\rightarrow \begin{cases} d \mid (12n+7)\times 5 \rightarrow d \mid 60n+35 \\ d \mid (5n-2)\times 12 \rightarrow d \mid 60n-24 \end{cases}$ تفاضل را می‌شمارد $\xrightarrow{}$ $d \mid 59 \xrightarrow[d\neq 1]{d\in N} d=59$ ✓

مثال در مجموعه‌ی اعداد طبیعی اگر $d=(3n+5, 3n^2-2n+6)$، $d\neq 1$ باشد، عدد d کدام است؟

۱) ۴۱ ۲) ۴۷ ۳) ۴۳ ۴) ۵۳ ✓

$\begin{cases} d \mid 3n+5 \\ d \mid 3n^2-2n+6 \end{cases} \rightarrow$ ریشه $n=-\frac{5}{3}$

$d \mid 3(-\frac{5}{3})^2 - 2(-\frac{5}{3}) + 6 \rightarrow d \mid \frac{25}{3} + \frac{10}{3} + \frac{18}{3} = \frac{53}{3} \rightarrow d \mid 53 \xrightarrow[d\neq 1]{d\in N} d=53$

تست اگر $a\in Z$، حاصل $(2a-1, 2a+5)$ چند جواب دارد؟

۱) ۶ ۲) ۴ ✓ ۳) ۳ ۴) ۲

$(2a-1, 2a+5) = d \rightarrow \begin{cases} d \mid 2a-1 \\ d \mid 2a+5 \end{cases}$ تفاضل $\rightarrow d \mid 6 \xrightarrow{d\in N} d=1,2,3,6$

اما $2a-1$ عددی فرد است و $2a-1, 2 \nmid 6$ پس $d=1,3$

تست اگر a عددی فرد باشد، آن‌گاه $(2a, a+2)$ چند جواب دارد؟ (محدودیت، $a+2$ فرد)

۱) ۱ ✓ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه کلی $(2a, a+2) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 2a \rightarrow d \mid 2a \\ d \mid (a+2)\times 2 \rightarrow d \mid 2a+4 \end{cases}$ تفاضل $\rightarrow d \mid 4 \xrightarrow{d\in N} d=1,2,4$

$a+2$ فرد است، پس $d\neq 2,4$، لذا $d=1$

راه عددگذاری $a=3$ (فرد) $\rightarrow (\underbrace{2(3)}_{6}, \underbrace{3+2}_{5}) = 1$ ✓

تست اگر عدد طبیعی n مضرب ۷ نباشد، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $n^2+9n+21$ و $n+7$ کدام است؟ (محدودیت ☺)

۱) ۱ ✓ ۲) ۳ یا ۱ ۳) ۵ یا ۱ ۴) ۷ یا ۱

حل تشریحی $(n^2+9n+21, n+7) = d \rightarrow \begin{cases} d \mid n^2+9n+21 \\ d \mid (n+7)\times n \rightarrow d \mid n^2+7n \end{cases}$ تفاضل $\rightarrow d \mid 2n+21$

$\times 2$ ← تفاضل $\rightarrow d \mid 14n+14 \rightarrow d \mid 7 \rightarrow d=1$ یا ۷

۷ قابل قبول نیست زیرا اگر $7 \mid n+7$، آن‌گاه $7 \mid n$ که خلاف فرض است. پس $d=1$

راه عددگذاری $n=2$ (مضرب ۷ نباشد) $\rightarrow (\frac{2+7}{9}, \frac{2^2+9(2)+21}{43}) = 1$ ✓

تست اگر $\begin{cases} (a,4)=2 \\ (b,4)=2 \end{cases}$، آن‌گاه $(a+b, 4)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ✓

(جواب: گزینه‌ی ۴)

$\begin{cases} (a,4)=2 \xrightarrow{\text{عددگذاری}} a=2 \\ (b,4)=2 \xrightarrow{\text{عددگذاری}} b=6 \end{cases} \rightarrow (a+b, 4) = (8,4) = 4$

دو عدد نسبت به هم اول (متباین)

EX

a, b نسبت به هم اول‌اند (متباین‌اند) $\iff (a,b)=1$

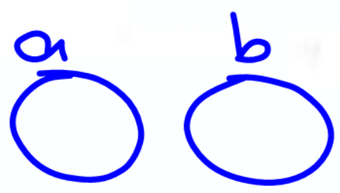
ممکن است a و b هیچ کدام عدد اول نباشند!!

مثال عددی: $(15, 21)=1$ ← عنی اول

۱۵ و ۲۱ نسبت به هم اول‌اند

بحث شهودی: متباین یعنی ... جدا از هم

$(a,b)=1 \rightarrow a \sqcap b = 1 \rightarrow \phi$



مثال عددی: جدا از هم



$\{\phi \sqcap A = \phi$
$\{1 \sqcap a = 1$

فرد = (فرد, زوج)

$(12, 9) = 3$

$(8, 9) = 1$

تذکر ۱: عدد ۱ نسبت به هر عدد صحیح اول است. $\forall a \in \mathbb{Z}: (a,1)=1$

تذکر ۲: اعداد زوج و فرد لزوماً نسبت به هم اول نیستند. ←

اما عدد ۲ نسبت به هر عدد فرد اول است $(\text{فرد}, 2)=1$

تذکر ۳ / EX: هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. $\forall a \in \mathbb{Z}: (a, a+1)=1$

برای: $(a, a+1)=d \rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid a+1 \end{cases}$ تفاضل $\rightarrow d \mid 1 \rightarrow d=1$

مثال / EX: ثابت کنید هر دو عدد صحیح و فرد متوالی، نسبت به هم اول‌اند.

$(2k+1, 2k+3)=d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 2k+1 \\ d \mid 2k+3 \end{cases}$ تفاضل $\rightarrow d \mid 2 \xrightarrow{d \in \mathbb{N}} d = 1$ یا ۲

اما $2k+1$ فرد است و $2 \nmid 2k+1$، پس $d=1$

(دو عدد فرد متوالی)

سوال ۱۳ / EX: به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، دو عدد به صورت‌های $25n+9$ و $11n+4$ نسبت به هم اول‌اند؟

$(11n+4, 25n+9)=d \rightarrow \begin{cases} d \mid (11n+4)\times 25 \rightarrow d \mid 275n+100 \\ d \mid (25n+9)\times 11 \rightarrow d \mid 275n+99 \end{cases}$ تفاضل $\rightarrow d \mid 1 \rightarrow d=1$

if $|11\times 9 - 4\times 25| = 1$ → $d=1$

این دو عدد همواره نسبت به هم اول‌اند و به n بستگی ندارد $(\forall n \in \mathbb{Z})$

$99-9=90$

۱) ۸۶ ۲) ۸۷ ۳) ۸۹ ۴) ۹۰

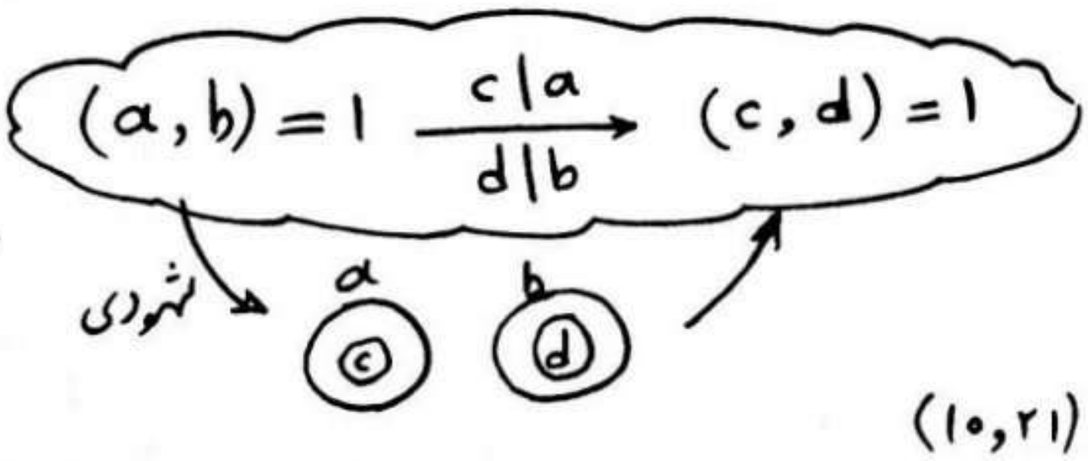
سوال ۱۳۰۳ / EX: به ازای اعداد طبیعی $1 \le n \le 50$، در چند حالت دو عدد $(4n+7)$ و $(5n+9)$ نسبت به هم اول‌اند؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۸ ۳) ۳۳ ۴) ۵۰

من از پایان میترسیدم و آغاز کردم

CamScanner

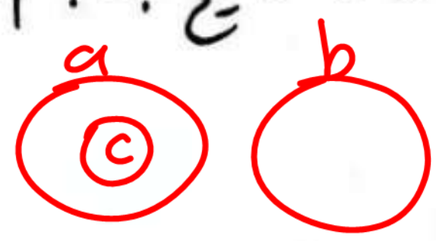
تذکر ۴ اگر دو عدد صحیح نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه شمارنده‌های آن‌ها نیز نسبت به هم اولند.
(اختیاری)



مثال عددی

$(5,7)=1 \xrightarrow[7\mid 21]{5\mid 10} (10,21)=1$

حالت خاص (اختیاری): اگر دو عدد صحیح نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه هر یک نسبت به شمارنده دیگری نیز اول است.



$$\begin{cases} (a,b)=1 \xrightarrow{c\mid a} (c,b)=1 \\ (a,b)=1 \xrightarrow{d\mid b} (a,d)=1 \end{cases}$$

$(7,14)=7$
$(7,15)=1$

$$\begin{cases} \text{if } p\mid a \xrightarrow{\text{اثبات}} (p,a)=p \\ \text{if } p\nmid a \longrightarrow (p,a)=1 \end{cases}$$

زیرا: $(p,a)=1$ یا p (صحیح اول)

نکته ۳ (Ex)

اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، $p\nmid a$، آن‌گاه $\boxed{(p,a)=1}$

(توجه کنید اگر $p\mid a$، آن‌گاه $(p,a)=p$)

اثبات: فرض می‌کنیم $(p,a)=d$، نشان می‌دهیم $d=1$. داریم:

$$(p,a)=d \Longrightarrow \begin{cases} d\mid p \xrightarrow{p \text{ اول است}} d=1 \text{ یا } p \xrightarrow{\text{فقط}} d=1 \\ d\mid a \quad (*) \end{cases}$$

(زیرا اگر $d=p$ باشد، آن‌گاه با توجه به $(*)$، $p\mid a$، خلاف فرض است)

نتیجه ۱: اگر یک عدد اول، یک عدد صحیح را نشمارد، نسبت به آن اول است.

$5\nmid 12 \rightarrow (5,12)=1$
$8\nmid 12 \rightarrow (8,12)=4$

نتیجه ۲ (Ex): هر دو عدد اول متمایز، نسبت به هم اولند زیرا هیچ کدام دیگری را نمی‌شمارد. پس:

$\boxed{(p,q)=1}$ ($p\neq q$)

اثبات: $(p,q)=d \rightarrow \begin{cases} d\mid p \xrightarrow{p \text{ اول است}} d=1 \nmid p \\ d\mid q \xrightarrow{q \text{ اول است}} d=1 \nmid q \end{cases} \Longrightarrow d=1$

نتیجه ۳ (اختیاری): عدد اول p نسبت به تمام اعداد طبیعی کوچکتر از خودش اول است، زیرا هیچ کدام را نمی‌شمارد.

$$(p,1)=\dots=(p,p-1)=1 \rightarrow \boxed{(p,(p-1)!)=1}$$

$$(7,1)=(7,2)=(7,3)=(7,4)=(7,5)=(7,6)=1 \rightarrow (7,6!)=1$$

نکات مهم ب.م.م (در حالت کلی)

(الف) $(a,b)=d \iff (ka,kb)=|k|d$ $\quad k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0$

(ب) $(a,b)=d \iff (a^n,b^n)=d^n$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

① دو طرف ب.م.م را می‌توان در هر عدد صحیح غیرصفر ضرب کرد و یا به توان هر عدد طبیعی رساند.

مثال عددی: $(4,6)=2 \rightarrow (3\times4,3\times6)=3\times2 \rightarrow (4^2,6^2)=2^2 \rightarrow (\frac{4^2}{16},\frac{6^2}{36})=\frac{2^2}{4}$

مثال: اگر $(a^3,b^3)-(-4a,-4b)=0$ آنگاه (a,b) کدام است؟

$(a,b)\to d \to d^3-4d=0 \to d(d^2-4)=0 \to d=0,-2,2$ ✓ (۲)

نتیجه: عمل فاکتورگیری در محاسبه ب.م.م مجاز است.

$$(ka,kb)=|k|(a,b) \quad (k\neq 0)$$

(محاسبه ب.م.م: روش فاکتورگیری)

مثال عددی: $(78,104)=? \to (2\times39,2\times52) \to 2(39,52)=2(3\times13,4\times13)=2\times13(3,4)=26$ ✓ (روش ۲)

(۱)

سراسری: اگر b عددی فرد باشد و $a|b$، آنگاه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $18ab$ و $12a^2$ کدام است؟

۱) $6a$ ۲) $6a^2$ ۳) $6ab$ ۴) $12ab$

$a|b \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} b=a.q \to \begin{cases} a=\text{فرد} \\ q=\text{فرد} \end{cases}$

$(12a^2,18ab)=6a(2a,3b)=6a(2a,3aq)=6a^2(2,3q)=6a^2(2,\text{فرد})=6a^2$ ✓

(۱)

(اختیاری)

③ محاسبه ب.م.م ترکیب‌های خطی دو عدد صحیح

ضرایب a: m, r — ضرایب b: n, s

$$\left|\begin{matrix} m & n \\ r & s \end{matrix}\right| = k$$

- if $|k|=1$: $(ma+nb,ra+sb)=(a,b)$
- if $|k|\neq 1$: $(ma+nb,ra+sb)\,|\,k(a,b)$

مثال: اگر $(a,b)=6$، حاصل $(12a+29b,5a+12b)$؟

ضرایب a: $12, 5$ — ضرایب b: $29, 12$

$k=\left|\begin{matrix} 12 & 29 \\ 5 & 12 \end{matrix}\right|=-1 \to |k|=1 \to$ جواب $=6$ ✓

مثال (H.W): اگر $(a,b)=1$، حاصل $(2a-b,a+2b)$؟

$k=\left|\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}\right|=5\neq 1$

(جواب: ۱ و ۵)

$(2a-b,a+2b)\,|\,k(a,b)$, $k=5\times 1$

$\to (2a-b,a+2b)=1$ یا 5 ✓

زنگ بعد ساعت ۱۱:۳۰

CamScanner

③ در هر ب.م.م همواره می‌توان

یک عدد را ثابت در نظر گرفت و مضربی از آن را به عدد دیگر اضافه یا کم کرد بدون آن که ب.م.م تغییر کند.

$$\begin{cases}(a,b)=(a,ka\pm b)\\(a,b)=(b,kb\pm a)\end{cases}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

مثال عددی

$(۱۲,۱۸)=۶ \rightarrow (\underline{\underline{۱۲}},\ ۱۸+۲\times۱۲)=(۱۲,۴۲)=۶(۲,۷)=۶$

$\rightarrow (\underline{\underline{۱۲}},\ ۱۸-۱۲)=(۱۲,۶)=۶$

نتیجه مهم: از نکته‌ی فوق می‌توان برای محاسبه‌ی ب.م.م دو عدد صحیح استفاده کرد. به این ترتیب که (محاسبه ب.م.م)

عدد کوچکتر را ثابت در نظر می‌گیریم و مضربی از آن را از عدد دیگر کم می‌کنیم و این عمل را تکرار می‌کنیم تا یکی از اعداد صفر شود.

روش کم کردن (روش تفریق)

مثال عددی

$(۱۱۹,\underline{\underline{۵۱}})=? \rightarrow (\underline{\underline{۵۱}},\ ۱۱۹-۲\times۵۱)=(۵۱,۱۷)$

$=(۱۷,\ ۵۱-۳\times۱۷)=(۱۷,۰)=۱۷$ ✓

تست بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و $ab+1$ کدام است؟ ۱) a ۲) ۱ ✓ ۳) b ۴) $a+1$

$(\underline{\underline{a}},\ ab+1)=(\underline{\underline{a}},\ ab+1-b\cdot a)=(a,1)=1$ ✓

(a و ab خودش یا مضربش؛ b برابر)

تست به ازای مقادیر مختلف $a>۳$، بزرگترین مقدار بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $(۱۵a+۳)$ و $(۱۵a-۱۲)$ کدام است؟ ۱) ۱۵ ۲) ۱ ۳) ۳ ✓ ۴) ۵

$(۱۵a+۳,\ ۱۵a-۱۲)=(\underline{\underline{۱۵a+۳}},\ ۱۵a-۱۲-(۱۵a+۳))$

$=(۱۵a+۳,\ ۱۵)=(\underline{\underline{۱۵}},\ ۱۵a+۳-۱۵a)=(۱۵,۳)=۳$

تست بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $(۱۶a+۱۸)$ و $(۱۶a+۳۲)$ به ازای مقادیر مختلف a، چند عدد متفاوت می‌تواند شود؟ ۱) ۱ ۲) ۲ ✓ ۳) ۴ ۴) ۵

$(۱۶a+۳۲,\ ۱۶a+۱۸)=(\underline{\underline{۱۶a+۱۸}},\ ۱۶a+۳۲-(۱۶a+۱۸))$

$=(۱۶a+۱۸,\ ۱۴)=۲(\underline{\underline{۸a+۹}},\ ۷)=۲\times۱$ یا ۲×۷

(اول ۱ یا ۷)

تست دو عدد ۶۰ و ۷۵ دارای چند شمارنده طبیعی مشترک‌اند؟ ۱) ۲ ۲) ۴ ✓ ۳) ۶ ۴) ۸

(تعداد شمارنده‌های طبیعی ب.م.م دو عدد را می‌یابیم)

$(۶۰,۷۵)=(\underline{\underline{۶۰}},\ ۷۵-۶۰)=(۶۰,۱۵)=(\underline{\underline{۱۵}},\ ۶۰-۴\times۱۵)=۱۵$

تعداد شمارنده‌های طبیعی ۱۵ $=d(۱۵)\overset{\text{تجزیه}}{=}d(۳^{۱}\times۵^{۱})=(۱+۱)(۱+۱)=۴$ ✓

CamScanner

④ اگر $a = bq + r$ $(0 \le r < b)$ ، آنگاه $(a,b) = (b,r)$

به عبارت دیگر در قضیه‌ی تقسیم همواره داریم

$$(\text{باقی‌مانده}, \text{مقسوم‌علیه}) = (\text{مقسوم‌علیه}, \text{مقسوم})$$

مثال عددی: $۳۵ = ۲۵(۱) + ۱۰$

$(۳۵, ۲۵) = (۲۵, ۱۰)$

اثبات: $(a,b) = (\underbrace{b}_{\text{ثابت}}, \underbrace{a - bq}_{r})$ ✓ (q برابر)

تست: اگر دو عدد $a-۱$ و $a^۲+۳a+۱$ نسبت به هم اول باشند، کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

$(a-۱, a^۲+۳a+۱) = ۱$

۱) $a = ۵k$ ۲) $a = ۵k+۱$

۳) $a \neq ۵k$ ۴) $a \neq ۵k+۱$ ✓

$a^۲+۳a+۱ \mid a-۱$

$a=۱$ یعنی

$a^۲+۳a+۱ = (a-۱).q + ۵$

$\vdots$

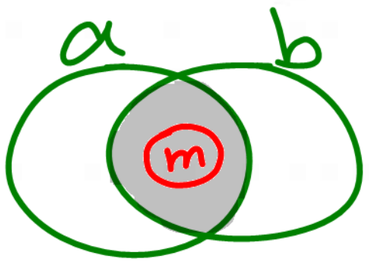
۵

$\rightarrow (\underbrace{a^۲+۳a+۱}_{۱}, a-۱) = (a-۱, ۵) \rightarrow (a-۱, ۵) = ۱$ (۵ اول)

$\rightarrow ۵ \nmid a-۱ \rightarrow a-۱ \neq ۵k \rightarrow a \neq ۵k+۱$

---

⑤ اگر عددی، دو عدد صحیح را بشمارد، ب.م.م آن‌ها را نیز می‌شمارد.



$(m \mid a \subseteq \ \wedge \ m \mid b \subseteq) \Rightarrow m \mid (a,b)$ $\quad m \subseteq (a \cap b)$

مثال عددی:

$(۳ \mid ۱۲ \ \wedge \ ۳ \mid ۱۸) \rightarrow ۳ \mid (۱۲, ۱۸) \rightarrow ۳ \mid ۶$ ✓

تست: باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد ۲۰۷ و ۳۵۳ بر عدد طبیعی b به ترتیب ۳ و ۱۳ است. b چند جواب وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ✓ ۳) ۴ ۴) ۵

$\begin{cases} ۲۰۷ = bq + ۳ , & ۳ < b \\ ۳۵۳ = bq' + ۱۳ , & ۱۳ < b \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} ۲۰۴ = bq \rightarrow b \mid ۲۰۴ \\ ۳۴۰ = bq' \rightarrow b \mid ۳۴۰ \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{ب.م.م}}$ $b \mid (\underbrace{۲۰۴, ۳۴۰}_{۶۸ = ۲^۲ \times ۱۷})$

b شمارنده طبیعی ۶۸ $\xrightarrow[b > ۱۳]{}$ $b = \underbrace{۱, ۲, ۴}_{\times}, \underbrace{۱۷, ۳۴, ۶۸}_{\checkmark}$

$(۲۰۴, \underbrace{۳۴۰ - ۲۰۴}_{۱۳۶}) = (۱۳۶, \underbrace{۲۰۴ - ۱۳۶}_{۶۸}) = (۶۸, \underbrace{۱۳۶ - ۲ \times ۶۸}_{۰}) = ۶۸$

CamScanner

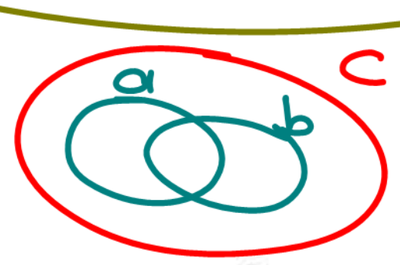
مضرب مشترک دو عدد صحیح ← عددی است که بر هر دو عدد صحیح بخش‌پذیر است.

مثال عددی: $\begin{cases} 12 \mid 72 \\ 18 \mid 72 \end{cases} \rightarrow$ ۷۲ مضرب مشترک ۱۲ و ۱۸

مضرب | ابر

$\begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \end{cases} \rightarrow c$ مضرب مشترک b, a

جهت شهودی



کوچکترین مضرب مشترک دو عدد صحیح (ک.م.م)

تعریف: عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد صحیح و مخالف صفر a و b می‌گوییم، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) $a \mid c \ \wedge \ b \mid c$ (c مضرب مشترک)

ب) $\forall m \in \mathbb{N} : (a \mid m \ \wedge \ b \mid m) \Rightarrow c \leq m$

(m هر مضرب مشترک b, a)

(c از هر مضرب مشترکی کوچکتر یا مساوی است)

(ک.م.م دو عدد صحیح a و b را با نماد $[a,b]$ یا $a \amalg b$ نشان می‌دهند)

مثال عددی: $[12,18] = 36 \rightarrow$ الف) $12 \mid 36 \ \wedge \ 18 \mid 36$

ب) $\forall m \in \mathbb{N} : (12 \mid m \ \wedge \ 18 \mid m) \xrightarrow{m = 36, 72, 108, \dots} 36 \leq m$ ✓

دقت کنید: $[0,0]$ وجود ندارد

نتیجه ۱: ک.م.م دو عدد صحیح، در صورت وجود، همواره عددی "طبیعی" و یکتا است.

$(a,0) = |a|$

نتیجه ۲: اگر a عددی صحیح باشد، آنگاه $[a,0]$ وجود ندارد

توضیح: کوچک‌ترین عدد طبیعی که هم بر a و هم بر صفر بخش‌پذیر باشد، وجود ندارد.

نتیجه ۳: اگر a و b دو عدد صحیح مخالف صفر باشند، آنگاه

$$\begin{cases} a \mid [a,b] \\ b \mid [a,b] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \leq [a,b] \\ b \leq [a,b] \end{cases}$$

مثال عددی: $[12,18] = 36 \rightarrow \begin{cases} 12 \mid 36 \rightarrow 12 \leq 36 \\ 18 \mid 36 \rightarrow 18 \leq 36 \end{cases}$

$[12,6] = 12 \rightarrow \begin{cases} 12 \mid 12 \rightarrow 12 \leq 12 \\ 6 \mid 12 \rightarrow 6 \leq 12 \end{cases}$

نتیجه ۴: اگر $a \neq 0$ عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[a,a] = |a|$

مثال عددی: $[-4,-4] = 4$

تمرین: اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $[a,b] = \frac{a+b}{2}$، آنگاه $a-b$ کدام است؟ (طبیعی)

می‌دانیم $\begin{cases} a \leq [a,b] \\ b \leq [a,b] \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \begin{cases} a \leq \frac{a+b}{2} \xrightarrow{\times 2} 2a \leq a+b \xrightarrow{-a} a \leq b \\ b \leq \frac{a+b}{2} \xrightarrow{\times 2} 2b \leq a+b \xrightarrow{-b} b \leq a \end{cases} \rightarrow a = b$

۱) ۱
۲) a
۳) ۰ ✓
۴) b

CamScanner

بحث شهودی در مورد "ک.م.م"

یادآوری | "عادکردن" شبیه "زیرمجموعه" است.
"ب.م.م" شبیه "اشتراک" است.

"ک.م.م" شبیه "اجتماع" است.

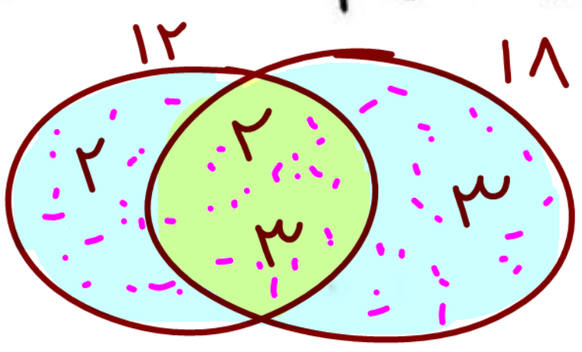


$A \subseteq (A \cup B)$, $B \subseteq (A \cup B)$ ← در مجموعه‌ها

$a \mid [a,b]$, $b \mid [a,b]$ ← در ک.م.م



مثال عددی



$\rightarrow \begin{cases} 12 \sqcap 18 = 2 \times 3 = 6 \rightarrow (12,18) = 6 \\ 12 \sqcup 18 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36 \rightarrow [12,18] = 36 \end{cases}$

مثال عددی: $(12,18) \mid [12,18]$ ✓ ($6 \mid 36$)

نتیجه: $(a,b) \mid [a,b]$, $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$

بنابراین: پایه‌های مشترک و غیرمشترک با توان بیشتر در هم ضرب می‌شوند ⟸ پس از تجزیه ⟸ ک.م.م دو عدد صحیح

مثال عددی: $[12,18] = 2^2 \times 3^2 = 36$ ($12 = 2^2 \times 3^1$, $18 = 2^1 \times 3^2$)

EX (محاسبه‌ی ک.م.م: روش تجزیه)

$[45,120] = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$ ✓ ($45 = 3^2 \times 5^1$, $120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$)

تذکر: روش دیگر برای محاسبه‌ی ک.م.م دو عدد صحیح غیرصفر:

$$[a,b] = \frac{|a.b|}{(a,b)}$$

مثال عددی: $[12,18] = \frac{12 \times 18}{(12,18)} = \frac{216}{6} = 36$

حالت خاص: $(a,b) = 1 \Leftrightarrow [a,b] = |ab|$

$[a,b].(a,b) = |ab|$

$[5,7] = 5 \times 7 = 35$

تست: اگر ک.م.م دو عدد $A = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ و B برابر $D = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2$ باشد، مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی B کدام است؟

۱) ۹۶
۲) ۱۲ ✓
۳) ۱۴
۴) ۱۸

$[\underbrace{2^2 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^2}_{A}, B] = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2$ → $B = 5^2 \times k$ → $2^\alpha \times 3^\beta \times 7^\gamma$ $(0 \le \alpha, \beta, \gamma \le 2)$

B حتماً در B وجود دارد

$k = 3^2$ ⟸ بزرگ‌ترین دورقمی مضرب ۲۵

$B = 75$ → مجموع ارقام ۱۲ ✓

تست: دو عدد $A = 2^3 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2$ و $B = 2^5 \times 3^2 \times 5^\alpha \times 11^1$ دارای ۲۳ مقسوم‌علیه مشترک مثبت و غیریک می‌باشند. تعداد تمام مقسوم‌علیه‌های مثبت کوچک‌ترین مضرب مشترک این دو عدد کدام است؟

۱) ۳۶۰
۲) ۴۸۰
۳) ۵۴۰
۴) ۷۲۰ ✓

$d((A,B)) = 24 \rightarrow d(2^3 \times 3^2 \times 5^\alpha) = 24 \rightarrow (3+1)(2+1)(\alpha+1) = 24 \rightarrow \alpha = 1$

(۲ ← تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت ب.م.م)

(۱ ← جزء مقسوم‌علیه‌های مشترک و مثبت هر دو عدد حساب شده)

$d[A,B] = d(2^5 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2 \times 11^1) = (5+1)(4+1)(3+1)(2+1)(1+1) = 720$ ✓

CamScanner

سراسری ۹۸ خ — EX

حاصل $[(627, 429), 154]$ کدام است؟ ✓

۱) ۴۶۲ ✓ ۲) ۴۷۸ ۳) ۵۰۶ ۴) ۹۲۴

$33 = 3 \times 11$ ، $154 = 2 \times 7 \times 11$

$462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$ ✓

$(627, 429) = (429, 627-429) = (198, 429-2\times198) = (33, 198-6\times33) = (33, 0) = 33$

نکته ۱ اگر عددی بر دو عدد صحیح غیرصفر بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه بر ک.م.م آن‌ها نیز بخش‌پذیر است.

$(a|m \wedge b|m) \Rightarrow [a,b]|m$ (اجتماع)



مثال عددی: $(12|72 \wedge 18|72) \Rightarrow [12,18]|72$ ✓ ($[12,18] = 36$)

تست: چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که مضرب ۱۲ بوده و مربع آن بر ۱۸۹ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ✓ ۳) ۴ ۴) ۵

$189|a^2 \rightarrow 3^3 \times 7^1 | a^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 3^{\frac{3}{2}} \times 7^{\frac{1}{2}} | a$

$\rightarrow 3^2 \times 7^1 | a$

$12|a \rightarrow 2^2 \times 3^1 | a$ $\xrightarrow{\text{ک.م.م}}$ $[3^2\times7^1, 2^2\times3^1] | a$ ($= 2^2 \times 3^2 \times 7^1$)

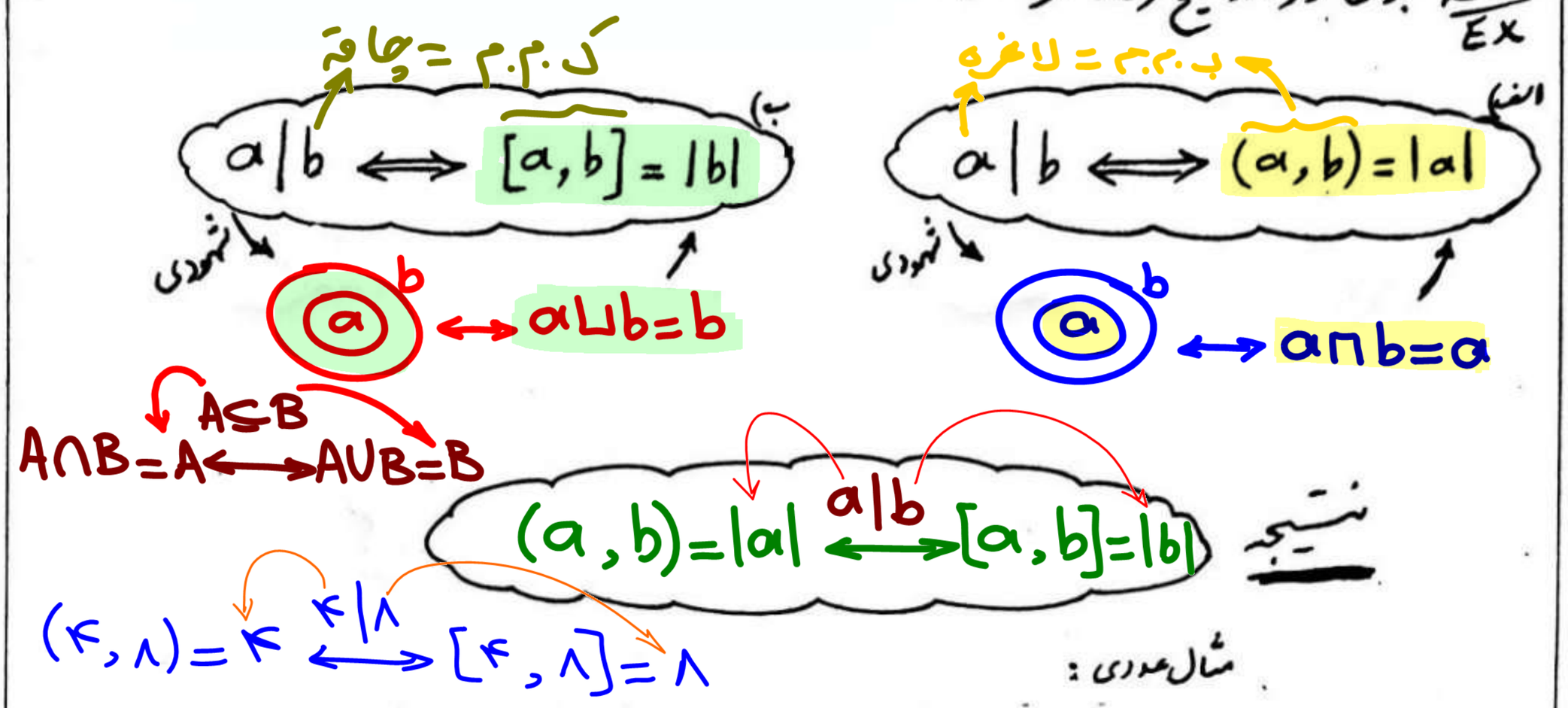
$\rightarrow 252|a \rightarrow a = 252q \xrightarrow{100 \le a \le 999} q = 1,2,3 \rightarrow$ ۳ جواب

تست H.W: کوچک‌ترین عضو پنج‌رقمی مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{N} : 270|x \wedge 112|x\}$ در تقسیم بر عدد ۱۱ چه باقی‌مانده‌ای دارد؟

$[270, 112] | x$

۱) ۵ (گزینه ۲) ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

نکته ۲ Ex برای دو عدد صحیح و غیرصفر a و b:



اثبات الف) باید دو شرط موجود در تعریف ب.م.م را برای $|a|$ بررسی کنیم: Ex

شرط اول برقرار است ← $|a|\,|\,a$, $|a|\,|\,b$ (طبق فرض که $a|b$، درست است)

شرط اول: $|a|\,|\,a$ هر عدد صحیح خودش را می‌شمارد

شرط دوم:
$$\forall m \in \mathbb{N};\ \underbrace{m|a}_{\text{از ویژگی‌ها}} \wedge m|b \Rightarrow m \leq |a|$$
$$|m| \leq |a| \xrightarrow{m>0} m \leq |a| \rightarrow \text{شرط دوم برقرار است}$$

اثبات ب) باید دو شرط موجود در تعریف ک.م.م را برای $|a|$ بررسی کنیم: Ex

شرط اول برقرار است ← $a\,|\,|a|$, $|a|\,|\,b$ (درست)

شرط اول: $a\,|\,|a|$ طبق فرض که $a|b$، درست است.

شرط دوم:
$$\forall m \in \mathbb{N};\ a|m \wedge \underbrace{b|m}_{\text{از ویژگی‌ها}} \Rightarrow |b| \leq m$$
$$|b| \leq |m| \xrightarrow{m>0} |b| \leq m \rightarrow \text{شرط دوم برقرار است}$$

برای اگر $n \in \mathbb{N}$ و a^n بر b^n بخش‌پذیر باشد، آنگاه کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $(a,b^2)=b^2$ ۲) $[a^2,b]=a^2$ ۳) $(a,b)=|b|$ ۴) $[a,b]=|a|$

$b^n \mid a^n \rightarrow b \mid a$ (a, b) ⟶ $(a,b)=|b|$ (رگ ۳)، $[a,b]=|a|$ (رگ ۴ ✓)

$b \mid a \rightarrow b \mid a^2$ (a, a^2) ⟶ $[a,b]=a^2$ (رگ ۲ ✓) — اجتماع

چاق، چاق‌تر می‌شود

تذکر ۱ $(a,b)=[a,b] \Leftrightarrow |a|=|b|$ ← همانند $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A=B$

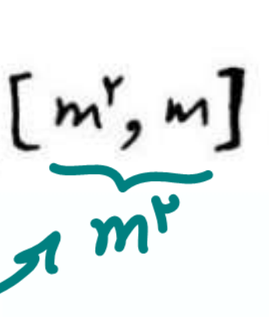
(a,b): اشتراک — $[a,b]$: اجتماع

تذکر ۲ خاصیت جذب ← ویژگی دارد

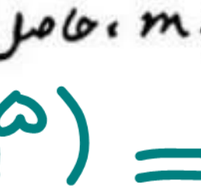
جواب: همان حرف تکراری است ← یک حرف تکراری است ← هم اجتماع، هم اشتراک دیده شود

$(a,[a,b])=|a|$, $[a,(a,b)]=|a|$

$a \sqcap (a \sqcup b)=|a|$, $a \sqcup (a \sqcap b)=|a|$



$A \cap (A \cup B)=A$



$A \cup (A \cap B)=A$

تذکر ۳ (اختیاری) خاصیت توزیع‌پذیری

$$\begin{cases} (a,[b,c])=[(a,b),(a,c)] \\ a \sqcap (b \sqcup c)=(a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \\ [a,(b,c)]=([a,b],[a,c]) \\ a \sqcup (b \sqcap c)=(a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c) \end{cases}$$

مثال ۴ Ex: اگر $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$، حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $([m^2,m],m^5)=(m^2,m^5)=m^2$ ✓

$m \mid m^2 \rightarrow m^2$ — $m^2 \mid m^5$

ب) $[(2m,4m^3),2m]=[2m,2m]=|m|[2,2]=4|m|$ ✓

$2m \mid 4m^3 \rightarrow 2m$ — $(2,2)=1 \rightarrow 2 \times 2=4$

ج) $[m^7,(m^4,m^8)]=[m^7,m^4]=|m^7|$ ✓

$m^4 \mid m^8 \rightarrow m^4$ — $m^4 \mid m^7$

CamScanner
CamScanner

نکات مهم ب.م.م و ک.م.م در یک نگاه

برای سه عدد صحیح و غیر صفر a و b و c داریم:

$\begin{cases} a \mid [a,b] \\ b \mid [a,b] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \le [a,b] \\ b \le [a,b] \end{cases}$	$\begin{cases} (a,b) \mid a \\ (a,b) \mid b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a,b) \le \lvert a \rvert \\ (a,b) \le \lvert b \rvert \end{cases}$
جابه‌جایی $[a,b] = [b,a]$	$(a,b) = (b,a)$
$[a,b,c] = [[a,b],c] = [a,[b,c]]$ شرکت‌پذیری	$(a,b,c) = ((a,b),c) = (a,(b,c))$
$a \mid b \iff [a,b] = \lvert b \rvert$	$a \mid b \iff (a,b) = \lvert a \rvert$
$[a,1] = \lvert a \rvert$	$(a,1) = 1$
$[a,0] = ??$	$(a,0) = \lvert a \rvert$ $(0,0) = ??$
$[a,(a,b)] = \lvert a \rvert$ جذب	$(a,[a,b]) = \lvert a \rvert$ جذب
$[a,b] = c \overset{k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0}{\iff} [ka,kb] = \lvert k \rvert c$	$(a,b) = d \overset{k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0}{\iff} (ka,kb) = \lvert k \rvert d$
$[a,b] = c \overset{\forall n \in \mathbb{N}}{\iff} [a^n,b^n] = c^n$	$(a,b) = d \overset{\forall n \in \mathbb{N}}{\iff} (a^n,b^n) = d^n$
$[a,b] = [-a,b] = [a,-b] = [-a,-b]$	$(a,b) = (-a,b) = (a,-b) = (-a,-b)$
خودتوانی $[a,a] = \lvert a \rvert$	$(a,a) = \lvert a \rvert$
پایه‌های مشترک و غیرمشترک با توان بیشتر $= ک.م.م$	پایه‌های مشترک با توان کمتر $= ب.م.م$
$(a,b) = [a,b] \iff \lvert a \rvert = \lvert b \rvert$	

سوال: اگر a عددی صحیح و مخالف صفر باشد، حاصل $[(a,a^2),(a,b)]$ کدام است؟

$a \mid a^2 \rightarrow a$

$\rightarrow [a,(a,b)] \overset{\text{جذب}}{=} \lvert a \rvert$

۱) $\lvert a \rvert$ ۲) a^2 ۳) a ۴) 1

متباین سازی

اگر دو عدد صحیح غیرصفر را بر ب.م.م آن‌ها تقسیم کنیم، دو عدد نسبت به هم اول حاصل می‌شود. یعنی:

$$(a,b)=d \iff \left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$$

مثال عددی

$$(12,18)=6 \iff \left(\frac{12}{6},\frac{18}{6}\right)=1 \checkmark$$

$\frac{12}{6}=2$ ، $\frac{18}{6}=3$

نتیجه: با توجه به این که $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ دو عدد صحیح‌اند (زیرا $d|a$ و $d|b$)، پس داریم:

$$\frac{a}{d}=a'\in\mathbb{Z} \Rightarrow a=a'.d$$

$$\frac{b}{d}=b'\in\mathbb{Z} \Rightarrow b=b'.d$$

$(a',b')=1$

$$[a,b]=\frac{ab}{(a,b)}=\frac{a'.d.b'.d}{d}=a'.b'.d$$

(a و b مثبت‌اند)

بنابراین

برای دو عدد صحیح و غیرصفر a و b، که $(a,b)=d$، اعدادی صحیح و یکتا مانند a' و b' همواره وجود دارند که

($\frac{a}{d}$ ← a' ، $\frac{b}{d}$ ← b')

$$(a',b')=1 \quad , \quad a=a'.d \quad , \quad b=b'.d \quad , \quad [a,b]=a'.b'.d$$

تست چند جفت عدد طبیعی وجود دارد که ب.م.م آن‌ها برابر ۱۲ و ک.م.م آن‌ها ۳۶۰ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ④ ۴

$$\begin{cases} d=(a,b)=12 \\ [a,b]=360 \end{cases} \longrightarrow a'.b'.\underbrace{d}_{12}=360 \rightarrow a'.b'=\frac{360}{12}=30$$

$(a',b')=1$ →

$$\begin{cases} a'=1 \\ b'=30 \end{cases} , \begin{cases} a'=2 \\ b'=15 \end{cases} , \begin{cases} a'=3 \\ b'=10 \end{cases} , \begin{cases} a'=5 \\ b'=6 \end{cases}$$

$d=12$ →

$$\begin{cases} a=1\times12=12 \\ b=30\times12=360 \end{cases} , \begin{cases} a=2\times12=24 \\ b=15\times12=180 \end{cases} , \begin{cases} a=3\times12=36 \\ b=10\times12=120 \end{cases} , \begin{cases} a=5\times12=60 \\ b=6\times12=72 \end{cases}$$

سراسری ۹۴ مجموع دو عدد طبیعی ۲۷۷۲ و بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک آنها ۲۳۱ و مخالف عدد کوچک‌تر است. تفاضل دو عدد کدام است؟

$$\begin{cases} d=(a,b)=231\neq b \\ a+b=2772 \end{cases} \xrightarrow{(a>b)} a'd+b'd=2772 \rightarrow \underbrace{d}_{231}(a'+b')=2772$$

$$\rightarrow a'+b'=\frac{2772}{231}=12 \xrightarrow{(a',b')=1} \begin{cases} a'=11 \\ b'=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} a'=7 \\ b'=5 \end{cases}$$

$\hookrightarrow b=1\times 231=231=d$ ✗

$$\text{جواب} = a-b=a'd-b'd=(a'-b')\underbrace{d}_{231}=(7-5)\times 231=462$$ ✓

۱) ۳۶۰
۲) ۴۶۲ ✓
۳) ۹۹۳۶
۴) ۹۲۴

سراسری ۹۵ خ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد طبیعی برابر ۱۸ و تفاضل مربعات این دو عدد ۲۲۶۸ است. رقم یکان عدد بزرگ‌تر کدام است؟

$$\begin{cases} d=(a,b)=18 \\ a^2-b^2=2268 \end{cases} \rightarrow (a'd)^2-(b'd)^2=2268 \rightarrow \underbrace{d^2}_{18^2=324}\times(a'^2-b'^2)=2268$$

$$\rightarrow a'^2-b'^2=\frac{2268}{324}=7$$

$$\rightarrow \underbrace{(a'-b')}_{1}\cdot\underbrace{(a'+b')}_{7}=\underbrace{7}_{\text{اول}} \rightarrow \begin{cases} a'-b'=1 \\ a'+b'=7 \end{cases} \rightarrow a'=4,\ b'=3$$

$$\rightarrow a=\underbrace{4\times 18}_{72},\ b=\underbrace{3\times 18}_{54}$$

۱) ۲ ✓
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

سراسری ۹۹ کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، ۶۰ برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌هاست. اگر مجموع دو عدد ۱۳۶ باشد، تفاضل آن دو عدد کدام است؟

$$[a,b]=60(a,b) \rightarrow a'.b'=60$$

$$(a',b')=1 \rightarrow \begin{cases} a'=60 \\ b'=1 \end{cases}, \begin{cases} a'=20 \\ b'=3 \end{cases}, \begin{cases} a'=15 \\ b'=4 \end{cases}, \begin{cases} a'=12 \\ b'=5 \end{cases}$$

$$a+b=136 \rightarrow a'.d+b'.d=136 \rightarrow d.(a'+b')=136$$

$$\rightarrow d=\frac{136}{a'+b'}\in\mathbb{N} \xrightarrow[b'=5]{a'=12} d=8 \rightarrow a-b=(a'-b').d=56$$ ✓

۱) ۴۲
۲) ۴۸
۳) ۵۲
۴) ۵۶ ✓

تست H.W اگر $d\neq 1$ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد طبیعی a و b و $d+ab=497$ باشد، آن‌گاه کوچک‌ترین مضرب مشترک a و b کدام است؟ (گزینه ۲)

۱) ۴۹۷
۲) ۷۰
۳) ۳۵
۴) ۱۴

CamScanner

هم‌نهشتی در $\mathbb{Z}$

هم‌نهشتی، همنهشتی، همنهشتی

تعریف: دو عدد صحیح a و b را به پیمانهٔ عدد طبیعی m، هم‌نهشت می‌گوییم، هرگاه تفاضل a و b مضربی از m باشد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \iff a-b=m.k \ (k\in\mathbb{Z}) \iff m \mid a-b$$

مثال عددی →
- $۲۷ \overset{۵}{\equiv} ۱۲$ $\quad (۵ \mid ۲۷-۱۲ \ (=۱۵))$
- $۱۷ \overset{۶}{\not\equiv} ۱۰$ $\quad (۶ \nmid ۱۷-۱۰ \ (=۷))$

Ex ثبت کدام دو عدد در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۲ صادق است؟

۱) ۲۰ و ۶۳ ۲) ۱۲ و ۲۴
۳) ۲۴ و ۵۸ ۴) ۲۳ و ۵۹ ✓

$۱۲ \mid ۵۹-۲۳ \ (=۳۶) \rightarrow ۵۹ \overset{۱۲}{\equiv} ۲۳$ ✓

$a \overset{۱}{\equiv} b \leftrightarrow ۱ \mid a-b$

تذکر ۱: هر دو عدد صحیح به پیمانهٔ یک هم‌نهشت‌اند. لذا از این پس پیمانه را عددی طبیعی و بزرگ‌تر از یک فرض می‌کنیم.

تذکر ۲: هر دو عدد صحیح مساوی با هر پیمانه‌ای، با هم هم‌نهشت‌اند. یعنی

$$a=b \Rightarrow \forall m\in\mathbb{N} \ a \overset{m}{\equiv} b \quad (\leftarrow \text{برعکس})$$

($a=b \Rightarrow m \mid a-b$ ← تعریف)

تذکر ۳: هر عدد صحیح، با هر پیمانه‌ای، با خودش هم‌نهشت است. یعنی

$$\forall a\in\mathbb{Z} : a \overset{m}{\equiv} a$$

(خاصیت انعکاسی) ↳ $m \mid a-a$ ✓

تذکر ۴: هر عدد صحیح، به پیمانهٔ خودش، با صفر هم‌نهشت است. یعنی

$$\forall a\in\mathbb{Z} ; \ a \overset{|a|}{\equiv} ۰$$

$\rightarrow a \mid a-۰$ ✓

تذکر ۵: هم‌نهشتی، یک رابطهٔ دوسویه است. یعنی

$$a \overset{m}{\equiv} b \iff b \overset{m}{\equiv} a$$

تذکر ۶: هم‌نهشتی، خاصیت تعدی دارد. یعنی

$$(a \overset{m}{\equiv} b \ \wedge \ b \overset{m}{\equiv} c) \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$$

$(۲۷ \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \ \wedge \ ۱۲ \overset{۵}{\equiv} ۷) \Rightarrow ۲۷ \overset{۵}{\equiv} ۷$ ✓

اثبات:
$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\text{تعریف}} m \mid a-b$
$b \overset{m}{\equiv} c \xrightarrow{\text{"}} m \mid b-c$
$\xrightarrow[\text{می‌شمارد}]{\text{مجموع را}} m \mid a-c \xrightarrow{\text{تعریف}} a \overset{m}{\equiv} c$ ✓

چند ویژگی مهم

ویژگی ۱ دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان، بدون تغییر پیمانه، با یک عدد صحیح دلخواه جمع یا تفریق کرد.

Ex

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\forall c\in\mathbb{Z}} \begin{cases} (a+c) \overset{m}{\equiv} (b+c) \\ (a-c) \overset{m}{\equiv} (b-c) \end{cases}$$

اثبات:
$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\text{تعریف}} m \mid a-b$
$\rightarrow m \mid a-b+c-c$
$\rightarrow m \mid (a+c)-(b+c)$
$\xrightarrow{\text{تعریف}} a+c \overset{m}{\equiv} b+c$ ✓

مثال عددی:
$۲۷ \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow{+۱۰} ۳۷ \overset{۵}{\equiv} ۲۲$ ✓
$(۵ \mid ۲۷-۱۲ \ (=۱۵))$ $\quad (۵ \mid ۳۷-۲۲ \ (=۱۵))$

CamScanner

ویژگی ② ضرب یک عدد صحیح در دوطرف هم‌نهشتی به دو صورت است :

Ex

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\forall c \in \mathbb{Z}} \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bc & \text{(بدون تغییر پیمانه)} \\ ac \overset{mc}{\equiv} bc & \text{(با تغییر پیمانه)} \end{cases}$$

مثال عددی ⟵ $V \overset{۳}{\equiv} ۴ \xrightarrow{\times ۲} \underbrace{V\times ۲}_{۱۴} \overset{۳}{\equiv} \underbrace{۴\times ۲}_{۸}$ ✓

$\xrightarrow{\times ۲}$ $\underbrace{V\times ۲}_{۱۴} \overset{۳\times ۲}{\equiv} \underbrace{۴\times ۲}_{۸}$ ✓

اثبات ⟵ $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\text{تعریف}} m \mid a-b \xrightarrow[\text{باهم جاق شدن}]{\text{جاق، جاق‌تر می‌شود}} m \mid (a-b).c \to m \mid ac-bc \to ac \overset{m}{\equiv} bc$ ✓

$\to m.c \mid (a-b).c \to \dots$

ویژگی ③ دوطرف رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان، بدون تغییر پیمانه، به توان هر عدد طبیعی رساند.

Ex

$$a \overset{m}{\equiv} b \overset{\forall n \in \mathbb{N}}{\Longrightarrow} a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

اثبات ⟵ $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\text{تعریف}} m \mid a-b \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} m \mid (a-b).k$

$\to m \mid (a-b)(\underbrace{a^{n-1} + a^{n-2}.b^{1} + \dots + b^{n-1}}_{k \in \mathbb{Z}})$

$\to m \mid a^n - b^n \to a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

مثال عددی ⟵ $V \overset{۳}{\equiv} ۴ \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{V^2}_{۴۹} \overset{۳}{\equiv} \underbrace{۴^2}_{۱۶}$ ✓

$۲۵ \overset{۱۲}{\equiv} ۴۹ \xrightarrow{\text{جذر}} ۵ \overset{۱۲}{\not\equiv} ۷$

ویژگی ④ دوطرف دو یا چند رابطهٔ هم‌نهشتی با پیمانهٔ یکسان را، می‌توان با هم جمع یا تفریق نمود و یا در یک عدد صحیح ضرب کرد، بدون آن که پیمانه تغییر کند.

Ex

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd \ , \ ad \overset{m}{\equiv} bc \\ (a+c) \overset{m}{\equiv} (b+d) \ , \ (a+d) \overset{m}{\equiv} (b+c) \\ (a-c) \overset{m}{\equiv} (b-d) \ , \ (a-d) \overset{m}{\equiv} (b-c) \end{cases}$$

اثبات ⟵

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\text{تعریف}} m \mid a-b \xrightarrow{\times c} m \mid ac-bc \\ c \overset{m}{\equiv} d \xrightarrow{\text{"}} m \mid c-d \xrightarrow{\times b} m \mid bc-bd \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع را می‌نماید}} m \mid ac-bd$$

$\to ac \overset{m}{\equiv} bd$

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\text{تعریف}} m \mid a-b \to m \mid (a+c)-(b+c) \\ c \overset{m}{\equiv} d \xrightarrow{\text{"}} m \mid c-d \to m \mid (b+c)-(b+d) \end{cases} \xrightarrow{\sim\ \text{"}} m \mid (a+c)-(b+d)$$

$\to (a+c) \overset{m}{\equiv} (b+d)$

با عشق ممکن است تمام مجهولها

CamScanner

ویژگی ⑤ هم نهشتی یعنی **هم باقی‌مانده شدن**

قضیهٔ هم باقی‌ماندگی (حساب پیمانه‌ای) Ex

$$a \overset{m}{\equiv} b \iff a \text{ و } b \text{ هردو در تقسیم بر } m \text{ هم باقی‌مانده‌اند}$$

اثبات : فرض می‌کنیم باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد صحیح a و b بر عدد طبیعی m ، هر دو مساوی r می‌باشند.
اکنون نشان می‌دهیم a و b به پیمانهٔ m ، هم نهشت‌اند. داریم :

$$\begin{cases} a = mq + r \; ; \; 0 \le r < m \\ b = mq' + r \; ; \; 0 \le r < m \end{cases} \xrightarrow{-} a - b = mq - mq' = m(\underbrace{q - q'}_{q'' \in \mathbb{Z}})$$

$$\rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

اثبات حالت عکس : به عهدهٔ شما 😀

مثال عددی

۱۲ کیلوگرم برنج ، ۲۷ کیلوگرم برنج ، پیمانه = ۵kg

$$۲۷ \overset{۵}{\equiv} ۱۲$$

باقی‌مانده تقسیم ۲۷ بر ۵ = ② ، باقی‌مانده تقسیم ۱۲ بر ۵ = ②

سؤال : دو عدد ۶۸ و ۱۴۵ در تقسیم بر عدد طبیعی $m \neq 1$ باقی‌مانده یکسان دارند. باقی‌مانده تقسیم ۱۶۰ بر m ؟

$$۱۴۵ \overset{m}{\equiv} ۶۸ \xrightarrow{\text{تعریف}} m \mid ۱۴۵ - ۶۸ \rightarrow m \mid ۷۷ \xrightarrow{m \neq 1} m = ۷, ۱۱, ۷۷$$

۷۷ شمارنده طبیعی

$$\begin{array}{r|l} ۱۶۰ & m = ۷۷ \\ -۱۵۴ & ۲ \\ \hline ⑥ & \end{array} \leftarrow \text{دکوله}$$

ویژگی ⑥ همواره می‌توان به یک طرف (یا دو طرف) رابطهٔ هم نهشتی ، مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\forall k,t \in \mathbb{Z}} \begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \pm mk \\ a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk \end{cases}$$

اثبات →

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ 0 \overset{m}{\equiv} mk \end{cases} \xrightarrow{\pm} a \overset{m}{\equiv} b \pm mk$$

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ mt \overset{m}{\equiv} mk \end{cases} \xrightarrow{\pm} \dots$$

مثال عددی

$$۲۷ \overset{۵}{\equiv} ۱۲$$

۱۷ ، ۲۲ ، ۲۷ ، ...

۷ ، ۲ ، ۳- ، ...

CamScanner

نتیجهٔ قضیهٔ هم باقی‌ماندگی: ارتباط قضیهٔ تقسیم و هم‌نهشتی

باقی‌مانده = مقسوم‌علیه ، مقسوم

به عبارت دیگر در قضیه تقسیم همواره داریم: $a = mq + r \iff 0 \le r < m \iff a \overset{m}{\equiv} r$

$a - r = mq \to m \mid a - r$

مثال عددی: $27 = 5(\dots) + 2 \iff 27 \overset{5}{\equiv} 2$

$27 \overset{5}{\equiv} ? \quad (12)$ ← تقسیم؟

تست: باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۱۳ برابر ۹ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^2 - 2a$ بر ۱۳ کدام است؟

Ex: ۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۱

باقی‌مانده ← هم‌نهشتی

$a = 13q + 9 \xrightarrow{\text{تبدیل به هم‌نهشتی}} a \overset{13}{\equiv} 9$

$a^2 \overset{13}{\equiv} 81$ (توان ۲)

$2a \overset{13}{\equiv} 18$ (×۲)

$\xrightarrow{\text{کم}} a^2 - 2a \overset{13}{\equiv} 81 - 18 \overset{63}{\equiv} 11$ ✓

$63 \mid 13$: -52 | 4 ; 11 → $63 \overset{13}{\equiv} 11$

$(a^2 - 2a \overset{13}{\equiv} 63 \text{ , } 63 \overset{13}{\equiv} 11) \xrightarrow{\text{تعدی}} a^2 - 2a \overset{13}{\equiv} 11$ ✓

اگر عدد سمت راست قرارست باقی‌مانده را نشان دهد و بزرگ‌تر از پیمانه است، پیمانه را از آن بزرگ‌تر دائم تا کوچک‌تر از پیمانه و نامنفی شود

اگر عدد سمت راست قرارست باقی‌مانده را نشان دهد و منفی باشد، به آن اضافه کنید تا اولین عدد نامنفی مشخص گردد.

تست: اگر $a = 5k + 3$، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $a + a^2 + a^3 + a^4$ بر ۵ کدام است؟

Ex: ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

معرف پیمانه

$a \overset{5}{\equiv} 3$

$a^2 \overset{5}{\equiv} 9$

$a^3 \overset{5}{\equiv} 27$

$a^4 \overset{5}{\equiv} 81$

$\xrightarrow{+} a + a^2 + a^3 + a^4 \overset{5}{\equiv} 120$ → ۰ ✓

تست: اگر a عددی فرد باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $a^2 + 6$ بر ۲، ۴ و ۸ به ترتیب کدام است؟

Ex: ۱) ۱، ۱، ۱ ۲) ۱، ۳، ۷ ۳) ۱، ۳، ۵ ۴) صفر، صفر، صفر

$a = \text{فرد} \to a^2 = 8t + 1 \xrightarrow{+6} a^2 + 6 = 8t + 7$

$7 \overset{2}{\equiv} 1$

$7 \overset{4}{\equiv} 3$

$7 \overset{8}{\equiv} 7$

تست: اگر $\begin{cases} a \overset{7}{\equiv} 2 \\ a \overset{3}{\equiv} 0 \end{cases}$، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۲۱ کدام است؟

Ex: ۱) ۰ ✓ ۲) ۹ ✓ ۳) ۱۱ ۴) ۱۸

$a \overset{7}{\equiv} 2 \xrightarrow{\times 3} 3a \overset{21}{\equiv} 6 \xrightarrow{\times 2} 6a \overset{21}{\equiv} 12$

$a \overset{3}{\equiv} 0 \xrightarrow{\times 7} 7a \overset{21}{\equiv} 0 \rightsquigarrow 7a \overset{21}{\equiv} 0$

$\xrightarrow{+} a \overset{21}{\equiv} -12$ → (۹) ✓

یک پیمانه اضافه شود

مثال: باقی‌مانده تقسیم اعداد صحیح m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ است. باقی‌مانده تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ کدام است؟ ☺

$m \overset{17}{\equiv} 5 \xrightarrow{\times 2} 2m \overset{17}{\equiv} 10$

$n \overset{17}{\equiv} 3 \xrightarrow{\times 5} 5n \overset{17}{\equiv} 15$

$\xrightarrow{-} 2m - 5n \overset{17}{\equiv} -5$ → (۱۲) ✓

CamScanner

تست: باقی‌مانده تقسیم $\sum_{n=1}^{1000} n!$ بر ۱۲؟

$$\sum_{n=1}^{1000} n! = \underbrace{1!+2!+3!}_{9} + \underbrace{4!}_{24} + \underbrace{5!}_{5\times 4!} + \cdots + 1000! \overset{12}{\equiv} 9$$

$$\left(k! \overset{m}{\equiv} 0 \xrightarrow{\forall n \geq k} n! \overset{m}{\equiv} 0\right)$$

۱) ۰ ۲) ۴ ۳) ۹ ✓ ۴) ۱۱

تست: باقی‌مانده تقسیم عدد $1!+2!+3!+\cdots+100!$ بر عدد ۹۰ کدام است؟

$$\underbrace{1!}_{1} + \underbrace{2!}_{2} + \underbrace{3!}_{6} + \underbrace{4!}_{24} + \underbrace{5!}_{120} + \underbrace{6!}_{720} + \cdots \overset{90}{\equiv} 63$$

۶۳

۱) ۶۴ ✓ ۲) ۵۳ ۳) ۱۰ ۴) ۱۳

تست: اگر اول مرداد ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفند در همان سال، کدام روز هفته است؟

(مبدا)

یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	شنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

توضیح: مبدأ را صفر و سایر روزهای هفته را به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ در نظر می‌گیریم.

مبدا (روز اول مرداد می‌باشد که کنار می‌رود)

$$\text{کل روزهای مورد نظر} = (\text{۳۱ مرداد} - 1) + \underbrace{31}_{\text{شهریور}} + \underbrace{5\times 30}_{\text{مهر تا بهمن}} + \underbrace{7}_{\text{تا ۷ اسفند}} = 218 \overset{7}{\equiv} 1$$

دوشنبه ✓

تمرین H.W: اگر سوم تیرماه دوشنبه باشد، سوم اسفند ماه همان سال کدام روز هفته است؟ (جواب: شنبه)

مبدا: اول و دوم و سوم تیر

دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$\underbrace{(31-3)}_{\text{تیرماه}} + \underbrace{2\times 31}_{\text{مرداد و شهریور}} + \underbrace{5\times 30}_{\text{مهر تا بهمن}} + \underbrace{3}_{\text{تا ۳ اسفند}} = 243 \overset{7}{\equiv} 5$$

شنبه ✓

تست: اگر روز بیست و نهم اسفند، سه‌شنبه باشد، آن‌گاه بیست و هشتم خرداد ماه همان سال، کدام روز هفته است؟

مبدا: اسفند

سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۲۹ اسفند ← ۲۸ خرداد ؟ (تقویم به عقب می‌رود)

$$\underbrace{(29-1)}_{\text{مبدا}} + \underbrace{5\times 30}_{\text{بهمن تا مهر}} + \underbrace{3\times 31}_{\text{شهریور، مرداد، تیر}} + \underbrace{4}_{\text{۲۸،۲۹،۳۰،۳۱}} = 275 \overset{7}{\equiv} 2 \xrightarrow{\times(-1)} -2 \overset{7}{\equiv} 5$$

۲۸ خرداد یکشنبه است ← از مبدا، ۲ روز به عقب بروید. ☺

روز خرداد

یکشنبه ✓

تست: اگر بیستم فروردین ماه روز دوشنبه باشد، چهارمین شنبه بهمن ماه همان سال کدام روز ماه است؟

مبدا

دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

بررسی می‌کنیم که اول بهمن کدام روز هفته است؟؟

$$\underbrace{(31-20)}_{\text{فروردین ۲۰ روز اول حذف}} + \underbrace{5\times 31}_{\text{از دیماه تا شهریور}} + \underbrace{4\times 30}_{\text{مهر تا آذر}} + \underbrace{1}_{\text{اول بهمن}} = 287 \overset{7}{\equiv} 0$$

اول بهمن، دوشنبه است. ← ... ← ششم بهمن: اولین شنبه بهمن

$$6 \xrightarrow{+7} 13 \xrightarrow{+7} 20 \xrightarrow{+7} (27) \checkmark$$

۱) ۲۷ ✓ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۰

CamScanner CamScanner

می‌توانی از عدد پایه ی یا بیم (آزمون و خطا یا روش ضرب‌های متوالی) که به پیمانهٔ داده‌شده با ۱ یا ۱- یا صفر هم‌نهشت شود

مثال: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد 3^{62} بر ۱۳ ؟

$3^{62} \overset{13}{\equiv} ?$ → $3^1 \overset{13}{\equiv} 3$, $3^2 \overset{13}{\equiv} 9$, $\underbrace{3^3}_{27} \overset{13}{\equiv} 1$ ☺ → توان ۲۰ → $(3^3)^{20} \overset{13}{\equiv} 1 \to 3^{60} \overset{13}{\equiv} 1$

$\xrightarrow{\times 3^2} 3^2 \times 3^{60} \overset{13}{\equiv} 3^2 \to 3^{62} \overset{13}{\equiv} 9$ ✓

سراسری Ex باقی‌ماندهٔ تقسیم 3^{48} بر ۱۱ !

$3^{48} \overset{11}{\equiv} ?$ → $\underbrace{3^3}_{27} \overset{11}{\equiv} 5 \xrightarrow{\times 3} 3^4 \overset{11}{\equiv} 15 \to 4$

$\xrightarrow{\times 3} 3^5 \overset{11}{\equiv} 12 \to 1$ ☺ → توان ۹ → $(3^5)^9 \overset{11}{\equiv} 1$

$\to 3^{45} \overset{11}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 3^3} 3^3 \times 3^{45} \overset{11}{\equiv} 3^3 \to 3^{48} \overset{11}{\equiv} 27$ ③

سراسری Ex باقی‌ماندهٔ تقسیم 2^{41} بر ۲۱ !

$2^{41} \overset{21}{\equiv} ?$ → $\underbrace{2^5}_{32} \overset{21}{\equiv} 11 \xrightarrow{\times 2} 2^6 \overset{21}{\equiv} 22 \to 1$ ☺

→ توان ۶ → $(2^6)^6 \overset{21}{\equiv} 1 \to 2^{36} \overset{21}{\equiv} 1$

$\xrightarrow{\times 2^5} 2^5 \times 2^{36} \overset{21}{\equiv} 2^5 \to 2^{41} \overset{21}{\equiv} 32$ → ⑪ ✓

سراسری Ex باقی‌ماندهٔ تقسیم 3^{511} بر ۸۰ !

$3^{511} \overset{80}{\equiv} ?$ → $\underbrace{3^4}_{81} \overset{80}{\equiv} 1$ → توان ۱۲۷ → $(3^4)^{127} \overset{80}{\equiv} 1 \to 3^{508} \overset{80}{\equiv} 1$

$\xrightarrow{\times 3^3} 3^{511} \overset{80}{\equiv} 27$ ✓

$511 \div 4$: باقی ۳، خارج ۱۲۷

سراسری ۹۶ Ex به ازای کدام مقادیر n از اعداد طبیعی، عبارت $1 + 5^{3n+2} + 5^{6n+4}$ بر عدد ۳۱ بخش‌پذیر است ؟

۱) فقط اعداد فرد ۲) فقط اعداد زوج ۳) فقط اعداد مضرب ۵ ✓ ۴) تمام اعداد

$\underbrace{5^3}_{125} \overset{31}{\equiv} 1$ → توان n → $5^{3n} \overset{31}{\equiv} 1$ → $\times 5^2$ → $5^{3n+2} \overset{31}{\equiv} 25$ → توان ۲ → $5^{6n+4} \overset{31}{\equiv} 625 \to 5$

-6

$5^{6n+4} + 5^{3n+2} + 1 \overset{31}{\equiv} 5 + 25 + 1 \overset{31}{\equiv} 0$

این عدد همواره بر ۳۱ بخش‌پذیر است

$(\forall n \in \mathbb{N})$

مثال باقی‌ماندهٔ تقسیم $6^{57} + 5^{57} + 4^{57} + 3^{57}$ بر ۱۲ !

$\underbrace{3^3}_{27} \overset{12}{\equiv} 3 \xrightarrow{\times 3} 3^4 \overset{12}{\equiv} 9 \xrightarrow{\times 3} 3^5 \overset{12}{\equiv} 27 \to 3$ → متناوب ... → $3^{57} \overset{12}{\equiv} 3$ ③

$\underbrace{4^2}_{16} \overset{12}{\equiv} 4 \xrightarrow{\times 4} 4^3 \overset{12}{\equiv} 64 \to 4 \to \dots \to 4^{57} \overset{12}{\equiv} 4$ ④

$5^2 \overset{12}{\equiv} 1$ → توان ۲۸ → $5^{56} \overset{12}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 5} 5^{57} \overset{12}{\equiv} 5$ ⑤

$6^2 \overset{12}{\equiv} 0 \xrightarrow{\times 6} 6^3 \overset{12}{\equiv} 0 \xrightarrow{\times 6} \dots \to 6^{57} \overset{12}{\equiv} 0$ ⑥

$+ \to 12 \overset{12}{\equiv} 0$ ✓

مثال: باقی‌ماندهٔ تقسیم 3^{57} بر ۷ ! Ex

$3^{57} \overset{7}{\equiv} ?$ → $3^2 \overset{7}{\equiv} 2 \xrightarrow{\times 3} 3^3 \overset{7}{\equiv} 6 \to -1$ → توان ۱۹ → $(3^3)^{19} \overset{7}{\equiv} (-1)^{19} \to 3^{57} \overset{7}{\equiv} -1$ → ⑥ ✓

سراسری باقی‌ماندهٔ تقسیم 2^{500} بر ۱۳ ؟

$2^{500} \overset{13}{\equiv} ?$ → $\underbrace{2^4}_{16} \overset{13}{\equiv} 3 \xrightarrow{\times 2} 2^5 \overset{13}{\equiv} 6 \xrightarrow{\times 2} 2^6 \overset{13}{\equiv} 12 \to -1$

توان ۸۳ → $(2^6)^{83} \overset{13}{\equiv} (-1)^{83} \to 2^{498} \overset{13}{\equiv} -1 \xrightarrow{\times 2^2} 2^{500} \overset{13}{\equiv} -4 \to 9$ ✓

$500 \div 6$: باقی ۴، خارج ۸۳

سراسری ۹۲ عدد $13\times 7^{54}+a$ بر ۴۳ بخش‌پذیر است. کوچکترین مقدار طبیعی a کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۰

$13\times 7^{54}+a \overset{43}{\equiv} 0 \rightarrow 13+a \overset{43}{\equiv} 0 \rightarrow a \overset{43}{\equiv} -13 \rightarrow 30$ ✓

$7^{54} \rightarrow 1$

تند گزینه $\rightarrow 30$ ✓

تعریف $\rightarrow a-30=43k \rightarrow a=43k+30$

$7^2 \overset{43}{\equiv} 6 \xrightarrow{\times 7} 7^3 \overset{43}{\equiv} -1 \xrightarrow{\text{توان } 18} (7^3)^{18} \overset{43}{\equiv} (-1)^{18} \rightarrow 7^{54} \overset{43}{\equiv} 1$

تست اگر $n\in\mathbb{N}$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $n^{200}+8$ بر ۵ چند مقدار متفاوت می‌تواند باشد؟ (نمایش اعداد صحیح)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$n\in\mathbb{N}$ در تقسیم بر ۵ می‌دانیم

$n=5k \rightarrow (5k)^{200}+8 \overset{5}{\equiv} 3$ ✓

$n=5k\pm 1 \rightarrow (5k\pm 1)^{200}+8 \overset{5}{\equiv} 9 \rightarrow 4$ ✓

$n=5k\pm 2 \rightarrow (5k\pm 2)^{200}+8 \overset{5}{\equiv} 2^{200}+8 \overset{5}{\equiv} 4$

تکرار در ۹

$2^2 \overset{5}{\equiv} -1 \xrightarrow{\text{توان } 100} 2^{200} \overset{5}{\equiv} 1$

سراسری ۱۴۰۰ اگر m بزرگترین عدد طبیعی باشد که $(10-m)! \overset{36}{\equiv} 0$، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم m^{123} بر ۱۵ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

$(10-m)! \overset{36}{\equiv} 0$ ← ماکزیمم

min ← اولین عددی که فاکتوریلی که مضرب ۳۶ باشد

مضرب ۳۶ ← $6! = 720$

$10-m=6 \rightarrow m=4$

$4^{123} \overset{15}{\equiv} ?$

$4^2 \overset{15}{\equiv} 1$

$\xrightarrow{\text{توان } 61} 4^{122} \overset{15}{\equiv} 1$

$\xrightarrow{\times 4} 4^{123} \overset{15}{\equiv} 4$ ✓

تست اگر $b-7a \overset{17}{\equiv} 5c$، باقی‌مانده تقسیم عدد سه رقمی $\overline{abc}$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

جدول ارزش مکانی

$\overline{abc} = a\times 100+b\times 10+c \overset{17}{\equiv} 100a+10(7a+5c)+c$

$\overset{17}{\equiv} 170a+51c \overset{17}{\equiv} 0$ ✓

$b \overset{17}{\equiv} 7a+5c$

سراسری ۹۹ عدد چهار رقمی $\overline{aabb}$، مجذور عدد دو رقمی $\overline{cc}$ است. $a-b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$\overline{aabb} = (\overline{cc})^2$ ← مربع

$a\neq 0$

$b\neq 2,3,7,8$

جدول $\rightarrow 1000a+100a+10b+b=(10c+c)^2$

$\rightarrow 1100a+11b=11^2\times c^2 \xrightarrow{\div 11} 100a+b=11\times c^2$ (*)

$\rightarrow 100a+b \overset{11}{\equiv} 0$

$\rightarrow a+b \overset{11}{\equiv} 0 \rightarrow a+b=11$ مضرب ۱۱ ← مضرب ۱۱

$1\leq a+b\leq 18 \rightarrow a+b=11$

a	2	5	6	7
b	9	6	5	4

مقادیر

$a-b=3$

در (*) صدق می‌کند

اگر در (*) قرار گیرند، برای c جوابی وجود ندارد

$1\leq a\leq 9$, $0\leq b\leq 9$ $\xrightarrow{+}$ $1\leq a+b\leq 18$

سراسری ۹۹ پنج برابر عدد دو رقمی $\overline{aa}$ را در سمت چپ $\overline{aa}$ قرار داده و آن را m می‌نامیم. m هم‌نهشت کدام عدد زیر به پیمانهٔ ۱۸۳۷ است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱۶

$b=5\times\overline{aa} \overset{\text{جدول}}{=} 5\times(10a+a)=55\times a$

$m=\overline{baa} \overset{\text{جدول}}{=} b\times 100+a\times 10+a = 55a+11a \overset{1837}{\equiv} 0$ ✓

$55a$ ← مضرب پیمانه

CamScanner

تست عدد شش رقمی $\overline{ababab}$ به کدام پیمانه، زیر، ممکن است با صفر هم‌نهشت نباشد؟

۱) ۷
۲) ۱۳
۳) ۳۱
۴) ۳۷

$$\overline{ababab} = \overline{ab}\times 10^4 + \overline{ab}\times 10^2 + \overline{ab}$$
$$= \overline{ab}\times 10101 \equiv 0 \pmod{3\text{ یا }7\text{ یا }13\text{ یا }37}$$

تجزیه: $3\times 7\times 13\times 37$

$353535 = 350000 + 3500 + 35$

تست هفت برابر عدد شش رقمی $\overline{abcabc}$ مربع کامل است. بزرگترین مقدار عدد سه رقمی $\overline{abc}$ در پیمانهٔ ۱۵ با کدام عدد هم‌نهشت است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۱۲

$$7\times\overline{abcabc} = n^2 \rightarrow 7\times(\overline{abc}\times 1000 + \overline{abc}) = n^2$$
$$\rightarrow 7\times \underbrace{1001}_{7\times 143}\times\overline{abc} = n^2 \rightarrow \underbrace{7^2}_{\text{مربع}}\times \underbrace{143\times\overline{abc}}_{\text{باید مربع باشد}} = \underbrace{n^2}_{\text{مربع}}$$

$\rightarrow \overline{abc} = 143\times k^2$ مقادیر k: ۱، ۲

k	۱	۲
$\overline{abc}$	۱۴۳	۵۷۲

$572 \overset{15}{\equiv} 2$ ✓

تست عدد شش رقمی $\overline{ababab}$، برابر با حاصل ضرب ۱۱۱ در یک مربع کامل است. عدد $\overline{abba}$ در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۷ با کدام عدد هم‌نهشت است؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۵

(گزینه ۴)

CamScanner

سراسری تعداد عضوهای مجموعهٔ $\{n\in\mathbb{N} : 65 \mid 2^n+1\}$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

حل

$$2^n+1 \overset{65}{\equiv} 0 \longrightarrow 2^n \overset{65}{\equiv} -1 \xrightarrow{\text{شایسه}} n=6k \ (k\text{ فرد})$$

از طرفی $2^6 \overset{65}{\equiv} -1$ (2^6 همان 2^{24}) $\xrightarrow{\text{توان } k}$ $2^{6k} \overset{65}{\equiv} (-1)^k$

$$n=6(2t+1)=12t+6 \xrightarrow[t\in\mathbb{Z}]{k=2t+1} n<100 \Rightarrow 12t+6<100 \Rightarrow t<\frac{94}{12}\simeq 7,\cdots \xrightarrow{t\in\mathbb{Z}} t=0,1,\cdots,7$$

۸ جواب ✓

راه سریع → $a^k+b^k \mid a^n+b^n$ ($\frac{n}{k}$ = فرد) — به شکل سمت راست

$65 \mid 2^n+1 \rightarrow 2^6+1 \mid 2^n+1 \rightarrow \frac{n}{6}=2t+1 \rightarrow n=12t+6$

سراسری ۹۲ به ازای چند عدد طبیعی n کوچکتر از ۵۰، عدد 7^n+42 بر ۴۳ بخش‌پذیر است؟ $(43 \mid 7^n+42)$

۶) ۶
۷) ۷
۸) ۸
۹) ۹

به شکل سمت راست درنمی‌آید

$$7^n+42 \overset{43}{\equiv} 0 \rightarrow 7^n \overset{43}{\equiv} -42 \xrightarrow{+1} 7^n \overset{43}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{شایسه}} n=6t$$

از طرفی $7^2 \overset{43}{\equiv} 6 \xrightarrow{\times 7} 7^3 \overset{43}{\equiv} -42 \xrightarrow{-1} 7^{2t} \overset{43}{\equiv} 1$ (توان $2t$)

$$n<50 \rightarrow 6t<50 \rightarrow t<\frac{50}{6}\simeq 8,\cdots \xrightarrow{t\in\mathbb{N}} t=1,2,\cdots,8$$

سراسری ۹۴ تعداد اعداد دورقمی a به طوری که $11^a \overset{19}{\equiv} 1$ کدام است؟ (گزینه ۴)

۲۵) ۵
۲۶) ۶
۲۷) ۷
۲۸) ۸
۳۰) ۴

سراسری ۹۱ اگر 6^n-3^n مضرب ۲۵ باشد، کوچکترین مقدار طبیعی n کدام است؟

۱۰) ۱
۱۵) ۲
۱۶) ۳
۲۰) ۴

$25 \mid 6^n-3^n \rightarrow 6^n-3^n \overset{25}{\equiv} 0 \rightarrow 3^n\times 2^n \overset{25}{\equiv} 3^n$

$\div 3^n$ → $2^n \overset{25}{\equiv} 1$

از طرفی $2^5 \overset{25}{\equiv} 7$ (2^5 همان 32) $\xrightarrow{\text{توان } 2}$ $2^{10} \overset{25}{\equiv} -1$ (2^{10} همان 49) $\xrightarrow{\text{توان } 2t}$ $2^{20t} \overset{25}{\equiv} 1$

$n=20t$

$t=1$

$\min(n)=20$

CamScanner

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

تمرین H.W باقی‌ماندهٔ تقسیم $(1+2+\cdots+528)^{528}$ بر ۵۲۸ ؟

$1+2+\cdots+528 = \frac{528\times 529}{2}$ (۲۶۴)

$(264\times 529)^{528}$

$\equiv 264\times 264\times 264\times\cdots$

$264 = 2k$

$528\times k\times 264\times\cdots \equiv 0$ ← ضرب پیمانه

(جواب: صفر)

یادآوری: $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$(1+2+\cdots+n)^n \overset{n}{\equiv} 0$

مثال Ex برای $n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$، ثابت کنید $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n$

$$(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n$$

با کمک بسط دوجمله‌ای خیام داریم:

$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$

(مضرب ab) $\Rightarrow (a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n$

نتیجه: $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n \rightarrow (a+b)^n - a^n - b^n \overset{ab}{\equiv} 0$

مثال Ex ثابت کنید عدد $12^{100}-11^{100}-23^{100}$ بر عدد ۱۳۲ همواره بخش‌پذیر است.

$n=100$، $a=11$، $b=12$

$(11+12)^{100} - 11^{100} - 12^{100} \overset{11\times 12}{\equiv} 0 \rightarrow 23^{100} - 11^{100} - 12^{100} \overset{132}{\equiv} 0$ ✓

(مضرب ۱۳۲)

$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{n|m} a \overset{n}{\equiv} b$ (تعریف)

$\rightarrow m|a-b \xrightarrow{n|m} n|a-b$ (تعریف)

Ex اگر عددی پیمانه را بشمارد، می‌تواند به جای پیمانه قرار گیرد.

(« شمارندهٔ پیمانه، به جای پیمانه »)

تست اگر a مضرب ۱۶ باشد، باقی‌مانده تقسیم $(17a+1)^4 + (17a+2)^4 + \cdots + (17a+5)^4$ بر ۴ چند است؟

$a \overset{16}{\equiv} 0 \xrightarrow{4|16} a \overset{4}{\equiv} 0 \xrightarrow{\times 17} 17a \overset{4}{\equiv} 0$

$\overset{4}{\equiv} 1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 \overset{4}{\equiv} 1+0+1+0+1 \equiv 3$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

تست H.W باقی‌مانده تقسیم a بر ۸ برابر ۷ است. باقی‌مانده تقسیم $2a+1$ بر ۴ ؟ (گزینه ۱)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

مثال Ex: اگر $a \overset{m}{\equiv} b$، $b \overset{n}{\equiv} c$، $(m,n)=d$، آن‌گاه ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

$(d|m, d|n)$

$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{d|m} a \overset{d}{\equiv} b \\ b \overset{n}{\equiv} c \xrightarrow{d|n} b \overset{d}{\equiv} c \end{cases} \rightarrow (a \overset{d}{\equiv} b \wedge b \overset{d}{\equiv} c) \xrightarrow{\text{تعدی}} a \overset{d}{\equiv} c$ ✓

هرگاه عدد پایه بزرگتر از پیمانه باشد، ...

به جای عدد پایه، باقی‌ماندهٔ تقسیم آن را بر پیمانه بنویسید.

مثال باقی‌ماندهٔ تقسیم $(۱۸۶)^{۱۶}$ بر عدد ۷ ؟

$(۱۸۶)^{۱۶} \overset{۷}{\equiv} ? \rightarrow ۴^{۱۶} \overset{۷}{\equiv} ?$

$۱۸۶ \overset{۷}{\equiv} ۴$ (۱۸۶ | ۷ ، ۲۶ | ۴)

$\rightarrow (۱۸۶)^{۱۶} \overset{۷}{\equiv} ۴^{۱۶}$

$۴^{۲} \overset{۷}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\times ۴} ۴^{۳} \overset{۷}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان ۵}} ۴^{۱۵} \overset{۷}{\equiv} ۱$

$\xrightarrow{\times ۴} ۴^{۱۶} \overset{۷}{\equiv} ۴$ ✓

مثال باقی‌ماندهٔ تقسیم $۱۳۹۰^{۱۳۹۱} + (۱۳۹۱)^{۱۳۹۲}$ بر عدد ۸ ؟

(۱۳۹۰ | ۸ ، ۶۲ | ۴)

$\equiv ۶^{۱۳۹۱} + ۷^{۱۳۹۲} \equiv$

$۶ \rightarrow -۲$ ، $۷ \rightarrow -۱$

$\equiv -۲^{۱۳۹۱} + ۱ = -۲^{۳} \times ۲^{۱۳۸۸} + ۱$

$\equiv ۱$ ✓

مثال اگر a مضرب ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $(a+۱۰۰۱)^{۳} + (۲a+۱۰۰۲)^{۳} + \cdots + (۷a+۱۰۰۷)^{۳}$ بر ۷ ؟

(۱۰۰۱ | ۷ ، ۱۴۳ | ۷ ، ۰ | ۷)

$\equiv ۰ + ۱ + ۲^{۳} + ۳^{۳} + ۴^{۳} + ۵^{۳} + ۶^{۳}$

$۴ \rightarrow -۳$ ، $۵ \rightarrow -۲$ ، $۶ \rightarrow -۱$

$\equiv ۰$ ✓

تمرین H۰۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم $(a+۱۰۰۱)^{۳} + (a+۱۰۰۲)^{۳} + \cdots + (a+۱۰۰۶)^{۳}$ بر ۶ ؟ (جواب: ۳)

$n^{۳} - n = n(n-1)(n+1)$ ← مضرب ۶

$\Rightarrow n^{۳} - n \overset{۶}{\equiv} ۰ \rightarrow n^{۳} \overset{۶}{\equiv} n$

مسئله ۶۹ به ازای کدام مقادیر n از اعداد طبیعی، عبارت $۵^{۲n+۱} + ۲^{n+۴} + ۲^{n+۱}$ بر عدد ۲۳ بخش‌پذیر است؟

۱) تمام اعداد ۲) فقط اعداد فرد ۳) فقط اعداد زوج ۴) فقط اعداد مضرب ۴

$۵^{۲n} \times ۵^{۱} + ۲^{n} \times ۲^{۴} + ۲^{n} \times ۲^{۱} = (۲۵)^{n} \times ۵ + ۱۸ \times ۲^{n} \overset{۲۳}{\equiv} ۰$

$(۵^{۲})^{n} \times ۵^{۱}$ ، $۲^{۴} = ۱۶$ ، $۲^{۱} = ۲$ ، ۱۸×۲^{n}

۲ ، ۵×۲^{n} ، ۲۳×۲^{n} مضرب پیمانه ، همواره بخش‌پذیر است

CamScanner

قضیهٔ فرما ← پیمانه‌های اول

$a^p \overset{p}{\equiv} a$

$a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$

اگر a عددی صحیح و p عددی اول باشد و $(a,p)=1$ (شرط لازم $p \nmid a$)، آنگاه

مثال: باقی‌ماندهٔ تقسیم $۷^{۵۶}$ بر ۱۹ را بیابید.

$۷^{۵۶} \overset{۱۹}{\equiv} ?$ $\xrightarrow[(۷,۱۹)=۱]{\text{قضیه فرما}}$ $۷^{۱۸} \overset{۱۹}{\equiv} ۱$ $\xrightarrow{\text{توان ۳}}$ $(۷^{۱۸})^{۳} \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \to ۷^{۵۴} \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۷^{۲}} ۷^{۵۶} \overset{۱۹}{\equiv} ۱۱$

تست باقی‌مانده تقسیم عدد $۵^{۶۲}+۸^{۳۰}$ بر ۳۱ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۲۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

$۵^{۶۲}+۸^{۳۰} \overset{۳۱}{\equiv} (۵^{۳۰})^{۲} \times ۵^{۲} + ۱ \overset{۳۱}{\equiv} ۲۶$ ✓

(فرما: $۵^{۳۰} \equiv ۱$)

سراسری ۱۴۰۲ اگر m کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که $m!$ بر ۳۵ بخش‌پذیر باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم $m^{۳۳۲}$ بر ۳۱ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۶ ۳) ۵ ۴) ۲۵

$\min(m)=۵$

$۵^{۳۳۲} \overset{۳۱}{\equiv} ?$ $\xrightarrow{\text{قضیه فرما}}$ $۵^{۳۰} \overset{۳۱}{\equiv} ۱$ $\xrightarrow{\text{توان ۱۱}}$ $۵^{۳۳۰} \overset{۳۱}{\equiv} ۱$ $\xrightarrow{\times ۵^{۲}}$ $۵^{۳۳۲} \overset{۳۱}{\equiv} ۲۵$

تست باقی‌مانده تقسیم $۸^{۶۷}$ بر ۱۱ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$۸^{۶۷} \overset{۱۱}{\equiv} ?$

$(۲^{۳})^{۶۷} = ۲^{۲۰۱} \overset{۱۱}{\equiv} ?$ (قضیه فرما)

$۲^{۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱$ $\xrightarrow{\text{توان ۲۰}}$ $۲^{۲۰۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱$ $\xrightarrow{\times ۲}$ $۲^{۲۰۱} \overset{۱۱}{\equiv} ۲$

سراسری اگر عدد $a+۷^{۲۰۰}$ مضرب ۱۹ باشد، کوچک‌ترین مقدار طبیعی a کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۵

$۷^{۲۰۰} + a \overset{۱۹}{\equiv} ۰ \to ۱۱ + a \overset{۱۹}{\equiv} ۰ \to a \overset{۱۹}{\equiv} -۱۱ \to ۸$

تست گزینه ۲ ✓

$a = ۱۹k+۸$

$(۷,۱۹)=۱$ $\xrightarrow{\text{فرما}}$ $۷^{۱۸} \overset{۱۹}{\equiv} ۱$ $\xrightarrow{\text{توان ۱۱}}$ $۷^{۱۹۸} \overset{۱۹}{\equiv} ۱$ $\xrightarrow{\times ۷^{۲}}$ $۷^{۲۰۰} \overset{۱۹}{\equiv} -۹ \to ۱۱$

تست مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی a که $(۱۳۸۹)^{۱۰۰}+a$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۷

$(۱۳۸۹)^{۱۰۰} + a \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \to ۳^{۱۰۰} + a \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \to (۳^{۱۰})^{۱۰} + a \overset{۱۱}{\equiv} ۰$

$\to ۱ + a \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \to a \overset{۱۱}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{تعریف}} a = ۱۱k-۱ \xrightarrow{k=۹ \text{ مقدار دهی}} a = ۹۸۹$

بزرگ‌ترین سه‌رقمی — مجموع ارقام $= ۹+۸+۹ = ۲۶$

هشدار برای هر پیمانه‌ای که عدد اول است، قضیهٔ فرما لزوماً کارساز نیست. زیرا ممکن است، قضیهٔ فرما، توان بسیار بزرگی را ارائه دهد.

مثال باقی‌مانده تقسیم $۹ \times (۲^{۱۱}+۷)$ بر عدد ۲۳ کدام است؟ (Ex)

$۲^{۵} \overset{۲۳}{\equiv} ۹$ $\xrightarrow{\text{توان ۲}}$ $۲^{۱۰} \overset{۲۳}{\equiv} ۸۱ \to ۱۲$ $\xrightarrow{\times ۲}$ $۲^{۱۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۲۴ \to ۱$

$\xrightarrow{+۷}$ $۲^{۱۱}+۷ \overset{۲۳}{\equiv} ۸$ $\xrightarrow{\times ۹}$ $(۲^{۱۱}+۷)\times ۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۷۲ \to ۳$ ✓

($۲^{۲۲} \overset{۲۳}{\equiv} ۱$ فرما ☺)

$a^{p-1} \overset{p}{\equiv} ۱$

$\Rightarrow a^{\frac{p-۱}{۲}} \overset{p}{\equiv} \pm ۱$

سراسری ۹۸ باقی‌مانده تقسیم $۵^{۲۰}$ بر ۴۱ کدام است؟ (Ex)

$۵^{۳} \overset{۴۱}{\equiv} ۲$ $\xrightarrow{\times ۵^{۲}}$ $۵^{۵} \overset{۴۱}{\equiv} ۵۰ \to ۹$ $\xrightarrow{\text{توان ۲}}$ $۵^{۱۰} \overset{۴۱}{\equiv} ۸۱ \to -۱$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}}$ $۵^{۲۰} \overset{۴۱}{\equiv} ۱$ ✓

($۵^{۴۰} \overset{۴۱}{\equiv} ۱$ فرما ☺)

سراسری ۹۸ اگر عدد $a+V^{13}$ بر ۲۳ بخش‌پذیر باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$V^{22} \overset{23}{\equiv} 1$ (فرما)

$V^{2} \overset{23}{\equiv} 3 \xrightarrow{\times 7} V^{3} \overset{23}{\equiv} 21 \to -2$

توان ۴ ← $V^{12} \overset{23}{\equiv} 16 \xrightarrow{\times 7} V^{13} \overset{23}{\equiv} -48 \to -3$

-7

فرض مسئله: $V^{13} + a \overset{23}{\equiv} 0$

-2 ، $a \overset{23}{\equiv} 3$ ← تست گزینه

تست H.W باقی‌مانده تقسیم عدد $\sum_{n=1}^{100} n^{198}$ بر ۱۹ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

(جواب: گزینه ۱)

● پیمانه‌های مرکب (دو هم‌نهشتی یکسان با پیمانه‌های مختلف)

قضیه باقی‌مانده چینی

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \overset{(m,n)}{\equiv} b \\ a \overset{[m,n]}{\equiv} b \end{cases}$$

حالت خاص $(m,n)=1$ ← $a \overset{mn}{\equiv} b$ (خیلی مهم)

تست باقی‌مانده تقسیم $6^{1002} + V^{1002}$ بر ۴۲ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$\begin{cases} 6^{1002} + V^{1002} \overset{6}{\equiv} 1 \\ 6^{1002} + V^{1002} \overset{V}{\equiv} 1 \end{cases} \xrightarrow[6 \times V = 42]{(6,V)=1} 6^{1002} + V^{1002} \overset{42}{\equiv} 1$ ✓

$6^{1002} + V^{1002} \overset{6}{\equiv} 0 + 1 \equiv 1$ ← یکسان ☺

$6^{1002} + V^{1002} \overset{V}{\equiv} 1 + 0 \equiv 1$

تست باقی‌مانده تقسیم V^{100} بر ۱۵ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۱ ۴) ۱

$V^{100} \overset{3}{\equiv} 1$ ← یکسان ☺

$V^{100} \overset{5}{\equiv} (V^{4})^{25} \overset{100}{\equiv} 1$ ($V^{4} \to -1$)

$\xrightarrow[3 \times 5 = 15]{(3,5)=1} V^{100} \overset{15}{\equiv} 1$ ✓

تست باقی‌مانده تقسیم 5^{100} بر ۳۵ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

$5^{100} \overset{5}{\equiv} 0$ ← غیریکسان ☹

$5^{100} \overset{7}{\equiv} (2^{3})^{33} \times 2 \overset{7}{\equiv} 2$ ($2^{3} \to 1$)

$5^{100} \to -2$ ، 2^{100}

اگر باقی‌مانده‌ها این‌گونه نبودند، قابل قبول است و گزینه ۴ جواب می‌شد.

باقی‌مانده‌اش ۲ می‌شد و بر ۷ برابر ۲ بود.

CamScanner

تست باقی‌ماندهٔ تقسیم 3^{1000} بر ۵۶ کدام است؟

$$\begin{cases} 3^{1000} \equiv 7 \equiv (3^3)^{333} \times 3 \equiv 4 \\ 3^{1000} \equiv 8 \equiv \dots \end{cases}$$

$3^3 \equiv -1 \pmod 7$ ، $3^{333} \equiv -3$ ، یک پیمانه اضافه شود

تست گزینه ۲ ← (۲۵)

۱) ۳۱
۲) ۳۳
۳) ۲۵ ✓
۴) ۲۴

تست باقی‌ماندهٔ تقسیم 3^{1388} بر ۱۱۰ کدام است؟

(تمرین ۲)

۱) ۱۰۳
۲) ۱۵
۳) ۷۱
۴) ۵۸
۵) ۳۲

سراسری باقی‌ماندهٔ تقسیم $(-6)^{23}$ بر ۳۳ کدام است؟

$$\begin{cases} (-6)^{23} \equiv 3 \equiv 0 \\ (-6)^{23} \equiv 11 \equiv (-6)^{10} \times (-6)^3 \end{cases}$$

$(-6)^{10}$ حذفا ، $(-6)^3 \equiv -3 \pmod 5$ ، $125 \to 4$

تست گزینه ۳ ← (۱۵) ✓

۱) ۱۸-
۲) ۱۵-
۳) ۱۵ ✓
۴) ۱۸

سراسری باقی‌ماندهٔ تقسیم $3^{42} - 2^{42}$ بر ۳۵ کدام است؟

$$3^{42} - 2^{42} \equiv (3^6)^7 - (2^6)^7 \equiv 0$$

$3^6 \equiv 1$ حذفا ، $2^6 \equiv 1$ حذفا

$3^{42} - 2^{42} \equiv 5 \equiv \dots$

تست گزینه ۴ ← (۰) ✓

۱) ۰ ✓
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۵

سراسری باقی‌ماندهٔ تقسیم $2^{60} - 3^{60} + 6^{60}$ بر ۳۵ کدام است؟

(گزینه ۱)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۰

سراسری اگر $\begin{cases} a \equiv 2 \\ a \equiv 0 \end{cases}$ و $a > 21$، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۲۱ کدام است؟

$$\begin{cases} a \equiv 2 \pmod 7 \\ a \equiv 0 \pmod 3 \end{cases} \xrightarrow[\text{شرط ۱: پیمانه جدید، برابر با حاصل‌ضرب پیمانه‌های داده‌شده باشد}]{\text{شرط ۲: پیمانه‌های داده‌شده، نسبت به هم اول باشند}} a \equiv 21 \equiv (9)$$

تست گزینه ۲ ← (۹) عددی داریم که در هر دو فرض صدق کند

۱) ۰
۲) ۹ ✓
۳) ۱
۴) ۴

سراسری ۹۸ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۶ و ۱۱ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۶۶ کدام است؟

$$\begin{cases} a \equiv 5 \pmod 6 \\ a \equiv 7 \pmod{11} \end{cases} \xrightarrow[(6,11)=1]{66 = 6 \times 11} a \equiv 29 \equiv (29)$$

تست گزینه ۱ ← (۲۹)

۱) ۲۹ ✓
۲) ۳۲
۳) ۴۰
۴) ۴۱

تست اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۱۱ برابر ۴ و بر ۱۳ برابر ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a+5$ بر ۱۴۳ کدام است؟

(گزینه ۱)

۱) ۶۴
۲) ۵۴
۳) ۸۹
۴) ۷۹

☺ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵۶ چقدر است؟

$$\begin{cases} a \equiv 5 \pmod 7 \\ a \equiv 7 \pmod 8 \end{cases} \xrightarrow[(7,8)=1]{56 = 7 \times 8} a \equiv 47 \equiv (47)$$

تست گزینه ۲ ←

۱) ۴۱
۲) ۴۷ ✓
۳) ۵۱
۴) ۵۴

CamScanner

مسئله ۹۴ اگر باقی‌مانده تقسیم عددی بر ۹ و ۱۳ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۳۹ کدام است؟

$$\begin{cases} a \overset{9}{\equiv} 5 \xrightarrow{3|9} a \overset{3}{\equiv} 5 \\ a \overset{13}{\equiv} 7 \longrightarrow a \overset{13}{\equiv} 7 \end{cases} \xrightarrow[(3,13)=1]{39=3\times13} a \overset{39}{\equiv} \bigcirc$$

تنها گزینه ↑

الف) ۱۲
ب) ۲۰ ✓
ج) ۲۱
د) ۲۴

مسئله ۹۳ باقی‌مانده تقسیم عددی بر ۶ و ۱۶ به ترتیب ۴ و ۵ است. باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۲۴ کدام است؟ (گزینه ۱)

الف) ۲۱
ب) ۲۲
ج) ۱۸
د) ۱۹

مسئله ۹۵ اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۹ و ۷ به ترتیب ۵ و ۶ باشد، باقی‌مانده تقسیم a بر ۶۳ چگونه است؟

$$\begin{cases} a \overset{9}{\equiv} 5 + 4\times9 \equiv 41 \\ a \overset{7}{\equiv} 6 + 5\times7 \equiv 41 \end{cases} \xrightarrow[(9,7)=1]{63=9\times7} a \overset{63}{\equiv} 41$$

به کمک پیمانه، کار قدر به طرف معلوم
پیمانه پیمانه اضافه یا کم می‌کنیم
تا یکسان شوند.

تنها گزینه امکان‌پذیر است ☺

الف) عدد اول
ب) مضرب ۲
ج) مضرب ۳
د) مضرب ۵

مسئله ۹۵ باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی N بر عدد ۳۱ برابر ۲۶ است. اگر این عدد را بر ۴۴ تقسیم کنیم، باقی‌مانده برابر با خارج قسمت می‌شود. رقم یکان عدد بزرگ‌تر N کدام است؟

$$N \overset{31}{\equiv} 26 + 2\times31 \equiv 88$$
$$N \overset{44}{\equiv} 0 + 2\times44 \equiv 88$$
$$\xrightarrow[31\times44=1364]{(31,44)=1} N \overset{1364}{\equiv} 88$$

$N = 43q + q = 44q$ (شرط تقسیم: $q < 43$)

$\times 44 \Rightarrow 44q < 44\times43$ (N , 1892)

تعریف ↓

$N = 1364k + 88$

متغیر دهی $k=1$ ← $\max(N) = 1452$

الف) ۲
ب) ۴ ✓
ج) ۶
د) ۷

مسئله ۹۶ چند عدد شش رقمی طبیعی وجود دارد که مضرب ۱۱ بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر ۴ و ۵ برابر ۱ باشد؟

$$\begin{cases} a \overset{4}{\equiv} 1 \\ a \overset{5}{\equiv} 1 \end{cases} \xrightarrow[4\times5=20]{(4,5)=1} a \overset{20}{\equiv} 1 + 6\times20 \equiv 121$$

از طرفی $a \overset{11}{\equiv} 0 + 11\times11 \equiv 121$

$$\xrightarrow[20\times11=220]{(20,11)=1} a \overset{220}{\equiv} 121$$

تعریف ← $a = 220k + 121$ ← متغیر دهی $k = 0,1,2,3$

الف) ۳
ب) ۴ ✓
ج) ۵
د) ۶

مسئله ۹۷ باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی A بر اعداد ۵، ۷ و ۱۱ به ترتیب ۲، ۴ و ۸ می‌شود. باقی‌مانده تقسیم بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی A بر عدد ۲۳ کدام است؟

$$\begin{cases} A \overset{5}{\equiv} 2 \equiv -3 \\ A \overset{7}{\equiv} 4 \equiv -3 \\ A \overset{11}{\equiv} 8 \equiv -3 \end{cases} \xrightarrow{5\times7\times11} A \overset{385}{\equiv} -3$$

۵ و ۷ و ۱۱ دو به دو نسبت به هم اولند

تعریف ← $A = 385k - 3$

$k=2$ ← $\max(A) = 767 \overset{23}{\equiv} 8$ (سه‌رقمی)

الف) ۸ ✓
ب) ۹
ج) ۱۱
د) ۱۴

CamScanner

سراسری تعدادی گیوان را دسته‌های ۱۶ تایی قرار داده‌ایم، ۳ گیوان باقی مانده است. همان تعداد گیوان را دسته‌های ۲۸ تایی قرار داده‌ایم، باز هم ۳ گیوان باقی مانده است. حداقل تعداد گیوان‌ها مضرب کدام عدد است؟

۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۲
۴) ۲۳ ✓

$$\begin{cases} a \overset{16}{\equiv} 3 \\ a \overset{28}{\equiv} 3 \end{cases} \xrightarrow{(16,28)\neq 1} a \overset{112}{\equiv} 3 \xrightarrow{\text{تعریف}} a = 112k+3$$

$[16,28] = 2^4 \times 7^1 = 112$ (2^4 ، $2^2 \times 7^1$)

$\xrightarrow{k=1} \min(a) = 115$ → مضرب ۲۳

سراسری ۸۰۳ باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۲۹ برابر ۱۲ است. اگر $a+17$ مضرب ۲۱ باشد، رقم وسط کوچکترین مقدار طبیعی a کدام است؟ (گزینه ۴)

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

سراسری باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۱۲، ۱۵ و ۳۲ به ترتیب ۵، ۸ و ۲۵ است. مجموع ارقام کوچکترین مقدار طبیعی a کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۴ ✓
۴) ۱۵

$$\begin{cases} a \overset{12}{\equiv} 5 \ (-7) \\ a \overset{15}{\equiv} 8 \ (-7) \\ a \overset{32}{\equiv} 25 \ (-7) \end{cases} \xrightarrow{\text{دو به دو نسبت به هم}} [12,15,32] = 2^5 \times 3^1 \times 5^1 = 480$$

($2^2 \times 3^1$ ، 3×5 ، 2^5)

$a \overset{480}{\equiv} -7 \rightarrow a = 480k - 7$

$\xrightarrow{k=1} \min(a) = 473$

مجموع ارقام = ۱۴

سراسری ۹۷ باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی A بر عدد ۲۳ برابر ۵ و باقی‌مانده تقسیم دو برابر عدد A بر ۱۷ برابر ۹ می‌باشد. باقی‌مانده تقسیم بزرگترین عدد سه رقمی A بر عدد ۱۲ کدام است؟

۱) صفر ✓
۲) ۲
۳) ۶
۴) ۷

$A \overset{23}{\equiv} 5 + 7 \times 23$ (۱۶۶)

$2A \overset{17}{\equiv} 9 + 17$ (۲۶) $\xrightarrow{\div 2} (17,2)=1$

$A \overset{17}{\equiv} 13 + 9 \times 17$ (۱۶۶)

$\begin{cases} (23,17)=1 \\ 23 \times 17 = 391 \end{cases} \rightarrow A \overset{391}{\equiv} 166 \rightarrow A = 391k + 166$

$k=2$ (تعداد رقم) $\rightarrow \max(A) = 948 \overset{12}{\equiv} 0$ ✓ (سه رقمی)

سراسری ۹۹ اگر عدد $2^n - 1$ بر عدد ۲۱۷ بخش‌پذیر باشد، تعداد اعداد دو رقمی n کدام است؟
اگر عدد $2^n - 1$ بر عدد ۱۰۵ بخش‌پذیر باشد، تعداد اعداد سه رقمی n کدام است؟

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۶ ✓
۴) ۷

$2^n - 1 \overset{217}{\equiv} 0 \rightarrow 2^n \overset{217}{\equiv} 1 \rightarrow n = 15t$

$\begin{cases} 2^3 \overset{7}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{توان } 5} 2^{15} \overset{7}{\equiv} 1 \\ 2^5 \overset{31}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{توان } 3} 2^{15} \overset{31}{\equiv} 1 \end{cases} \xrightarrow{(7,31)=1} 2^{15} \overset{217}{\equiv} 1 \rightarrow 2^{15t} \overset{217}{\equiv} 1$

$7 \times 31 = 217$

$n = 15t$

t	۱	۲	...	۶
n	۱۵	۳۰	...	۹۰

CamScanner
CamScanner

تقسیم دو طرف هم‌نهشتی بر یک عدد صحیح

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow[(m,c)=d]{\div c} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

EX

حالت خاص:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow[(m,c)=1]{\div c} a \overset{m}{\equiv} b$$

مثال عددی

$$\underbrace{۴۸}_{۶\times ۸} \overset{۹}{\equiv} \underbrace{۳۰}_{۶\times ۵} \xrightarrow[(۹,۶)=۳]{\div ۶} ۸ \overset{\frac{۹}{۳}}{\equiv} ۵ \checkmark$$

$$۸ \not\overset{۹}{\equiv} ۵$$

بررسی از رابطه‌ی هم‌نهشتی $۸a \overset{۱۲}{\equiv} ۶۴$ کدام نتیجه‌گیری حاصل می‌شود؟

$$۸a \overset{۱۲}{\equiv} ۶۴ \xrightarrow[(۱۲,۸)=۴]{\div ۸} a \overset{\frac{۱۲}{۴}=۳}{\equiv} ۸ \xrightarrow{+۱} a+۱ \overset{۳}{\equiv} ۹ \to a+۱=۳k$$

۱) $a+۸=۳k$ ۲) $a+۵=۳k$ ۳) $a+۲=۳k$ ۴) $a+۱=۳k$ ✓

بررسی از رابطه‌ی هم‌نهشتی $۱۵a \overset{۳۰}{\equiv} ۲۰b$ کدام نتیجه‌گیری همواره درست نیست؟

$$۱۵a \overset{۳۰}{\equiv} ۲۰b \xrightarrow[(۳۰,۵)=۵]{\div ۵} ۳a \overset{\frac{۳۰}{۵}=۶}{\equiv} ۴b \to \text{ساده‌تر}$$

$۳ \mid ۶$: $۳a \overset{۳}{\equiv} ۴b \to ۰ \overset{۳}{\equiv} b \to b \overset{۳}{\equiv} ۰$

$۲ \mid ۶$: $۳a \overset{۲}{\equiv} ۴b \to a \overset{۲}{\equiv} ۰ \to a \overset{۲}{\equiv} ۰$

۱) $۳a \overset{۳۰}{\equiv} ۴b$ ۲) $۳a \overset{۶}{\equiv} ۴b$ ۳) $b \overset{۳}{\equiv} ۰$ ۴) $a \overset{۲}{\equiv} ۰$

بررسی از رابطه‌ی هم‌نهشتی $۹a \overset{۱۸}{\equiv} ۶b$ کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ (گزینه ۲)

H.W

۱) $a \overset{۲}{\equiv} ۰$ ۲) $a \overset{۶}{\equiv} ۲$ ۳) $b \overset{۳}{\equiv} ۰$ ۴) $۳a \overset{۶}{\equiv} ۲b$

بررسی از رابطه‌ی هم‌نهشتی $۱۹۲ \overset{۱۰۸}{\equiv} ۳۶a$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ (گزینه ۲)

H.W

$\div ۳۶$

۱) $a \overset{۳}{\equiv} ۳$ ۲) $a \overset{۴}{\equiv} ۴$ ۳) $۲a \overset{۳}{\equiv} -۱$ ۴) $۳a \overset{۲}{\equiv} ۲$

بررسی اگر $(a^۲-۱, m)=۱$ و $a^۳-a^۲-a+۱ \overset{m}{\equiv} a^۲-۱$، آن‌گاه

$$a^۳-a^۲-a+۱ = a^۲(a-۱)-(a-۱) = (a-۱)(a^۲-۱)$$

$$(a^۲-۱)(a-۱) \overset{m}{\equiv} a^۲-۱ \xrightarrow[(m,a^۲-۱)=۱]{\div (a^۲-۱)} a-۱ \overset{m}{\equiv} ۱ \to a \overset{m}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\text{تعریف}} m \mid a-۲$$

۱) $m \mid a+۱$ ۲) $m \mid a-۱$ ۳) $m \mid a+۲$ ۴) $m \mid a-۲$

نکته باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر ۱۷ برابر ۱۱ است. اگر a مضرب ۳ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $\frac{a}{۳}$ بر ۱۷ کدام است؟

$$a \overset{۱۷}{\equiv} ۱۱ \underbrace{-۱۷}_{-۶} \xrightarrow[(۱۷,۳)=۱]{\div ۳} \frac{a}{۳} \overset{۱۷}{\equiv} -۲ \to ۱۵ \checkmark$$

۱) ۱ ۲) ۱۱ ۳) ۳ ۴) ۱۵

بررسی عدد $۷^{۱۵}+a$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین مقدار طبیعی a کدام است؟

$$۵ \cdot ۷^{۱۵} + a \overset{۱۷}{\equiv} ۰ \to ۵ + a \overset{۱۷}{\equiv} ۰$$

$a \to ۱۲ \checkmark$ ← تست گزینه

فرضا $۷^{۱۶} \overset{۱۷}{\equiv} ۱ + \underbrace{۲\times ۱۷}_{۳۵}$ $\xrightarrow[(۱۷,۷)=۱]{\div ۷}$ $۷^{۱۵} \overset{۱۷}{\equiv} ۵$

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

تست‌های عادکردن و ب.م.م به کمک هم‌نهشتی

سراسری ۹۳ اگر n عددی طبیعی و دو عدد $5n-2$ و $7n+3$ دارای مقسوم‌علیه مشترک غیریک باشد، تعداد اعداد دورقمی n کدام است؟

$(5n-2, 7n+3) = d \neq 1$

$d \mid 15-(-14) \Rightarrow d \mid 29 \Rightarrow d = 29$

$\Rightarrow \begin{cases} 29 \mid 5n-2 \\ 29 \mid 7n+3 \end{cases}$ → انتخاب یکی به دلخواه

$\Rightarrow 5n-2 \overset{29}{\equiv} 0 \Rightarrow 5n \overset{29}{\equiv} 2 \xrightarrow{+29} 5n \overset{29}{\equiv} 2+58 \xrightarrow{\div 5,\ (29,5)=1} n \overset{29}{\equiv} 12$

$\Rightarrow n = 29k+12$

k	0	1	2	3
n	12	41	70	99

۴ جواب دورقمی برای n

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴ ✓

سراسری خ به‌ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد $11n+7$ و $9n+2$ نسبت به هم اول نیستند. کوچک‌ترین مقدار n در این حالت، مضرب کدام است؟

حل

$(11n+7, 9n+2) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 11n+7 \xrightarrow{\times 9} d \mid 99n+63 \\ d \mid 9n+2 \xrightarrow{\times 11} d \mid 99n+22 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 41$

$\xrightarrow{d \in \mathbb{N},\ d \neq 1} d = 41 \Rightarrow \begin{cases} 41 \mid 11n+7 \\ 41 \mid 9n+2 \end{cases} \Rightarrow 9n+2 \overset{41}{\equiv} 0 \Rightarrow 9n \overset{41}{\equiv} -2 \Rightarrow 9n \overset{41}{\equiv} -2+41\times 4 = 162$

$\xrightarrow{\div 9,\ (41,9)=1} n \overset{41}{\equiv} 18 \xrightarrow{\text{تعریف}} n = 41k+18 \xrightarrow{k=0} \min(n) = 18$ ← مضرب ۶ است

۵) ۵
۶) ۶
۷) ۷
۸) ۸ ✓

سراسری خ به‌ازای هر عدد طبیعی $n \leq n_0$، دو عدد $2n+7$ و $11n-3$ نسبت به هم اول‌اند. بیشترین مقدار n_0 کدام است؟ (۳۷)

$(2n+7, 11n-3) = d \Rightarrow d \mid |2\times(-3) - (7)(11)| = 83 \Rightarrow d = 1$ یا 83

$\Rightarrow \begin{cases} 83 \mid 2n+7 \Rightarrow 2n+7 \overset{83}{\equiv} 0 \Rightarrow 2n \overset{83}{\equiv} -7 \equiv 76 \xrightarrow{\div 2,\ (83,2)=1} n \overset{83}{\equiv} 38 \\ 83 \mid 11n-3 \end{cases}$

$\Rightarrow n = 83k+38 \xrightarrow{k=0} \min(n) = 38$ ← اولین n طبیعی که ب.م.م غیریک تولید می‌کند

پس از ۱ تا ۳۷، ب.م.م ۱ تولید می‌کند

۳۵) ۳۵
۳۷) ۳۷ ✓
۳۹) ۳۹
۴۰) ۴۰

سراسری ۹۸ به‌ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$، اگر $a \mid 13n+3$ و $a \mid 7n+4$ و $a \neq 1$ باشد، آن‌گاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد n کدام است؟

$a \mid 13n+3$ ، $a \mid 7n+4$ ← نسبت به هم اول

$\Rightarrow a \mid (13)(4) - (7)(3) \Rightarrow a \mid 31 \xrightarrow{a \neq 1} a = 31$

$\Rightarrow \begin{cases} 31 \mid 13n+3 \\ 31 \mid 7n+4 \end{cases} \Rightarrow 7n+4 \overset{31}{\equiv} 0 \Rightarrow 7n \overset{31}{\equiv} -4 \equiv 27$

$\xrightarrow{\div 7,\ (31,7)=1} n \overset{31}{\equiv} -3 \xrightarrow{\text{تعریف}} n = 31k-3 \xrightarrow{k=1} \min(n) = 28$

۱) ۷
۲) ۸ ✓
۳) ۹
۴) ۱۰

سراسری ۹۲ به‌ازای چند عدد طبیعی دورقمی n، دو عدد $9n+2$ و $11n-5$ نسبت به هم غیراول‌اند؟ (گزینه ۱)

۱) ۱۰
۲) ۲۱
۳) ۳۰
۴) ۴۱

کلاس‌های هم‌نهشتی ← همان باقی‌مانده‌هاست

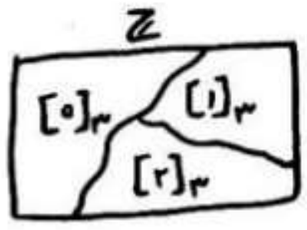
Ex می‌دانیم در تقسیم بر هر عدد طبیعی به تعدادی برابر با همان عدد طبیعی، باقی‌مانده وجود دارد. به عبارت دیگر مجموعهٔ اعداد صحیح به تعداد باقی‌مانده‌های ایجاد شده افرازی گردد که به هرکدام یک کلاس هم‌نهشتی می‌گوییم. به طور کلی:

قضیه: (دسته) هم‌نهشتی به پیمانهٔ m، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به m کلاس افرازی کند که عبارتند از:
$[0]_m , [1]_m , [2]_m , \dots , [m-1]_m$

تعریف کلاس هم‌نهشتی → $[i]_m = \{x \in \mathbb{Z} : x \overset{m}{\equiv} i\}$

مثال عددی Ex رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۳ را در نظر می‌گیریم. داریم:

۳ کلاس
$[0]_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x \overset{3}{\equiv} 0\} \longrightarrow 3k$
$[1]_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x \overset{3}{\equiv} 1\} \longrightarrow 3k+1$
$[2]_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x \overset{3}{\equiv} 2\} \longrightarrow 3k+2$



$[3]_3 = [0]_3 \quad , \quad [4]_3 = [1]_3 \quad , \quad [5]_3 = [2]_3 \quad , \dots$

ست ۱

مسأله: به ازای کدام مقدار a مجموعهٔ تمام دسته‌های هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۵ به صورت $\{[0],[a],[a^2],[a^3],[a^4]\}$ $a=?$ $\{[0],[1],[2],[3],[4]\}$

گزینه ۱: $a=1 \longrightarrow [a]=[a^2]=\dots=[1]$ ✓

گزینه ۲: $a=2 \longrightarrow [a]=[2]_5$ ✓ , $[a^2]=[4]_5$ ✓ , $[a^3]=[8]_5=[3]_5$ ✓ , $[a^4]=[16]_5=[1]_5$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

نکته ۱: «مفهوم تعلق به یک کلاس هم‌نهشتی»

$$a \in [i]_m \longleftrightarrow a \overset{m}{\equiv} i$$

مسأله: به کدام کلاس هم‌نهشتی به پیمانه ۱۲ تعلق دارد؟ عدد -209

$-209 \in [7]_{12} \longleftrightarrow -209 \overset{12}{\equiv} 7$

$209 \overset{12}{\equiv} 5 \xrightarrow{\times(-1)} -209 \overset{12}{\equiv} -5 \not\to 7$

۱) $[7]$ ✓
۲) $[9]$
۳) $[-7]$
۴) $[-9]$

مسأله: در رابطهٔ هم‌باقی‌مانده بر ۱۱، عدد 5^{10} به کدام دسته هم‌نهشتی تعلق دارد؟

هم‌نهشتی به پیمانه

$5^{10} \overset{11}{\equiv} 1$ ✓ فرما

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۷

مسأله: یک رابطهٔ هم‌نهشتی مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به ۱۵ کلاس هم‌نهشتی افراز کرده است و عدد سه‌رقمی $\overline{6a4}$ به کلاس ۹ تعلق دارد. a چند جواب وجود دارد؟

$m=15$

$\overline{6a4} \in [9]_{15} \longrightarrow \overline{6a4} \overset{15}{\equiv} 9 \longrightarrow 600 + 10a + 4 \overset{15}{\equiv} 9$ (600 ≡ 0, 4 ≡ 19, 9 ≡ 24 (mod 15))

$\longrightarrow 10a \overset{15}{\equiv} 5 \xrightarrow{\div 10} a \overset{3}{\equiv} 2$ ($10a \overset{15}{\equiv} 20$; $(15,10)=5$)

تعریف → $a = 3k+2$

مقدار دهی: $0 \le a \le 9$

k	0	1	2
a	2	5	8

→ ۳ جواب ✓

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

CamScanner

نکته ۲۰۰

$$a,b,c,\dots \in [i]_m \iff a \overset{m}{\equiv} b \overset{m}{\equiv} c \overset{m}{\equiv} \dots \overset{m}{\equiv} i$$

* چند عدد متعلق به یک کلاس هم‌نهشتی، یعنی همگی به پیمانه داده شده هم‌نهشت‌اند.

سراسری دو عدد ۲۴ و ۱۸۵ در یک دسته‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m قرار دارند. اگر $(m,7)=1$، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد m^m بر ۷ کدام است؟

$185 \overset{m}{\equiv} 24 \xrightarrow{\text{تعریف}} m \mid 185-24$

$185-24 = 161 = 7\times 23$

m شمارنده‌ی 161, $m\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow m = 1, 7, 23, 161$

$(m,7)=1 \Rightarrow m = 23$

$23^{23} \overset{7}{\equiv} ?$ ، $23 \equiv 2$

$2^3 \overset{7}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{توان } 7} 2^{21} \overset{7}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 2^2} 2^{23} \overset{7}{\equiv} 4$ ✓

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

سراسری سه عدد ۴۱، a و ۱۳۲ در یک کلاس هم‌نهشتی قرار دارند. کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی a به طوری که مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ به تعداد کمتری کلاس هم‌نهشتی افراز شود، کدام است؟ (پیمانه با یک min شود)

$a \overset{m}{\equiv} 132 \overset{m}{\equiv} 41 \Rightarrow m \mid 132-41$

$132-41 = 91$

m شمارنده‌ی 91, $m\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow m = 1, 7, 13, 91$

$a \overset{7}{\equiv} 41 \equiv -1$ ، $a = 7k-1$ ، $k=15 \Rightarrow a = 104$ ✓ (کوچک‌ترین سه‌رقمی)

۱) ۱۰۱
۲) ۱۰۲
۳) ۱۰۳
۴) ۱۰۴

سراسری یک رابطه‌ی هم‌نهشتی مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ را به ۵ کلاس هم‌نهشتی افراز کرده است. کدام دو عدد در یک کلاس‌اند؟

۱) ۱۳ و ۲۵
۲) ۱۲ و ۳۷
۳) ۲۵ و ۱
۴) ۳۷ و ۱

تست اگر a عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، با کدام پیمانه گزاره‌ی $[a^2]=1$ همواره درست است؟ (جواب، گزینه‌ی ۳)

۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۲۴

تست چند عدد طبیعی دو رقمی به کلاس هم‌نهشتی $[268]_{15}$ تعلق دارد؟

۱) ۳
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۸

CamScanner

قاعده‌های بخش‌پذیری مهم

● بخش‌پذیری بر ۳ و ۹ "مهم"

$10^{k} \overset{9,3}{\equiv} 1 : \forall k \in \mathbb{N}$ ← $10^{1} \overset{9,3}{\equiv} 1$

$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \overset{9,3}{\equiv} a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$ (مجموع ارقام)

Ex

$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} = a_n \times 10^{n} + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_2 \times 10^{2} + a_1 \times 10^{1} + a_0$

(توان‌های ۱۰ همگی ۱ می‌شوند)

مثال عددی / Ex

$2894631\omega \overset{3}{\equiv} 2+8+9+4+6+3+1+\omega \overset{3}{\equiv} 12+\omega$

$\omega = 0 \Rightarrow 12$

$\omega = 6 \Rightarrow 18$

سراسری: عدد پنج رقمی $\overline{4 1 a \omega b}$ بر ۹ بخش‌پذیر است. $a+b$ کدام است؟ ۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

$\overline{4 1 a \omega b} \overset{9}{\equiv} 0 \rightarrow 4+1+a+\omega+b \overset{9}{\equiv} 0 \rightarrow 12+a+b \overset{9}{\equiv} 0$

$\rightarrow a+b \overset{9}{\equiv} -3 \rightarrow a+b = 9k+6$

k	0	1	2
$a+b$	6	15	24

$\begin{cases} 0 \le a \le 9 \\ 0 \le b \le 9 \end{cases} \Rightarrow 0 \le a+b \le 18$

تست: چند عدد به صورت $\overline{a 1 x y 3 2}$ بر ۳۶ بخش‌پذیر است؟ ۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

$\overline{a 1 x y 3 2} \overset{9}{\equiv} 0 \rightarrow a+1+x+y+3+2 \overset{9}{\equiv} 0 \rightarrow x+y \overset{9}{\equiv} 7 \rightarrow x+y = 9k+7$

$\overline{a 1 x y 3 2} \overset{4}{\equiv} 0$

$0 \le x+y \le 18$

$k=0 \Rightarrow x+y=7$

x	0	1	2	...	7
y	7	6	5	...	0

→ ۸ جواب

$k=1 \Rightarrow x+y=16$

x	7	8	9
y	9	8	7

→ ۳ جواب

● بخش‌پذیری بر ۱۱ "مهم" / Ex

$10^{k} \overset{11}{\equiv} -1 : k \text{ فرد}$, $10^{k} \overset{11}{\equiv} 1 : k \text{ زوج}$

$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \overset{11}{\equiv} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$

$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} = a_0 + 10 \times a_1 + 10^{2} \times a_2 + 10^{3} \times a_3 + \cdots$

(توان‌های ۱۰ به ترتیب $-1, 1, -1, \ldots$)

مثال عددی / Ex

$2859671 \overset{11}{\equiv} 1-7+6-9+5-8+2 \overset{11}{\equiv} 1$ ✓

-10

سراسری: عدد شش رقمی $\overline{5 a 7 b 2 4}$ بر ۴۴ تقسیم‌پذیر است. باقی‌مانده‌ی تقسیم این عدد بر ۹ کدام است؟ ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$\overline{5 a 7 b 2 4} \overset{11}{\equiv} 0 \rightarrow 4-2+b-7+a-5 \overset{11}{\equiv} 0 \rightarrow a+b \overset{11}{\equiv} 10$

$\overline{5 a 7 b 2 4} \overset{4}{\equiv} 0$

$\rightarrow a+b = 11k+10 \xrightarrow[0 \le a+b \le 18]{k=0} a+b=10$

$\overline{5 a 7 b 2 4} \overset{9}{\equiv} 5+a+7+b+2+4$

$\rightarrow 10 \rightarrow 1$ ✓

CamScanner

تست عدد $\overline{1ab562}$ بر ۹۹ بخش‌پذیر است. باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۱۲۲ کدام است؟

۱) ۶۲
۲) صفر
۳) ۷۴ ✓
۴) ۱۲۰

$\overline{1ab562} \overset{9}{\equiv} 0 \rightarrow 1+a+b+5+6+2 \overset{9}{\equiv} 0 \rightarrow a+b \overset{9}{\equiv} -25 \equiv 4$

تعریف $\rightarrow a+b=9k+4$

$\overline{1ab562} \overset{11}{\equiv} 0$

$0 \le a+b \le 18$

$k=0 \rightarrow a+b=4 \rightarrow$

a	0	1	2	3	4
b	4	3	2	1	0

$k=1 \rightarrow a+b=13 \rightarrow$

a	9	8	7	6	5	4
b	4	5	6	7	8	9

$2-6+5-b+a-1 \overset{11}{\equiv} 0 \rightarrow a-b \overset{11}{\equiv} 0$

$\rightarrow \overline{122562} \overset{122}{\equiv} 562 \rightarrow 74$

تست عدد شش‌رقمی $\overline{a63b29}$ بر عدد ۹۹ بخش‌پذیر است. رقم a کدام است؟ ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

تست سراسری خ عدد پنج‌رقمی $\overline{5abbb6}$ بر عدد ۹۹ بخش‌پذیر است. رقم b کدام است؟ ۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸ (گزینه ۴)

تست مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد به صورت $\overline{34x y5}$ که بر ۳۳ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟ (گزینه ۳)

۱) ۲۹
۲) ۲۱
۳) ۲۴
۴) ۲۷

$\overline{34xy5} \overset{3}{\equiv} 0 \rightarrow 3+4+x+y+5 \overset{3}{\equiv} 0 \rightarrow \underbrace{x+y}_{\text{مضرب ۳}} \overset{3}{\equiv} 0$

$\overline{34xy5} \overset{11}{\equiv} 0 \rightarrow 5-y+x-4+3 \overset{11}{\equiv} 0 \rightarrow x-y \overset{11}{\equiv} -4 \equiv 7$

مقدار دهی →

x	
7	

تست چند عدد پنج‌رقمی به صورت $\overline{82y4x}$ وجود دارد که بر ۹۹ بخش‌پذیر باشد؟ ۱) ۱ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸

(جواب: گزینه‌ی ۴)

CamScanner

● بخش‌پذیری بر ۸

اختصاری

$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \overset{8}{\equiv} \overline{a_2 a_1 a_0}$ سه رقم سمت راست

$10 \overset{8}{\equiv} 2$, $12 \overset{8}{\equiv} 4$, $13 \overset{8}{\equiv} 5$, $14 \overset{8}{\equiv} 6$, $15 \overset{8}{\equiv} 7$, $16 \overset{8}{\equiv} 0 \rightarrow \cdots$

تست: مجموع باقی‌مانده‌های تقسیم عدد ۷۳۶۵۲۱ بر ۸، ۹ و ۱۱ کدام است؟ ۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

$7\,3652\,1 \overset{8}{\equiv} 521 \overset{8}{\equiv} 5\times 10^2 + 2\times 10 + 1 \rightarrow +\rightarrow 12$ ✓

$\rightarrow \overset{9}{\equiv} 7+3+6+5+2+1 \overset{9}{\equiv} 6$ ✓

$\rightarrow \overset{11}{\equiv} 1-2+5-6+3-7 \overset{11}{\equiv} 5$ ✓

سراسری ۰۰: تعداد اعداد شش‌رقمی $\overline{ababab}$ که مضرب ۱۸ باشند، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

$\overline{ababab}$ زوج، $\overline{ababab}$ زوج، $a=$ زوج، $a \neq 0$

$\overline{ababab} \overset{11}{\equiv} 0 \rightarrow a-b+a-a+b-a \overset{11}{\equiv} 0$ ✓

$\overline{ababab} \overset{8}{\equiv} 0 \rightarrow \overline{aba} \overset{8}{\equiv} 0 \rightarrow a\times 10^2 + b\times 10 + a \overset{8}{\equiv} 0$

$\rightarrow 3a+2b \overset{8}{\equiv} 0 \rightarrow 2b \overset{8}{\equiv} -3a \xrightarrow[(8,2)=2]{\div 2} b \overset{4}{\equiv} 3\left(\frac{a}{2}\right)$

a	2	4	6	8
b	3	2	1	0
	7	6	5	4

$(b \overset{4}{\equiv} 3)$ $(b \overset{4}{\equiv} 2)$ $(b \overset{4}{\equiv} 1)$ $(b \overset{4}{\equiv} 0)$

$\rightarrow$ ۱۰ جواب ✓

● بخش‌پذیری بر ۴ و ۲۵

EX

$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \overset{4\text{ یا }25}{\equiv} \overline{a_1 a_0}$ دو رقم سمت راست

$10 \overset{4}{\equiv} 2$, $12 \overset{4}{\equiv} 0$, $15 \overset{4}{\equiv} 3$, $10 \overset{4}{\equiv} 2 \rightarrow \cdots$

عددی بر ۴ (یا ۲۵) بخش‌پذیر است که دو رقم سمت راست آن بر ۴ (یا ۲۵) بخش‌پذیر باشد.

مثال عددی / EX: $7946\,93 \overset{4}{\equiv} 93 \rightarrow$ ۱ ✓

سراسری ۹۵: چند عدد پنج‌رقمی به صورت $\overline{a35b2}$ بخش‌پذیر بر ۳۶ موجود است؟

$\overline{a35b2} \overset{4}{\equiv} 0 \rightarrow \overline{b2} \overset{4}{\equiv} 0 \rightarrow b = 1,3,5,7,9$ ($a \neq 0$) ۴۵ ✓

$\overline{a35b2} \overset{9}{\equiv} 0 \rightarrow a+3+5+b+2 \overset{9}{\equiv} 0 \rightarrow a+b \overset{9}{\equiv} 8$ ۹

$\rightarrow a \overset{9}{\equiv} 8-b \rightarrow$

b	1	3	5	7	9
a	7	5	3	1	8

$\rightarrow$ ۵ جواب ✓

سراسری ۹۷: عدد پنج رقمی $N = \overline{a73b8}$ بر ۴۴ بخش‌پذیر است. باقی‌مانده‌ی تقسیم کوچک‌ترین عدد N بر ۹ کدام است؟ ($a \neq 0$)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

$\overline{a73b8} \overset{4}{\equiv} 0 \rightarrow \overline{b8} \overset{4}{\equiv} 0 \rightarrow b = 0,2,4,6,8$

$\overline{a73b8} \overset{11}{\equiv} 0 \rightarrow 8-b+3-7+a \overset{11}{\equiv} 0 \rightarrow a \overset{11}{\equiv} b+7$

b	0	2	4	6	8
a	7	9	0	2	4

(0 غ ق) ✓

$\rightarrow \min(N) = 20736\,8 \overset{9}{\equiv} 2+7+3+6+8 \overset{9}{\equiv} 1$ ✓

a باید مخالف صفر شود

تست مجموع دو عدد $\overline{۴b۵۶}$ و $\overline{۲۳۳a}$ بر ۴۴ بخش‌پذیر است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

حل

$\overline{۲۳۳a}+\overline{۴b۵۶} \overset{۴}{\equiv} ۰ \rightarrow \overline{۳a}+\underbrace{۵۶}_{\text{مضرب ۴}} \overset{۴}{\equiv} ۰ \rightarrow \overline{۳a} \overset{۴}{\equiv} ۰ \rightarrow a=۲ \text{ یا } ۶$

$\overline{۲۳۳a}+\overline{۴b۵۶} \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \rightarrow (a-۳+۳-۲)+(۶-۵+b-۴) \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \rightarrow a+b \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \xrightarrow{a=۲} b \overset{۱۱}{\equiv} ۳ \rightarrow b=۳$

پس $a+b=۵$

(اگر $a=۶ \rightarrow ۶+b \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \rightarrow b \overset{۱۱}{\equiv} -۱ \overset{+۱۱}{\equiv} ۱۰ \rightarrow b=۱۰$ ✱)

سراسری ۹۷ عدد پنج رقمی $N=\overline{a۷۴۶b}$ مضرب ۳۶ می‌باشد. باقی‌ماندهٔ تقسیم بزرگ‌ترین عدد N بر ۱۱ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

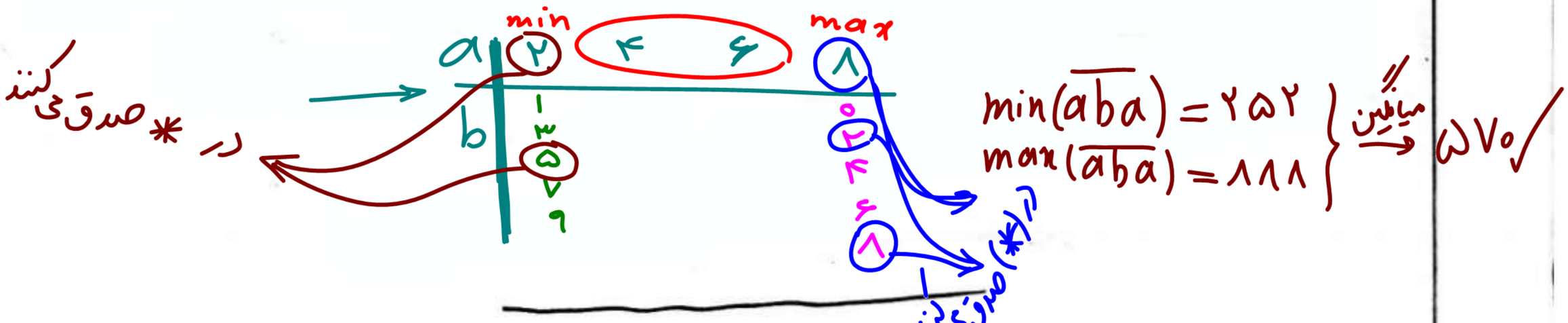
سراسری ۱۴۰۰ میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی $\overline{aba}$ که مضرب ۱۲ باشند، کدام است؟ ($a \neq ۰$)

($\overline{aba}$ زوج $\rightarrow a=$ زوج)

۱) ۳۴۸
۲) ۵۴۰
۳) ۵۷۰
۴) ۵۷۴

$\overline{aba} \overset{۳}{\equiv} ۰ \rightarrow a+b+a \overset{۲}{\equiv} ۰ \rightarrow ۲a+b \overset{۳}{\equiv} ۰ \rightarrow b \overset{۳}{\equiv} -۲a \xrightarrow{۱} b \overset{۳}{\equiv} a$ (✱)

$\overline{aba} \overset{۴}{\equiv} ۰ \rightarrow \overline{ba} \overset{۴}{\equiv} ۰$



$\min(\overline{aba})=۲۵۲$
$\max(\overline{aba})=۸۸۸$
} میانگین $\Rightarrow$ ۵۷۰ ✓

بخش‌پذیری بر ۲، ۵ و ۱۰

Ex

$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \overset{۲ \text{ یا } ۵ \text{ یا } ۱۰}{\equiv} a_0$ رقم یکان

$۱۰^{۴} \overset{۴}{\equiv} ۰$ (✓ KEMN)

مثال عددی

$۸۴۷۳۶۱۹ \overset{۲}{\equiv} ۹ \rightarrow ۱$ ✓

$\overset{۵}{\equiv} ۹ \rightarrow ۴$ ✓

$\overset{۱۰}{\equiv} ۹$

نتیجه: باقی‌مانده بر ۱۰ = رقم یکان

سراسری Ex: اگر $S=1!+2!+\cdots+50!$ ، آنگاه رقم یکان S^2 ؟

تست ۱۴۰۱خ: رقم یکان عدد $(1!+3!+5!+\cdots+25!)^{(2!+4!+6!+\cdots+26!)}$ ؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

مثال: رقم یکان دو عدد $3a-2$ و $2a+5$ یکسان است. رقم یکان $5a^2+7$ کدام است؟

سراسری ۱۴۰۱: دو عدد a^2-1 و $14a+6$ رقم یکان برابری دارند. رقم یکان a^2+a کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۷
۴) ۸

تست Ex H.W: رقم یکان عدد $(729)^1+(729)^{728}+\cdots+(729)^{729}$ ؟ ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۸ ۴) ۹ (گزینه ۴)

قضیه نیوتن

مثال عددی

به طور کلی داریم

سراسری: رقم یکان هر عدد طبیعی با رقم یکان کدام یک از توان های خودش همواره برابر است؟

۱) توان سوم ۲) توان چهارم ۳) توان پنجم ۴) توان ششم

سراسری: اگر $a^p=10k+7$ ، آنگاه رقم یکان عدد a^{p+4} ؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۷

تست: اگر a عددی طبیعی باشد، رقم یکان کدام عدد همواره صفر است؟

۱) $a^{93} - a$

۲) $a^{91} - a$

۳) $a^{92} - a$

۴) $a^{90} - a$

---

* نتیجه‌ی مهم: برای یافتن رقم یکان اعداد به شکل a^n ، ابتدا n را بر ۴ تقسیم می‌کنیم ، داریم

$n = 4k + r \quad ; \quad 0 \leq r < 4$

الف)
ب)

مثال (سه‌گزینه‌ای) EX: رقم یکان هر یک از اعداد زیر را بیابید.

الف) 4×7^{17}

ب) $1 + 2^{101} + 3^{102} + 4^{103}$

پ) 13^{15}

ت) $(8456297)^{12347}$

ث) 18^{20}

مثال: رقم یکان $7^{6^{13^{14^{15}}}}$ را بیابید.

تست: رقم یکان عدد $(1379)^{1379!} + (1378)^{1378!}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۹

۳) ۵ ۴) ۷

معادلهٔ هم‌نهشتی

به شکل کلی زیر مطرح است

$$ax \overset{m}{\equiv} b \qquad (a,b \in \mathbb{Z})$$

$ax \overset{m}{\equiv} b$ $\xrightarrow[\text{☺}]{\text{تعریف}}$

نتیجه: معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ جواب دارد اگر و تنها اگر

Ex

مثال عددی

Ex

معادلهٔ هم‌نهشتی $4x \overset{2}{\equiv} 3$ جواب ندارد، زیرا

معادلهٔ هم‌نهشتی $4x \overset{2}{\equiv} 2$ جواب دارد، زیرا

سراسری معادلهٔ هم‌نهشتی $6x \overset{9}{\equiv} 2a+5$ در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب است. a کدام است؟

۱) $2k+1$ ۲) $2+3k$

۳) $3k+1$ ۴) $3+2k$

سراسری ۱۴۰۱ خ معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{5}{\equiv} n^2+3n$, $ax \overset{5}{\equiv} 2n+1$ دارای جواب هستند. سه برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و ۵ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۹

۳) ۶ ۴) ۳

حل معادلهٔ هم‌نهشتی: به کمک ویژگی‌های هم‌نهشتی

مثال **Ex**: مجموعهٔ اعداد صحیح مانند a را بیابید که ۵ برابر آن‌ها به علاوهٔ ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

مثال **Ex**: معادله‌های هم‌نهشتی زیر را حل کنید.

الف) $423x \overset{11}{\equiv} 79$

ب) $5x \overset{13}{\equiv} 3$

پ) $6x \overset{9}{\equiv} 15$

ت) $51x \overset{11}{\equiv} 11$

CamScanner

سراسری ۹۳ رقم یکان کوچکترین عدد طبیعی سه‌رقمی x که در معادلهٔ $11x \overset{13}{\equiv} 9$ صدق می‌کند کدام است؟ (تجربی ۹۳)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۶

سراسری معادلهٔ $1 \overset{31}{\equiv} 72x$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی سه‌رقمی چند جواب دارد؟

۲۹ (۱
۳۰ (۲
۳۲ (۳
۳۳ (۴

سراسری ۹۴ اگر عدد $2x^2 - x - 6$ مضرب ۵۳ باشد، رقم یکان بزرگترین عدد سه‌رقمی x کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

نکته: $ab \overset{p}{\equiv} 0 \rightarrow a \overset{p}{\equiv} 0 \vee b \overset{p}{\equiv} 0$ (اول که)

$2x^2 - x - 6 \overset{53}{\equiv} 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (2x+3)(x-2) \overset{53}{\equiv} 0 \xrightarrow{\text{اول که}} 2x+3 \overset{53}{\equiv} 0 \vee x-2 \overset{53}{\equiv} 0$

$\Rightarrow$

- $x - 2 \overset{53}{\equiv} 0 \rightarrow x \overset{53}{\equiv} 2 \xrightarrow{\text{تعریف}} x = 53k+2 \xrightarrow[\text{بزرگترین سه‌رقمی}]{k=18} x = 956 \xrightarrow{\text{رقم یکان}} 6$
- $2x + 3 \overset{53}{\equiv} 0 \rightarrow 2x \overset{53}{\equiv} -3 \overset{\div 2}{\underset{(53,2)=1}{\longrightarrow}} x \overset{53}{\equiv} 25 \xrightarrow{\text{تعریف}} x = 53k+25 \xrightarrow[\text{بزرگترین سه‌رقمی}]{k=18} x = 979 \xrightarrow{\text{رقم یکان}} 9$ ✓

ملا سیم صاف من گربه دلقک میشد
کیست در تن چو جام می جمله دهن نمیکند

معادله‌ی سیاله (دیوفانتی)

معادلهٔ "سیاله" دو متغیری خطی

به شکل کلی زیر مطرح است

$$ax + by = c \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}$$ ضرایب

مثلاً معادلهٔ سیاله $3x + 4y = 8$ دو متغیری خط است.

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ یک جواب ، ...

شرط وجود جواب

Ex

مثال عددی Ex

معادلهٔ سیاله $6x + 15y = 21$ جواب دارد ، زیرا

" " $8x + 12y = 22$ جواب ندارد ، زیرا

تست به ازای کدام مقدار b معادلهٔ $(15+b)x + by = 20$ در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۵

۳) ۱۵ ۴) ۳۰

تست به ازای کدام عدد طبیعی n ، معادلهٔ خط $24x + 39y = 2n + 1$ در مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ جواب دارد!

۱) ۲۹ ۲) ۳۳

۳) ۳۷ ۴) ۴۱

تست معادلهٔ سیاله $3x + 4y = a^2 + 2$ به ازای چند مقدار $a \in \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ جواب دارد؟ (گزینه ۳)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲

۳) ۱۴ ۴) ۲۰

حل معادلهٔ سیالهٔ دو متغیری خطی : به کمک تبدیل به هم‌نهشتی معادله

(معادلهٔ سیاله یا جواب ندارد یا بی‌شمار جواب صحیح دارد.)

Ex

$$ax+by=c \longrightarrow \begin{cases} ax-c=b(-y) \xrightarrow{\text{تعریف هم‌نهشتی}} ax \overset{|b|}{\equiv} c \\ \text{یا} \\ by-c=a(-x) \xrightarrow{\text{"}} by \overset{|a|}{\equiv} c \end{cases}$$

مثال: معادلهٔ سیالهٔ خطی $7x+5y=11$ را حل کنید.
Ex

تمرین
H.W
معادلهٔ سیالهٔ خطی $5x-9y=13$ را حل کنید.

تست: مجموع ارقام کوچکترین عدد طبیعی سه رقمی x که در معادلهٔ $57x-87y=342$ صدق می‌کند کدام است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

$$57x-87y=342 \xrightarrow{\div 3} 19x-29y=114 \xrightarrow{\text{تبدیل به هم‌نهشتی}} 19x-29y \overset{29}{\equiv} 114$$

$$\xrightarrow{(29,19)=1} 19x \overset{29}{\equiv} 114 \xrightarrow{\div 19} x \overset{29}{\equiv} 6$$

۵ ✓ مجموع ارقام $\xrightarrow{}$ $x=122$ کوچکترین سه رقمی طبیعی $\xrightarrow{k=4}$ متناظر دهی $x=29k+6,\ k\in\mathbb{Z}$ $\xrightarrow{\text{تمرین}}$

تست ۱۴۰۱ خ: اگر y بزرگ‌ترین عدد سه رقمی باشد که در معادلهٔ سیالهٔ خطی $15x+21y=9$ صدق کند، مقدار قرینهٔ x کدام است؟

۱) ۱۳۹۸
۲) ۱۳۹۹
۳) ۱۳۹۱
۴) ۱۳۹۰

سراسری ۹۹ خ
سراسری ۱۴۰۱

معادلهٔ سیالهٔ $9x+13y=725$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

تست H.W

معادلهٔ سیالهٔ خطی $13x+19y=243$ در بازهٔ صحیح $-100<x,y<100$ چند جواب دارد؟ (گزینه ۲)

۵) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۳

سراسری ۹۰ (۹۵)

اگر $(357,629)=17$ ، $357x+629y$ کوچکترین عدد مثبت $x+y$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۱
۴) ۱۰

حل

$(357,629)=17$ $\xrightarrow{\text{معادلهٔ سیاله}}$ $357x+629y=17$

17×21 $\quad$ 17×37

$\xrightarrow{\div 17}$ $21x+37y=1$

$\xrightarrow{\text{تبدیل به هم‌نهشتی}}$ $21x\overset{37}{\equiv}1$ $\longrightarrow$ $21x\overset{37}{\equiv}1$ $\longrightarrow$

CamScanner

مثال Ex: به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

سراسری ۹۸ Ex: قیمت هر واحد از دو نوع کالا به ترتیب ۲۲۰ و ۱۴۰ تومان است. با مبلغ ۱۹۰۰۰ تومان، به چند طریق می‌توان از این دو نوع کالا خریداری کرد؟

۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۱۳

سراسری ۹۳ Ex: به چند طریق می‌توان با ۳۷۰۰ ریال تمبرهای ۱۵۰ و ۲۵۰ ریالی خرید؟ (کنکور ۹۳)

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

سراسری Ex: برای خرید کتاب به قیمت ۷۵۵۰ تومان، به تعداد A تُن ۲۰۰ تومانی و B تُن ۱۵۰ تومانی پرداخت نموده‌ایم. حداقل A+B کدام است؟ ← کمترین تعداد تُن پرداخت شده؟

۱) ۳۵
۲) ۳۶
۳) ۳۷
۴) ۳۸

CamScanner
CamScanner

مثال Ex به چند طریق می‌توان یک کیسهٔ ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

$$3x+5y=23 \longrightarrow 3x \overset{5}{\equiv} 23 \xrightarrow[(5,3)=1]{\div 3} x \overset{5}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} \boxed{x=5k+1}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله سیاله}} 3(5k+1)+5y=23 \Rightarrow 15k+5y=20 \xrightarrow{\div 5} \boxed{y=-3k+4}$$

$$\xrightarrow{\text{جواب‌های حسابی}} \begin{cases} x\geq 0 \rightarrow 5k+1\geq 0 \rightarrow k\geq -\frac{1}{5} \\ y\geq 0 \rightarrow -3k+4\geq 0 \rightarrow k\leq \frac{4}{3} \end{cases} \xrightarrow[k\in\mathbb{Z}]{\cap} k=0,1 \xrightarrow{\text{۲ روش}}$$

مثال Ex تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایرهٔ هم مرکز، تیراندازی می‌کند. اگر به دایرهٔ با شعاع کوچکتر بزند، ۵ امتیاز و اگر به دایرهٔ بزرگتر و خارج دایرهٔ کوچکتر بزند، ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر همه تیرها به صفحهٔ هدف اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد، چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟

تمرین Ex 4.03 شخصی در یک مسابقهٔ علمی شرکت کرده است و به سؤال‌های ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و در مجموع ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به دست آورد؟

CamScanner

حل معادلهٔ سیالهٔ دو متغیری خطی به کمک حدس یک جواب آن

اختیاری

اگر یک جواب معادلهٔ سیاله را داشته باشیم، سایر جواب‌ها به کمک قضیهٔ زیر به دست می‌آید:

قضیه: اگر اعداد صحیح x_0 و y_0 یک جواب (حدی) معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ باشد و $(a,b)=d$، که $d|c$، آن‌گاه سایر جواب‌ها (جواب‌های کلی) عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \end{cases} \quad (k\in Z)$$

مثالی: اگر x و y جواب‌های معادلهٔ سیالهٔ $9x+11y=18$ باشند، $x+y$ کدام است؟

۱) $2+2k$
۲) $2+3k$
۳) $3+2k$
۴) $3+3k$

ماسه‌ها فراموش‌کارترین رفیقان ساحل‌اند پایه‌پایت می‌آیند آنقدر که گاهی سهم‌جشن در همراهی،
حوصله‌ات ماسه‌ای میبخشد تا کافی است تا اندک باکی بوزد یا خسته معصیت برخیزد
تا بلکی همیشه از حافظه ضعیفش زدوده پایت پاک شود... ما از نسل ماسه‌ایم
از نسل صدفیم صدفهایی که به پاس آن همتی چندروزه در دریا برای همیشه صدای
دریا را بر بر گوش شنوا زمزمه میکنند...

CamScanner

اثبات مستقیم (استدلال استنتاجی)

$P \Rightarrow q$ (P: فرض، q: حکم)

Ex روش نتیجه گیری با استفاده از مطالبی که درستی آن‌ها نشان داده شده است یا حقایقی که درستی آن‌ها پذیرفته شده است.

(قضیه‌ها (مسئله‌ها)) (اصل‌ها)

Ex **مثال:** هرکدام از گزاره‌های زیر را اثبات کنید.

الف) مجموع دو عدد فرد، عددی زوج است.

حل $\begin{cases} a=\text{فرد} \Rightarrow a=2k+1 \\ b=\text{فرد} \Rightarrow b=2k'+1 \end{cases} \rightarrow a+b=2k+2k'+2=2\underbrace{(k+k'+1)}_{k''}=2k''=\text{زوج}$

ب) حاصل ضرب سه عدد متوالی طبیعی، بر ۶ بخش‌پذیر است. (صفحه ۹ جزوه)

ب) مجموع (تفاضل) دو عدد گویا، عددی گویاست. / حاصل ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

(فاقد عامل مشترک)

حل $\begin{cases} a=\text{عددی گویا} \xrightarrow{q\neq 0} a=\frac{p}{q} \quad (p \text{ و } q \text{ نسبت به هم اولند}) \\ b=\text{عددی گویا} \xrightarrow{q'\neq 0} b=\frac{p'}{q'} \quad (\text{" " " } p' \text{ و } q') \end{cases} \xrightarrow{+} a+b=\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}=\frac{\overbrace{pq'+p'q}^{p''}}{\underbrace{qq'}_{q''\neq 0}}=\frac{p''}{q''}=\text{گویا}$ ✓

ت) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $4k+1$ مربع کامل است.

حل $k=n\cdot(n+1) \underset{n\in\mathbb{N}}{\Longrightarrow} 4k+1=4n(n+1)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2=\text{مربع}$

ج) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید a^2+b^2 زوج است. (a و b هر دو فردند)

$\begin{cases} a=2k+1 \rightarrow a^2=4k^2+4k+1 \\ b=2k'+1 \rightarrow b^2=4k'^2+4k'+1 \end{cases} \rightarrow a^2+b^2=\underbrace{4k^2+4k'^2+4k+4k'+2}_{2(\cdots)=2k''=\text{زوج}}$ ✓

ج) مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

حل $n=\text{فرد} \Rightarrow n=2k+1 \underset{k\in\mathbb{Z}}{\rightarrow} n^2=4k^2+4k+1=\underbrace{4k(k+1)}_{\text{زوج}}+1=\text{فرد}$

$n=\text{فرد} \Rightarrow n=2k+1 \underset{k\in\mathbb{Z}}{\rightarrow} n^3=8k^3+12k^2+6k+1=2\underbrace{(4k^3+6k^2+3k)}_{k'\in\mathbb{Z}}+1=2k'+1=\text{فرد}$

ح) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی، همان عدد وسطی است.

پنج عدد طبیعی متوالی $\rightarrow (n-2),(n-1),\underbrace{n}_{\text{عدد وسط}},(n+1),(n+2)$

$\rightarrow$ میانگین $=\frac{(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)}{5}=n \leftarrow$ عدد وسطی

$a+1, a+2, \underline{a+3}, a+4, a+5 \rightarrow \bar{a}=\frac{5a+15}{5}=a+3$

CamScanner

اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها (روش انشاع)

براساس هم‌ارزی متقابل: $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

(گواهینامه و کارت ملی) یا (گواهینامه) یا (کارت ملی) کارا نجام می‌شود

مثال Ex: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، عدد $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

حل: برای n دو حالت وجود دارد (از نظر زوج و فرد بودن):

$n =$ زوج $\longrightarrow n = 2k \ (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7$

$= \underbrace{4k^2}_{\text{زوج}} - \underbrace{10k}_{\text{زوج}} + \underbrace{7}_{\text{فرد}} = \underbrace{\text{فرد}}_{\text{زوج}}$

$n =$ فرد $\longrightarrow n = 2k+1 \ (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = (2k+1)^2 - 5(2k+1) + 7$

$= 4k^2 + 4k + 1 - 10k - 5 + 7$

$= \underbrace{4k^2}_{\text{زوج}} - \underbrace{6k}_{\text{زوج}} + \underbrace{3}_{\text{فرد}} = \underbrace{\text{فرد}}_{\text{زوج}}$

یعنی با فرض زوج یا فرد بودن n، عدد $n^2 - 5n + 7$ همواره فرد است.

مثال Ex: ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$، آن‌گاه $a = 0$ یا $b = 0$.

اثبات با در نظر گرفتن تمام حالات

a دو حالت دارد: یا $a = 0 \longrightarrow$ حکم ثابت شد

یا $a \neq 0 \longrightarrow a^{-1}$ وجود دارد $\longrightarrow ab = 0$ (فرض مسئله) $\xrightarrow{a^{-1}} a^{-1}.a.b = a^{-1} \times 0 \longrightarrow b = 0$ حکم ثابت شد

$a, b \in \mathbb{R} : ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \ \vee \ b = 0)$

مثال Ex: اگر $A = \{3, 4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعهٔ $S = \{1, 2, \ldots, 6\}$ و $n \in S$ باشد، ثابت کنید اگر عدد $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج باشد، آن‌گاه $n \in A$.

حل: با در نظر گرفتن همه حالت‌ها برای $n \in S$ داریم:

$n = 1 \longrightarrow \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$ فرد ✗

$n = 2 \longrightarrow \frac{2^2(2+1)^2}{4} = 9$ فرد ✗

$n = 3 \longrightarrow \frac{3^2(3+1)^2}{4} = 36$ زوج ✓

$n = 4 \longrightarrow \frac{4^2(4+1)^2}{4} = 100$ زوج ✓

$n = 5 \longrightarrow \frac{5^2(5+1)^2}{4} = 225$ فرد ✗

$n = 6 \longrightarrow \frac{6^2(6+1)^2}{4} = 441$ فرد ✗

پس فقط برای $n = 3, 4$، عدد مذکور زوج است و در نتیجه $n \in A$.

CamScanner

نکته اگر عدد $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ، زوج باشد، آن‌گاه $n=4k$ یا $n=4k-1$

اثبات:

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\text{زوج} \rightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\text{زوج} \rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=\underbrace{2t}_{\text{زوج}}$$

$$\rightarrow n(n+1)=\underbrace{4t}_{\text{مضرب ۴}} \rightarrow \begin{cases} n=\text{مضرب ۴} \rightarrow n=4k \\ n+1=\text{مضرب ۴} \rightarrow n+1=4k \rightarrow n=4k-1 \end{cases}$$

تست به ازای چند مقدار $n\in\{1,2,\dots,30\}$ عدد $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ زوج است؟

۱) ۷ ۲) ۱۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

$n=4k \rightarrow$ تعداد مضارب ۴ بین ۱ تا ۳۰ $=\left[\frac{30}{4}\right]=7 \rightarrow 4,8,12,16,20,24,28$

$n=4k-1 \rightarrow 1\le 4k-1\le 30 \xrightarrow{+1} 2\le 4k\le 31 \xrightarrow{\div 4} \frac{1}{2}\le k\le 7/\dots \rightarrow k=1,\dots,7$

چند مجموع مهم:

الف) $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

ب) $1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

پ) $\underbrace{1^3+2^3+\dots+n^3}_{\text{مجموع مکعب‌های اعداد طبیعی متوالی شروع از عدد ۱}}=\underbrace{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}_{\text{مربع مجموع همان اعداد}}$

به ازای چند مقدار $n\in\{1,2,\dots,47\}$ عدد $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ زوج است؟

$n=4k \rightarrow$ تعداد مضارب ۴ $=\left[\frac{47}{4}\right]=11$ → ۲۳ جواب

$n=4k-1 \rightarrow 1\le 4k-1\le 47$

$\xrightarrow{+1} 2\le 4k\le 48 \xrightarrow{\div 4} \frac{1}{2}\le k\le 12$

$\rightarrow k=1,2,\dots,12$

CamScanner

مثال نقض ← مثالی که یک گزاره کلی را رد می‌کند.

مثال (Ex) درستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد 2^n-1 اول است. ← اعداد مرسن

مثال نقض → $n=4 \rightarrow 2^4-1=15 \neq$ اول

بی نهایت عدد اول به صورت 2^n-1 وجود دارد.
اگر عدد 2^n-1 اول باشد، آنگاه n اول است.

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y، تساوی $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ برقرار است.

مثال نقض → $x=4, y=9 \Rightarrow \sqrt{4+9}=\sqrt{4}+\sqrt{9} \Rightarrow \sqrt{13} \neq 2+3$

پ) برای هر دو عدد حقیقی x و y، تساوی $\sqrt{x.y}=\sqrt{x}\times\sqrt{y}$ برقرار است. (نامنفی)

مثال نقض → $x=-1, y=-4 \rightarrow \sqrt{\underbrace{(-1)(-4)}_{2}}=\underbrace{\sqrt{-1}\times\sqrt{-4}}_{\text{بی معنی}}$

ت) برای هر دو عدد حقیقی x و y، تساوی $[x+y]=[x]+[y]$ برقرار است.

مثال نقض → $x=2.3, y=4.7 \rightarrow [2.3+4.7]=[2.3]+[4.7] \rightarrow 9 \neq 2+4$

بی نهایت عدد اول به صورت $2^{2^n}+1$ وجود دارد.
اگر عدد 2^m+1 اول باشد، آن‌گاه m توانی از ۲ است یعنی $m=2^n$

ث) به ازای همهٔ عددهای طبیعی n، عدد $2^{2^n}+1$ عددی اول است. ← اعداد فرما

مثال نقض → $n=5 \rightarrow 2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297=641\times 6700417 \neq$ اول

ج) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. (تناقض)

مثال نقض → $\begin{cases} a=2+\sqrt{3} & \text{(گنگ)} \\ b=2-\sqrt{3} & \text{(گنگ)} \end{cases} \rightarrow a+b=4 \neq$ گنگ

(گویا $\leftarrow a+b=0 \leftarrow \begin{cases} a=\sqrt{3} \\ b=-\sqrt{3} \end{cases}$)

چ) حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

مثال نقض → $\begin{cases} a=2+\sqrt{3} \\ b=2-\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow a.b=(2+\sqrt{3}).(2-\sqrt{3})=4-3=1 \neq$ گنگ

(گویا $\leftarrow ab=4 \leftarrow \begin{cases} a=\sqrt{2} \\ b=\sqrt{8} \end{cases}$)

ح) A، B و C سه مجموعه از مرجع U باشند،

اگر $A\cup B=A\cup C$، آن‌گاه $B=C$
اگر $A\cap B=A\cap C$، آن‌گاه $B=C$
اگر $A-B=A-C$، آن‌گاه $B=C$

مثال نقض برای اولی → $A=\{a,b,c,d\}, B=\{c,e\}, C=\{d,e\}$

$A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$
$A\cup C=\{a,b,c,d,e\}$ → $A\cup B=A\cup C$, $B\neq C$ ✓

عکس نقیض گزاره شرطی با خودش هم ارز است

اثبات غیر مستقیم (روش برهان خلف)

$(P \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim P)$

فرض — حکم — نقیض حکم — نقیض فرض

Ex در این روش، فرض می‌کنیم حکم نادرست است (فرضِ خلف). پس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض خلف، به یک نتیجهٔ غیرممکن یا نتیجه‌ای متضاد با فرض می‌رسیم و از آن جا با توجه به منطقی بودن تمام مراحل، (تناقض) معلوم می‌شود که فرضِ نادرستی حکم (فرضِ خلف) باطل است و درستی حکم ثابت می‌شود.

مثال: Ex ثابت کنید **حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.**

حل: فرض کنیم x عددی گویا و x عددی گنگ است. نشان می‌دهیم $x+2$ یک عدد گنگ است (حکم).

برهان خلف: فرض می‌کنیم (فرض خلف) $x+2$ گنگ نیست، پس $x+2$ عددی گویا است.

از آن جایی که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است، پس $(x+2)-2$ عددی گویا است.

که با فرض گنگ بودن x در تناقض است. پس فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌گردد.

مثال: Ex ثابت کنید **حاصل ضرب هر عدد گویای غیرصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.**

حل: فرض کنیم x عددی گویا و غیرصفر و x عددی گنگ است. نشان می‌دهیم $2x$ عددی گنگ است (حکم).

برهان خلف: فرض می‌کنیم (فرض خلف) $2x$ گنگ نیست، پس $2x$ عددی گویا است. می‌دانیم معکوس هر عدد گویا، عددی گویا است و چون حاصل ضرب دو عدد گویا همواره گویا می‌باشد، پس $(2x)(\frac{1}{2})$، یعنی x، باید گویا باشد که با فرض گنگ بودن x در تناقض است.

مثال: Ex ثابت کنید **عکس هر عدد گنگ، عددی گنگ است.**

حل: فرض می‌کنیم x عددی گنگ است. نشان می‌دهیم $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ می‌باشد (حکم).

برهان خلف: فرض می‌کنیم (فرض خلف) $\frac{1}{x}$ گنگ نیست. پس $\frac{1}{x}$ گویا است. اما چون معکوس هر عدد گویا، عددی گویا است، پس $\frac{1}{\frac{1}{x}}$، یعنی x باید گویا باشد، که با فرض گنگ بودن x در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

نتیجه:

$\pm$	گنگ	گویا
گنگ	?	گنگ
گویا	گنگ	گویا

$\times$	گنگ	$\neq 0$ گویا
گنگ	?	گنگ
$0 \neq$ گویا	گنگ	گویا

CamScanner

مثال: اگر α و β دو عدد گنگ باشند و $\alpha+\beta$ عددی گویا باشد، ثابت کنید دو عدد $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ گنگ اند.

Ex

$\alpha+2\beta = (\alpha+\beta)+\beta$

گویا + گنگ = گنگ ✓

$\alpha-\beta = (\alpha+\beta)+(-2)\beta$

گویا + (گنگ × گویای غیرصفر = گنگ) = گنگ ✓

مثال Ex: a_1، a_2 و a_3 عددهایی صحیح هستند و b_1، b_2 و b_3 همان اعداد، ولی به ترتیب دیگری می باشند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.

مثال عددی:
$a_1=3,\ a_2=-5,\ a_3=8$
$b_1=-5,\ b_2=8,\ b_3=3$

$(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3) = (3-(-5))(-5-8)(8-3) = (\underbrace{8}_{\text{زوج}})(-13)(5) = \text{زوج}$

اثبات (برهان خلف): فرض می کنیم $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج نیست و فرد است.

پس هرکدام از اعداد a_1-b_1، a_2-b_2 و a_3-b_3 نیز فردند.

اما

$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3) = (\underbrace{a_1+a_2+a_3}_{k}) - (\underbrace{b_1+b_2+b_3}_{k}) = 0 \rightarrow$ زوج

لـ زیرا جمع سه عدد فرد، باید عددی فرد شود، حال آن که صفر عددی زوج است.

پس فرض خلف باطل است و حکم ثابت است.

همیشه فاصله‌ای هست / چرا باید بود
و عشق صدای فاصله‌هاست / صدای فاصله‌ها را عرق گرفته‌اند

CamScanner

اثبات بازگشتی (گزاره های هم ارز)

$(P \Longleftrightarrow Q)$

Ex

در این روش برای اثبات درستی (نادرستی) یک گزاره، با استفاده از عملیات وقوانین درست ریاضی، درستی (نادرستی) گزارهٔ هم ارز با آن گزاره را نشان می دهیم و این عملیات را تا جایی ادامه می دهیم که به یک گزارهٔ همیشه درست (همیشه نادرست) برسیم. در این صورت حکم هم ارز با آن نیز درست (نادرست) است.

مثال: اگر $a,b \in \mathbb{R}$، کدام یک از ترکیب های دوشرطی زیر درست است؟ ??

الف) $a=b \Longleftrightarrow a^2=b^2$ ✗

$(a^2=b^2 \xrightarrow{\text{جذر}} |a|=|b|$ درست$)$

ب) $a=b \Longleftrightarrow a^3=b^3$ ✓

پ) $a<b \Longleftrightarrow a^2<b^2$ ✗

$-4<2 \rightarrow (-4)^2<2^2$ غ

ت) $a<b \Longleftrightarrow a^3<b^3$ ✓

مثال: اگر $a>0$، ثابت کنید $a+\frac{1}{a} \geq 2$

اثبات بازگشتی: شروع از حکم

$a+\frac{1}{a} \geq 2 \overset{a>0}{\Longleftrightarrow} a^2+1 \geq 2a \Longleftrightarrow a^2-2a+1 \geq 0 \Longleftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$ ✓

گزارهٔ همیشه درست

مثال: ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

حل: برای دو عدد نامنفی a و b نشان می دهیم $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Longleftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Longleftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Longleftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$

درست همیشه

مثال: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید $a^2+ab+b^2 \geq 0$

جملهٔ حاصل ضربی

حل: شروع با حکم و پس ضرب در ۲

$a^2+ab+b^2 \geq 0 \Longleftrightarrow 2a^2+2ab+2b^2 \geq 0 \Longleftrightarrow a^2+b^2+2ab+a^2+b^2 \geq 0$

a^2+a^2 ، b^2+b^2

$\Longleftrightarrow (a+b)^2+a^2+b^2 \geq 0$

گزارهٔ همیشه درست

مثال: اگر x و y دو عدد حقیقی غیرصفر باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$

حل: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2 \Longleftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2 \Longleftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \Longleftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0$

$\Longleftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$

گزارهٔ همیشه درست

CamScanner

مثال: برای دو عدد حقیقی x و y نشان دهید $x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$

حل $x^2+y^2+1 \geq xy+x+y \iff 2x^2+2y^2+2 \geq 2xy+2x+2y$

$\iff 2x^2+2y^2+2-2xy-2x-2y \geq 0 \iff x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+y^2-2y+1 \geq 0$

$\iff (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2 \geq 0$ عبارت همیشه درست

مثال: برای سه عدد حقیقی x، y و z نشان دهید $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$

$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \iff 2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2yz+2zx$

$\iff 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx \geq 0$

$\iff x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2 \geq 0$

$\iff (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$ عبارت همیشه درست

مثال: اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم ارزند؟

n زوج $\iff n^2$ زوج

حل: اگر n زوج باشد، آن‌گاه $n=2k$، که $k \in \mathbb{N}$، پس $n^2=(2k)^2=4k^2=2(\underbrace{2k^2}_{k' \in \mathbb{Z}})=2k'$

یعنی n^2 نیز زوج است. حال نشان می‌دهیم که اگر n^2 زوج باشد، آن‌گاه n نیز زوج است.

برهان خلف: فرض می‌کنیم n زوج نیست، پس n فرد است. یعنی $n=2k+1$، پس

$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(\underbrace{2k^2+2k}_{k' \in \mathbb{Z}})+1=2k'+1 \neq$ زوج

که با فرض زوج بودن n^2 متناقض است. پس فرض خلف باطل است.

تمرین H.W: اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید

الف) $y^2+1 \geq 2x(y-x+1)$

ب) $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ $(x,y>0)$

CamScanner

$S = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$

مثال: عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^3 < x^2$

$x = -2 \rightarrow (-2)^3 < (-2)^2$

اثبات وجودی ← (یک مورد کافی است)

مثال: آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

x: ۰ ، y: هرچی

$S = (x \in \mathbb{R} \wedge y = 0) \vee (x = 0 \wedge y \in \mathbb{R})$

مثال: آیا اعداد حقیقی و ناصفر a و b وجود دارند که $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ ؟ خیر

$(a+b \neq 0)$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2 = ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + ab = 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2ab = 0 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + 2ab) + a^2 + b^2 = 0$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a + b = a = b = 0$ خلاف فرض

تست: اگر a ، b ، c و d چهار عدد حقیقی باشند، برای اثبات نامساوی $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$ به کمک اثبات بازگشتی (روش تمرین ۶ هم ارز)، کدام رابطهٔ همیشه درست به دست می‌آید!

۱) $(ab+cd)^2 \geq 0$ ۲) $(ad-bc)^2 \geq 0$ ✓ ۳) $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 0$ ۴) $(ac-bd)^2 \geq 0$

$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$\Leftrightarrow a^2c^2 + b^2d^2 + 2acbd \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

$\Leftrightarrow 0 \leq a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd$

$\Leftrightarrow 0 \leq (ad-bc)^2$

گزاره همیشه درست

CamScanner