

۱۴۰۱ - ۱۴۰۲

به نام آنکه جان را فکرت آموخت

درس :

آمار و احتمال

و

ریاضیات گسسته

مبحث :

منطق ریاضی

مجموعه

ترکیبیات

احتمال

آمار توصیفی

آمار استنباطی

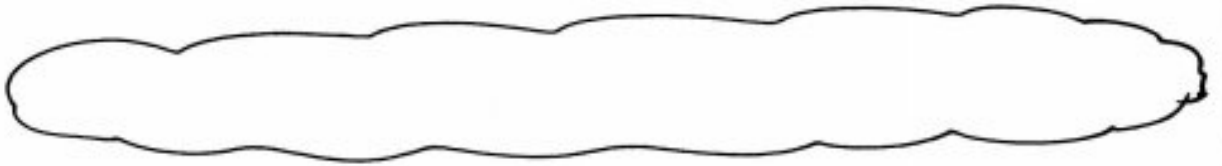
تهیه و تنظیم : مهندس ترکمن

## گزاره (Proposition)

گزاره جمله ای است خبری که بتوان دقیق و بدون ابهام ارزش درستی یا نادرستی آن را مشخص کرد. هر چند ممکن است در حال حاضر نتوان ارزش آن را تعیین کرد. پس جملات ناکامل (ناقص)، سوالی، تعجبی، امری، عاطفی (احساسی)، گزاره نیستند.

بیت کدام جمله یک گزاره محسوب نمی شود؟

- ۱) هر معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.
- ۲) در پرتاب یک تاس سالم، احتمال ظاهر شدن عدد زوج برابر  $\frac{1}{4}$  است.
- ۳) ای کاش همه دانش آموزانم در کنکور قبول شوند.
- ۴) هر عدد زوج بزرگتر از ۲ را می توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت.



## گزاره نما

گزاره خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل می شود.

مثلاً  $a$  عددی فرد است، او یک شاعر است، احتمال رخ دادن پشامد  $A$  برابر  $\frac{1}{4}$  است.

دامنه متغیر گزاره نما <sup>Domain</sup> مجموعه مقادیری که می توان به جای متغیر (های) یک گزاره نما قرار داد تا تبدیل به یک گزاره شود. نماد:  $D$

- مثلاً  $a$  عددی فرد است ←
- او یک شاعر است ←
- احتمال رخ دادن پشامد  $A$  ←
- برابر  $\frac{1}{4}$  است ←

مجموعه جواب گزاره نما  $\leftarrow$  زیر مجموعه ای از دامنه متغیر گزاره نما، که برای تمام اعضا  $S$  نما:  
 $\downarrow$   
 $S \subseteq D$

مثلاً اگر  $a$  عددی فرد است  $\leftarrow D = \mathbb{Z}$

بی در برتاب یک تاس سالم  
 $\leftarrow$  احتمال رخ دادن  $A$   
 برابر  $\frac{1}{6}$  است

$$\leftarrow D = \mathbb{R} \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

نقیض یک گزاره  $\leftarrow$  نقیض گزاره  $P$  گزاره ای است که ارزش آن مخالف ارزش گزاره  $P$  می باشد و با نماد  $\sim P$  نشان داده می شود.  
 (Negation)

به کمک منفی کردن فعل جمله خبری گزاره به دست می آید یا قراردادن عبارت "چنین نیست که" در ابتدای گزاره

مثلاً  
 $P$ :  $\sqrt{2}$  عددی گویا است  $\rightarrow$  نقیض  $\sim P$ :  $\sqrt{2}$  عددی گنگ نیست  
 $\sim P$ :  $\sqrt{2}$  عددی گویا است  
 $\sim P$ :  $\sqrt{2}$  عددی گنگ است

$P$ : عدد ۱۷ منفی ۳ نیست  $\rightarrow$  نقیض  $\sim P$ : عدد ۱۷ منفی ۳ است  
 $\sim P$ : عدد ۱۷ منفی ۳ نیست

$$\sim(\sim P) \equiv P$$

توجه

دو گزاره هم ارزش  $\leftrightarrow$  مستون مربوط به هر کدام از این دو گزاره در جدول ارزش درستی آن‌ها یکسان است.

نماد:  $\leftrightarrow$

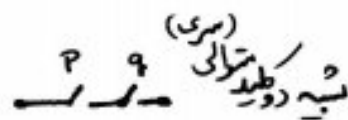
ترکیب گزاره‌ها (گزاره‌های مرکب)  $\leftarrow$  ترکیب عطفی، فصلی، شرطی، دو شرطی

نماد  $\wedge$   $\leftarrow$  بین دو گزاره حرف "و" قرار داده می‌شود.

ترکیب عطفی دو گزاره

فقط زمانی ارزش آن درست است که هر دو گزاره درست باشند.

P	q	$P \wedge q$
>	>	>
>	ن	ن
ن	>	ن
ن	ن	ن



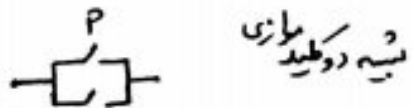
جریان زمانی برقرار است که هر دو کلید بسته باشند.

نماد  $\vee$   $\leftarrow$  بین دو گزاره حرف "یا" قرار داده می‌شود.

ترکیب فصلی دو گزاره

فقط زمانی ارزش آن نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

P	q	$P \vee q$
>	>	>
>	ن	>
ن	>	>
ن	ن	ن



جریان زمانی برقرار نیست که هر دو کلید باز باشند.

تت کدام یک دارای ارزش نادرست است!

(۱)  $(x^2 + 1 = 0)$  (عدد ۲۱۹۷۱۴ ضربی است) (۲) (عدد  $\pi$  گنگ است) و (مربع دو قطر عدد برهم دارد).

(۳) عدد  $5^9 + 8$  اول است یا عدد ۴۶۹۲۱۴۸ مربع است. (۴)  $\{1\} \in \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$  و  $\{1\} \subseteq \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$



نتیجه با توجه به جدول متعادل، دو تایی (a, b) کدام است؟

P	q	$P \vee q$	$P \wedge q$
عدد $(2+1)$ مرکب است	.....	a	....
.....	عدد $n^4 + 1$ به ازای تمام اعداد طبیعی اول نیست.	....	b

گزاره همیشه درست در جدول  $\leftarrow$  همواره ارزش آن "د" است.  $\leftarrow$  نماد T  
 گزاره همیشه نادرست در جدول  $\leftarrow$  همواره ارزش آن "ن" است.  $\leftarrow$  نماد F

نقته: برای گزاره دکواه P داریم:

$\left\{ \begin{array}{l} P \vee \sim P \equiv T \\ P \wedge \sim P \equiv F \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} P \vee T \equiv T \\ P \wedge F \equiv F \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} P \vee F \equiv P \\ P \wedge T \equiv P \end{array} \right.$
---	---	---

ویژگی های ترکیب عطفی و ترکیب فصلی

① خود توانی  $\left\{ \begin{array}{l} P \wedge P \equiv P \\ P \vee P \equiv P \end{array} \right.$  ② جابجایی  $\left\{ \begin{array}{l} P \wedge q \equiv q \wedge P \\ P \vee q \equiv q \vee P \end{array} \right.$

③ شرکت پذیری  $\left\{ \begin{array}{l} (P \wedge q) \wedge r \equiv P \wedge (q \wedge r) \\ (P \vee q) \vee r \equiv P \vee (q \vee r) \end{array} \right.$

④ توزیع پذیری  $\left\{ \begin{array}{l} P \wedge (q \vee r) \equiv (P \wedge q) \vee (P \wedge r) \\ P \vee (q \wedge r) \equiv (P \vee q) \wedge (P \vee r) \end{array} \right.$   
 ↓  
 (فانتومری)

$$\begin{cases} P \wedge (P \vee Q) \equiv P \\ P \vee (P \wedge Q) \equiv P \end{cases}$$

⑤ جذب و تکراری دارد  
 م. ۸، م. ۷ دیده می شود  
 یک گزاره، تکراری شود  
 هم ارز است با گزاره تکرار شده

نتیجه ۲:  $P \wedge Q \equiv P \vee Q \Leftrightarrow P \equiv Q$

نتیجه ۱:  $P \wedge Q \equiv P \Leftrightarrow P \vee Q \equiv Q$

$$\begin{cases} \sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q \\ \sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q \end{cases}$$

⑥ قانون دمورگان  
 یک تک را نفی می کند  
 علاقت وسط را بر عکس می کند

مثلاً نفی گزاره "عدد ۱۲ گند است" یا "قطره ای مستطیل برابرند" عبارت است از:

نفی گزاره  $(r \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ و } 25^{12} \leq 12^{25})$  عبارت است از:

$$\begin{cases} P \vee (\sim P \wedge Q) \equiv P \vee Q \\ P \wedge (\sim P \vee Q) \equiv P \wedge Q \end{cases}$$

⑦ قانون همپوشانی (شبه جذب)

تت: گزاره  $(P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q)$  هم ارز کدام گزاره است؟

$$\begin{matrix} P & Q \\ P & Q \\ \sim P & Q \end{matrix}$$

تت: کدام گزاره همواره نادرست است؟  
 (۱)  $(P \wedge Q) \vee P$  (۲)  $(P \wedge Q) \vee \sim Q$  (۳)  $(P \vee Q) \wedge \sim P$  (۴)  $\sim(P \vee Q) \wedge P$

(موزیک)

ترکیب شرطی  
دو گزاره

نماد  $\Rightarrow$  ← "اگر P آن گاه q" ←  $P \Rightarrow q$

تالی (حکم)  $\downarrow$   
مقدم (فرضیه)  $\downarrow$

فقط زمانی ارزش آن نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد

P	q	$P \Rightarrow q$
>	>	>
>	ن	ن ←
ن	>	>
ن	ن	>

$\text{ن} \Rightarrow \text{و}$

ت  
که گزاره شرطی به استغای مقدم درست است

شده  
الف) اگر  $2 > 5$ ، آن گاه عدد ۸ اول است. ←

ب)  $(3 | 2^v + 1 \Rightarrow 4 | 5^q + 1)$  ←

ج) اگر  $\{v\} \in \{1, 2, 3\}$ ، آن گاه  $\{v\} \subseteq \{1, 2, 3\}$  ←

چند ویژگی مهم

① ترکیب شرطی بر گزاره دکراه با افزودن گزاره ای همیشه درست است  $P \Rightarrow P \equiv T$

$P \Rightarrow q \equiv \sim P \vee q$

دوس  $\downarrow$   
فاصل  $\downarrow$   
نقیض اولی  $\downarrow$

② تبدیل گزاره شرطی به ترکیب فصلی  
(هم اندی "نافذ")  
⊙

$\square \Rightarrow \circ \equiv \sim \square \vee \circ$

شکل کلی:

$$\textcircled{3} \text{ قانون عطف مقدمات } P \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (P \wedge q) \Rightarrow r$$

$$\textcircled{4} \text{ توزیع پذیری "v" نسبت به "=>" } P \vee (q \Rightarrow r) \equiv (P \vee q) \Rightarrow (P \vee r)$$

توجه: "∧" نسبت به "=>" توزیع پذیر نیست.

$$P \wedge (q \Rightarrow r) \not\equiv (P \wedge q) \Rightarrow (P \wedge r)$$

$$\textcircled{5} \text{ توزیع پذیری "=>" از وجه نسبت به "v", "∧"} P \Rightarrow (q \vee r) \equiv (P \Rightarrow q) \vee (P \Rightarrow r)$$

$$P \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (P \Rightarrow q) \wedge (P \Rightarrow r)$$

اثبات اولی

توجه: "=>" از راست نسبت به "v", "∧" توزیع نمی شود.

$$\begin{cases} (P \vee q) \Rightarrow r \equiv (P \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \\ (P \wedge q) \Rightarrow r \equiv (P \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \end{cases}$$

اثبات اولی

$$\textcircled{6} \text{ قانون تعدی (قیاس) } \{ [(P \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (P \Rightarrow r) \} \equiv T$$



نتیجه اگر P گزاره ای با ارزش درست و q و r دو گزاره دکواه باشند، کدام یک گزاره ای همیشه درست است؟

$(P \wedge q) \Rightarrow r$  (۲)

$(\sim P \wedge q) \Rightarrow r$  (۱)

$(P \vee q) \Rightarrow r$  (۴)

$(\sim P \vee q) \Rightarrow r$  (۳)

برای هر گزاره ای که از گزاره های زیر، هم ارزش منطقی گزاره  $(\sim P \Rightarrow \sim q) \wedge (P \vee q)$  است؟

- P (۱)
- q (۲)
- $P \wedge q$  (۳)
- $P \Rightarrow q$  (۴)

نتیجه اگر P و q دو گزاره دکواه باشند، کدام یک گزاره ای همیشه درست است؟

$P \Rightarrow (P \vee q)$  (۱)     $P \Rightarrow (\sim P \wedge q)$  (۲)     $P \Rightarrow \sim(P \vee q)$  (۳)     $P \Rightarrow (\sim P \wedge \sim q)$  (۴)

نتیجه اگر ارزش گزاره  $\sim q \wedge (P \Rightarrow q)$  درست باشد، کدام گزاره همیشه درست است؟

- P (۱)
- q (۲)
- $\sim P \wedge q$  (۳)
- $\sim P \vee q$  (۴)

برای هر گزاره ای که از گزاره های زیر، هم ارزش است؟  $(P \wedge r) \Rightarrow (\sim P \vee \sim q)$

- $P \vee (q \wedge r)$  (۱)
- $P \wedge (q \vee r)$  (۲)
- $r \Rightarrow (P \wedge q)$  (۳)
- $r \Rightarrow (P \vee q)$  (۴)

نتیجه اگر ارزش گزاره  $[P \Rightarrow (\sim q \Rightarrow (r \Rightarrow q))]$  درست و ارزش گزاره q نادرست باشد، آن گاه ارزش کدام گزاره باقیه متساوت است؟

- $P \wedge q$  (۱)
- $P \Rightarrow \sim r$  (۲)
- $\sim(P \vee \sim q)$  (۳)
- $\sim q \Rightarrow (P \wedge q)$  (۴)

این‌ها جدول ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر با جدول ارزش گزاره  $(q \vee r) \Rightarrow (p \vee q)$  یکسانیت؟

$$(1) p \Rightarrow (q \vee r) \quad (2) (p \wedge q) \vee r \quad (3) \sim p \vee q \vee r \quad (4) (p \Rightarrow q) \vee r$$

این‌ها اگر گزاره‌های  $p \Rightarrow q$  و  $\sim p \Rightarrow q$  هر دو درست باشند، آن‌گاه کدام گزاره زیر همواره درست است؟

$$(1) (q \vee p) \Rightarrow q \quad (2) (q \vee p) \Rightarrow p \quad (3) p \wedge \sim q \quad (4) (p \wedge q) \Rightarrow (q \vee p)$$

این‌ها جدول ارزش کدام گزاره‌ها با جدول ارزش گزاره  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \wedge (p \Rightarrow q))$  یکسانیت؟

$$(1) p \vee q \vee r \quad (2) (p \wedge \sim q) \vee r \quad (3) \sim (p \Rightarrow q) \vee r \quad (4) (p \vee r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

این‌ها گزاره  $(\sim p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow p$  در کدام حالت نادرست است؟

$$(1) p \text{ و } q \text{ درست}$$

$$(2) \sim p \text{ و } \sim q \text{ نادرست}$$

$$(3) p \text{ و } q \text{ درست}$$

$$(4) p \text{ و } \sim q \text{ نادرست}$$

بر اساس این‌ها ارزش گزاره  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$  در کدام حالت زیر درست است؟

$$(1) p \text{ درست، } q \text{ نادرست، } r \text{ درست}$$

$$(2) p \text{ نادرست، } q \text{ نادرست، } r \text{ نادرست}$$

$$(3) p \text{ درست، } q \text{ درست، } r \text{ نادرست}$$

$$(4) p \text{ نادرست، } q \text{ درست، } r \text{ نادرست}$$

سوال ۱۴۰۰ ارزش گزاره  $P \Rightarrow (q \vee r)$  درست است. احتمال این که ارزش گزاره  $r$  نادرست باشد کدام است؟

P	q	r	$q \vee r$	$P \Rightarrow (q \vee r)$
>	>	>	>	
>	>	ن	>	
>	ن	>	>	
>	ن	ن	ن	
ن	>	>	>	
ن	>	ن	>	
ن	ن	>	>	
ن	ن	ن	ن	

$$\frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad \frac{2}{5} \text{ (۱)}$$

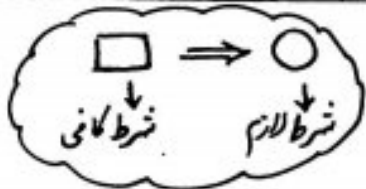
$$\frac{2}{3} \text{ (۴)} \quad \frac{4}{5} \text{ (۳)}$$

سوال ۱۴۰۰ ارزش گزاره  $(P \vee q) \Rightarrow r$  نادرست است. احتمال این که  $q$  نادرست باشد کدام است؟  
(گزینه)

P	q	r	$P \vee q$	$(P \vee q) \Rightarrow r$
>	>	>	>	
>	>	ن	>	
>	ن	>	>	
>	ن	ن	>	
ن	>	>	>	
ن	>	ن	>	
ن	ن	>	ن	
ن	ن	ن	ن	

$$\frac{1}{3} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۱)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۴)} \quad \frac{2}{1} \text{ (۳)}$$



بیان یک ترکیب شرطی درست به صورت شرط لازم و شرط کافی ←

مثلاً گزاره شرطی "اگر سه ضلع یک مثلث مساوی باشند، آن گاه مثلث متساوی الاضلاع است" به صورت زیر بیان می‌شود:

- ◀ شرط کافی برابر متساوی الاضلاع بودن مثلث، آن است که سه ضلع آن مساوی باشند
- ◀ مساوی بودن سه ضلع مثلث شرط کافی برابر متساوی الاضلاع بودن آن است
- ◀ شرط لازم برابر مثلث با سه ضلع مساوی، آن است که متساوی الاضلاع باشند
- ◀ متساوی الاضلاع بودن مثلث شرط لازم برابر مساوی بودن سه ضلع مثلث است

نیت: برابر دو عدد حقیقی  $a$  و  $b$ ،  $a^2 = b^2$  چه شرطی برابر  $a = -b$  است؟

- (۱) لازم
- (۲) کافی
- (۳) لازم و کافی
- (۴) نه لازم و نه کافی

(برای ۹۸)

$$\sim (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \sim Q$$

شکل کلی

نفیض یک ترکیب شرطی

$$\sim (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \sim Q$$

اثبات

مثلاً (۱) اگر یک مثلث قائم الزاویه باشد، آن گاه میانه وارد بر بزرگترین ضلع، نصف آن ضلع است.

(۲) اگر  $a^2 = b^2$ ، آن گاه  $(a = -b \vee a = b)$ .

(۳) اگر  $(a > b)$  و  $(c > 0)$ ، آن گاه  $ac > bc$ .



عکس نقیض یک ترکیب شرطی ← هم ارز با خود ترکیب شرطی است.

$$P \Rightarrow Q \equiv \sim Q \Rightarrow \sim P$$

اساس کار: اثبات غیر مستقیم (برهان خلف) →

اثبات

مثلاً

(الف) اگر یک دانش آموز درس بخواند، آن گاه در امتحان نوبتی قبولی شود.

عکس نقیض

(ب)  $a^2 = b^2$  یک شرط لازم برابر  $a = b$  است.

عکس نقیض

(ج) اگر  $a \equiv b$  و  $a \equiv b$ ، آن گاه  $a \equiv b$

عکس نقیض

تتبع عکس نقیض گزاره " اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع مستطیل باشد یا دارای دو قطر برابر باشد، آن گاه چهارضلعی متوازی الاضلاع است و مستطیل است " کدام است؟

- (۱) اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع مستطیل نباشد، آن گاه لوزی است یا (دو قطر برابر دارد).
- (۲) اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع یا مستطیل نباشد، آن گاه لوزی نیست و دو قطر برابر ندارد.
- (۳) اگر یک چهارضلعی لوزی نباشد و دارای دو قطر برابر نباشد، آن گاه متوازی الاضلاع نیست یا مستطیل نیست.
- (۴) اگر یک چهارضلعی لوزی نباشد یا دارای دو قطر برابر نباشد، آن گاه متوازی الاضلاع نیست و مستطیل نیست.

(گزینه ۲)

ترکیب دو شرطی دو گزاره  $\leftrightarrow$  معاد  $\leftrightarrow$  اگر  $P$ ، آن  $Q$  و برعکس  $P \leftrightarrow Q$  (اگر و تنها اگر)

فقط زمانی ارزش آن درست است که دو گزاره هم ارزش باشند

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

اسم کاربرد گزاره کمی هم لریز (اثبات بازگشتی) برای اثبات درستی  $P \leftrightarrow Q$  می توان نشان داد  $P \equiv Q$  (برگرفته از ترازوی دوگانه ای)

در صورت درستی گزاره دو شرطی  $P \leftrightarrow Q$ ، آن را قضیه دو شرطی می نامند (شرط لازم و کافی)

توجه: ① ترکیب دو شرطی هر گزاره با خودش همواره درست است  $P \leftrightarrow P \equiv T$

② با نفی خودش همواره نادرست است  $P \leftrightarrow \sim P \equiv F$

③ ترکیب دو شرطی دو گزاره، ترکیب عطفی ترکیب شرطی دو گزاره باعکس آن است.

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

$$\begin{aligned} &\equiv (\sim P \vee Q) \wedge (\sim Q \vee P) \\ &\equiv [(\sim P \vee Q) \wedge \sim Q] \vee [(\sim P \vee Q) \wedge P] \\ &\equiv [(\underbrace{\sim P \wedge \sim Q}_{\sim(P \vee Q)}) \vee (\underbrace{Q \wedge \sim Q}_F)] \vee [(\underbrace{\sim P \wedge P}_F) \vee (\underbrace{Q \wedge P}_{P \wedge Q})] \\ &\equiv \sim(P \vee Q) \vee (P \wedge Q) \quad (99/100) \end{aligned}$$

نفی ترکیب دو شرطی

$$\sim(P \leftrightarrow Q) \equiv \sim P \leftrightarrow Q \equiv P \leftrightarrow \sim Q$$

مثال: نفی گزاره  $x = y \leftrightarrow \sin x = \sin y$  عبارت است از:  $x \neq y \leftrightarrow \sin x = \sin y$  و  $x = y \leftrightarrow \sin x \neq \sin y$

توجه:

تیت با توجه به جدول متقابل سه تایی (a, b, c) کدام است؟

P	q	$P \Rightarrow q$	$P \wedge q$	$P \Leftrightarrow q$
$25   2^{18} + 1$	...	>	....	a
....	عدد اول است $2^5 + 1$	b	....	ن
عدد ۷۱۳ غیر اول است	...	...	c	>

- (۱)  $(0, 0, 0) >$
- (۲)  $(0, 0, 0) >$
- (۳)  $(0, 0, 0) >$
- (۴)  $(0, 0, 0) >$

تیت اگر ارزش گزاره  $(\sim P \vee r) \Rightarrow [P \wedge (r \Leftrightarrow q)]$  نادرست باشد، آن گاه به جای

گزاره  $\sim q$  کدام گزاره می تواند قرار گیرد؟

- (۱) هر عدد اول، فرد است. (۲) بی شمار عدد اول وجود دارد.
- (۳) هر مربع کامل زوج است. (۴) عدد  $2^n + 3$  به ازای همه اعداد طبیعی n اول است.

برابر ۹۹ کدام یک از گزاره های زیر، هم ارز منطقی گزاره  $P \Leftrightarrow q$  است؟

- (۱)  $(P \wedge q) \vee \sim(P \vee q)$
- (۲)  $(P \vee q) \vee \sim(P \wedge q)$
- (۳)  $(P \wedge q) \wedge \sim(P \vee q)$
- (۴)  $(P \vee q) \wedge \sim(P \wedge q)$

حرف های است بر کلمات

دانش و تفکر برین اندیشه حرفه است که برای غنای دلداد

(دکتر شریعتی)

سوال ۱۴: کدام گزاره زیر، هم ارزش منطقی گزاره  $q \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$  است؟

- (۱)  $p \vee q$   
 (۲)  $\sim p \Leftrightarrow q$   
 (۳)  $q$   
 (۴)  $\sim p \Leftrightarrow q$

$$\underline{(\sim(p \Leftrightarrow q) \wedge p) \Rightarrow \sim q}$$

کدام است؟

این گزاره ارزش گزاره

- (۱) حواره درست است.  
 (۲) حواره نادرست است.  
 (۳) ارزش  $p$  بستگی دارد.  
 (۴) ارزش  $q$  بستگی دارد.

سوال ۱۴: اگر  $p$  گزاره درست،  $q$  گزاره نادرست و  $r$  گزاره دگوا باشد، ارزش کدام گزاره درست است؟

$$(1) (p \Leftrightarrow \sim q) \vee r \quad (2) \sim(p \wedge \sim q) \wedge r \quad (3) (p \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q) \quad (4) \sim(p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \vee q)$$



### ویژگی‌های ترکیب عطفی و ترکیب فصلی در یک نگاه

$\begin{cases} P \wedge Q \equiv Q \wedge P \\ P \vee Q \equiv Q \vee P \end{cases}$ <p>جاب‌جایی</p>	$\begin{cases} P \wedge P \equiv P \\ P \vee P \equiv P \end{cases}$ <p>خودتوانی</p>
$\begin{cases} P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \end{cases}$ <p>توزیع پذیری (ماتریس‌نگار)</p>	$\begin{cases} P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R \\ P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R \end{cases}$ <p>شرکت پذیری</p>
$\begin{cases} \sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q \\ \sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q \end{cases}$ <p>درنگار</p>	$\begin{cases} P \wedge (\sim P \vee Q) \equiv P \wedge Q \\ P \vee (\sim P \wedge Q) \equiv P \vee Q \end{cases}$ <p>شبه جذب (م پوشانی)</p>
$\begin{cases} P \wedge Q \equiv P \leftrightarrow P \vee Q \equiv Q \\ P \wedge Q \equiv P \vee Q \leftrightarrow P \equiv Q \end{cases}$	$\begin{cases} P \wedge F \equiv F & P \wedge T \equiv P \\ P \vee F \equiv P & P \vee T \equiv T \end{cases}$

### ویژگی‌های ترکیب شرطی و ترکیب دو شرطی در یک نگاه

$P \Rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q \equiv \sim Q \Rightarrow \sim P$ <p>عکس نقیض</p>		
$P \Rightarrow P \equiv T$	$F \Rightarrow P \equiv T$ <p>انسانی مقدم</p>	$T \Rightarrow F \equiv F$
$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R$ <p>عطف مقدمات</p>	$[[ (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) ] \Rightarrow (P \Rightarrow R)] \equiv T$ <p>تعدی</p>	
$\begin{cases} P \Rightarrow (Q \vee R) \equiv (P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R) \\ P \Rightarrow (Q \wedge R) \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) \end{cases}$ <p>توزیع پذیری (روی ۷ و ۸ از راست امکان پذیر نیست)</p>	$\begin{cases} (P \vee Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \\ (P \wedge Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R) \end{cases}$ <p>توزیع پذیری (روی ۷ و ۸ از راست امکان پذیر نیست)</p>	
$\begin{cases} P \vee (Q \Rightarrow R) \equiv (P \vee Q) \Rightarrow (P \vee R) \\ P \wedge (Q \Rightarrow R) \equiv ?? \end{cases}$	<p>روی ۷ توزیع پذیر است. روی ۸ توزیع پذیر نیست!!</p>	
$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \equiv \sim(P \vee Q) \vee (P \wedge Q)$		
$\begin{cases} P \Leftrightarrow P \equiv T \\ P \Leftrightarrow \sim P \equiv F \end{cases}$	$P \Leftrightarrow Q \equiv \sim P \Leftrightarrow \sim Q \equiv \sim Q \Leftrightarrow \sim P$ <p>(تسویه عکس نقیض)</p>	
$\begin{cases} \sim(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \sim Q \\ \sim(P \Leftrightarrow Q) \equiv P \Leftrightarrow \sim Q \equiv \sim P \Leftrightarrow Q \end{cases}$ <p>(نقیض ترکیب شرطی) (نقیض ترکیب دو شرطی)</p>		

گزاره های سوری

① گزاره با سور عمومی  $\leftarrow$  خاصیتی برای همه اعضهای یک مجموعه بیان شود  $\leftarrow$  نماد  $\forall$   
 $\forall x \in \mathbb{R}$

$\forall x ; P(x) \rightarrow$  همه  $x$  هایی که در  $P(x)$  صدق می تونه یا برای هر  $x$  ای،  $P(x)$  برقرار است.

زمانی درست است که  $S=D$ ، یعنی مجموعه جواب گزاره نما، با دامنه برابر باشد.  
 به عبارت دیگر مثال نقض برای آن یافت نشود.

مثلاً

الف)  $\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 \geq x \xrightarrow{\text{بیان}}$

ب)  $\forall k \in \mathbb{Z} ; k \cdot (k+1) = 2q \xrightarrow{\text{بیان}}$

ج)  $\forall x \in \mathbb{R} ; x + \frac{1}{x} \geq 2 \xrightarrow{\text{بیان}}$   
 $x \neq 0$

تست ۴۰۳ اگر  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 5\}$  دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره های سوری

الف)  $\forall x \in A ; x+2 \leq 9$  (بیان)  $\forall x \in A ; x+1 \geq 3$  کدام است؟  
 (گزینه ۱)

- الف: درست ، ب: نادرست
- ب: درست ، ج: درست
- ج: نادرست ، د: درست
- د: نادرست ، ب: نادرست

⑤ گزاره با سور وجودی خاصیتی برای بعضی از اعضای یک مجموعه بیان می‌شود  $\exists$  نادر  
(Exist)

$\exists x; p(x) \Rightarrow$  وجود دارد  $x$  ای که در  $p(x)$  صدق کند  
یا بر بعضی از مقادیر  $x$ ،  $p(x)$  برقرار است

زمانی درست است که  $S \neq \emptyset$ ، یعنی مجموعه جواب گزاره نام، حداقل یک عضو داشته باشد.

مثلاً

ا)  $\exists x \in \mathbb{Z}; |x| < 1$  بیان  $\rightarrow$

ب)  $\exists a \in \mathbb{R}; a^3 = a$  بیان  $\rightarrow$

پ)  $\exists x \in \mathbb{N}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$  بیان  $\rightarrow$

$\sim (\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$   
 $\sim (\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$

نقیض گزاره های سور

مثلاً

- ا)  $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0$  نقیض  $\rightarrow$
- ب)  $\exists x \in \mathbb{Z}; x \cdot (x+1) = 2k$  نقیض  $\rightarrow$
- پ)  $\forall a \in \mathbb{N}; ((a=2k) \vee (a=2k+1))$  نقیض  $\rightarrow$
- ت)  $\exists x \in \mathbb{R}; ((x^2 > 0) \wedge (x^2 < 0))$  نقیض  $\rightarrow$
- ث)  $\forall y \in \mathbb{R}; ((y > 0) \Rightarrow (y^2 > 1))$  نقیض  $\rightarrow$
- ج)  $\exists x \in \mathbb{Z}; ((x^2 + 1 = 0) \Leftrightarrow (x^2 < 0))$  نقیض  $\rightarrow$

برای هر  $x \in \mathbb{R}$  کدام گزاره سوری زیر، دارای ارزش درست است؟

$$\exists x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x} = x \quad (1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 > 2x \quad (2)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2 \quad (3)$$

$$\exists x \in \mathbb{R} : |x + \frac{1}{x}| < 2 \quad (4)$$

پس؟

برای هر  $x, y \in \mathbb{N}$  گزاره سوری  $P(x, y) : \forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : P(x, y)$  با کدام گزاره‌های  $P(x, y)$  دارای ارزش درست است؟

$$xy = 4 \quad (1)$$

$$x + y = 4 \quad (2)$$

$$x - y = 4 \quad (3)$$

$$y - x = 4 \quad (4)$$

برای هر  $x, y \in \mathbb{R}$  گزاره‌های  $[x] + [y] = [x + y]$  به ازای کدام دو مورد برقرار است؟  $(x, y \in \mathbb{R})$  (گزینه‌ها)

$$\exists x \exists y \quad (1)$$

$$\forall x \forall y \quad (2)$$

$$\forall x \forall y \quad (3)$$

توضیح جای دو مورد غیر هم نام در صحت کلی مجاز نیست.

$$\text{بیان} \quad \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x > y \quad (1)$$

$$\text{بیان} \quad \forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : x > y \quad (2)$$

نکته  
ناله





مجموعه مرجع (جهانی): همه اعضا را دارد  $\leftarrow U$   
(Universe)

مجموعه تهی: هیچ عضوی ندارد  $\leftarrow \emptyset$  یا  $\{ \}$

**زیر مجموعه Subset**

$A \subseteq B \iff (\forall x \in U ; x \in A \implies x \in B)$

همه اعضای A، در B باشند.

پس هر مجموعه ای، زیر مجموعه U است.

**نتیجه:**

$A \not\subseteq B \iff$

ویژگی ها: ① هر مجموعه، زیر مجموعه خودش است.  $A \subseteq A$

② مجموعه تهی، زیر مجموعه هر مجموعه ای است.  $\emptyset \subseteq A$

③ خاصیت تعدی  $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \implies A \subseteq C$

\* شرطان وی (دو مجموعه): هر یک زیر مجموعه دیگری باشند  $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \iff A = B$   
(شرط لازم و کافی)

\* نتیجه: برای مجموعه دکوان A از مرجع U داریم:

$$\begin{cases} A \subseteq \emptyset \implies A = \emptyset \\ U \subseteq A \implies A = U \end{cases}$$

قضیه: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر است با  $2^n$

\* به تمام زیر مجموعه های یک مجموعه، به جز خود آن مجموعه، زیر مجموعه های معض (سره) می گویند.

پس تعداد زیر مجموعه های معض (سره) یک مجموعه n عضوی برابر است با  $2^n - 1$

برابر ۹۱ چند زیر مجموعه از مجموعه  $\{a, b, \{a, b\}, \{b, a\}\}$  عضو  $\{a, b\}$  را ندارد؟

- ۲ (۱)
- ۷ (۳)

برابر اگر ۲ عضو از اعضای مجموعه A کم کنیم، از تعداد زیر مجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود. مجموعه A دارای چند زیر مجموعه ناتنی است؟

- ۱۳۷ (۲)
- ۱۰۲۳ (۴)

برای  $A = \{r\}$ ،  $B = \{r, \{r\}\}$ ،  $C = \{\{r\}, \{r, \{r\}\}\}$  کدام نادرست است؟

- B ⊆ C (۱)
- A ⊆ B (۲)
- A ∈ B (۳)
- B ∈ C (۴)

خود دایره در مربع باشد:  $\square \in \bigcirc$   
 نام اعضای دایره در مربع باشد:  $\square \leq \bigcirc$   
 نکته:

برابر ۹۵ اگر  $A = \{r\}$ ،  $B = \{r, \{r\}\}$ ،  $C = \{\{r\}, \{r, \{r\}\}, r\}$  کدام نادرست است؟

(گزینه ۲)

- A ∈ C (۲)
- A ∈ B (۱)
- A ⊆ C (۴)
- B ∈ C (۳)

برابر اگر  $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$  و  $B = \{a, b\}$ ، مجموعه  $A - \{B\}$  چند زیر مجموعه سره ناتنی دارد؟

- ۷ (۲)
- ۱۴ (۳)

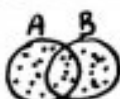
برای  $A = \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$ ، مجموعه  $A - \{A\}$  چند زیر مجموعه سره ناتنی دارد؟

- ۷ (۲)
- ۱۵ (۴)



چهار مجموعه‌ها ← اجتماع، اشتراک، تفاضل، ضرب دکارتی

تعریف: عضوهای متعلق به A یا B یا هر دو (متعلق به حداقل یکی)



اجتماع دو مجموعه (Union) شکل

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in (A \cup B) \iff (x \in A \vee x \in B)$$

تعریف: عضوهای متعلق به A و B (متعلق به هر دو)



اشتراک دو مجموعه (Intersection) شکل

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in (A \cap B) \iff (x \in A \wedge x \in B)$$

با توجه به شکل واضح است که

$$\begin{cases} A \subseteq (A \cup B) \\ B \subseteq (A \cup B) \end{cases}, \begin{cases} (A \cap B) \subseteq A \\ (A \cap B) \subseteq B \end{cases}, (A \cap B) \subseteq (A \cup B)$$

تذکره: A و B دو مجموعه جدا از هم باشند  $(A \cap B = \emptyset)$



برای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $A_n = \{m \in \mathbb{Z} : m \geq -n, 1 \leq m \leq n\}$ ، آن‌ها مجموعه  $A_1 \cap A_2 \cap \dots$  چند زیر مجموعه دارند؟

- ۱) ۲
- ۲) ۱
- ۳) ۳
- ۴) ۴

تذکره: دو طرف دو یا چند رابطه زیر مجموعه را می‌توان با هم نظیر به نظیر اجتماع یا اشتراک کرد.

$$\begin{cases} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{cases} \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D), (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$$

تذکره: دو طرف دو یا چند رابطه تساوی را می‌توان با هم نظیر به نظیر اجتماع یا اشتراک کرد.

$$\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \Rightarrow A \cap C = B \cap D, A \cup C = B \cup D$$

تذکره: به دو طرف هر تساوی می‌توان مجموعه دلخواه را اجتماع یا اشتراک کرد. (زیر مجموعه)

$$\begin{cases} A = B \\ A \subseteq B \end{cases} \Rightarrow A \cap C = B \cap C, A \cup C = B \cup C$$

$$\begin{cases} A = B \\ A \subseteq B \end{cases} \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C), (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$$



ویژگی های مهم اجتماع و اشتراک

$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$$

جابجایی

$$\begin{cases} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{cases}$$

① خود توانی

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \end{cases}$$

② شرکت پذیری

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

③ توزیع پذیری

فانکشن پذیری

ویژگی های مهم اجتماع و اشتراک وجود دارد. این مجموعه تکراری شود. (جواب: مجموعه تکراری می باشد.)

$$\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$$

④ جذب

اجتماع همیشه بزرگتر  
اشتراک همیشه کوچکتر

$$\begin{cases} A \subseteq B \iff A \cup B = B \\ A \subseteq B \iff A \cap B = A \end{cases}$$

⑤

پس:  $A \cup B = B \iff A \cap B = A$

$\begin{aligned} \emptyset \cup A &= A, & A \cup \emptyset &= A \\ \emptyset \cap A &= \emptyset, & A \cap \emptyset &= \emptyset \end{aligned}$	نتیجه:
--	--------

⑥ خاصیت "حذف پذیری" ندارند.  $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \not\Rightarrow B = C \\ A \cap B = A \cap C \not\Rightarrow B = C \end{cases}$

اما 
$$[(A \cup B = A \cup C) \wedge (A \cap B = A \cap C)] \iff B = C$$

⑦ 
$$A \cup B = A \cap B \iff A = B$$

⑧ 
$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

⑨ 
$$A \cap B = \emptyset \iff A \cup B = A \cup B$$
 (الف) 
$$A \cup B = \emptyset \iff A = B = \emptyset$$
 (ب)

برابر است اگر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $A_n = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq n, 2^m \leq 2n\}$ ، آن گاه مجموعه  $(A_4 - A_2) \cup A_1$  چند عضو دارد؟

- (a) ۵
- (b) ۶
- (c) ۷
- (d) ۸

برابر است اگر  $A_i = [-i, \frac{9-i}{2}]$ ، آن گاه  $(A_2 \cap A_4) - (A_1 \cap A_3)$  به کدام صورت است؟

- (a)  $[-2, -1) \cup (1, 2]$
- (b)  $[-2, -1] \cup [1, 2]$
- (c)  $[-1, 1]$
- (d)  $\emptyset$

برابر است اگر  $n$  عددی طبیعی و  $A_n$  بازه  $(-1)^n n, 2n$  باشد، چند عدد صحیح به  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  تعلق دارد؟

- (a) ۹
- (b) ۸
- (c) ۱۰
- (d) ۱۱

برابر است اگر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $A_n = (-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n})$  باشد، آن گاه  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  کدام است؟ (گزینه ۱)

- (a)  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- (b)  $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$
- (c)  $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$
- (d)  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

برابر است اگر  $A_i = \{m \in \mathbb{Z} : -i \leq m \leq 1-i\}$ ، مجموعه  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i - \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  چند عضو دارد؟ (گزینه ۲)

- (a) ۱۳
- (b) ۱۴
- (c) ۱۵
- (d) ۱۶

متمم یک مجموعه (نسبت به مجموعه مرجع)  $\leftarrow$  متمم (مکمل) مجموعه دلخواه  $A$  (نسبت به مجموعه  $U$ )، شامل همه اعضای متعلق به مجموعه  $U$  است که در  $A$  وجود ندارند.



واضح است که  $A$  و  $A'$  دو مجموعه جدا از هم می باشند، یعنی  $A \cap A' = \emptyset$

نیابراین  $A \cup A' = U$

بر اساس ۱ اگر  $U$  مجموعه مرجع و  $A' \cup B = A' \cap B'$  باشد، کدام مورد درست است!  
 ۱  $A = B$  ۲  $A = \emptyset$  ۳  $B = U$  ۴  $B = \emptyset$

نتیجه ۱: تنها مجموعه‌ای که هم زیرمجموعه  $A$  و هم زیرمجموعه  $A'$  است، مجموعه تهی می باشد. یعنی

$(X \subseteq A \wedge X \subseteq A') \Rightarrow X = \emptyset$

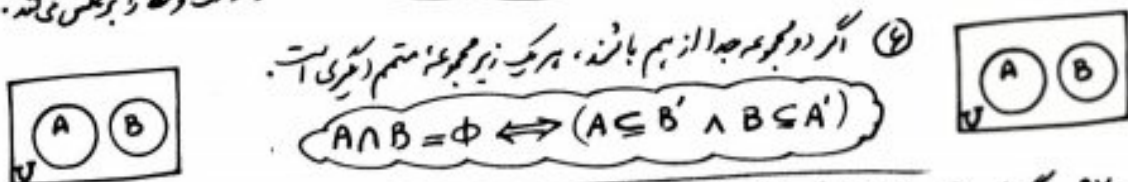
نتیجه ۲: تنها مجموعه‌ای که هم  $A$  و هم  $A'$  زیرمجموعه‌ای از آن می باشند، مجموعه مرجع است. یعنی

$(A \subseteq X \wedge A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$

ویژگی‌های مهم ① متمم تری  $(A')' = A$  ②  $A = B \Leftrightarrow A' = B'$

③  $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$  (که مانند) ④  $\emptyset' = U, U' = \emptyset$

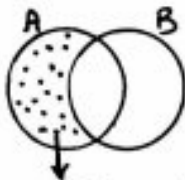
⑤ قانون دو مرتبه  $\begin{cases} (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases}$   
 به کمک علامت رانتم و علامت وسط را برعکس می کند.



ساده ۷ اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه غیر تهی باشند، مجموعه  $(A \cap (A' \cup B)) \cup (B \cap (A' \cup B'))$  برابر کدام است!  
 ۱  $A \cup B$  ۲  $A \cap B$  ۳  $A$  ۴  $B$

ساده ۱۱ اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه ناشی از مجموعه مرجع  $U$  باشند، مجموعه  $A' \cup ((B \cap A) \cap ((B \cup A) \cap B))$  برابر کدام مجموعه است!  
 ۱  $(A - B)'$  ۲  $B - A$  ۳  $B$  ۴  $\emptyset$





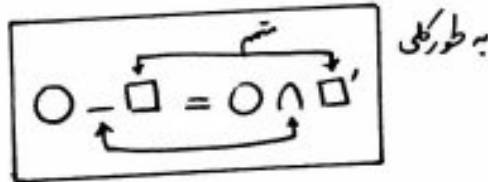
تفاضل دو مجموعه  
Difference

$A - B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}$  → شامل اعضای که متعلق به A می باشند و متعلق به B نمی باشند (فقط متعلق به اولی)

$$x \in (A - B) \iff (x \in A \wedge x \notin B)$$

نتیجه: با توجه به شکل واضح است که  $(A - B) \subseteq A$  و به همین ترتیب  $(B - A) \subseteq B$

ویژگی های مهم ① تبدیل تفاضل به اشتراک  $A - B = A \cap B'$



نتیجه ۲:  $A - B = B' - A'$

نتیجه ۱:  $A' = U - A$

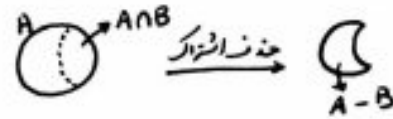
اثبات  $U - A = U \cap A' = A'$

اثبات

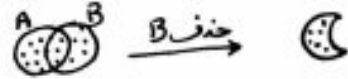
اثبات

② برای یافتن  $A - B$ ، کافی است از مجموعه A، اعضای مشترک با B را حذف کنیم. به عبارت دیگر

$$A - B = A - (A \cap B)$$



نتیجه: برای یافتن  $A - B$ ، می توان از اجتماع این دو مجموعه، B را حذف کرد. یعنی

$$A - B = (A \cup B) - B$$


③ اگر دو مجموعه جدا از هم باشند، تفاضل آن ها برابر با مجموعه اولی است. (اولی = تفاضل → جدا الزام)

$$A \cap B = \emptyset \iff (A - B = A \wedge B - A = B)$$

نتیجه: برای مجموعه دانه A داریم:

- الف)  $A - A = \emptyset$
- ب)  $A - A' = A$
- ج)  $A - \emptyset = A$
- د)  $\emptyset - A = \emptyset$





$$A \subseteq B \iff A - B = \emptyset$$

(۴)

توجه:

(۵) تفاضل از راست بر اجتماع و اشتراک توزیع پذیر است.

$$\begin{cases} (A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C) \\ (A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C) \end{cases}$$

هستند! \* تفاضل از چپ بر اجتماع و اشتراک توزیع نمی‌شود.

$$\begin{cases} A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C) \\ A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) \end{cases}$$

(۶) اشتراک روی تفاضل توزیع پذیر است.

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

ولی اجتماع نه!!

$$A \cup (B - C) = ??$$

$$A - B = B - A \iff A = B$$

(۷)

(۸) تفاضل خاصیت شرکت پذیری ندارد.

$$A - (B - C) \neq (A - B) - C$$

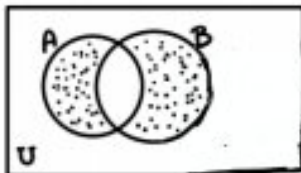
(۹) تفاضل خاصیت حذف پذیری ندارد.

$$A - B = A - C \not\Rightarrow B = C$$

(۱۰) تفاضل خاصیت جابجایی ندارد.

$$A - B \neq B - A$$

تفاضل متقارن دو مجموعه شامل عضی است که فقط یکی از دو مجموعه تعلق دارد (اختیاری)



$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

نقطه B | نقطه A

مثال اگر  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و  $B = \{2, 3, 7\}$ ، آن‌گاه  $A \Delta B$  را بیابید.

$$A' \Delta B' = A \Delta B$$

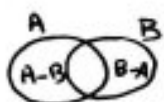
نکته  
زیرا:

برابر مجموعه  $(A-B)' \cap (A \cup B) \cap A'$  برابر کدام است؟

B (f	B-A (i
A' (f	$\phi$ (f

برابر اگر A و B دو مجموعه ناهمپوش باشند، مجموعه  $[A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B-A)]$  برابر کدام است؟

(A-B)' (f	A'-B' (i
$\phi$ (f	A' (f



برابر اگر A و B دو مجموعه غیرمتقاطع باشند،  $(A \cap B)' - (B-A)$  برابر کدام است؟

$\phi$ (f	B' (i
A-B (f	A \cap B (f

برابر مسم مجموعه  $C \cup A' \cup B'$  نسبت به مجموعه جهانی، با کدام مجموعه برابر است؟

(A-C) \cup (B-C) (f	(A \cap B) - (A \cap C) (i
(A \cap B) - C (f	A \cap (B-C) (f

برابر اگر A، B، C سه مجموعه ناهمپوش و  $A \subseteq B$  باشد، حاصل  $(A \cap (B-C)) - (A \cap B \cap C)$  کدام است؟

A \cap C (f	A \cap C' (i
B (f	A (f

برابر مجموعه A دارای ۱۵ زیرمجموعه ناهمپوش B دارای ۸ زیرمجموعه است. مجموعه  $C = A \cap (A'-B)'$  چند عضو دارد؟

۸ (f	۴ (i
۱۶ (f	۱۲ (f

برابر مجموعه A دارای ۵۱۲ زیرمجموعه است. گروه  $A \cap B$  دارای ۳ عضو است. تعداد زیرمجموعه های  $(B \cup A)'$  کدام است؟

۳۲ (f	۱۲ (i
۶۴ (f	۴۸ (f

برای ۹۹ فرض کنید A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟

- (۱)  $B - A' = A$
- (۲)  $A - B' = A$
- (۳)  $A \cap B' = \emptyset$
- (۴)  $B \cap A' = \emptyset$

برای ۹۹ فرض کنید A و B دو مجموعه غیر تهی و جدا از هم، باین مجموعه مرجع باشند، کدام رابطه نادرست است؟

- (۱)  $A \subset B'$
- (۲)  $A - B' = \emptyset$
- (۳)  $A \cap B' = A$
- (۴)  $(A \cup B)' = \emptyset$

برای ۹۹ مجموعه  $(A - B) \cup ((B \cap C)' \cap ((B' \cup A) - B))$  با کدام مجموعه برابر است؟

- (۱)  $A \cup B'$
- (۲)  $A \cap B'$
- (۳)  $A$
- (۴)  $B'$

برای ۹۹ مجموعه  $(A - (A \cap B')) \cup (B \cap (A \cap B)')$  با کدام مجموعه برابر است؟

- (۱)  $A$
- (۲)  $B$
- (۳)  $A'$
- (۴)  $B'$

برای ۱۴ فرض کنید  $U = A \cup B$  مجموعه مرجع و  $C = (A - B) \cup (B - A)$  و اگر  $(A' - B) \cap C = B$  کدام عبارت درست است؟

- (۱)  $B \subseteq A$
- (۲)  $A \cap B = \emptyset$
- (۳)  $A \subseteq B$
- (۴)  $A = B$

برای ۱۴ فرض کنید  $C = (A - B) \cup (B - A)$  حاصل  $(A' \cap B)' \cap C$  کدام است؟

- (۱)  $A \cap B$
- (۲)  $C$
- (۳)  $A \cup B$
- (۴)  $A'$

(ترتیبنا)

سوال ۱۴۱: اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه ناهمپوش از مجموعه مرجع  $U$  باشند، مجموعه  $[(A \cap B) - B] \cap [(A \cap B) \cup (A - B)]$  با کدام مجموعه برابر است؟

$A - B$  (۲)  $A$  (۱)

$A' - B'$  (۴)  $\phi$  (۳)

سوال ۱۴۲: اگر متمم مجموعه  $(A - B) \cup (B - A)$  برابر  $A \cap B$  باشد، کدام عبارت درست است؟ ( $U$  مجموعه مرجع است)

$A \subseteq B$  (۱)

$A \subseteq B'$  (۲)

$A \cup B = U$  (۳)

$B = \phi \wedge A = \phi$  (۴)

سوال ۱۴۳: اگر  $A \subseteq B'$ ، حاصل  $(A - B) \cup (B - A)'$  کدام است؟

$A \cap B$  (۱)

$A \cup B$  (۲)

$A' \cap B'$  (۳)

$A' \cup B'$  (۴)



### ویژگی های اجتماع، اشتراک و متمم در یک نگاه

$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$	جابجایی	$\begin{cases} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{cases}$	خودتوانی
$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$	توزیع پذیری (فاکتورگیری)	$\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$	شرکت پذیری
$\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$	دوگان	$\begin{cases} A \cup (A' \cap B) = A \cup B \\ A \cap (A' \cup B) = A \cap B \end{cases}$ شبه جذب (هم پوشان)	$\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$ جذب
$\begin{cases} A \subseteq B \iff A \cup B = B \\ A \subseteq B \iff A \cap B = A \end{cases}$	اجتماع همیشه برابر است اشتراک همیشه کوچکتر	$\begin{cases} A \cup \emptyset = A \\ A \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$	
$A \cap B = A \iff A \cup B = B$		$A \cup B = A \cap B \iff A = B$	
$\begin{cases} A \cup B = A \cup C \nRightarrow B = C \\ A \cap B = A \cap C \nRightarrow B = C \end{cases}$	حذف پذیری ندارد	$[(A \cup B = A \cup C) \wedge (A \cap B = A \cap C)] \Rightarrow B = C$	
$\begin{cases} A \cap A' = \emptyset \\ A \cup A' = U \end{cases}$	$\begin{cases} A = B \iff A' = B' \\ A \subseteq B \iff B' \subseteq A' \end{cases}$	$\begin{cases} \emptyset' = U \\ U' = \emptyset \end{cases}$	$A \cap B = \emptyset \iff (A \subseteq B' \wedge B \subseteq A')$

### ویژگی های تفاضل دو مجموعه در یک نگاه

$A - B = A \cap B' = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B = B' - A'$	
$A \subseteq B \iff A - B = \emptyset$ (اشتراک = خالی - کوچک)	$A \cap B = \emptyset \iff (A - B = A, B - A = B)$ اولی = تفاضل $\iff$ جدا از هم
$\begin{cases} A - \emptyset = A \\ A - A' = A \end{cases}$	$\begin{cases} A - A = \emptyset \\ \emptyset - A = \emptyset \end{cases}$
$\begin{cases} A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) \\ A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C) \end{cases}$ تفاضل از چپ روی اجتماع و اشتراک توزیع پذیر نیست!!	$\begin{cases} (A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C) \\ (A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C) \end{cases}$ تفاضل از راست روی اجتماع و اشتراک توزیع پذیر است.
$\begin{cases} A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) \\ A \cup (B - C) = ?? \end{cases}$	اشتراک روی تفاضل توزیع پذیر است. اجتماع روی تفاضل توزیع پذیر نیست!!
$A - (B - C) \neq (A - B) - C$ شرکت پذیر ندارد	$A - B = A - C \nRightarrow B = C$ حذف پذیر ندارد

ضرب دکارتی دو مجموعه ← ضرب دکارتی مجموعه A در مجموعه B، مجموعه‌ای است شامل تمام زوج‌های مرتبی که مؤلفه اول آن‌ها از A و مؤلفه دوم آن‌ها از B است.

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \} \rightarrow (x, y) \in (A \times B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B)$$

مثلاً

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$$

$$\begin{cases} A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\} \\ B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} \end{cases}$$

واضح است که

$$A \times B \neq B \times A \quad \textcircled{1} \text{ ضرب دکارتی دو مجموعه خاصیت جابجایی ندارد.}$$

$$n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \cdot n(B) \quad \textcircled{2}$$

بر اساس این مجموعه‌های A, B, C و D را در نظر بگیرید. تعداد اعضای C، دو واحد بیشتر از A، تعداد اعضای D، سه واحد کمتر از B است. اگر تعداد اعضای مجموعه CxB، ۲۵ درصد بیشتر از تعداد اعضای مجموعه AxB، ۱۵ برابر تعداد اعضا مجموعه AxD باشد، اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های A و B چند است؟

- ۲(۱)
- ۵(۲)
- ۷(۳)
- ۱۰(۴)

$$A^2 = A \times A = \{ (x, y) \mid x \in A \wedge y \in A \}$$

مثلاً

$$A = \{a, b\} \Rightarrow A^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

مثلاً

دارد؟  $B^2 - A^2$  چند عضو (گزینه ۱)  $A = \{r^k \mid k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 2\}$  ،  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 10\}$  ،  $A^2 = \{r^k \mid k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 4\}$  ،  $B^2 = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N} \wedge x^2 < 10\}$

- ۱(۱)
- ۲(۲)
- ۳(۳)
- ۴(۴)

ویژگی های مهم

$$\phi \times A = A \times \phi = \phi$$

①

نتیجه ۱:  $\phi \times \phi = \phi$   
 نتیجه ۲:  $A \times B = \phi \iff (A = \phi \vee B = \phi)$

نتیجه ۳:  $A \times B = B \times A \iff (A = \phi \vee B = \phi \vee A = B)$

$$A \times B = B \times A \iff \begin{matrix} A \neq \phi \\ B \neq \phi \end{matrix} \iff A = B$$

نتیجه ۴:

مثال: اگر  $A = \{y+z, \omega, z\}$  و  $B = \{x+t, r, -r\}$ ،  $A \times B = B \times A$ ، آن گاه  $x+y+z$  کدام است؟  
 ۳ (۱) ۴ (۲)  
 ۵ (۳) ۶ (۴)

مثال: در مجموعه های چهار عضوی  $A = \{x+y, r, \omega, z\}$  و  $B = \{x+t, v, z, t-1\}$ ، فرض کنید  $A \times B = B \times A$ ، تعداد مجموعه های به صورت  $\{(x, y), (z, t)\}$  کدام است؟  
 ۲ (۱) ۳ (۲)  
 ۴ (۳) ۶ (۴)

$$(A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \iff (A \times B) \subseteq (C \times D)$$

②

دو یا چند رابطه زیر مجموعه را می توان نظریه نظیر ضرب دکارتی کرد.

نتیجه ۱:  $(A = C \wedge B = D) \iff A \times B = C \times D$

نتیجه ۲:  $A \times B = A \times C \iff B = C$

ضرب دکارتی، خاصیت حذف پذیری دارد.

مثال: اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه غیر تهی باشند و  $(A \times B) - (B \times A) = \phi$ ، آن گاه کدام مجموعه غیر تهی است؟

- ۱)  $A \cap B$
- ۲)  $A - B$
- ۳)  $B - A$
- ۴)  $(B \times A) - (A \times B)$

۳۳ ضرب دکارتی روی تمام عملگرهای جبر مجموعه‌ای (اجتماع، اشتراک، تفاضل) توزیع پذیر است.

$$\begin{cases} A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \\ (B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A) \end{cases}$$

۳۴ ضرب دکارتی و اشتراک می‌توانند، با حفظ ترتیب مجموعه‌ها، جای‌مان را عوض کنند.

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A) = (A \cap B)^2$$

نتیجه:

برابر ۹۲ اگر  $A = \{x \in \mathbb{N} : 5 < x^2 < 50\}$  و  $B = \{3k-2 \mid k \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq k \leq 4\}$  باشد، تعداد زیر مجموعه‌های  $(A \times B) \cap (B \times A)$  کدام است!

۱	۳
۲	۸
۳	۱۲
۴	۳۲

برابر ۹۲ اگر  $A = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq k \leq 5\}$  و  $B = \{k \in \mathbb{Z} : |k-3| \leq 2\}$ ، آن گاه مجموعه

(گزینه ۳)

$(A \times B) \cap (B \times A)$  چند عضو دارد؟

۱	۶
۲	۸
۳	۹
۴	۱۶

برابر اگر  $A, B$  دو مجموعه غیر تهی باشند و  $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$ ، آن گاه مجموعه  $A - B$  کدام است؟

۱	$A$
۲	$\emptyset$
۳	$B - A$
۴	$B$



تتت اگر  $A$  مجموعه اعداد اول یک رقمی و  $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ، آن گاه هر یک از مجموعه های زیر چند عضو دارد!

الف)  $A \cup B$

ب)  $A - B$

پ)  $A \Delta B$

ت)  $(A \times B) \cap (B \times A)$

ث)  $(A \times B) \cup (B \times A)$

ج)  $(A \times B) - (B \times A)$

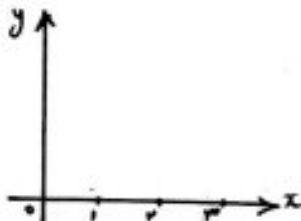
ح)  $A^c \cap B^c$

ط)  $A^c - B^c$

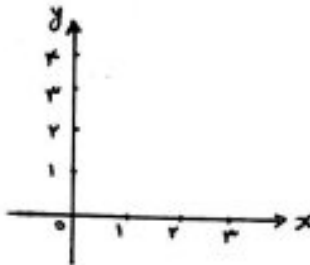
ظ)  $(A \times B) - (B \times B)$

سنت اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$  و  $B = \{f\}$ ، آن گاه نمودار مختصاتی مجموعه  $A \times B$  کدام است؟

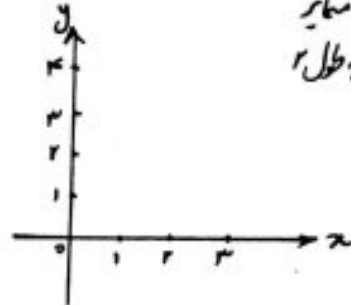
- (۱) ناحیه بین دو خط موازی
- (۲) سطح یک مستطیل
- (۳) دو نقطه متمایز
- (۴) یک پاره خطی به طول ۲



A



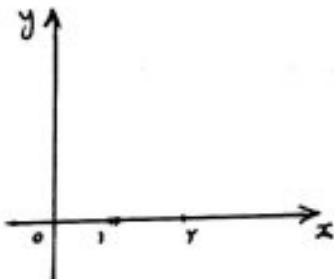
B



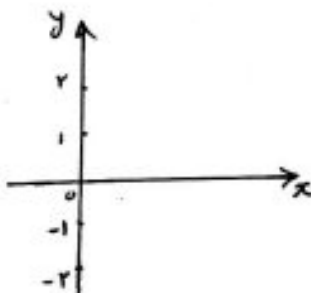
$A \times B$

سنت اگر  $A = [-2, 2]$  و  $B = [1, 2]$ ، آن گاه نمودار مختصاتی  $B \times A$  کدام است؟

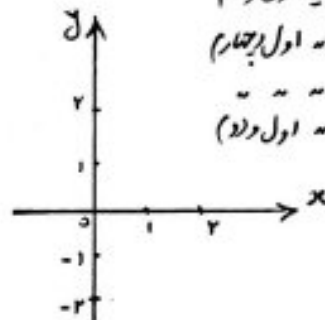
- (۱) مستطیلی در ناحیه اول و دوم
- (۲) " " " " اول و چهارم
- (۳) مربعی " " " "
- (۴) مربعی " " " " اول و دوم



B



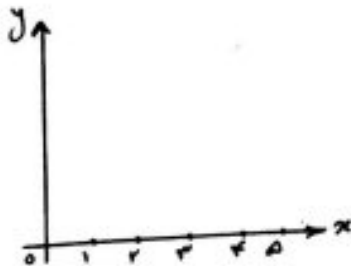
A



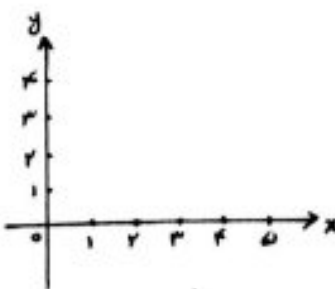
$B \times A$

سنت اگر  $A = (1, 5]$  و  $B = \{3, f\}$ ، آن گاه نمودار مختصاتی  $A \times B$  کدام است؟

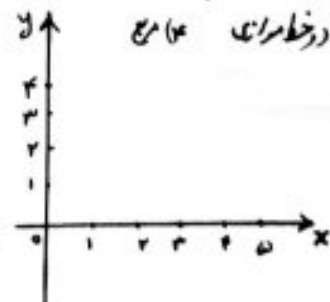
- (۱) مستطیلی
- (۲) دو پاره خط موازی
- (۳) ناحیه بین دو خط موازی
- (۴) مربع



A

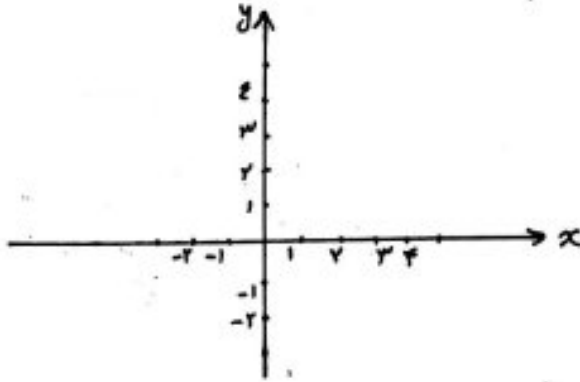


B



$A \times B$

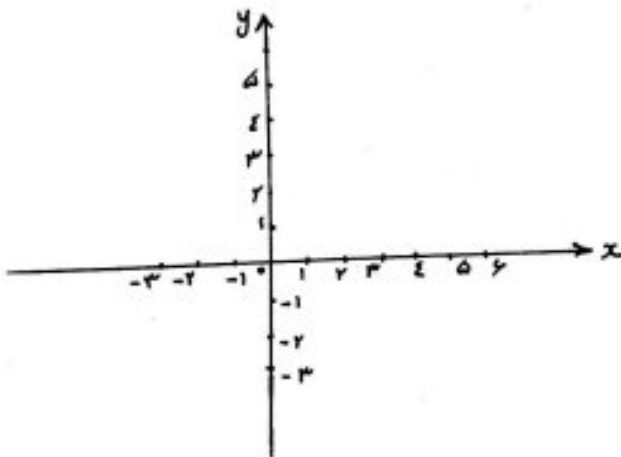
سوال ۹۹۹ اگر  $A = [1, 4]$  و  $B = [-1, 3]$  باشند، مساحت نمودار  $(A \times A) - (B \times B)$  در صفحه محققات کدام است؟



- ۱)  $4(2)$
- ۲)  $6(3)$

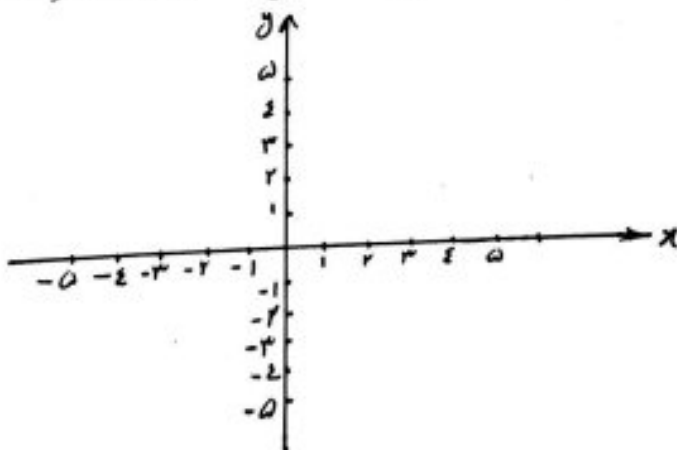
سوال ۱۰۰۰ اگر  $A = [-2, 5]$  و  $B = [0, 3]$ ، آن گاه مساحت نمودار  $(A \times B) - A^2$  در صفحه محققات کدام است؟

(گزینه ۴)



- ۱)  $28(1)$
- ۲)  $21(2)$
- ۳)  $32(3)$  صفر
- ۴)  $21(4)$

سوال ۱۰۰۱ اگر  $A = [-4, 4]$  و  $B = [1, 5]$ ، آن گاه دورترین نقطه سطح نمودار  $(A \times A) - (A \times B)$  از مبدأ محققات کدام است؟



- ۱)  $\sqrt{13}$
- ۲)  $\sqrt{17}$
- ۳)  $4\sqrt{2}$
- ۴)  $3\sqrt{2}$

به شمارش بدون شماردن

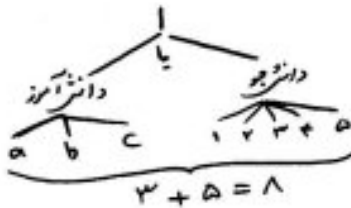
ترکیبیات: روش های شمارش را بررسی می کنند و مبتنی بر دو اصل مهم زیر است:

① اصل جمع

اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری که در روش اول  $m$  انتخاب و در روش دوم  $n$  انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام آن کار  $m+n$  روش وجود دارد.

(اصل جمع قابل تعمیم است)

مثال: می دانیم انتخاب یک دانش آموز از بین سه دانش آموز به ۳ روش و انتخاب یک دانشجو از بین پنج دانشجو به ۵ روش ممکن است. به چند طریق می توان یک دانش آموز یا یک دانشجو انتخاب کرد؟

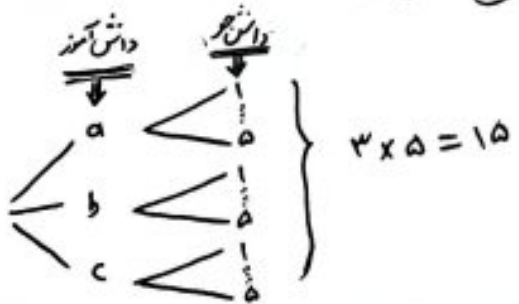


② اصل ضرب

اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول  $m$  روش و برای انجام هر کدام از این  $m$  روش، مرحله دوم را بتوان به  $n$  روش انجام داد، کار مورد نظر با  $m \cdot n$  روش قابل انجام است.

(اصل ضرب قابل تعمیم است)

مثال: در مثال قبل به چند طریق می توان یک دانش آموز و یک دانشجو انتخاب کرد؟



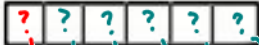


سوال عبارت های زیر هر کدام چند جمله دارند؟

(x+y+z) \* (t+u) \* (a+d)
3 \* 2 \* 2 = 12 ✓

(r+s) \* (a+b+c)
2 \* 3 = 6 ✓

سوال با استفاده از سه رنگ "آبی، قرمز، سبز" به چند طریق می توان خانه های زیر را رنگ کرد به طوری که هر دو خانه مجاور متفاوت باشند؟



3 \* 2 \* 2 \* 2 \* 2 \* 2 = 3 \* 2^5 = 96 ✓

سوال با استفاده از حروف a, b, c چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

3 \* 3 \* 3 \* 3 \* 3 = 3^5 = 243 ✓

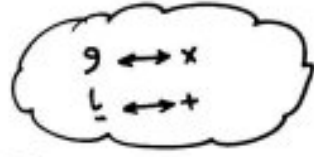
\* اگر قرار باشد هیچ دو حرف مجاری یکسان نباشند، چطور؟

3 \* 2 \* 2 \* 2 \* 2 = 3 \* 2^4 = 48 ✓

سوال از بین سه داوطلب رشته ریاضی، ۴ داوطلب رشته انسانی و ۵ داوطلب رشته تجربی به چند روش می توان ۲ نایب انتخاب کرد به طوری که هر دو از یک گروه نباشند؟



(3 \* 5) + (3 \* 4) + (5 \* 4) = 47 ✓



سوال افراد a1, a2, ..., an از شهر A، b1, b2, ..., bm از شهر B و c1, c2, ..., cp از شهر C

قرار است سوار یک وسیله نقلیه با ظرفیت ۳ نفر شوند. می دانیم a1, b1, a2, b2, ..., an, bn, c1, c2, ..., cp, cn سوار نیستند و نمی توانند با هم سوار شوند. اگر قرار باشد از هر شهر فقط یک نفر سوار شود، به چند طریق این عمل امکان پذیر است؟

Table with columns for cities A, B, C and rows for individuals a1, a2, a3. Calculations show 1\*2\*4=8, 1\*2\*4=8, 1\*3\*2=6, summing to 22.

تمرین: خودروی سمند در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور و ۲ نوع جعبه دنده (اتوماتیک و کلاچی) تولید می شود.

- الف) چند نوع مختلف از این خودرو تولید می شود؟
ب) چند نوع مختلف با رنگ سفید تولید می شود؟
پ) چند نوع مختلف با رنگ سفید و اتوماتیک تولید می شود؟

تمرین: در یک شرکت صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار ۸ تا ۱۰ خیابان، در هر خیابان ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه ۲۰ تا ۲۵ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر کارخانه در این شرکت را بیابید. (جواب: ۸۰۰۰ و ۱۵۰۰۰)

مثال چند ماتریس  $2 \times 3$  با درایه گوی  $0$  و  $1$  وجود دارد؟



شکل درایه

$$\begin{matrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 \times 2 & \times & 2 \times 2 & \times & 2 \times 2 & \times & 2 \times 2 & \times & 2 \times 2 & \times & 2 \times 2 & \times & 2 \times 2 \\ \text{حالت} & & & & & & & & & & & & \text{حالت} \end{matrix} = 2^6 = 64$$

مثال مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e\}$

این دارای چند زیر مجموعه است؟

تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه  $n$  عضوی برابر است با:  $2^n$

ب) دارای چند زیر مجموعه شامل عضو  $a$  است؟

بسته یا نبسته

$$\begin{matrix} a, b, c, d, e \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a, b, c, d, e \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a, b, c, d, e \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a, b, c, d, e \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32 \end{matrix}$$

\* نتیجه: در هنگام محاسبه کل زیر مجموعه هر یک مجموعه، به ازای هر شامل (فاقد) یک واحد از توان کم کنید

مثال به چند طریق می توان به پنج سوال تستی سه گزینه ای پاسخ داد در صورتی که

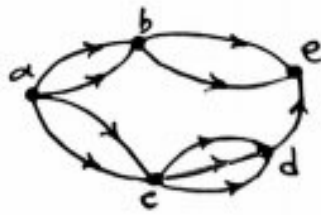
الف) هیچ محدودیتی نباشد؟

$$\begin{matrix} \text{سوال 1} & \text{سوال 2} & \text{سوال 3} & \text{سوال 4} & \text{سوال 5} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024 \end{matrix}$$

ب) پاسخ به همه سوالات الزامی باشد؟  
 که هر سوال ۴ حالت دارد  
 سه گزینه ای  
 جواب ندان

$$\begin{matrix} \text{سوال 1} & \text{سوال 2} & \text{سوال 3} & \text{سوال 4} & \text{سوال 5} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243 \end{matrix}$$

مثال: در شکل زیر به چند طریق می توان از  $a$  به  $e$  رفت؟



$$\begin{matrix} \underline{a} \underline{b} \underline{e} & \underline{a} \underline{c} \underline{d} \underline{e} \\ 2 \times 2 \times 2 & + 3 \times 2 \times 2 \\ 8 & + 12 = 20 \end{matrix}$$

هر کس بر ما با خشن گوید  
 ما چسبه دل نینجا شیم

ما خوبی او به خشن گویم  
 تا همه دروغ گفته باشیم

مثال: با توجه به شکل متقابل به چند طریق می‌توان از  $a$  به  $c$  رفت و برگشت در صورتی



الف) یال‌های رفت و برگشت تکرار نشوند!

رفت:  $abc$  و برگشت:  $cba$

حالت  $3 \times 2 \times 1 = 6$  و  $3 \times 2 \times 1 = 6$

جمع:  $6 + 6 = 12$

- $m_i, m_j, m_k, m_l$
- $n_i, n_j, n_k, n_l$
- $p_i, p_j, p_k, p_l$

ب) مسیر رفت و برگشت یکی نباشد!

رفت:  $9$  و برگشت:  $11$

حالت  $9 \times 11 = 99$

مثال: چند عدد پنج رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟ (تکرار ارقام مجاز است)

صفر نمی‌تواند

توضیح: ارقام از ۰ تا ۹

حالت  $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 90000$

حالت (۰)

مثال: چند عدد پنج رقمی مضرب ۵ وجود دارد که در رقم سمت چپ آنها بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد؟ (تکرار ارقام مجاز است)

- ۸ ۵
- ۶ ۸
- ۵ ۱
- ۳ ۴
- ۱ ۷

حالت  $5 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 50000$

مثال: چند عدد چهار رقمی وجود دارد که بزرگتر از ۴۰۰۰ باشد؟

الف) تکرار مجاز است.

حالت  $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

حالت  $9999 - 4000 = 5999$

حالت  $9999 - 4000 = 5999$

ب) تکرار مجاز نیست.

حالت  $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

مثال: چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۴۵۰۰ دارد؟

الف) تکرار مجاز است.  $9999 - 4500 = 5499$

ب) تکرار مجاز نیست.

شروع با ۴:  $4 \times 9 \times 8 \times 7 = 2520$

شروع با غیر ۴:  $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

جمع:  $2520 + 3024 = 5544$

تت: تعداد اعداد پنج رقمی فرد با ارقام متساوی به طوری که رقم صدگان آن ۲، عددی اول باشد، که ام است؟

فرد:  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

صدگان اول:  $\{3, 5, 7\}$

صدگان غیر ۲:  $\{0, 1, 4, 6, 8\}$

صدگان غیر ۲:  $\{0, 1, 4, 6, 8\}$

حالت  $5 \times 3 \times 5 \times 5 = 375$



مثال با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد پنج رقمی زوج و بدون تکرار ارقام وجود دارد؟

صفر در مکان نفس دانه و تکرار معیار نیست

$$\begin{array}{cccc} ? & ? & ? & ? \\ \hline ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array} = ۲۴$$

$$\begin{array}{cccc} ۵ & ? & ? & ? \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ & ۰ \\ \hline \end{array} = ۳۶$$

+ → ۶۰ ✓

صفر در مکان صد یا صفر در مکان بیست

$$\begin{array}{cccc} ? & ? & ? & ۵ \\ \hline ۹ & ۸ & ۷ & ۶ \\ \hline \end{array} = ۵۰۴$$

$$\begin{array}{cccc} ۵ & ? & ? & ? \\ \hline ۸ & ۸ & ۷ & ۶ \\ \hline \end{array} = ۴۴۸$$

+ → ۹۵۲ ✓

برابر ۹۹ تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش پذیر بر ۵، با ارقام غیر تکراری، کدام است؟

- ۹۴۸ (۱)
- ۹۵۲ (۲)
- ۹۶۸ (۳)
- ۹۷۲ (۴)

تعداد مجاز است و صفری تواند اول بیاید

تست برابر با کردن یک فعل ریزی چهار رقمی فرد که می دانیم رقم ۵ در آن به کار نرفته است، دومی که امکان کردن هر ریز ۷ ثانیه طول بکشد، حداقل چند ساعت وقت لازم است؟

۱، ۳، ۵، ۷، ۹

$$۹ \times ۹ \times ۹ \times ۴ = ۲۹۱۶ \xrightarrow{\times ۷} ۲۰۴۱۲ \xrightarrow{\div ۳۶۰۰} ۵,۷ \approx ۶$$

۸,۱ (۲) ۶ (۱)  
۶,۵ (۴) ۷,۲ (۳)

- ۸,۱ (۲)
- ۶ (۱)
- ۶,۵ (۴)
- ۷,۲ (۳)

مثال

چند عدد پنج رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن عدد زوج باشد؟ (تعداد مجاز است) به دگروه

$$\begin{array}{cccc} ? & ? & ? & ? \\ \hline ۹ & ۸ & ۷ & ۶ \\ \hline \end{array} = ۴۵۰۰۰ \checkmark$$

if رقم یکان باید فرد باشد → {۱, ۳, ۵, ۷, ۹}

if " " " زوج " " → {۰, ۲, ۴, ۶, ۸}

تعداد اعداد چهار رقمی با ارقام غیر تکراری که شامل رقم ۵ باشند کدام است؟

- ۱۸۴۸ (۱)
- ۱۷۹۲ (۲)
- ۱۷۴۸ (۳)
- ۱۶۵۸ (۴)

روش مستقیم

$$\begin{array}{cccc} ۵ & ? & ? & ? \\ \hline ۹ & ۸ & ۷ & ۶ \\ \hline \end{array} = ۵۰۴$$

$$\begin{array}{cccc} ? & ۵ & ? & ? \\ \hline ۸ & ۸ & ۷ & ۶ \\ \hline \end{array} = ۴۴۸$$

$$\begin{array}{cccc} ? & ? & ۵ & ? \\ \hline ۸ & ۸ & ۷ & ۶ \\ \hline \end{array} = ۴۴۸$$

$$\begin{array}{cccc} ? & ? & ? & ۵ \\ \hline ۸ & ۸ & ۷ & ۶ \\ \hline \end{array} = ۴۴۸$$

+ → ۱۸۴۸

روش مستقیم

$$\begin{array}{cccc} ? & ? & ? & ? \\ \hline ۹ & ۸ & ۷ & ۶ \\ \hline \end{array} = ۴۵۳۶$$

$$\begin{array}{cccc} ? & ? & ? & ? \\ \hline ۸ & ۸ & ۷ & ۶ \\ \hline \end{array} = ۲۶۸۸$$

+ → ۱۸۴۸



تت چند عدد چهاررقمی وجود دارد که دقیقاً یک رقم آن ۵ برابر باشد؟ (تکرار مجاز است)

- (۱) ۱۱۲۸
- (۲) ۲۶۷۳
- (۳) ۲۸۲۰
- (۴) ۳۱۶۰

$$\frac{?}{9} \times \frac{?}{9} \times \frac{?}{9} \times \frac{5}{9} = 729$$
 حالت

+ → ۲۶۷۳

$$\frac{?}{9} \times \frac{?}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{?}{9} = 948 \times 3 = 1944$$
 حالت

مثال

این چند عدد چهاررقمی با ارقام متناهی وجود دارد؟

$$\frac{?}{9} \times \frac{?}{9} \times \frac{?}{9} \times \frac{?}{9} = 4534$$
 حالت

با چند عدد چهاررقمی وجود دارد که حداقل یکی از ارقام آن ۵ برابر باشد؟

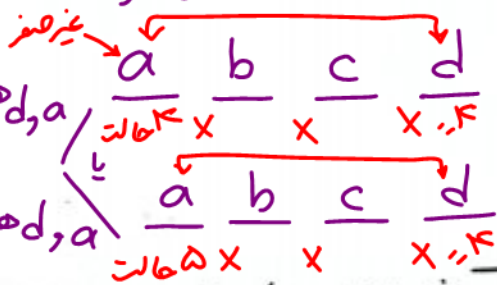
$$\frac{?}{9} \times \frac{?}{9} \times \frac{?}{9} \times \frac{?}{9} = 9000$$
 حالت

جواب =  $9000 - 4534 = 4464$  ✓  
 حداقل یک رقم تکرار داشته باشد ارقام متناهی دارند

کل اعداد چهاررقمی روشن کنیم

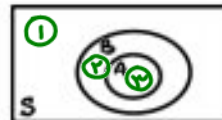
تت چند عدد چهاررقمی با ارقام متناهی  $a, b, c, d$  وجود دارد که  $(a+d) \mid abc$  و  $d$  زوج باشد؟

- (۱) ۲۲۴۰
- (۲) ۲۰۱۶
- (۳) ۲۵۲۰
- (۴) ۲۸۸۰



تت فرض کنید  $S = \{a, b, c, d, e\}$  و  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌ای از  $S$  باشند. تعداد زوج‌های مرتبی مانند  $(A, B)$  را بیابید

مثال  $A \subseteq B$



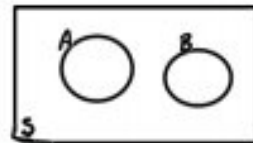
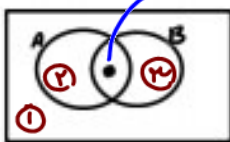
$$a, b, c, d, e$$

$$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$$
 حالت

(ت)  $n(A \cap B) = 1$

(ب)  $A \cap B = \emptyset$



$$(1) \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 5 \times 3^4$$

تت چند زیرمجموعه ۵ عضوی از مجموعه اعداد طبیعی تا بزرگتر از ۱۰ وجود دارد که مجموع اعضا آن ۱۱ باشد؟

- {1, 2, ..., 10}

- (۱) ۱۱۶
- (۲) ۲۱۶
- (۳) ۱۰۶
- (۴) ۱۵۵

حالت اعدادی که مجموع آنها برابر ۱۱ باشد



اگر از هر گروه یک عضو انتخاب شود آنگاه مجموع هیچ دو عضوی از آن نخواهد بود

جای گسسته

کس ← جابه جایی اشیاء در یک "ردیف" به طوری که حالت جدید ایجاد شود.

مثال: با ارقام ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام وجود دارد؟

$$\frac{?}{4} \times \frac{?}{3} \times \frac{?}{2} \times \frac{?}{1} = 4! = 24 \checkmark$$

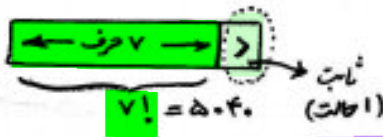
قضیه: تعداد جایگشت‌های n شیء متماثل برابر است با n!

مثال: با حروف کلمه "دیرستان" چند کلمه هشت حرفی وجود دارد؟ (تکرار مجاز نیست)

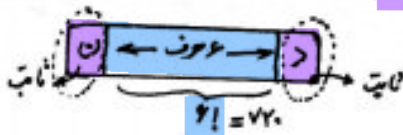
که جایگشت ۸ حرف متماثل:  $8! = 40320$

مثال: در مثال قبل چه تعداد از کلمات ساخته شده

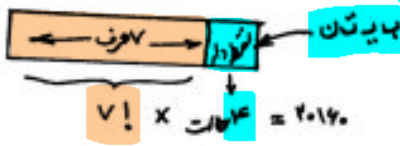
(ا) با حرف "ذ" شروع می‌شوند؟



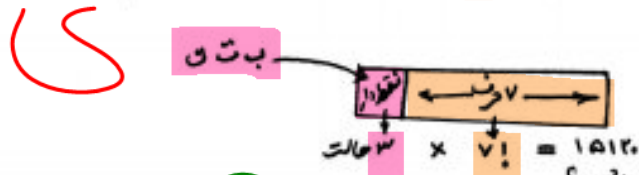
(ب) با حرف "ذ" شروع و با حرف "ن" ختم می‌شوند؟



(ج) با حرف نقطه دار شروع می‌شوند؟



(د) با حرف نقطه دار ختم می‌شوند؟



(ه) با حرف نقطه دار شروع و با حرف نقطه دار ختم می‌شوند؟

بدون



$$3 \times 6! = 2160$$

$$2 \times 6! = 720$$

$$2160 + 720 = 2880 \checkmark$$

تیب نقطه دار کم شدن

نشی ثابت در جایگشت شرکت نمی‌کند.

۵

مثال Ex: پنج نفر به نام های a, b, c, d, e را به چند طریق می توان در یک ردیف قرار داد به طوری که

الف) محدودیتی نباشد؟

← جایگزینی ۵ شی متفاوت:  $5! = 120 \checkmark$

ب) a و b همواره کنار هم باشند؟

جایگزینی ۲ نفر را به هم  
 c, d, e, a, b  
 ۴ شی متفاوت  $\rightarrow 4! \times 2! = 48 \checkmark$

پ) d, c هیچ گاه کنار هم نباشند؟

حالاتی که d, c کنار هم نیستند - حالاتی که d, c کنار هم است  
 $5! - 4! \times 2! = 120 - 48 = 72 \checkmark$  (روش مستقیم)

a, b کنار هم باشند

a, b, c, d, e  
 $4! \times 2! = 48$

\* (a, b, c, d کنار هم باشند و c, d کنار هم نباشند؟

a, b کنار هم اند و c, d کنار هم اند یا a, b کنار هم اند و c, d کنار هم نیستند  
 $\frac{a, b \quad c, d \quad e}{3! \times 2! \times 2!} + x \rightarrow x = 24 \checkmark$

Ex: به چند طریق می توان ۳ کتاب ریاضی متفاوت و ۴ کتاب ادبی متفاوت را در قفسه ای چید به طوری که کتاب های هر ادبی کنار هم باشند؟

۳ کتاب ریاضی | ۴ کتاب ادبی  
 $4! \times 3! \times 4! = 288 \checkmark$  (جایگزینی ۲ جعبه)

با حروف کلمه DELAVARAN چند کلمه ۹ حرفی می توان نوشت به طوری که هر سه حرف A کنار هم باشند؟

AAA DELVRN  
 ۷ شی متفاوت  $\rightarrow 7! = 5040$   
 ۲x۷! (۴) ۷! (۱) ✓  
 ۹! (۴) ۸! (۳)

Ex: به چند طریق می توان ۵ دانش آموز را در یک ردیف نشاند به طوری که

الف) هکلی به صورت متوالی باشند؟  
 ۲ × ۵! = ۲۴۰ ✓  
 H.W

ب) هکلی به صورت متوالی باشند و دو نفر خاص a, b کنار هم قرار گیرند؟  
 ۲ × a, b c, d, e  
 $2 \times 4! \times 2! = 96 \checkmark$



مثال: به چند طریق می توان ۳ دانش آموز و ۴ دانشجو را به صورت یک درمیان در یک صف قرار داد؟



\* اگر تعداد دانش آموزان برابر باشد چه طوری؟  
 $4! \times 3! = 144 \checkmark$

شروع با مربع  $\rightarrow 4! \times 4!$   
 شروع با دایره  $\rightarrow 4! \times 4!$   
 $\left. \begin{matrix} \rightarrow 4! \times 4! \\ \rightarrow 4! \times 4! \end{matrix} \right\} + \rightarrow 2 \times 4! \times 4! \checkmark$

تت: به چند طریق می توان ۳ دانش آموز و ۴ دانشجو را به صورت یک درمیان در یک صف قرار داد به طوری که یک دانش آموز خاص و یک دانشجو خاص همواره کنار هم باشند؟



	a	b	۱۲۰ (۲)	۶۰ (۱)
			۱۴۴ (۴)	۷۲ (۳)

$4 \times 3! \times 2! = 72$

تت: با حروف کلمه BARANA چند رمز شن حرفی می توان ساخت به طوری که سه حرف A به صورت یک درمیان باشند؟ (گزینه ۲)

۱۲ (۲)	۶ (۱)
۴۸ (۴)	۲۴ (۳)

۰, ۲, ۴, ۶, ۸ / ۱, ۳, ۵, ۷, ۹

چند عدد پنج رقمی با ارقام غیر تکراری می توان نوشت که ارقام آن یک درمیان زوج و فرد باشند؟

عکس صورت

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$   
 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$   
 $24 \times 120 = 2880$   
 $2400 - 2880 = -480$   
 $2400 - 480 = 1920$   
 $1920 + 1820 = 3740$

۱۹۲۰ (۴)	۱۸۲۰ (۱)
۲۴۰۰ (۴)	۲۱۶۰ (۳)

۴ کتاب متفیز با موضوع ریاضی و ۲ کتاب متفیز آمار را به چند طریق می توان در قفسه ای که در هم قرار داد به طوری که موضوع دو کتاب مجاور هر کتاب (به جز کتاب اول و آخر) متفاوت باشد؟

$R_1 R_2 A_1 A_2 R_3 R_4$   
 $4! \times 2! = 48 \checkmark$

۷۲ (۲)	۹۶ (۱)
۲۴ (۴)	۴۸ (۳)



مثال: به چند روش می‌توان با اعداد یک‌گانه ۸ نفری،

الف) یک صفت ۸ نفری تشکیل داد؟

ب) یک صفت ۷ نفری تشکیل داد؟

۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵ × ۶ × ۷ × ۸ = ۸! ✓

جایگت ۸ نفر : ۸!

نتیجه: تعداد جایگت‌های (n-1) تایی n شیء، با تعداد جایگت‌های آن n شیء برابر است.

مثال Ex: پنج نفر به نام‌های a, b, c, d, e قرار است در یک همایش سخنرانی کنند. به چند طریق ترتیب سخنرانی

این افراد ممکن است، هرگاه

جایگت

الف) هیچ شرطی نباشد؟ ۵! = ۱۲۰ ✓

پ) بین a و b فقط یک فرد دیگر سخنرانی کند؟  
a b ? ?  
e d c  
۳! × ۲! × ۲! = ۳۶ حالت  
جایگت = a و b  
۳ شیء متباعد

ب) b بلافاصله بعد از a سخنرانی کند؟  
a, b, c, d, e → ۴! = ۲۴ ✓  
جعبه‌بندی جایگت  
۴ شیء متباعد



مثال Ex: به چند طریق می‌توان ۸ نفر را که دو به دو برادرند، در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل نشاند به طوری که بر کس متقابل برادر خرد بنشینند؟

جایگت = ۴ جعبه متباعد → ۴! × ۲! × ۲! × ۲! × ۲! = ۴! × (۲!)⁴ = ۳۸۴ ✓  
جایگت - درون هر جعبه

تمرین H.W: به چند طریق می‌توان ۲ دانش‌جو و ۶ دانش‌آموز را در یک ردیف نشاند به طوری که در دو طرف این ردیف، دانش‌جو بنشینند؟

جایگشت های سه حرفی x, y, z

xyz, yxz, zxy  
xzy, yzx, zyx

3! = 6

جایگشت های سه حرفی x, x, y

yxx, xyx, xxy  
~~yxx, xxy, xyx~~

3! / 2! = 3

که حذف جایگشت ۲ تا x با هم

جایگشت های با تکرار (جایگشت با اشیای تکراری)

چون جایگشت اشیای تکرار با هم بی مورد است (حالت جدیدی ایجاد نمی کند) با تقسیم کردن از کل جایگشت ها حذف می شود.

مثال Ex با ارقام ۱, ۲, ۲, ۳, ۴ چند عدد پنج رقمی می توان نوشت؟

5! / 2! = 120

ابتدا همه اشیاء را متمایز فرض کنید. 5! = 120  
۲! = 2  
۲! = 2

مثال Ex با ارقام ۱, ۲, ۳, ۳, ۳, ۴, ۴, ۴, ۵ چند عدد ده رقمی می توان نوشت؟

10! / (3! \* 3! \* 3! \* 2!) = 50400

مثال با حروف کلمه "ریاضی دانان"

الف) چند ریزه حرفی می توان ساخت؟ 10!

ب) چند ریزه حرفی می توان ساخت؟  
۳! \* ۲! \* ۲! \* ۲! \* ۱! = ۱۴۴

مثال Ex با حروف a, a, a, b, c, c, c, d, d, d می خواهیم روی تعداد از اجناس که نه حرفی ثبت کنیم (الف) چه تعداد از اجناس را می توانیم که گذاری کنیم؟  
ب) در چه تعداد از کدها سه حرف d کنار هم اند؟

9! / (3! \* 2! \* 3!) = 7! = 5040

قضیه جایگشت با تکرار

Ex اگر n شی مزوج باشد به طوری که n<sub>۱</sub> تای آن از نوع اول و n<sub>۲</sub> تای آن از نوع دوم و ... و n<sub>k</sub> تای آن از نوع k ام و یکبار باشد، آن گاه تعداد جایگشت های این n شی برابر است با (توجه کنید: n<sub>۱</sub> + n<sub>۲</sub> + ... + n<sub>k</sub> = n)

n! / (n<sub>۱</sub>! \* n<sub>۲</sub>! \* ... \* n<sub>k</sub>!)

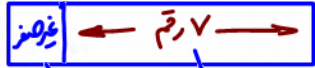
n<sub>۱</sub> + n<sub>۲</sub> + ... + n<sub>k</sub> ≤ n ⇒ n<sub>۱</sub>! \* n<sub>۲</sub>! \* ... \* n<sub>k</sub>! | n!

۲ + ۳ + ۵ ≤ ۱۲ → ۲! \* ۳! \* ۵! | ۱۲!

۳! \* ۷! \* ۹! | ۱۸!  
۳ + ۷ + ۹ = ۱۹

تقریباً n ∈ N نشان دهید: ۲<sup>n</sup> \* ۳<sup>n</sup> | (n!) (HW)

تت: با ارقام ۱، ۲، ۲، ۲، ۳، ۴ چند عدد بهشت رقمی وجود دارد؟



$$\frac{7!}{2!} = \frac{5040}{2} = 2520 \checkmark$$

۲ تا صنف  $2! \times 3! = 3 \times 2!$  (تکریر ۳)

- ۳۲۶ (۱)
- ۶۷۴ (۲)
- ۲۵۲۰ (۳) ✓
- ۲۱۰۰ (۴)

تت: در سوال بالا چند عدد بهشت رقمی زوج وجود دارد؟

- ۱۲۰۰ (۱)
- ۷۲۰ (۲)
- ۱۹۲۰ (۳)
- ۲۱۰۰ (۴)

تت: تعداد جایگشت های حرف کلمه system به طوری که S ها کنار هم نباشند؟

$$5! - \frac{4!}{2!} = 120 - 120 = 240 \checkmark$$

- ۲۴۰ (۲) ✓
- ۳۶۰ (۳)
- ۱۸۰ (۴)

تت: با حروف e, e, e, c, c, c, b, b, a, a چند روز در حرفی توان ساخت که حروف صدبار کنار هم باشند؟

a, a, e, e, e, b, b, c, c, c

$$\frac{4!}{2! \times 3!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 600 \checkmark$$

تت: در چه تعداد از جایگشت های حرف کلمه SOCIOLOGICAL

(الف) دو حرف A و G کنار هم اند؟ (ب) هکلی با عبارت GAS شروع می شوند؟

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3a^1b^2 + b^3$$

تت: در رابطه عبارت  $(x+y+z)^3$  ضریب جمله  $x^2y^2z^3$  کدام است؟

- ۲۱۰ (۲) ✓
- ۷۲ (۳)
- ۹۰ (۴)

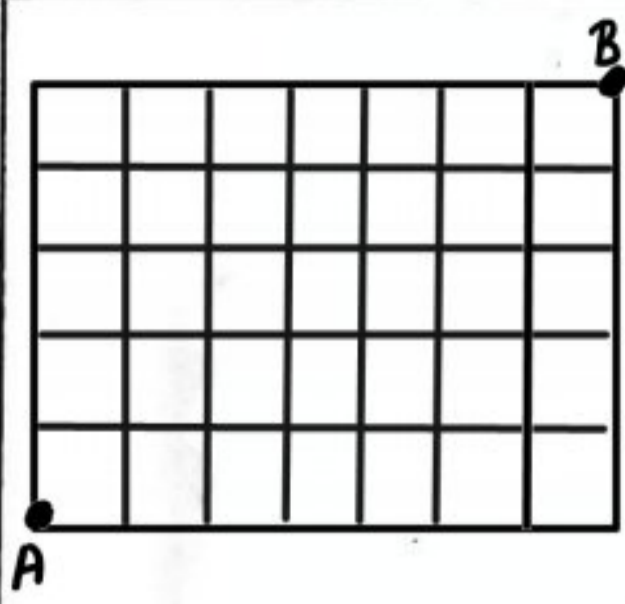
$$x^2y^2z^3 = xxyyzzz \rightarrow \frac{7!}{2! \times 2! \times 3!} = 210$$

تت: ضریب جمله  $x^2y^2z^3$  در رابطه عبارت  $(2x - y + z)^4$  کدام است؟

- ۱۲۰ (۲) ✓
- ۲۴۰ (۳)
- ۱۲۰ (۴)
- ۲۴۰ (۵)

$$(2x)^2 \cdot (-y)^2 \cdot z = (-4) x^2 y^2 z$$





مثال در شکل مقابل به چند روش می توان با کمترین حرکت، از نقطه A به نقطه B رسید، به طوری که این هم شرطی نباشد!

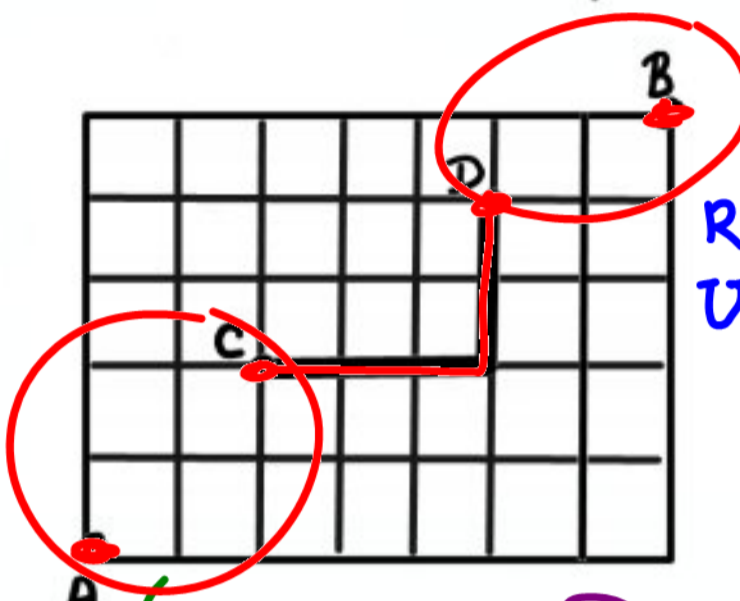
که ۱۲ حرکت } ۷ تا R (R)  
۵ تا U (U)

روش ۱ → RRRRRR UUUUR  
روش ۲ → RUURRRRUURR  
روش ۳ → RURURURURR  
⋮ ⋮ ⋮ ⋮

جایگشت ۱۲ حرف

$$\frac{12!}{7! \times 5!} = 792$$

$R \bar{U} V \leftarrow$



$C \sim A$  و  $B \sim C$   
حرکت ۴:  $(R \bar{U} \bar{U}, U \bar{U} \bar{U})$   
حرکت ۸:  $(R \bar{U} \bar{U}, U \bar{U} \bar{U})$

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{8!}{5! \times 3!} = 336 \checkmark$$

(ب) از نقطه C بگذریم؟

(د) از نقطه D بگذریم؟  
از D بگذرد

کل حالت

$$\left( \frac{9!}{5! \times 4!} \times \frac{3!}{2!} \right) = 792 - 378 = 414 \checkmark$$

(ت) از نقطه C و از نقطه D بگذریم؟

$C \sim A$  و  $D \sim C$  و  $B \sim D$

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{5!}{3! \times 2!} \times \frac{3!}{2!} = 180 \checkmark$$

(ج) از نقطه C بگذریم و از نقطه D نگذریم؟

$$C \cap D' = C - D = C - (C \cap D)$$

$$336 - 180 = 156 \checkmark$$

از C بگذریم از D بگذریم از D, C بگذریم

$$336 + 378 - 180 = 534 \checkmark$$

(ح) از نقطه C یا از نقطه D بگذریم؟

(ج) نه از نقطه C و نه از نقطه D بگذریم؟

$$\underbrace{C \cap D'}_{(C \cup D)'} = S - (C \cup D)$$

$$= 792 - 534 = 258 \checkmark$$

(ح) از خط بزرگ بگذریم؟

$C \sim A$  و  $D \sim C$  و  $B \sim D$

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times 1 \times \frac{3!}{2!} = 18 \checkmark$$



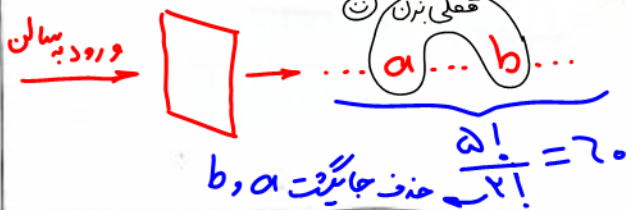
نیز در چند جایگشت از حروف کلمه mathematics عبارت mat یک بار دیده می شود؟

mat hematics - mat mat heics

مثال پنج نفر به نام های a, b, c, d, e قرار است به ترتیب وارد یک سالن شوند. این عمل به چند روش ممکن است برگزار

گردد؟ (الف) هیچ شرطی نباشد؛ (ب) a بعد از b وارد شود؛ (ج) لزوماً بلافاصله

۵! = ۱۲۰ ✓



(د) a بعد از b و b بعد از c وارد شود؟



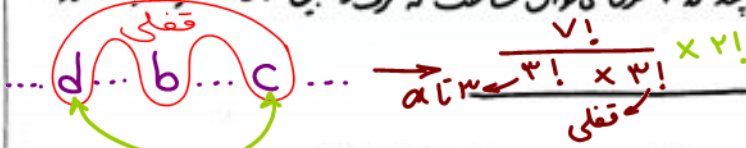
۵! / ۳! = ۲۰ ✓

(ه) a بعد از b و c بعد از d وارد شود؟

۵! / (۲! \* ۲!) = ۳۰ ✓

نکته: تعداد جایگشت های n شیئی متمایز، که ترتیب کانی آنها معلوم باشد، برابر است با n! / k!

تت با حروف a, a, a, b, c, d, e چند حالت می توان ساخت که حرف b بین دو حرف c و d و نه لزوماً مجاور با آن قرار گیرد؟



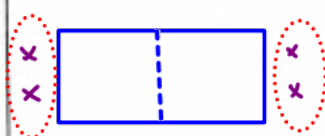
گروه بندی اشیا (افزای)

مثال به چند طریق می توان ۹ نفر را در سه اتاق ۳، ۳، ۳ نفری قرار داد؟



جایگشت ۹ نفر ۹! = ۱۲۶۰ ✓

روش اول: حذف جایگشت ۲ نفر در اتاق ۲ نفری، حذف جایگشت ۳ نفر در اتاق ۳ نفری، حذف جایگشت ۴ نفر در اتاق ۴ نفری. (۹) \* (۷) \* (۴) = ۱۲۶۰ ✓



مثال: به چند طریق می توان ۴ نفر را به دو تیم دو نفری و یک تیم یک نفری تقسیم کرد؟

(۴) \* (۲) / ۲! = ۳ ✓

- {a, b} : {c, d} (حالت ۱)
{a, c} : {b, d} (حالت ۲)
{a, d} : {b, c} (حالت ۳)
{c, d} : {a, b} (حالت ۴)
{b, d} : {a, c} (حالت ۵)
{b, c} : {a, d} (حالت ۶)

توضیح: در گروه بندی اشیا (افزای)، هرگاه گروه های بدون نام و با تعداد اعضای برابر وجود داشته باشد، جواب را به فاکتوریل تعداد گروه های با تعداد اعضای برابر تقسیم می کنیم.

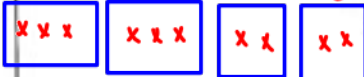


مثال: به چند طریق می توان ۱۰ نفر را به دو گروه ۳ نفری و دو گروه ۲ نفری تقسیم کرد؟

(۱۰) \* (۷) \* (۴) \* (۲) / (۳! \* ۲!)

۲! \* ۲!

۱۰ آتاق ۱۰۲ آتاق ۲۰ آتاق ۴ آتاق



$$\binom{10}{3} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}$$

مثال: چند طریق می توان ۱۰ نفر را در دو آتاق ۳ نفری و دو آتاق ۲ نفری امکان دارد؟

### تعداد افزایش های یک مجموعه

یادآوری: افزایش (Partition) یک مجموعه یعنی بخش کردن یک مجموعه به زیر مجموعه هایی که هر سه شرط زیر را دارند: ۱) هر کدام از زیر مجموعه ها ناتهی باشند. ۲) اشتراک دو به دو آنها تهی است. ۳) اجتماع آنها، همان مجموعه اولی است. (جدال هم)

مثال: مجموعه {1, 2, 3, 4, 5, 6} را به چند طریق می توان

الف) به سه زیر مجموعه ۲ عضوی افزایش کرد؟  $\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = 15$  ✓

ب) به دو زیر مجموعه ۳ عضوی افزایش کرد؟  $\frac{\binom{6}{3} \binom{3}{3}}{2!} = 10$  ✓

برای ۳ زیر مجموعه ۲ عضوی می توان  $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$  را به چند طریق می توان به ۳ زیر مجموعه افزایش کرد؟

۳(۱) ۲(۲) ۱(۳)  $\frac{\binom{4}{2} \binom{2}{2} \binom{2}{2}}{2!} = 6$  ✓

برای ۲ زیر مجموعه ۲ عضوی و یک ۲ عضوی می توان  $A = \{a, b, c, d, e\}$  که شامل مجموعه های ۲ عضوی و ۳ عضوی کدام است؟ (گزینه ۱)

برای ۳ زیر مجموعه ۲ عضوی می توان  $A = \{a, b, c, d, e\}$  به صورت  $\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c\}$  است. تعداد افزایش های مجموعه A

کدام دو مجموعه تک عضو باشند؟  $\binom{4}{2} \binom{2}{2} + \binom{4}{1} = 4$  ✓

برای ۲ زیر مجموعه ۳ عضوی و یک ۲ عضوی می توان  $A = \{a, b, c, d, e\}$  که شامل فقط یک مجموعه تک عضو باشند؟

۳(۱) ۲(۲) ۱(۳)  $\frac{\binom{5}{3} \binom{2}{2} + \binom{5}{1} \binom{4}{2}}{2!} = 10$  ✓

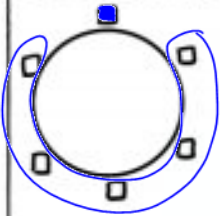
برای ۲ زیر مجموعه ۳ عضوی و یک ۲ عضوی و یک ۱ عضوی می توان به دو مجموعه ۳ عضوی و یک مجموعه ۲ عضوی افزایش کرد؟

برای ۲ زیر مجموعه ۳ عضوی و یک ۲ عضوی و یک ۱ عضوی می توان به دو مجموعه ۳ عضوی و یک مجموعه ۲ عضوی و یک مجموعه ۱ عضوی افزایش کرد به طوری که

تک {a} باشد؟  $\frac{\binom{6}{3} \binom{3}{2} \binom{3}{1}}{2!} = 20$  ✓



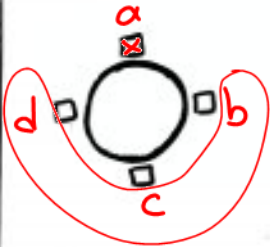
جای گشت "دایره ای" اشیا



چون دایره، نقطه شروع (مبدأ) ندارد، بنابراین: یک شی را به دلخواه، به عنوان مبدأ در نظر می گیریم (ثابت)

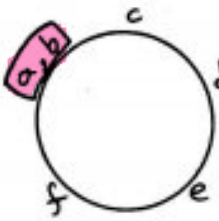
پس جایگشت (خطی) اشیا باقی مانده را می بسوی کنیم

مثال: به چند طریق می توان ۴ نفر را دور یک میز گرد نشاند؟  $3! = 6$  ✓



قضیه: تعداد جایگشت های دایره ای n شی متمايز برابر است با:  $(n-1)!$

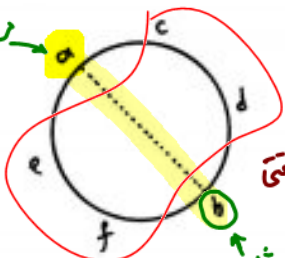
مثال: به چند طریق می توان افراد a, b, c, d, e را دور یک میز نشاند به طوری که



جایگشت دایره ای  $(5-1)! \times 2! = 48$  ✓

راه دوم:  $(5-1)! \times 2 = 48$  ✓

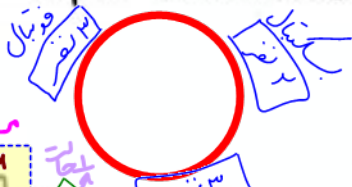
انتخاب چهار b (سمت راست، سمت چپ، ...)



دو سر قطره  $(5-1)! \times 1 = 24$  ✓

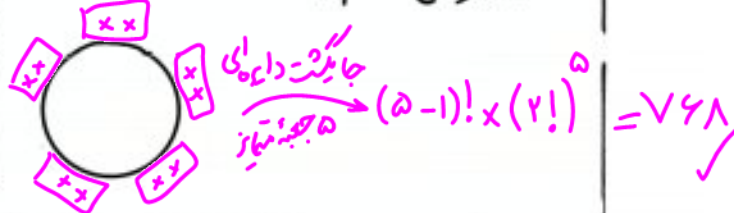
تنها انتخاب b (فقط روبروی a) ثابت

تجرباتی: به چند طریق ۳ بازیکن فوتبال، ۲ بازیکن بسکتبال و ۳ شناگر دور یک میز بنشینند به طوری که افراد هم نمی کنار هم باشند؟



جایگشت درون هر جعبه  $(3-1)! \times 3! \times 2! \times 3! = 144$  ✓

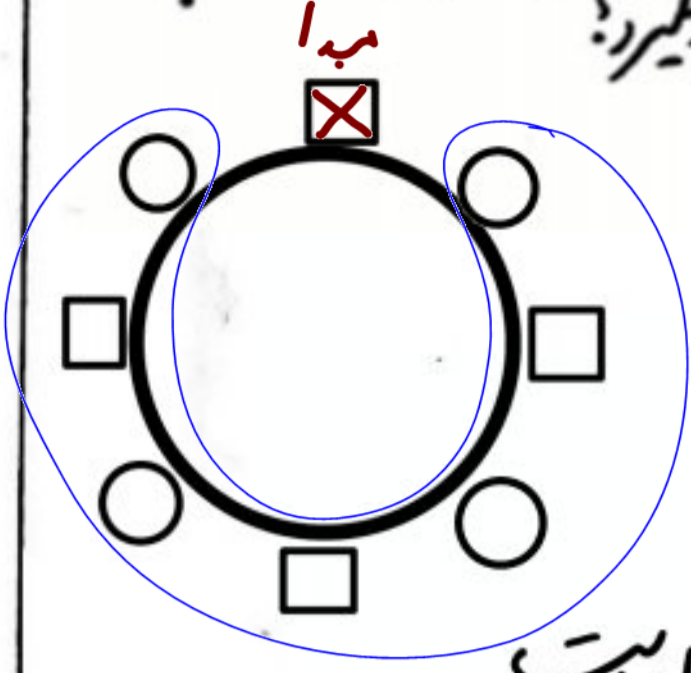
مثال: پنج زوج به چند طریق می توانند دور یک میز قرار گیرند به طوری که



ب) هر زوج روبروی هم باشند؟  $4! \times (2!)^4 = 384$  ✓

تجزیه: دور یک میز دایره ای شکل، ۵ صندلی با پنج رنگ متمايز قرار دارد. به چند طریق می توان ۵ نفر را دور این میز نشاند؟  $(5-1)! \times (2!)^5 = 768$  ✓

تجربه ۱۴۰۰ در یک جلسه آموزشی میزگردی شامل ۴ دانش آموز کلاس پایه یازدهم و ۴ دانش آموز کلاس پایه دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش آموزان در صندلی که بنشینند به طوری که در کنار هر دانش آموزی، دانش آموز هم پایه قرار نگیرد؟



یک در میان

جایگت یک در میان

$$3! \times 4! = 144 \checkmark$$

مثال تعداد جایگت های دایره ای از حروف  $a, b, b, b, c, c, c, d, d$  کدام است؟

$$\frac{(10-1)!}{3! \times 3! \times 2!} = 252$$

تعداد جایگت های دایره ای از حروف  $a, b, b, b, c, c, c, d, d$  کدام است؟

تعداد جایگت های دایره ای از حروف  $a, b, b, b, c, c, c, d, d$  کدام است؟

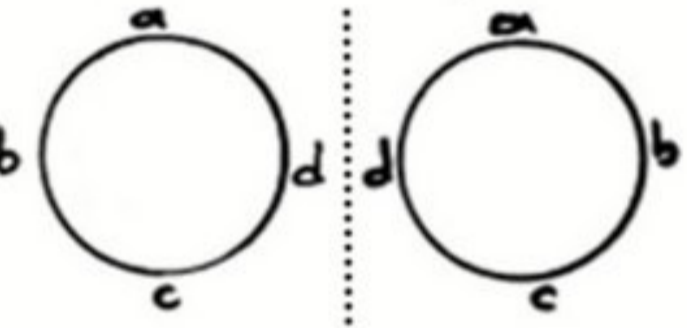
تت  
H.W

۱۲۰ (۱)  
۶۰ (۲)  
۳۶ (۳)  
۱۵ (۴)

$$\frac{(4-1)!}{2} = 3 \checkmark$$

مثال: با چهار مهره متمایز چند گردن بند مختلف می توان ساخت؟

سه این دو حالت دور یک میز تفاوت می یابند، زیرا دو نفر جایگت دارند (a, b) جایگت دارند اما در گردن بند، تسبیح... این دو حالت یکسان اند زیرا یکی دست و آورنده دیگری است.



نتیجه: تعداد گردن بندها، تسبیحها، دسته کلیدها، ... با  $n$  شی متمایز برابر است با:  $\frac{(n-1)!}{2}$

تعداد دور یک سر به طول  $n$  در گراف  $K_p$  =  $\binom{p}{n} \times \frac{(n-1)!}{2}$



ترکیب: انتخاب بدون جایگشت (Combination)

در مسایلی مطرح می شود که اشیاء را انتخاب می کنیم ولی ترتیب قرار گرفتن آنها مهم نیست به عبارت دیگر



مثال: به چند طریق می توان از بین افراد  $a, b, c, d$  دو نفر را انتخاب کرد؟

- $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}$   
 $\{b, c\}, \{b, d\}$   
 $\{c, d\}$

ترکیب  $r$  تایی  $n$  شی ← انتخاب  $r$  شی از  $n$  شی بدون در نظر گرفتن ترتیب آنها

قضیه: تعداد ترکیب های  $r$  تایی  $n$  شی متمایز برابر است با:

$$C(n, r) = C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \in \mathbb{N} \quad : r \leq n$$

مثال: با ده نقطه متمایز که بر محیط یک دایره داده شده اند، چند مثلث می توان ساخت؟

انتخاب ۳ نقطه از ۱۰ نقطه بدون در نظر گرفتن ترتیب  
 $\rightarrow \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120 \checkmark$

مثال: از بین ۳ دانش آموز و ۵ دانشجو به چند طریق می توان یک گروه ۳ نفری تشکیل داد؟

کل افراد: ۸ نفر  
 انتخاب ۳ نفر از ۸ نفر بدون در نظر گرفتن ترتیب  
 $\rightarrow \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56 \checkmark$

مثال: به چند روش می توان ۴ حرف از حروف گلهی دبیرستان انتخاب کرد؟

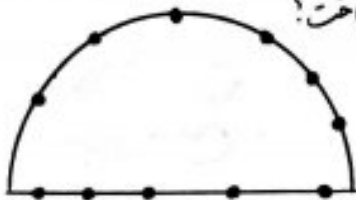
ترتیب قرار گرفتن مورد نظر نیست  
 $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = 70 \checkmark$

چند فرمول (به خاطر بسپارید، بهتر است!)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2 \times 1}, \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}, \quad \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}, \dots$$

سوال: با ۱۱ نقطه متمایز که فقط پنج تای آنها روی یک خط راست می باشند، چند مثلث می توان ساخت؟

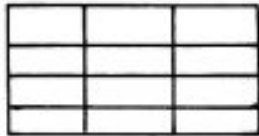
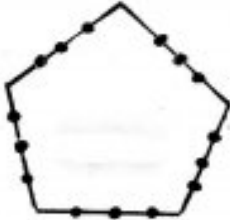


راه اول: ۳ نقطه از کمان یا ۲ نقطه از خط و ۲ نقطه از کمان یا ۱ نقطه از خط و ۱ نقطه از کمان

$$\binom{6}{3} + \binom{5}{2} \times \binom{6}{2} + \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} = 155$$

راه دوم:

تمرین بانقاط شکل مقابل چند مثلث وجود دارد؟ (جواب: ۴۵۰)



سوال: در شکل روبه رو چند مستطیل وجود دارد؟

سوال: اگر  $\binom{n}{10} = \binom{n}{14}$  ، آنگاه  $n$  کدام است؟

$\binom{n}{x} = \binom{n}{y} \iff x + y = n$

نتیجه:  $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

سوال: اگر  $\binom{n}{8} = 2 \binom{n}{5}$  ، آنگاه  $n$  کدام است؟

یادآوری:  $n! = n(n-1)!$

۲۱ ۴    ۲۵ ۶  
۲۳ ۴    ۲۲ ۴

(گزینه ۴)

$$\frac{n!}{\underbrace{\lambda! \times (n-\lambda)!}_{\lambda \times \lambda!}} = 2 \times \frac{n!}{\underbrace{\nu! \times (n-\nu)!}_{(n-\nu) \cdot (n-\lambda)!}}$$

سوال: در یک آزمون ۱۰ سوالی به چند طریق می توان به هر سوال پاسخ داد به طوری که از پنج سوال اول، فقط به ۳ سوال جواب داده شود؟

سوال: تعداد حالتی که می توان در ۱۰ بار پرتاب یک سکه به این منظور رسید؟

۱۰ ۶    ۱۰ ۶  
۲۵ ۴    ۲۵ ۴

مجموعه: فاقد ترتیب و تکرار

مثال: یک مجموعه ۷ عضوی دارای چند زیر مجموعه ۲ عضوی باشد؟

نتیجه: تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی یک مجموعه  $n$  عضوی برابر است با:  $\binom{n}{2}$

مثال: در یک مهمانی هفت نفری، هر دو نفر یکبار با هم دست داده اند. تعداد کل دست دادن ها چند است؟

مثال: هفت خط متوازی در صفحه، حداکثر چند نقطه تقاطع دارند؟

تعداد کل زیر مجموعه های ۲ عضوی یک مجموعه ۷ عضوی  $\binom{7}{2} = 21$  ✓

↓ اشتقاق      ↓ اشتقاق      ↓ اشتقاق

$\{5_1, 5_2\}, \{5_2, 5_1\}, \{5_1, 5_1\}, \dots$

مثال: هفت نفری باز قرار است با هم دو بار یکبار با هم دست بدهند. تعداد کل بازی ها چند است؟

تمرین H.W: در یک مسابقه ورزشی ورزشکارانی از کشورهای  $a, b, c, d, e, f$  شرکت کرده اند. قرار است برابر ارتباط بهتر و نزدیکتر با هم تعداد فرجه رفت به منظور آشنایی هر ورزشکار با سایر زبان آتیه شود. چند نوع فرجه رفت لازم است؟ (جواب: ۲۱)

مثال: مجموعه  $S = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$  دارای چند زیر مجموعه ۲ عضوی مانند  $A = \{a, b\}$  است به طوری که

$2 | a+b$  (اند)       $2 | ab$  (ب)       $5 | ab$  (ب)

تمرین H.W: مجموعه  $S = \{1, 2, \dots, 30\}$  دارای چند زیر مجموعه ۳ عضوی مانند  $\{a, b, c\}$  است به طوری که

$3 | a+b+c$  (اند)       $3 | abc$  (ب)

تمرین H.W: نشان دهید تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی مجموعه  $\{1, 2, \dots, n\}$  که هیچ دو عضوی آن اعداد متوالی نیستند برابر است با  $\binom{n-1}{2}$



تت - چند طریق می توان از ۱۰ زوج ساکن در یک آپارتمان ۱۰ واحدی، یک شورای ۴ نفری تشکیل داد به طوری که از هر خانواده تنها زن یا شوهر عضو شود؟

xx	xx
xx	xx
xx	xx
xx	xx
xx	xx

۲۵۲۰ (۱) ۳۳۶۰ (۲)

۱۸۲۰ (۳) ۲۱۲۰ (۴)

\* اگر قرار باشد فقط یک زوج در این شورای ۴ نفری عضو باشد، چه جور؟

\* اگر قرار باشد حداقل یک زوج در این شورای ۴ نفری عضو باشد، چه جور؟

برابر ۹۲ از هر یک از ۶ منطقه کشوری، ۱۵ دانش آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده اند. به چند طریق می توان

۳ دانش آموز از بین آن ها که دو به دو غیر هم منطقه ای باشند، انتخاب کرد؟

A	B	C	D	E	F
۱۵ نفر	۱۵ نفر	۱۵ نفر	۱۵ نفر	۱۵ نفر	۱۵ نفر

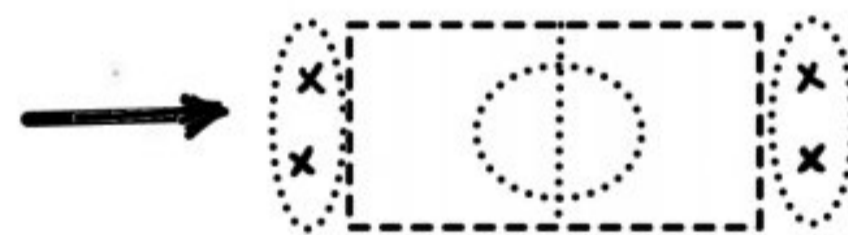
۵۷۸۰ (۱) ۶۷۵۰ (۲)

۷۵۸۰ (۳) ۷۶۵۰ (۴)

برابر ۹۲ از هر یک از ۸ مدرسه علاقه مند، ۶ نفر برای بازی تنیس ۴ نفری (۲ نفر در مقابل ۲ نفر) انتخاب شده اند. به چند طریق

این بازی ممکن است انجام شود به طوری که دو نفر همیار هم از یک مدرسه باشند؟ (بازی بین مدارس مختلف برگزار می شود)

A	B	C	D	E	F	G	H
۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر



۷۲۰ (۱) ۶۳۰ (۲)

۵۱۰ (۳) ۲۸۰ (۴)

دنیا را به ما فزاند  
کسی را که محنت دارد دست ندارد  
و کسی که ناله است دارد تو دستش نزاری

لحاک که تو دستش دارد و تو هم ناله است

پیرم و کجین زنده گانم  
پیرم کجین زنده گانم  
پیرم کجین زنده گانم  
پیرم کجین زنده گانم  
(دکتر شریعی)



توجه:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{حد اقل ۲ شی: ۲ شی یا بیشتر} \\ \text{حد اکثر ۲ شی: ۲ شی یا کمتر} \end{array} \right\}$  مهم بلدی نیستند (زیرا هر دو در ۲ شی اشتراک دارند)

مثال از بین ۳ زن و ۵ مرد به چند طریق می‌توان یک گروه چهار نفری تشکیل داد به طوری که

(الف) ۲ مرد و ۲ زن انتخاب شود؟  

$$\binom{2}{2} \times \binom{5}{2} = 1 \times 10 = 10 \checkmark$$

←

(ب) حد اقل یک زن انتخاب شود؟

یک زن یا بیشتر  

$$\binom{2}{1} \times \binom{5}{3} + \binom{2}{2} \times \binom{5}{2} = 20 + 10 = 30 \checkmark$$

(ج) حداکثر یک مرد انتخاب شود؟

یک مرد یا کمتر  

$$\binom{5}{1} \times \binom{3}{3} + \binom{5}{0} \times \binom{3}{4} = 5 + 0 = 5 \checkmark$$

برابر از ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخ‌گویی انتخاب کرد، به شرط آنکه حداکثر ۴ پرسش از ۵ پرسش اول، انتخاب شود؟

۳ پرسش از ۵ پرسش اول یا ۵ پرسش از ۵ پرسش اول یا ۴ پرسش از ۵ پرسش اول و ۴ پرسش از ۵ پرسش دوم  

$$\binom{5}{3} \times \binom{5}{2} + \binom{5}{5} \times \binom{5}{3} = 100 + 100 = 200 \checkmark$$

مثال: گل‌فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته ۳ تا ۵ شاخه گل‌های متماثل قرار می‌دهد. چند دسته گل متفاوت می‌تواند بسازد؟

مثال: از بین ۱۲ نفر به چند طریق می‌توان گروه‌های با حداقل ۳ عضو تشکیل داد؟

یا دایره‌ای:  $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$   
 تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی

تعداد چند ضلع‌های محاطی که با n نقطه، متماثل و خارج بر محیط یک دایره می‌توان ساخت کدام است؟ (جواب: ۲۱۹)

تعداد زیرمجموعه‌ای با تعداد عضوی فرد یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌ای با تعداد زوج آن مجموعه برابر است.  

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}$$

سوال: از بین ۸ دانش آموز به چند طریق می توان یک گروه ۳ نفره انتخاب کرد به طوری که فرد مخصوصی اصلاً انتخاب نشود؟

سوال: از بین ۸ دانش آموز به چند طریق می توان یک گروه ۳ نفره انتخاب کرد به طوری که یک فرد مورد نظر در بین آنها باشد؟

گزینه ۱: تعداد ترکیب های  $r$  تایی  $n$  شی متناظر، که هکلی شامل یک شی بخصوصی اند برابر است با:  $\binom{n-1}{r-1}$

گزینه ۲: تعداد ترکیب های  $r$  تایی  $n$  شی متناظر، که هکلی ناقص یک شی بخصوصی اند برابر است با:  $\binom{n-1}{r}$

سوال: از بین افراد  $a, b, c, d, e, f, g, h$  به چند طریق می توان ۴ نفر انتخاب کرد به طوری که

(الف)  $a$  و  $b$  حتماً انتخاب شوند؟

$a, b, c, d, e, f, g, h$   
انتخاب ۲ نفر دیگر از ۶ نفر باقی مانده انتخاب شده اند  $\rightarrow \binom{6}{2} = 15 \checkmark$

(ب)  $c$  انتخاب نشود؟  $\rightarrow \binom{7}{4} = 35 \checkmark$   
انتخاب ۴ نفر از ۷ نفر باقی مانده

(ج)  $a$  و  $b$  انتخاب شوند و  $c$  انتخاب نشود؟

$a, b, c, d, e, f, g, h$   
انتخاب ۲ نفر دیگر از ۵ نفر باقی مانده  $\rightarrow \binom{5}{2} = 10 \checkmark$   
انتخاب شده اند

سوال: از ۱۰ پرسش موجود به چند طریق می توان به ۸ سوال جواب داد به طوری که پاسخ به ۳ سوال اول اجباری باشد؟

سوالها: ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰  
اجباری (ثابت)  $\rightarrow$

سوال: مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  دارای چند زیر مجموعه ۴ عضوی است به طوری که

(الف) فاقد ۱ باشد؟  $\rightarrow$   $\{2, ?, ?, ?\}$   $\rightarrow$  ۳ است

(ب) شامل ۲ و فاقد ۱ باشد؟  $\rightarrow$   $\{2, ?, ?, ?\}$   $\rightarrow$  ۳ است  $\rightarrow$   $\binom{5}{3} = 10 \checkmark$   
انتخاب ۳ عضو دیگر از ۵ عضو باقی مانده

سوال: از بین ۱۰ نفر که دونفر آنها برادر هستند، به چند طریق می توان یک گروه ۶ نفری تشکیل داد به طوری که

(الف) برادر و برادر بهم در گروه نباشند؟  $\rightarrow$  هیچ کدام از برادر نباشند  $\rightarrow$  فقط یکی از دو برادر در گروه باشد  $\rightarrow$  ۲ است  $\rightarrow$   $\binom{9}{5} = 252$

(ب) هر دو برادر با هم در گروه نباشند؟  $\rightarrow$  هر دو برادر با هم در گروه نباشند  $\rightarrow$  ۲ است  $\rightarrow$   $\binom{9}{5} = 252$

مثال در اداره ای ۱۸ پرسنل شامل ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند و ۳ کارشناس امور حقوقی مشغول به کارند. به چند طریق می توان یک جلسه ۵ نفره برگزار کرد به طوری  
الف) رئیس و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند!

ب) یکی از معاونان و یک کارمند در جلسه باشند!

ج) رئیس، یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس اداری باشند!

مثال یک آشپز با استفاده از ۳ ادویه از بین ۱۰ ادویه موجود، یک طعم مخصوص درست می کند.  
این آشپز چند طعم می تواند درست کند هرگاه  
الف) محدودیتی نباشد؟

ب) دو نوع ادویه نباید با هم به کار روند؟

ج) سه نوع ادویه نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

د) ادویه یک به دو دسته ۵ تایی تقسیم می شوند، که ادویه های دسته اول با ادویه های دسته دوم سازگاری ندارند؟

نویسنده کتاب در موضوعات مختلف که ریاضی، فیزیک و زیست هم جز آن است، در اختیار داریم. به چند طریق می توان  
۴ کتاب را طوری انتخاب کرد که اگر ریاضی انتخاب شود، زیست نیز انتخاب شود و اگر فیزیک انتخاب شود،  
زیست انتخاب نشود؟

۱۰۶ ۱۱۴

۱۵۴ ۱۶۵



$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

نتیجه "قاعده پاسکال"

نتیجه حاصل  $\binom{13}{4} + \binom{13}{3} + \binom{13}{2}$  کدام است!  $\binom{13}{4} + \binom{13}{3} + \binom{13}{2}$  نتیجه حاصل  $\binom{21}{6} + 7\binom{21}{5} + \binom{21}{4}$  کدام است؟

$\binom{13}{4}$ (1)	$2 \times \binom{21}{6}$ (1)
$\binom{13}{3}$ (2)	$\binom{21}{5}$ (2)
$\binom{13}{2}$ (3)	$2 \times \binom{21}{4}$ (3)
$\binom{13}{1}$ (4)	$\binom{21}{3}$ (4)

نتیجه یک مجموعه ۱۵ عضوی دارای چند زیر مجموعه ۹ عضوی یا ۱۰ عضوی است؟

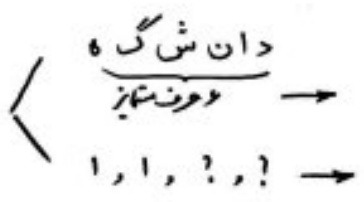
$2 \times \binom{15}{9}$ (1)	$\binom{15}{9}$ (2)
$2 \times \binom{15}{10}$ (3)	$\binom{15}{10}$ (4)

ترکیب با اشیای تکراری ←

نتیجه: به چند طریق می توان ۳ حرف از حروف کلمه "گسسته" انتخاب کرد؟

$9 \times 2 \times 1$ (1)
$7 \times 6 \times 5$ (2)

نتیجه: به چند طریق می توان ۴ حرف از حروف کلمه "دانشگاه" انتخاب کرد؟ (جواب: ۲۵)



سورس هوی از حرف کلمه DELAVARAN بر روی ۹ گوی زنده شده است. به چند طریق می توان ۳ گوی از این ۹ گوی انتخاب کرد!

$4 \times 3 \times 2$ (1)	$3 \times 2 \times 1$ (2)
$8 \times 7 \times 6$ (3)	$9 \times 8 \times 7$ (4)



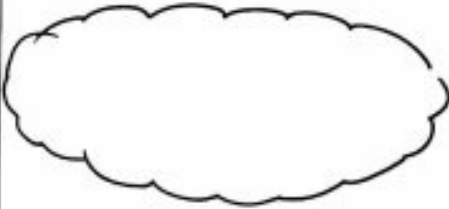
(Permutation)

تبدیل: انتخاب همگام با جایگزینی

در مسایلی مطرح می شود که اشیاء را انتخاب می کنیم ولی ترتیب و آرایش آنها نیز مهم است. به عبارت دیگر



مثال: به چند طریق می توان از بین ۵ دانش آموز یک صف ۳ نفری تشکیل داد؟



مثال در یک شرکت سهامی، از بین ۶ نفر، به چند طریق می توان

۳ نماینده انتخاب کرد؟ (با یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کرد؟)

مثال در یک مسابقه ورزشی بین ۶ دانش آموز، به چند طریق می توان

به رتبه های اول، دوم و سوم، مدال های طلا، نقره و برنز داد؟

مثال بدون ظرفی یک سیب، یک پرتقال و یک انار قرار دارد. اگر از بین ۶ نفر، ۳ نفر مجاز باشند به طرف ظرف نقره و هر کدام یک سیب بردارند به چند طریق سه سیب توزیع می شود؟

مثال با حروف کلمه "دبیرستان" چند کلمه چهار حرفی می توان نوشت به طوری که (الف) هیچ شرطی نباشد.

(ب) هکلی با حرف "د" شروع شوند؟

(پ) هکلی شامل حرف "د" باشند؟

(ت) هکلی شامل حرف "د" و "ز" فاقد "ن" باشند؟

(ث) هکلی با "د" شروع شوند و به حرف "ن" ختم گردند؟

شال: باحروف کلمه "دانش پژوه" چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت به طوری که  
الف) در چهار حرف اول آن از حروف کلمه "دانش" استفاده شود؟

ب) در چهار حرف اول آن، کلمه "دانش" دیده شود؟

تت) در یک ماشین حساب با ۲۰ کلید، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید با ترتیب مشخص قرار داده شوند. اگر فردی دستور خاص را نداند و نخواهد به تعداد این کار را انجام دهد، در صورتی که امتحان کردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان ببرد، این فرد حداکثر چند ساعت زمان برای اجرای دستور لازم دارد؟

۲۱:۲۶ (۱)  
۳:۴۸ (۲)  
۳:۲۰ (۳)  
۲:۴۸ (۴)

شال ۳م: به چند طریق می توان ۳ دختر ۵ ساله و ۵ پسر ۵ ساله را در یک ردیف قرار داد، به طوری که  
الف) محدودیتی نباشد؟  
ب) در دو انتهای این ردیف، دختر باشد؟

پ) در دو انتهای این ردیف، افراد از یک جنس باشد؟

ت) هیچ دو دختری کنار هم نباشند؟

شال ۸ نفر به نام های  $a, b, c, d, e, f, g, h$  به چند طریق می توانند  
الف) در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که بین  $a$  و  $b$  دقیقاً سه نفر دیگر باشد؟

ب) در یک میز قرار گیرند، به طوری که بین  $a$  و  $b$  دقیقاً سه نفر دیگر باشد؟

پ) در یک میز قرار گیرند، به طوری که هیچ یک از افراد  $a, b, c$  کنار هم نباشند؟

تت) به چند طریق می توان از بین ۷ استاد ریاضی، یک میزگرد ۴ نفری تشکیل داد؟

۱۲۰ (۱)  
۲۱۰ (۲)  
۴۸۰ (۳)  
۸۴۰ (۴)

آگزین (۲)

شال ۹۴: ارقام ۱، ۲، ۳، ...، ۹ به چند طریق می توان یک عدد پنج رقمی ساخت به طوری که درست دو رقم آن زوج باشد؟

۷۲۰ (۱)  
۷۲۰ (۲)  
۹۶۰ (۳)  
۸۴۰ (۴)

برابر ۴ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۳ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را به چند طریق می‌توان به طوری در میان درفصله‌ای حمید؟  
۵۰

اگر کتاب در میان گفته می‌شود ←  
 $7! \times \binom{6}{4} \times \binom{5}{3}$   
چگونگی ۷ کتاب انتخاب کتابها

اگر قرار باشد کتابهای برسانی به‌هم باشند ←

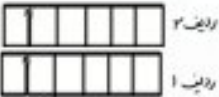
$2! \times 4! \times 3! \times \binom{6}{4} \times \binom{5}{3}$   
چگونگی ۲ کتاب  
چگونگی ۴ کتاب  
چگونگی ۳ کتاب  
انتخاب کتابها

... کتابهای سال اول کنار هم باشند ←

$5! \times 3! \times \binom{6}{4} \times \binom{5}{3}$   
چگونگی ۵ کتاب  
چگونگی ۳ کتاب  
انتخاب کتابها

تین ۳۰۰ در یک سال، به چند طریق می‌توان ۷ نفر را روی ۱۲ صندلی یک ردیف قرار داد به طوری که هیچ دو صندلی خالی مجاری وجود نداشته باشد؟

شال ۳۰۰ در یک سال دو ردیف صندلی ۶ تایی قرار دارد. به چند طریق می‌توان ۴ دانش‌آموز سال دهم و ۴ دانش‌آموز سال یازدهم را روی این صندلی‌ها نشاند، به طوری که دهی در ردیف اول باشند؟ (یازدهمی به دلخواه می‌نشینند)



برابر ۱۴۰۱ در یک مطب ۵ صندلی در یک ردیف قرار دارد. ۷ بیمار هم‌زمان وارد مطب می‌شوند. به چند طریق می‌توان این ۵ صندلی بنشینند، به طوری که دو نفر از آن‌ها نخواهند کنار هم بنشینند؟

- (۱) ۱۵۶۰
- (۲) ۱۸۰۰
- (۳) ۲۰۴۰
- (۴) ۲۲۸۰

توجه: هرگاه ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخابی مشخص باشد (در صورت سوال گفته باشد)، آن‌گاه ...

تت چند عدد سه رقمی باشد « رقم صدگان < رقم دهگان < رقم یکان » می‌توان نوشت؟

- (۱) ۷۸
- (۲) ۹۰
- (۳) ۲۱۰
- (۴) ۱۳۲

اگر گفته می‌شود (رقم صدگان > رقم دهگان > رقم یکان)؟  
اگر گفته می‌شود (رقم صدگان < رقم دهگان < رقم یکان)؟

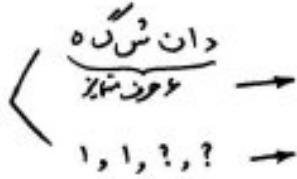


تبدیل با اشیای تکراری راه حل شایسته‌ی حالت با جهت مشخص شدن وضعیت تکراری با

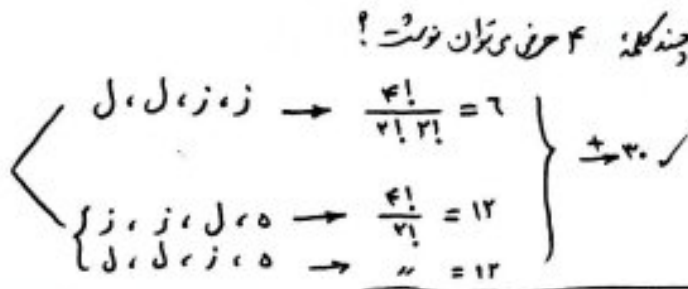
نتیجه: با حروف کلمه "گسسته" چند کلمه ۳ حرفی وجود دارد؟

۳۰ (۲) ۶ (۱)  
۳۳ (۴) ۲۴ (۳)

نتیجه: با حروف کلمه "دانشگاه" چند کلمه ۴ حرفی وجود دارد؟ (جواب: ۴۸۰)



نتیجه: با حروف کلمه "زلزله" (این چند کلمه ۳ حرفی توان نوشت؟



نتیجه: تعداد جایگشت‌های سه حرفی با حروف کلمه SERESHT کدام است؟

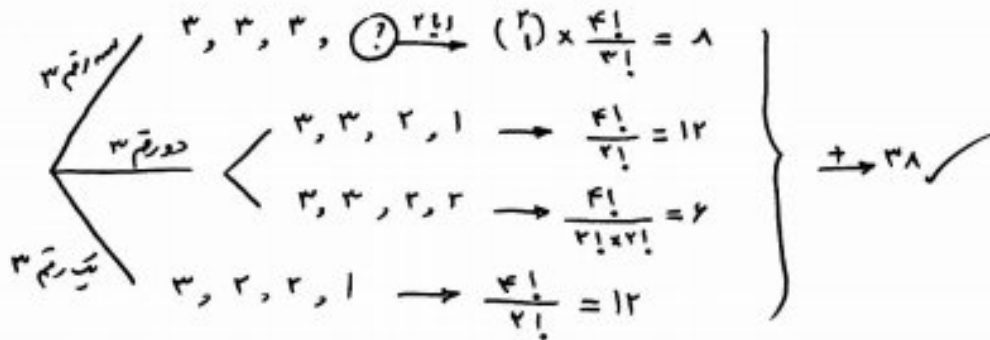
۸۴ (۱) ۶۰ (۲)  
۷۱ (۳) ۵۶ (۴)

نتیجه: تعداد جایگشت‌های ۴ حرفی از حروف کلمه SALAMAT که در حرف آن A بار ۲، کدام است؟ (جواب: ۱۲۰)

۲۱ (۱) ۳۶ (۲)  
۵۶ (۳) ۷۱ (۴)

تت با ارقام ۲، ۲، ۴، ۴، ۶، ۶ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

تت با ارقام ۱، ۲، ۲، ۳، ۳، ۳ چند عدد چهار رقمی وجود دارد؟



تت با حروف کلمه DELAVARAN چند کلمه حرفی می‌توان ساخت؟

$210 \times 2 = 420$

$26 \times 2 = 52$

تبدیل r تایی n شی ← انتخاب r شی از n شی و جایگزینی r شی انتخاب شده

قضیه: تعداد تبدیل‌های r تایی n شی متناهی برابر است با

$$P(n, r) = P_n^r = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \in \mathbb{N} \quad : r \leq n$$

نتیجه:

مثال: اگر  $\binom{n}{2} = 36$  باشد،  $(n)_2 - \binom{n}{2}$  کدام است؟ (۱) ۵۶ (۲) ۸۴ (۳) ۹۲ (۴) ۱۰۵

توزیع اشیای یکسان در جعبه های متمایز  
EX



مثال: به چند طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر، به دوزاه توزیع کرد؟  
EX

قضیه: تعداد روش های توزیع  $n$  شی یکسان در  $k$  جعبه متمایز، که ممکن است به برخی جعبه های خالی نرسد، برابر است با:  
اثبات:

مثال ۳: معادله  $x + y + z = 5$  چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟  
معادله  $x$  خطی با ضرایب واحد درجه اول +۱

نتیجه: تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  برابر است با:  $\binom{n+k-1}{k-1}$

برابر تعداد چارتابی مرتب  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  از اعداد صحیح نامنفی که در تساوی  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$  صدق نمایند.  
تست: چند عدد طبیعی حداکثر چهاررقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر ۹ باشد؟

۲۴ (۲)	۱۲ (۱)
۲۸۶ (۳)	۱۴۳ (۴)
۲۲۰ (۲)	۱۲۰ (۱)
۲۴۰ (۳)	۱۴۰ (۴)



برابر رخ تعداد جوابهای صحیح و نامنتی معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = 7$  با تعداد جوابهای صحیح و نامنتی معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 2$  برابر است.  $k$  کدام است؟

- (۱) ۶
- (۲) ۷
- (۳) ۸
- (۴) ۹

مثال معادله  $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 20$  چند جواب صحیح غیر منفی دارد؟

مثال معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 13$  چند جواب صحیح و نامنتی فرد دارد؟

مثال: بسط عبارت  $(a+b-c+d)^7$  چند جمله دارد؟  
(۹۹)

تمرین دستگاه  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \end{cases}$  چند جواب صحیح و نامنتی دارد؟  
(جواب: ۱۲۷)  
(بیان دیگر: معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$  چند جواب حسابی با شرط  $x_1 + x_2 + x_3 = 5$  دارد؟)

نیت معادله  $(x_1 + x_2) \cdot (x_3 + x_4 + x_5) = 21$  چند جواب صحیح و نامنتی دارد؟  
(۱) ۷۰۲  
(۲) ۷۵۴  
(۳) ۸۰۲  
(۴) ۸۶۴

توزیع اشیای یکسان در جعبه‌های متمایز به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند (در هر جعبه حداقل یک شی باشد)

ک

برای هر  $n$  و  $k$  که  $n \geq k$  باشد، به چند طریق می‌توان  $n$  شی یکسان را بین  $k$  جعبه متمایز توزیع کرد به طوری که به هر کدام لااقل یک شی برسد؟

نتیجه: تعداد روش‌های توزیع  $n$  شی یکسان در  $k$  جعبه متمایز، به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند، برابر است با  $\binom{n-1}{k-1}$  (در هر جعبه حداقل یک شی باشد)

اثبات: ابتدا در هر جعبه یک شی قرار می‌دهیم ( $k$  شی مصرف می‌شود)، که در این صورت  $(n-k)$  شی باقی می‌ماند. اکنون مسئله توزیع  $(n-k)$  شی یکسان در  $k$  جعبه متمایز مطرح است. که ممکن است از آنها به برخی چیزها نرسد. پس جواب عبارت است از:  $\binom{(n-k)+(k-1)}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$

برای هر  $n$  و  $k$  که  $n \geq k$  باشد، به چند طریق می‌توان  $n$  شی یکسان را در  $k$  جعبه متمایز توزیع کرد به طوری که به هر کدام لااقل یک شی برسد؟

مثال: با پنج حرف  $a, b, c, d, e$  چند رمز ۱۰ حرفی می‌توان ساخت به طوری که هر یکی از این پنج حرف حداقل یک بار ظاهر شود؟

مثال معادله  $x+y+z=9$  چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

نتیجه: تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله  $x_1+x_2+\dots+x_k=n$  برابر است با:  $\binom{n-1}{k-1}$

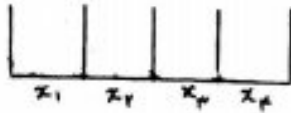
اثبات: ابتدا در هر کدام از متغیر (جعبه)  $x_1, x_2, \dots, x_k$  یک شی قرار می‌دهیم ( $k$  شی مصرف می‌شود). اکنون مسئله توزیع  $(n-k)$  شی یکسان باقی‌مانده در  $k$  جعبه متمایز مطرح است. که ممکن است از بعضی از جعبه‌ها چیزی نرسد. یعنی تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله  $x_1+x_2+\dots+x_k=n-k$  که برابر است با:  $\binom{(n-k)+(k-1)}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$

برای  $n=14$  تعداد جواب‌های طبیعی دستگاه معادلات  $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=9 \\ x_4+x_5=7 \end{cases}$  کدام است؟

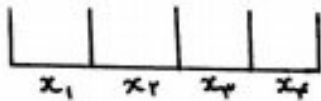
- ۱) ۷۲
- ۲) ۱۳۶
- ۳) ۱۴۴
- ۴) ۱۶۸

شرط های حداقلی (بزرگتر مساوی)

مثال  $\frac{EX}{EX}$  به چند روش می توان ۱۳ توب یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد، به طوری که به هر کدام حداقل ۲ توب برسد؟



مثال  $\frac{EX}{EX}$  معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$  چند جواب صحیح و نامنفی با شرط های  $x_1 > 2$  و  $x_3 > 3$  دارد؟



مثال  $\frac{EX}{EX}$  معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$  چند جواب صحیح و مثبت با شرط های  $x_1 > 2$  و  $x_4 > 3$  دارد؟



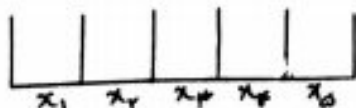
مثال  $\frac{EX}{EX}$  معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$  چند جواب صحیح و مثبت با شرط  $x_i \geq i$  دارد؟ ( $i=1, 2, 3, 4$ )

حل  $\rightarrow x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3, x_4 \geq 4 \rightarrow$ 

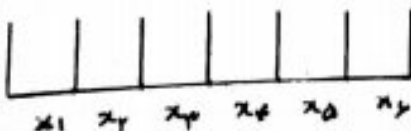
0	00	000	0000
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$

 $\rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$   $\frac{n=7}{k=4} (7+4-1) = \binom{10}{3} = 120$    
 (۷ توبی مانده)  $\rightarrow$  روش بوزن

مثال  $\frac{EX}{EX}$  معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$  چند جواب صحیح و نامنفی با شرط  $x_i > 0$  دارد؟ ( $2 \leq i \leq 5$ )



مثال  $\frac{EX}{EX}$  معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$  چند جواب صحیح و مثبت با شرط های  $x_3 = 4$  و  $x_5 > 2$  دارد؟





مثال  $\frac{Ex}{Ex}$  به چند طریق می توان یک دسته گل شامل ۱۱ شاخه، از ۵ نوع گل مختلف انتخاب کرد به طوری که  
(الف) به دوازده انتخاب کنیم؟  
(ب) ۱۱ شاخه

(ب) از هر نوع حداقل یک شاخه انتخاب کنیم؟

(ب) از هر نوع گل حداقل دو شاخه انتخاب کنیم؟  
(ب) ۱۱ شاخه

(ت) از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم؟

(د) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم؟

(ج) دقیقاً از ۲ نوع گل <sup>بخصوص</sup> اصداً انتخاب کنیم؟

(ج) فقط از ۲ نوع گل انتخاب کنیم؟

تمرین  $\frac{H-w}{H-w}$  بسط عبارت  $(a+b-c+d)^2$  دارای چند جمله است به طوری که  
(الف) توان  $a$  برابر ۲ باشد؟  
(ب) توان  $a$  حداقل ۲ باشد؟

شرط های حداکثری ☹️ ←

برابر ۹۹. تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله  $x+y+z+t=11$  به شرط آن که  $x < 5$  باشد، کدام است؟

- ۲۱۰ (۱)
- ۲۲۰ (۲)
- ۲۷۰ (۳)
- ۲۸۰ (۴)

تیت ۴.۳ به چند طریق می توان ۱۱ سکه یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد به طوری که شخص A حداکثر ۴ سکه دریافت کند؟

(توزین ۴)

- ۲۱۰ (۱)
- ۲۲۰ (۲)
- ۲۷۰ (۳)
- ۲۸۰ (۴)

برابر ۱۴۰۱ چند عدد طبیعی کوچکتر از ۶۰۰۰ با مجموع ارقام ۸ وجود دارد؟

- ۱۵۵ (۱)
- ۱۶۵ (۲)
- ۱۶۴ (۳)
- ۱۵۸ (۴)

تیت تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله  $x+y+z+t=11$  با شرط های  $x < 5$  و  $y > 3$  کدام است؟

- ۱۱۰ (۱)
- ۱۲۰ (۲)
- ۱۰۰ (۳)
- ۹۰ (۴)

نامعادله‌های خطی با ضرایب واحد

مثال: نامعادله  $x + y + z \leq 8$  چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟  
 برابر ۹۷



مثال: نامعادله  $x + y + z < 9$  چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

مثال: نامعادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$  با شرطهای  $x_1 > 2$  و  $x_4 > 2$  چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

ب) چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

مثال: نامعادله  $4 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$  چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

تمرین: نامعادله  $100 < (x_1 + x_2 + x_3)^3 < 250$  چند جواب طبیعی دارد؟  
 H.W

(جواب: ۱۶)



معادله های غیرخطی / معادله های با ضرایب غیر واحد

↪

مثال  $\frac{Ex}{Ex}$  معادله  $x_1 + x_2 + 10x_3 = 0$  چند جواب صحیح و نامنتی دارد؟

نیت معادله  $x_1^4 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$  چند جواب صحیح و نامنتی دارد؟

- ۲۱ (ب)
- ۳۵ (د)
- ۴۹ (ج)
- ۵۶ (ع)

سوال ۱۴۰۰ تعداد جواب های صحیح و نامنتی معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{10}{x_4}$  کدام است؟

- ۷۲ (ب) ۶۰ (ا)
- ۹۶ (ع) ۸۱ (ج)

سوال ۱۴۰۱ معادله  $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 4$  چند جواب صحیح و نامنتی دارد؟

- ۲۰ (ب) ۳۵ (ا)
- ۱۸ (ع) ۳۱ (ج)

قرین  $\frac{H.W}{H.W}$  معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{10}{x_4}$  چند جواب صحیح و نامنتی دارد؟ (جواب : ۱۴)

قرین  $\frac{H.W}{H.W}$  معادله  $(x_1 + x_2)^3 + x_3 + x_4 = 20$  چند جواب طبیعی دارد؟ (جواب : ۱۱)

تت معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + \frac{3}{x_2} = 14$  با شرایط  $x_1 > 1$ ,  $x_2 > 2$  و  $x_3 > 3$  چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

- (۱) ۱۵
- (۲) ۱۷
- (۳) ۱۹
- (۴) ۲۱

تت تعداد جوابهای طبیعی معادله  $(x_1^2 + x_2 + x_3)(\frac{x}{y_1} + y_2 + y_3) = 245$  کدام است؟

- (۱) ۳۰
- (۲) ۳۶
- (۳) ۱۲
- (۴) ۹۰

تت معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = 5$  چند جواب صحیح و نامنفی با شرط  $x_1 > x_2$  دارد؟

- (۱) ۱۰
- (۲) ۱۲
- (۳) ۱۶
- (۴) ۲۰

تت چند طریق می توان ۵ خردکار یکسان و ۴ مداد یکسان را بین ۳ نفر به دوگانه توزیع کرد؟

- (۱) ۲۸۰
- (۲) ۳۱۵
- (۳) ۲۶۵
- (۴) ۳۴۰

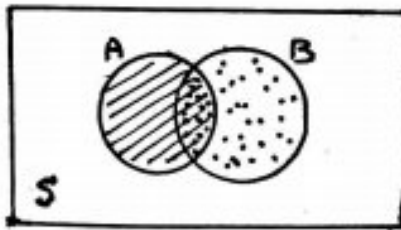
تت در چند جایگشت از حروف کلمه VISITING بین هر دو حرف I حداقل دو حرف قرار دارد؟

- (۱) ۱۲
- (۲) ۱۱۲
- (۳) ۲۴
- (۴) ۲۲۴

گزینه ۱

اصل شمول و عدم شمول

Ex



① اگر دو مجموعه A و B زیر مجموعه‌های مجموعه‌های متناهی S باشند،

آن‌گاه

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   
 عدم شمول   شمول   عدم شمول  
 (حاصل می‌گردد)

نتیجه: تعداد عضوهای از مجموعه S، که نه در A و نه در B قرار دارند، عبارت است از:

Ex

$$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$

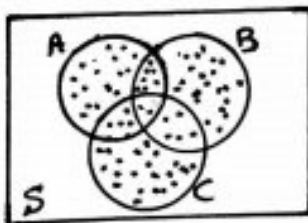
$\downarrow$   $\downarrow$   
 تعداد در A   و   تعداد در B

مثال: در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۸ نفر عضو تیم والیبال مدرسه‌اند. اگر ۹ نفر در هر دو تیم فعالیت کنند، چند نفر عضو هیچ کدام از این دو تیم نیستند؟

مثال: ۲۹۸  
Ex

② اگر سه مجموعه A، B، C زیر مجموعه‌های مجموعه‌های متناهی S باشند، آن‌گاه

Ex



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

نتیجه: تعداد عضوهای از مجموعه S، که در هیچ یک از مجموعه‌های A، B، C قرار ندارند، عبارت است از:

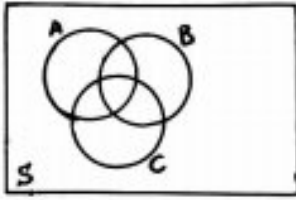
$$|A' \cap B' \cap C'| = |(A \cup B \cup C)'| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = |S| - \dots$$

مثال: از ۱۰۰ نفر دانش آموزان یک دبیرستان، ۳۵ نفر در رشته فوتبال، ۴۵ نفر در رشته والیبال و ۵۰ نفر در رشته بسکتبال فعالیت می‌کنند. اگر ۱۰ نفر در هر سه رشته فعالیت کنند، ۱۵ نفر فوتبال و والیبال، ۱۲ نفر فوتبال و بسکتبال و ۱۸ نفر والیبال و بسکتبال بازی کنند، چند نفر عضو هیچ رشته‌ای از این سه ورزش نیستند؟

Ex



مثال EX در یک دبیرستان از بین ۱۰۰ دانش آموز، ۳۰ نفر مجله A، ۵۰ نفر مجله B، ۵۰ نفر مجله C، ۳۰ نفر مجله A و B، ۲۰ نفر مجله A و C، ۲۰ نفر مجله B و C و ۱۰ نفر همه مجله A و B و C را می خوانند. مطلوب است تعداد دانش آموزانی که



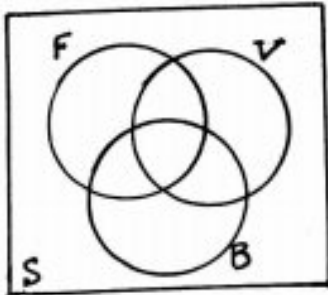
(الف) هیچ مجله ای نمی خوانند؟

(ب) دقیقاً ۲ مجله می خوانند؟

(پ) حداقل ۲ مجله می خوانند؟

(ت) فقط یک مجله می خوانند؟

مثال EX در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر عضو تیم بسکتبال اند. اگر ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نباشند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی کنند، مطلوب تعداد افرادی که



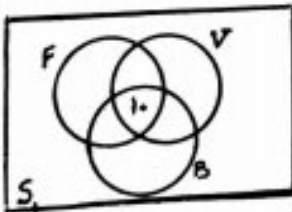
(الف) در هر سه رشته فعالیت می کنند.

(ب) فقط فوتبال بازی می کنند.

(پ) والیبال بازی می کنند و بسکتبال بازی نمی کنند.

(ت) فقط در یک رشته فعالیت دارند.

تمرین ۸.۳ از ۱۰۰ نفر دانش آموزان یک دبیرستان، ۳۵ نفر در رشته فوتبال، ۴۵ نفر در رشته والیبال و ۵۰ نفر در رشته بسکتبال فعالیت می کنند. اگر ۱۰ نفر در هر سه رشته فعالیت کنند و ۱۵ نفر در هیچ کدام از این سه رشته ورزشی عضویت نداشته باشند، چند نفر دقیقاً در دو رشته فعالیت می کنند؟

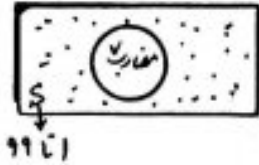


(جواب: ۲۵)

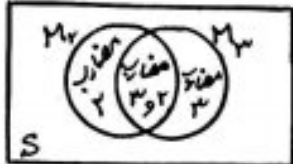
کتابچه پرسش و پاسخ  
تعمیر و نگهداری  
(دکتر زینبی)

مثال: بین اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰، چند عدد وجود دارد که

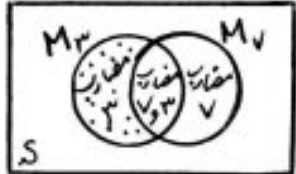
الف) مضرب ۷ نباشد؟



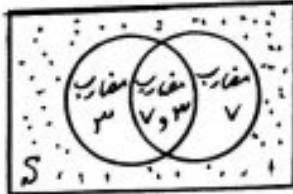
ب) بر ۲ یا بر ۳ بخش پذیر باشد؟



د) بر ۳ بخش پذیر باشد و بر ۷ بخش پذیر نباشد؟

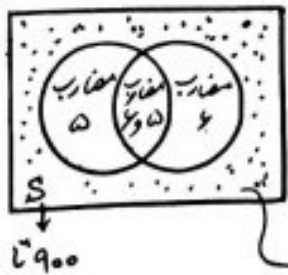


ج) نه بر ۳ بخش پذیر باشد و نه بر ۷ بخش پذیر باشد؟



ح) نه مضرب ۴ و نه مضرب ۶ باشد؟

برابر چند عدد سه رقمی وجود دارد که نه بر ۵ تقسیم پذیرند و نه بر ۶؟



$$\begin{cases} \text{تعداد مضرب ۵ سه رقمی} = \left[ \frac{999}{5} \right] - \left[ \frac{99}{5} \right] = 180 \\ \text{۴ " " " " } = \left[ \frac{999}{6} \right] - \left[ \frac{99}{6} \right] = 150 \\ \text{۶, ۵ " " " " } = \left[ \frac{999}{5 \times 2} \right] - \left[ \frac{99}{5 \times 2} \right] = 30 \end{cases} \quad ([5, 6] = 5 \times 6)$$

$$\text{جواب} = 900 - (180 + 150 - 30) = 600 \checkmark$$

نیت تعداد اعداد طبیعی که کمتر از ۳۰۱ که نه مضرب ۳، نه مضرب ۵ و نه مضرب ۷ است؟  
 (چند عدد طبیعی مانند  $n \leq 300, n \in \mathbb{N}$  وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۵، ۷ بخش پذیر نباشد)  
 ۸۰ (۲) ۷۰ (۱)  
 ۱۶۰ (۳) ۱۲۰ (۴)

تجزیه ۱۰۵ = ۳ × ۵ × ۷  
 تعداد اعداد دورقمی که نسبت به ۱۰۵ اول اند، کدام است؟  
 ۴۰ (۲) ۳۹ (۱)  
 ۴۲ (۳) ۴۱ (۴)  
 تعداد اعداد دورقمی (طبیعی) = ۹۹ - ۹ = ۹۰

$$\begin{cases} \text{تعداد اعداد دورقمی مضرب } ۳ = \left[ \frac{۹۹}{۳} \right] - \left[ \frac{۹}{۳} \right] = ۳۰ \\ \text{تعداد اعداد دورقمی مضرب } ۵ = \left[ \frac{۹۹}{۵} \right] - \left[ \frac{۹}{۵} \right] = ۱۸ \\ \text{تعداد اعداد دورقمی مضرب } ۷ = \left[ \frac{۹۹}{۷} \right] - \left[ \frac{۹}{۷} \right] = ۱۳ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{تعداد اعداد دورقمی مضرب } ۳ \text{ و } ۵ = \left[ \frac{۹۹}{۱۵} \right] - \left[ \frac{۹}{۱۵} \right] = ۶ \\ \text{تعداد اعداد دورقمی مضرب } ۳ \text{ و } ۷ = \left[ \frac{۹۹}{۲۱} \right] - \left[ \frac{۹}{۲۱} \right] = ۴ \\ \text{تعداد اعداد دورقمی مضرب } ۵ \text{ و } ۷ = \left[ \frac{۹۹}{۳۵} \right] - \left[ \frac{۹}{۳۵} \right] = ۲ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{جواب} &= |M_3 \cap M_5 \cap M_7| = |\overline{M_3 \cup M_5 \cup M_7}| = |S| - |M_3 \cup M_5 \cup M_7| \\ &= |S| - (|M_3| + |M_5| + |M_7| - |M_3 \cap M_5| - |M_5 \cap M_7| - |M_3 \cap M_7| + |M_3 \cap M_5 \cap M_7|) \\ &= 90 - (30 + 18 + 13 - 6 - 4 - 2 + 0) \end{aligned}$$

تمرین ۱۰۷  
 چند عدد طبیعی نابیشتر از ۳۰۰ وجود دارد که نسبت به ۳، ۵، ۷ اول اند؟  
 ۶۰ (۲) ۱۲۰ (۱)  
 ۱۶۰ (۳) ۸۰ (۴)

نیت چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که مضرب ۲ و ۳ باشد و مضرب ۷ نباشد؟  
 ۱۲۸ (۱) ۱۲۹ (۲)  
 ۱۳۱ (۳) ۱۳۰ (۴)



مثال Ex با مجموعه رأس های  $\{a, b, c\}$  چند گراف ساده می توان ساخت به طوری که فاقد رأس تنها باشد؟

$A_a$ :	مجموعه گراف های ساده ای که در آنها رأس $a$ تنهاست	
$A_b$ :	" " $b$ " " " " " "	
$A_c$ :	" " $c$ " " " " " "	

$$\text{جواب} = |A'_a \cap A'_b \cap A'_c| = |S| - |A_a \cup A_b \cup A_c|$$

$$= |S| - (|A_a| + |A_b| + |A_c| - |A_a \cap A_b| - |A_b \cap A_c| - |A_a \cap A_c| + |A_a \cap A_b \cap A_c|)$$

$$= \binom{3}{2} - (\binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} - \binom{2}{1} - \binom{2}{1} - \binom{2}{1} + \binom{1}{0}) = 4$$

$\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   
 کل گراف های ساده با ۳ رأس    گراف های ساده با ۲ رأس (رأس  $a$  تنها)    "    "    گراف های ساده با یک رأس ( $a, b$  تنها)    "    "    "    "    "    "    "    رأس  $a$  تنها (گراف های)

تمرین H.W با ۶ رأس متمایز  $v_1, v_2, \dots, v_6$  چند گراف ساده می توان ساخت به طوری که دقیقاً ۳ رأس تنها باشند؟ (جواب: ۱۵)

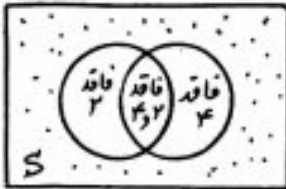
مثال Ex با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد چهار رقمی وجود دارد که در هکلی آنها رقم ۲ حداقل یک بار ظاهر شود؟

هیچ بار  $\leftrightarrow$  ممتنع  $\leftrightarrow$  حداقل یک بار



کل اعداد چهار رقمی با ارقام داده شده

بررسی Ex با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد چهار رقمی وجود دارد که در هکلی آنها هر یک از رقم‌های ۲ و ۳ حداقل یک بار ظاهر شود؟



A: اعداد چهار رقمی با ارقام داده شده که فاقد ۲ می‌باشند  $\rightarrow$

B: اعداد چهار رقمی با ارقام داده شده که فاقد ۳ می‌باشند  $\rightarrow$

$A \cap B$ : اعداد چهار رقمی با ارقام داده شده که فاقد ۲ و ۳ می‌باشند  $\rightarrow$

جواب =  $|A' \cap B'| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$   
 $= 4^4 - (3^4 + 3^4 - 2^4) = 110$

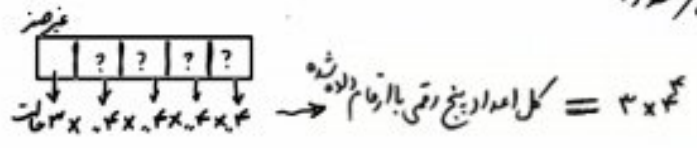
و  $\downarrow$  حداقل یک بار ۲ ظاهر شود  
 $\downarrow$  حداقل یک بار ۳ ظاهر شود

بررسی Ex چند عدد سه رقمی وجود دارد که در آنها هر یک از رقم‌های ۲، ۳ و ۴ حداقل یک بار ظاهر شوند؟

- ۵۲۴ ۵۴۱
- ۵۶۴ ۴۸۳

مثال Ex دیکه فصل ریزد ازش ۳ رقم از صفر تا ۹، که حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می‌شود و انشان کردن بر ریز آن ۵ ثانیه طول می‌کشد. حداقل چند دقیقه لازم است تا قفل باز شود؟

مثال: با ارقام ۲، ۱، ۰ و ۳ چند عدد پنج رقمی می توان نوشت که در هر یکی آنها هر یک از رقم ۲، ۱، ۰ حداقل یک بار ظاهر شود؟



$$\text{جواب} = \frac{3 \times 4^4}{\text{کل}} - \left[ \begin{array}{cccc} (3^4 + 2 \times 3^3 + 2 \times 3^2) & - & (2^4 + 2^3 + 1 \times 2^2) & + & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{فاصله ۳} & & \text{فاصله ۲} & & \text{فاصله ۱} \end{array} \right] = 280$$

مثال: برای باز کردن یک قفل رزنی ۵ رقمی، که هر یک از ارقام ۲، ۳، ۷ و ۰ حداقل یک بار در آن به کار رفته اند، اگر استمان بکران هر رمز، ۶ ثانیه طول بکشد، حداقل چند دقیقه زمان لازم است؟

با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ چند عدد شش رقمی می توان نوشت که در آن ۲ رقم ۳، ۲ رقم ۱، ۲ رقم ۰ ظاهر باشند؟

ترتیب	
۱	۲۲۴
۲	۲۸۶
۳	۳۲۴
۴	۳۳۶

رنگ با چهارگروه اند.

- گروه اول: کسانی که تا وقتی که هستند هستند و وقتی که نیستند نیستند.
- گروه دوم: کسانی که تا وقتی که هستند نیستند و وقتی که نیستند هم نیستند.
- گروه سوم: کسانی که تا وقتی که هستند نیستند و وقتی که نیستند باز هستند.
- گروه چهارم: کسانی که تا وقتی که هستند نیستند و وقتی که نیستند هم هستند.

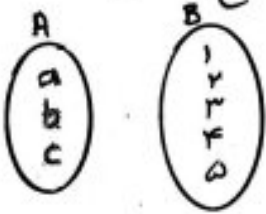
دکتر شریعی



توزیع اشیای متمایز در جعبه های متمایز (یافتن تعداد توابع)

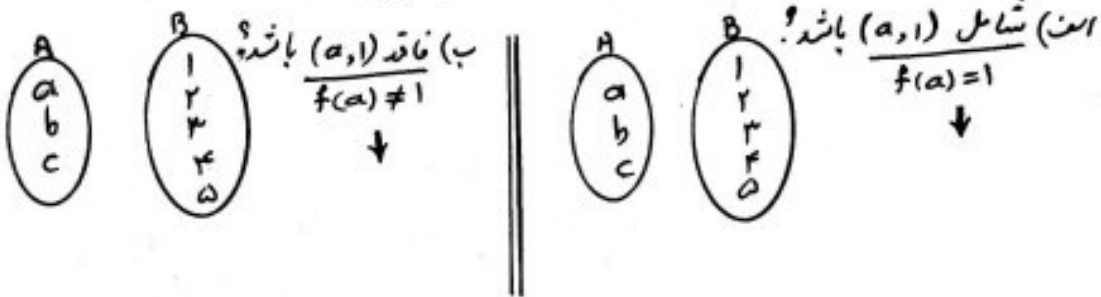
چون اشیاء متمایزند، یک شیء نمی تواند به طر همزمان در بیش از یک جعبه قرار گیرد. بنابراین بحث تعداد توابع از مجموعه اشیای متمایز به مجموعه جعبه های متمایز مطرح می شود.

مثال: از مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  چند تابع وجود دارد؟

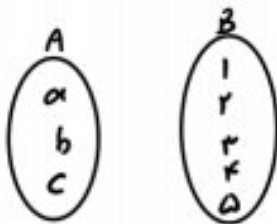


$|B|^{|A|} = \text{تعداد توابع از مجموعه } A \text{ به مجموعه } B$

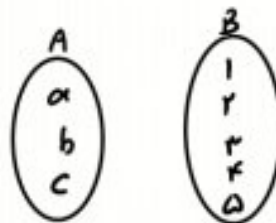
مثال: از مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  چند تابع وجود دارد به طوری که



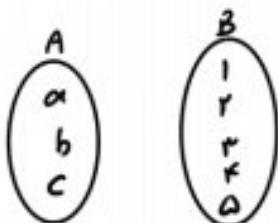
(ب) شامل  $(a, 1)$  و  $(b, 1)$  باشد؟



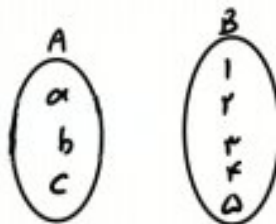
(ب) شامل  $(a, 1)$  و فاقد  $(b, 2)$  باشد؟



(ج) حداقل یک  $x \in A$  وجود داشته باشد که  $f(x) = 1$  باشد؟



(ث) فاقد  $(a, 1)$  و  $(b, 1)$  باشد؟





دانش آموزان

کلاسها

a  
b  
c

۱  
۲  
۳  
۴  
۵

مثال: به چند طریق می توان ۳ دانش آموز را در ۵ کلاس مختلف جای داد؟  
Ex

نتیجه: تعداد روش های توزیع  $n$  شی متمايز در  $k$  جعبه متمايز (بدون هیچ محدودیتی) برابر است با  $k^n$  در اینجا تعداد توابع از مجموعه  $n$  عضوی به یک مجموعه  $k$  عضوی.

مثال: ۸ نفر را که برابر یک برنامه تلویزیونی پاییک ارسال کرده اند، انتخاب کردیم. در ۴ مرحله و در مرحله ۱ جایزه به کمی از این ۸ نفر (با قرعه کشی) به دکواه بدیم. این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟ (یک نفری تواند ۴ جایزه را ببرد)  
Ex

○ ○

تمرین: یک خودروی ون با ۷ مسافر در مسیر حرکت خود، در ۳ ایستگاه توقف می کند. تعداد روش های پیاده شدن این ۷ مسافر کدام است؟

○ ○

(جواب: ۲۱۸۷)

مثال: به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر به دکواه توزیع کرد؟

○ ○

\* اگر قرار باشد فقط خودکارهای شماره ۱، ۲، به فرد  $a$  برسد، چه طوری؟

○ ○

\* اگر قرار باشد خودکار شماره ۱، به فرد  $a$  برسد، چه طوری؟

○ ○

\* اگر قرار باشد فقط یک خودکار به شخص  $a$  برسد، چه طوری؟

○ ○

\* اگر قرار باشد خودکار شماره ۱، به شخص  $a$  نرسد، چه طوری؟

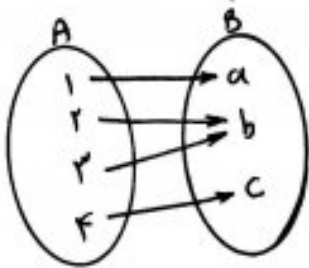
○ ○

\* اگر قرار باشد حداقل یک خودکار به شخص  $a$  برسد، چه طوری؟  
H.W

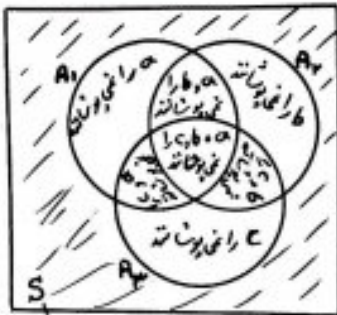


محاسبه تعداد توابع پوشا

تعریف:



مثال: از مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  به مجموعه  $B = \{a, b, c\}$  چند تابع پوشا وجود دارد؟  
Ex



- $A_1$ : مجموعه توابعی از  $A$  به  $B$  که  $a$  را نمی پوشاند (به  $a$  فلش نمی زنند)  $\xrightarrow[\text{به مجموعه ۲ عضوی}]{\text{تعداد توابع از مجموعه ۳ عضوی}} |A_1| = (3-1)^4$
- $A_2$ : مجموعه توابعی از  $A$  به  $B$  که  $b$  را نمی پوشاند (به  $b$  فلش نمی زنند)  $\xrightarrow{\quad \quad \quad} |A_2| = (3-1)^4$
- $A_3$ : مجموعه توابعی از  $A$  به  $B$  که  $c$  را نمی پوشاند (به  $c$  فلش نمی زنند)  $\xrightarrow{\quad \quad \quad} |A_3| = (3-1)^4$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

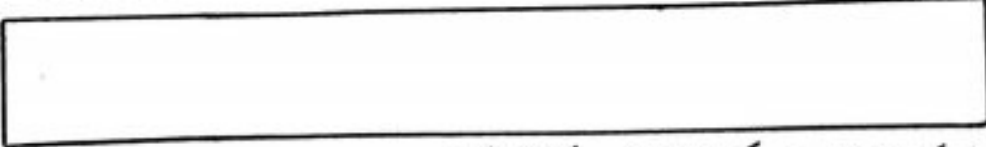
$$\text{تعداد توابع پوشا} = |S| - [ (|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|) ]$$

هر عضو پوشیده نشود
دو عضو پوشیده نشود
یک عضو پوشیده نشود

$$= \frac{3^4}{\text{کل توابع از } B \text{ به } A} - [ 3 \times (3-1)^4 - 3 \times (3-2)^4 + (3-3)^4 ] = 36$$

اجتماع توابع نا پوشا

فرمول تعداد توابع پوشا از یک مجموعه  $n$  عضوی به یک مجموعه  $m$  عضوی  $n > m$



مثال: تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی کدام است؟  
Ex

دو حالت خاص ۳:

$$3^n - 3 \times 2^n + 3$$

تعداد توابع پوشا از یک مجموعه  $n$  عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی

$$2^n - 2$$

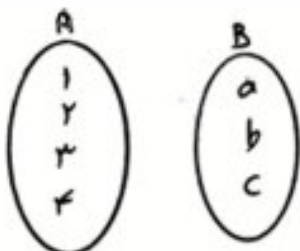
تعداد توابع پوشا از یک مجموعه  $n$  عضوی به یک مجموعه ۲ عضوی



مثال:  $\frac{9A}{Ex}$  تعداد توابع پوش از یک مجموعه ۶ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی کدام است؟  
 $450 \times 360$   
 $540 \times 380$

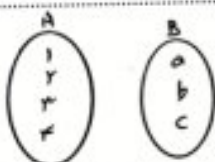
حالت خاص تعداد توابع پوش از یک مجموعه  $n$  عضوی به یک مجموعه  $n$  عضوی برابر است با  $n!$

مثال: از مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  به خودش چند تابع پوش وجود دارد؟



تعداد از مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  به مجموعه  $B = \{a, b, c\}$  چند تابع پوش  $354$  شامل  $(1, a)$  (با شرط  $f(0) = 0$ ) وجود دارد؟  
 $360$   
 $6 \times 120$

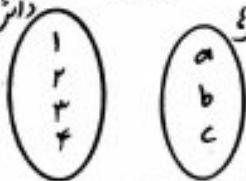
\* اگر گفته شود شامل  $(1, a)$  و  $(2, a)$  چه طور؟



\* اگر گفته شود شامل  $(1, a)$  و  $(2, b)$  چه طور؟

تعداد از مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  به مجموعه  $B = \{a, b, c\}$  چند تابع پوش و فاقد  $(1, a)$  وجود دارد؟ (۲ مرتبه)  
 $100 \times 120$   
 $140 \times 210$

مثال: به چند طریق می توان ۴ دانش آموز را در ۳ کلاس مختلف جای داد به طوری که در هر کلاس حداقل یک دانش آموز باشد؟



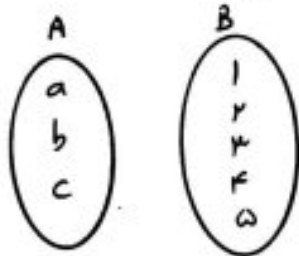
نتیجه: تعداد روش های توزیع  $n$  شی متمايز در  $k$  جعبه متمايز، به طوری در هر جعبه حداقل یک شی باشد، با تعداد توابع پوش از یک مجموعه  $n$  عضوی به یک مجموعه  $k$  عضوی برابر است.

مثال: به چند طریق می توان ۵ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداقل یک خودکار برسد؟  
 $99 \times 99$

مثال: به چند طریق می توان ۶ فیلم سینمایی مختلف را بین سه داور جای داوری تقسیم کرد به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

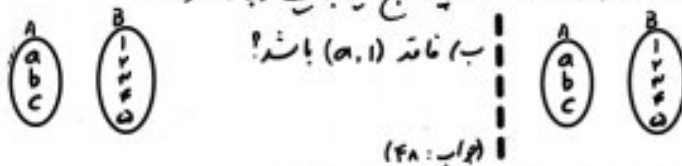
محاسبه تعداد توابع یک به یک

مثال: از مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  چند تابع یک به یک وجود دارد؟  
Ex



نتیجه: تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه  $n$  عضوی به یک مجموعه  $k$  عضوی برابر است با:  
Ex  
$$P(k, n) = (k)_n = \frac{k!}{(k-n)!} \quad (n \leq k)$$

نمونه: از مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  چند تابع یک به یک وجود دارد که  
H.W  
الف) شامل  $(a, 1)$  باشد؟  
ب) نامنه  $(a, 1)$  باشد؟



(جواب: ۴۸)

(جواب: ۱۲)

مثال: به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد  
Ex

به طوری که به هر نفر حداکثر یک خودکار برسد؟



نتیجه: تعداد روش های توزیع  $n$  شی متمايز در  $k$  جعبه متمايز به طوری که در هر جعبه حداکثر یک شی قرار گیرد، با تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه  $n$  عضوی به یک مجموعه  $k$  عضوی، یعنی  $P(k, n)$ ، برابر است.

مثال: به چند روش می توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ دانش آموز توزیع کرد به طوری که به هر دانش آموز حداکثر یک کتاب برسد؟  
Ex

برابر ۶ سه نفر متمايز را به چند طریق می توان در یک ۱۰ جعبه متمايز قرار داد به طوری که در هر جعبه حداکثر یک سه نفر قرار گیرد؟

مثال: به چند طریق می توان ۱۰ نامه مختلف را در ۱۰ پاکت متفاوت قرار داد، به طوری که در هر پاکت فقط یک نامه قرار گیرد؟

مربع های لاتین

یک جدول مربعی  $n \times n$  که سطرها و ستون های آن با اعداد طبیعی  $n$  پر شده باشند و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد.

مثال:

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2
2	1

یک مربع لاتین  $2 \times 2$

دو مربع لاتین  $3 \times 3$

2	3	4	1
3	2	1	4
4	1	2	3
1	4	3	2

2	3	4	1
4	1	2	3
1	4	3	2
3	2	1	4

دو مربع لاتین  $4 \times 4$

1	3	5	4	2
5	4	2	1	3
2	1	3	5	4
3	5	4	2	1
4	2	1	3	5

یک مربع لاتین  $5 \times 5$

تذکره: در یک مربع لاتین می توان درایه ها را با  $n$  عدد متمایز دکراه یا  $n$  حرف یا نماد پر کرد. اما در کتاب درسی فقط از اعداد  $n$  استفاده شده است.

a	b	c
b	c	a
c	a	b

سئوال: در مربع لاتین متقابل برای چند عدد وجود دارد؟

1	2	
	1	x

۱) صفر (۰)

۲) ۳ (۳)

سئوال: به ازای چند مقدار  $a$ ، مربع متقابل می تواند مربع لاتین باشد؟

1	3	4	2
2	1		
3		1	
4	a	1	

۱) صفر (۰)

۲) ۳ (۳)

سئوال: برای پر کردن مربع لاتین زیر به چند روش وجود دارد؟

۱) صفر (۰)  
۲) ۳ (۳)

1	4		
	2	3	
			2

	3	

۱) ۲ (۲)  
۲) ۳ (۳)



(نمونه ۴)

تیت به ازای چند مقدار  $x$ ، جدول مقابل یک مربع لایتین  $5 \times 5$  است؟

		x	5	
3		1		
		2		

- (۱) صفر ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

برای  $14$  مربع لایتین زیر را در نظر بگیرید. زوج مرتب  $(a, b)$  کدام است؟

a	3		
3	1	4	
	2	5	1
1	4	2	
b			

- (۱)  $(5, 3)$  (۲)  $(1, 4)$   
(۳)  $(2, 1)$  (۴)  $(4, 1)$

برای  $14$  مربع لایتین زیر را در نظر بگیرید. زوج مرتب  $(a, b)$  کدام است؟

		3	
b	3	1	4
	2	5	1
	1	4	2
			a

- (۱)  $(4, 5)$  (۲)  $(4, 2)$   
(۳)  $(1, 5)$  (۴)  $(1, 2)$

تعداد مربع های لایتین

مربع لایتین  $1 \times 1$  فقط یکی ۱

مربع لایتین  $2 \times 2$  دوتا  $\leftarrow$

1	2
2	1

2	1
1	2

مربع لایتین  $3 \times 3$   $\leftarrow$

۱۲ تا


### مربع لایتین چرخشی

در یک مربع لایتین  $n \times n$ ، سطر اول با اعداد  $1, 2, \dots, n$  پر شده است. اگر مطابق شکل زیر با شروع از سطر اول، هر سطر را یک واحد به راست منتقل کنیم و عدد خارج شده از مربع را در اولین خانه آن سطر قرار دهیم، سطر بعدی حاصل می‌شود و اگر این کار را برای تمام سطرها انجام دهیم، مربع لایتین چرخشی به دست می‌آید.

1	2	3	...	n-1	n	
n	1	2	...	n-2	n-1	
n-1	n	1	2	...	n-3	n-2
⋮						
3	4	5	...	1	2	
2	3	4	...	n	1	

مثال

① مربع لایتین چرخشی  $3 \times 3$

1	2	3
Ⓟ	1	2
Ⓠ	3	1

② مربع لایتین چرخشی  $4 \times 4$

1	2	3	4
Ⓟ	1	2	3
Ⓠ	4	1	2
Ⓡ	3	4	1

\* در هر سطر بعد از  $n$  عدد 1 است (و بعد 2، 3، ...)  
 \* در هر ستون بعد از  $n$  عدد 1 است (و بعد 1، 2، ...)

تست: اگر  $A$  یک مربع لایتین چرخشی  $9 \times 9$  با سطر اول  $1, 2, \dots, 9$  باشد، آن گاه در این  $a_{44}$  کدام است؟

$A =$

1	2	3	...	8	9
---	---	---	-----	---	---

- ۷ (۲) ۶ (۱)
- ۹ (۴) ۸ (۳)

تست: به چند طریق می‌توان مربع لایتین چرخشی زیر را تکمیل کرد؟

1	2	
	1	2
		1

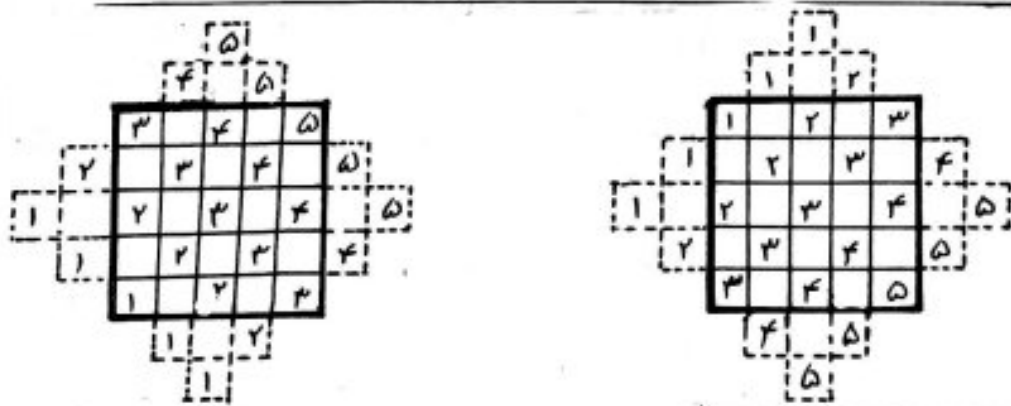
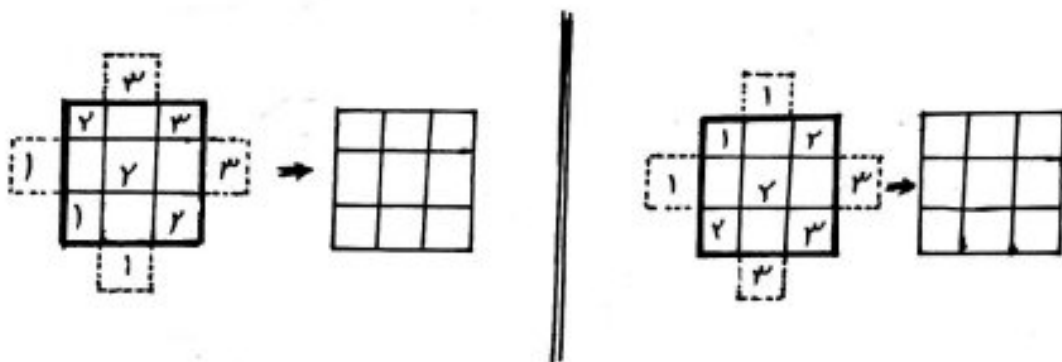
- ۱ (۲) صفر (۱)
- ۳ (۴) ۲ (۳)

تست: در یک مربع لایتین چرخشی  $A = [a_{ij}]_{10 \times 10}$  با سطر اول  $1, 2, \dots, 10$ ، حاصل  $a_{84} - a_{77}$  کدام است؟ (کسر ۲)

- ۱ (۴) صفر (۱)
- ۹ (۴) ۴ (۳)

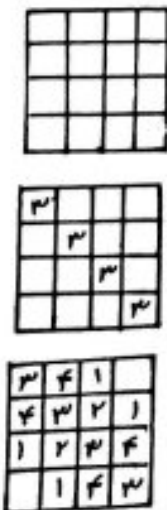
یک روش ساخت برای مربع‌های لاتین  $3 \times 3$  ،  $5 \times 5$  ، ... (مرتبه فرد)

- ① از هر چهار طرف، خانه‌هایی به جدول اضافه می‌کنیم تا به تعداد مرتبه جدول، ردیف‌های موازی با قطر اصلی ایجاد شود.
- ② در ردیف‌های موازی با قطر اصلی، هر ردیف را با عددی یکین (از اعداد  $1$  تا  $n$ ) پُر می‌کنیم (مثلاً در ردیف اول با عدد  $1$ ، ردیف دوم با عدد  $2$ ، ...). یا تمام ردیف‌های موازی با قطر اصلی را با اعداد  $1$  تا  $n$  پُر می‌کنیم (مثلاً در ردیف اول با اعداد  $1$  تا  $n$ ، ردیف دوم به همین ترتیب و ...).
- ③ اعداد خارج مربع اصلی را در سطر یا ستون مربوطه خود، به درازای خالی متقابل با فاصله  $n$  خانه دورتر منتقل می‌کنیم.



یک روش ساخت مربع لاتین  $4 \times 4$  (اختیاری)

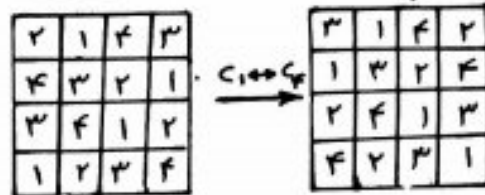
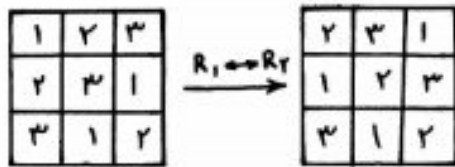
- ① یکی از اعداد  $1$  تا  $4$  را روی قطر اصلی قرار می‌دهیم.
- ② سطرها و ستون‌های راستی باقیمانده را به ترتیب اعداد  $1$  تا  $4$  را به صورت صعودی یا نزولی در آن‌ها بنویسیم.
- ③ درایه‌های خالی مانده را با عدد مناسب به شرط تکرار نبودن با سایر درایه‌های سطر و ستون مربوطه، پُر می‌کنیم.





نکات مهم مربع لاتین

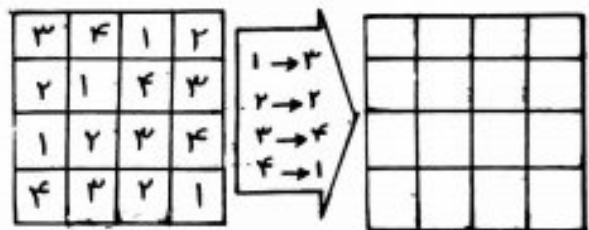
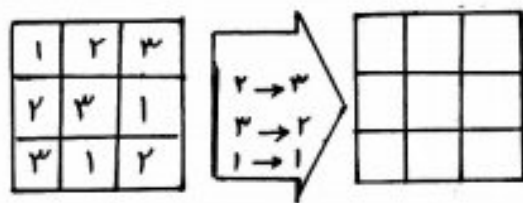
① با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین، باز هم یک مربع لاتین حاصل خواهد شد.  
Ex



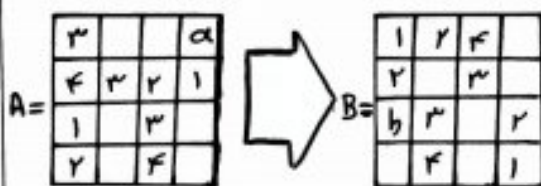
Ex توجه نکته 1: با تعویض جای دو سطر (دو ستون) باز هم بر کدام از اعداد  $1 \leq n$  در هر سطر و در هر ستون یک بار دیده می شوند.

② در هر مربع لاتین، با اعمال یک جایگشت بر روی اعداد  $1, 2, \dots, n$  یک مربع لاتین جدید حاصل می شود.  
Ex

Ex توجه نکته 2: زیرا در غیر این صورت در سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود خواهد داشت که این موضوع با توجه به خواص جایگشت ایجاب می کند که در سطر یا ستونی از مربع اول نیز عضو تکراری وجود داشته باشد و این با مربع لاتین بودن آن در تناقض است.



تست مربع لاتین B، از اعمال یک جایگشت بر روی مربع لاتین A حاصل شده است. دو تایی  $(a, b)$  کدام است؟



- (1)  $(4, 3)$
- (2)  $(2, 3)$
- (3)  $(2, 4)$
- (4)  $(3, 4)$

تست در یک مربع لاتین جرقشی  $6 \times 6$  با سطر اول  $1, 2, \dots, 6$  جایگشت مشابه را اعمال می کنیم. ستون سوم با  $\alpha$  شروع و به  $\alpha$  ختم می شود. دو تایی  $(a, b)$  کدام است؟

- 1 → 1
- 2 → 4
- 3 → 6
- 4 → 2
- 5 → 3
- 6 → 5

- (1)  $(3, 4)$
- (2)  $(3, 2)$
- (3)  $(2, 6)$
- (4)  $(6, 2)$

کاربرد مربع های لاتین ← در مسائل برنامه ریزی

مثال: سه سخنران به نام های  $m_1, m_2, m_3$  قرار است در یک روز در سه جلسه  $10-12, 8-10, 14-16$  و  $10-12$  در سه سالن  $A, B, C$  سخنرانی کنند. هر سالن سه جلسه سخنرانی دارد و هر سخنران در هر یک از سالن ها فقط یک بار سخنرانی می کند. به کمک مربع لاتین برای این مسئله برنامه ریزی کنید.

سالن	A	B	C
۸-۱۰			
۱۰-۱۲			
۱۴-۱۶			

- توجه:
- ① هیچ سخنرانی در یک جلسه در دو سالن حضور ندارد ←
  - ② در یک سالن دو بار سخنرانی نکرده است ←
  - ③ هر سخنران در هر یک از سه جلسه سخنرانی کرده است ←
  - ④ در تمام سالن ها سخنرانی کرده است ←

سوال ۹۸: در یک روز هفت هفته برای ۳ مدرس در ۳ کلاس متناوب در سه جلسه متوالی به چند طریق می توان برنامه تدریس تعیین کرد؟

۶(۱) ۹(۲)  
۱۲(۳) ۱۸(۴)

	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$S_1$	$T_1$		
$S_2$			
$S_3$			

\* اگر قرار باشد مدرس  $T_1$  در جلسه اول، در کلاس  $C_1$  تدریس کند، چه طور؟

مثال: قرار است شش مدرس  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$  در شش جلسه متوالی، در شش کلاس  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  به گونه ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه ریزی کنید.


تمرین: پنج کارگر در پنج روز هفته با پنج دستگاه مختلف در یک کارگاه به گونه ای کاری کنند که هر کارگر در هر روز با هر دستگاه فقط یک بار کاری کند و هر دستگاه در هفته فقط توسط یک کارگر به کار گرفته می شود. برای این منظور به دو روش برنامه ریزی کنید.

دومربع لاین متعامد

اگر  $A$  و  $B$  دومربع لاین هم مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار گرفتن درایه های نظیر به نظیر این دومربع . مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود ، که هر خانه آن شامل یک عدد دورقمی است ، که تمام رقم های سمت چپ (دهگان) مربوط به مربع  $A$  و تمام رقم های سمت راست مربوط به مربع  $B$  (ویا برعکس) است . در این صورت دومربع لاین  $A$  و  $B$  را متعامد می گوئیم ، هرگاه هیچ یک از اعداد دورقمی موجود در خانه های مربع جدید تکرار نشده باشند .

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 11 & 23 & 32 \\ 33 & 12 & 21 \\ 22 & 31 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow B, A \text{ متعامد}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \Rightarrow$$

تذکره: برای تشخیص متعامد بودن یا نبودن دومربع لاین ، به این صورت است که هر دو درایه در یکی از مربع ها که اعداد یکسانی دارند ، درایه های نظیر آنها در مربع دیگر باید اعداد متمایز باشند پس برای اثبات متعامد نبودن دومربع لاین ، کافی است در یکی از دومربع ، دو درایه یکسان پیدا کنیم به طوری که در درایه های نظیر به این دو درایه در مربع دیگر نیز درایه های یکسان (نه لزوماً مساوی با درایه یکسان مربع اول) وجود داشته باشد .



نکات مهم مربع های لاتین متعامد

① برای  $n = 1, 2, 6$  دو مربع لاتین متعامد از مرتبه  $n$  وجود ندارد. به عبارت دیگر Ex

اگر  $n \neq 1, 2, 6$ ، دو مربع لاتین متعامد از مرتبه  $n$  وجود دارد.

② اگر جای دوسطر (دو ستون) در یک مربع لاتین تعویض شود، مربع لاتین حاصل ممکن است با مربع لاتین اولیه متعامد باشد یا نباشد. Ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} A'_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AA'_1 = \begin{bmatrix} 12 & 23 & 31 \\ 33 & 11 & 22 \\ 21 & 32 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{تعامد } A \text{ و } A'_1$$

$$A \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} A'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow AA'_2 = \begin{bmatrix} 11 & 23 & 32 \\ 33 & 12 & 21 \\ 22 & 31 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{تعامد } A \text{ و } A'_2$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} B' = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow BB' = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & 11 & \\ & & & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{تعامد } B' \text{ و } B$$

نتیجه: همان طور که در مثال های بالا دیده می شود:

در مربع لاتین  $3 \times 3$ ، اگر جای دوسطر (دو ستون) تعویض شود، مربع لاتین حاصل با مربع لاتین اولیه متعامد است.

نکته: یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه  $3$ ، آن است که ابتدا یک مربع لاتین  $3 \times 3$  به گونه Ex در نظری بگیریم و سپس با تعویض جای دوسطر (دو ستون) آن، مربع لاتین متعامد با آن بدست می آید.

مثال Ex دو مربع لاتین متعامد مرتبه  $3$  مشخص کنید.

تذکره ۲: متناظر با هر مربع لاتین مرتبه ۳، همواره ۶ مربع لاتین متعادل با آن وجود دارد:

۳ بار با جای جایی دو به دو سطرها  
 ۳ بار با جای جایی دو به دو ستونها ←

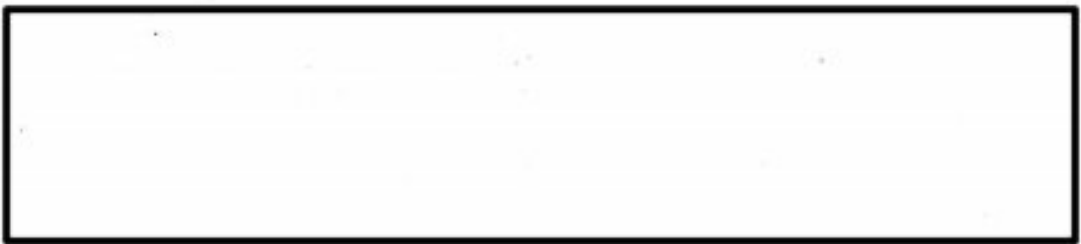
بر اساس ۹۸ تعداد مربع های لاتین متعادل با مربع لاتین  $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$  کدام است؟

۳ (۲ ۲ (۱  
 ۶ (۴ ۴ (۳

تذکره ۳: در مربع لاتین  $۳ \times ۳$ ، اگر جای دو سطر (دو ستون) تعویض شوند، مربع لاتین حاصل با مربع لاتین اولیه متعادل است. اما اگر بیش از یک بار جای دو سطر (دو ستون) اعمال شود، مربع لاتین نهایی با مربع لاتین اولیه متعادل نیست.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} A' = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} A'' = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow AA'' = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ & ۱ & ۲ \\ & & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A'' \text{ متعادل نیستند } A, A$$

\* توجه کنید که دو مربع لاتین  $A'$  و  $A''$  متعادلند! یعنی هر مربع لاتین مرتبه ۳، تنها با مربع لاتین حاصل از یک مرحله اعمال تعویض جای دو سطر (دو ستون) خود، متعادل است.



از چهره لغت گمراهان  
 لغت نفع مودت دیگران  
 گمراهان دیگران گمراهان  
 مشکن: حسن لیر من قدرتم

۳) اگر دو مربع لاتین هم مرتبه، متعامد باشند، با اعمال جایگشت روی درایه‌های هر کدام باز هم متعامدند.

معبارت دیگر: اعمال جایگشت روی درایه‌های مربع‌های لاتین متعامد، تأثیری در متعامد بودن آن‌ها ندارد.

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 23 & 31 & 12 \\ 32 & 13 & 21 \\ 11 & 22 & 33 \end{pmatrix} \Rightarrow B, A \text{ متعامد}$$

↓

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A'B' = \begin{pmatrix} 32 & 21 & 13 \\ 23 & 12 & 31 \\ 11 & 33 & 22 \end{pmatrix} \Rightarrow B', A' \text{ متعامد}$$

۱ → ۱  
۲ → ۳  
۳ → ۲

نکته ۱: اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتینی که از اعمال جایگشت بر روی درایه‌های یکی از آن‌ها به دست می‌آید، با مربع لاتین دیگر متعامد است.

در مثال بالا داریم:

$$A'B' = \begin{pmatrix} 32 & 21 & 13 \\ 23 & 12 & 31 \\ 11 & 33 & 22 \end{pmatrix} \Rightarrow B', A' \text{ متعامد}$$

$$AB' = \begin{pmatrix} 22 & 31 & 13 \\ 33 & 12 & 21 \\ 11 & 23 & 32 \end{pmatrix} \Rightarrow B, A' \text{ متعامد}$$

اثبات نکته ۱: فرض می‌کنیم  $A, B$  دو مربع لاتین متعامد باشند و  $B'$  مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت بر اعضای  $B$  باشد. نشان می‌دهیم  $A$  و  $B'$  نیز متعامدند. برای این منظور از برهان خلف نگه می‌گیریم:

فرض می‌کنیم  $A$  و  $B'$  متعامد نباشند. لذا دو جایگاه در مربع  $A$  وجود دارد که اعداد یکسانی (مثلاً  $a$ ) در آن‌ها قرار دارد و در جایگاه‌های نظیر آنها در مربع  $B'$  نیز دو درایه یکسان (مثلاً  $b$ ) قرار دارند. حال با توجه به مفهوم جایگشت، در همین دو جایگاه در مربع  $B$  نیز باید دو درایه یکسان (مثلاً  $c$ ) باشد که در  $B'$  با اعمال جایگشت به درایه‌ها تبدیل شده‌اند و در این صورت در مربع  $A$  و  $B$  نیز متعامد نخواهند بود (چرا؟) و این موضوع با فرض مسئله (که  $A$  و  $B$  متعامدند) در تناقض است. پس  $A$  و  $B'$  نمی‌توانند متعامد نباشند.

$$A = \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} b & & \\ & b & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} c & & \\ & c & \\ & & \end{pmatrix}$$

نکته ۲: مربع لاتین حاصل از اعمال جایگشت روی درایه‌های یک مربع لاتین، با مربع لاتین اولیه متعامد نیست.

در مثال بالا داریم:

$$AA' = \begin{pmatrix} 23 & & \\ & 23 & \\ & & \end{pmatrix} \Rightarrow A, A' \text{ متعامد نیست}$$

$$BB' = \begin{pmatrix} 32 & & \\ & 32 & \\ & & \end{pmatrix} \Rightarrow B, B' \text{ متعامد نیست}$$

توجه نکته ۲: اگر در مربع لاتین  $A$ ، یک جایگشت مثلاً به صورت  $x \rightarrow 1$  صورت گیرد، آن‌گاه در مربع  $A'$ ، متناظر با تمام  $i$  های  $A$ ، عدد  $x$  وجود دارد و این بدان معناست که عدد دورقی  $ix$  بیش از یک بار در مربع  $AA'$  دیده می‌شود و لذا  $A$  و  $A'$  متعامد نیستند.



تت دو مربع لائین A با مربع لائین  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  متعامد است. کدام یک از مربع های لائین زیر با مربع لائین A متعامد می باشد؟

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

(۴)

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

(۳)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

(۲)

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

(۱)

گزین (۴)

A =

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

B =

۳	۴	۱	۲
۱			
			۳

AB =


تت دو مربع لائین متقابل متعامدند. مربع لائین A با کدام مربع لائین زیر متعامد است؟

۴		۲
۱		۳
	۱	۳
	۴	۲

(۲)

۴		۳	۲
	۲		۱
۲		۱	
	۴	۲	

(۴)

۱	۲	۳	۴
	۴		۲
	۱	۴	
۴		۲	۱

(۱)

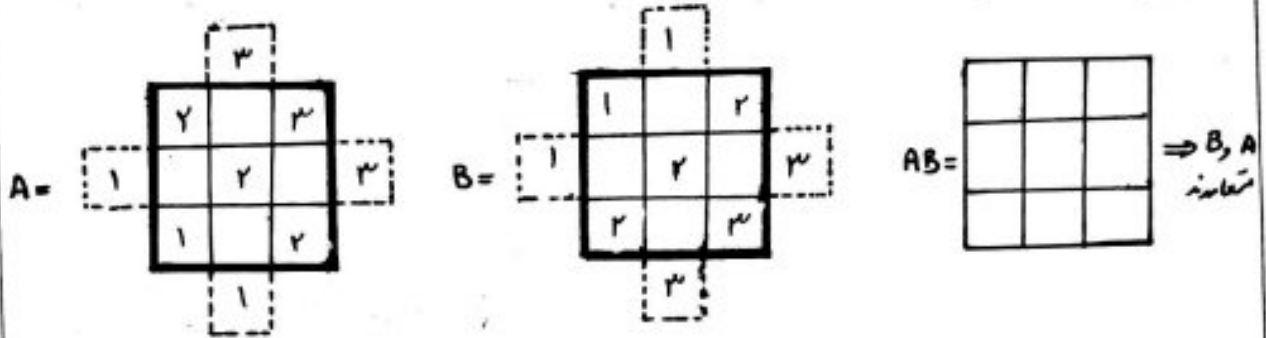
۲		۳	
	۱		۲
۳		۱	
	۲		۴

(۳)

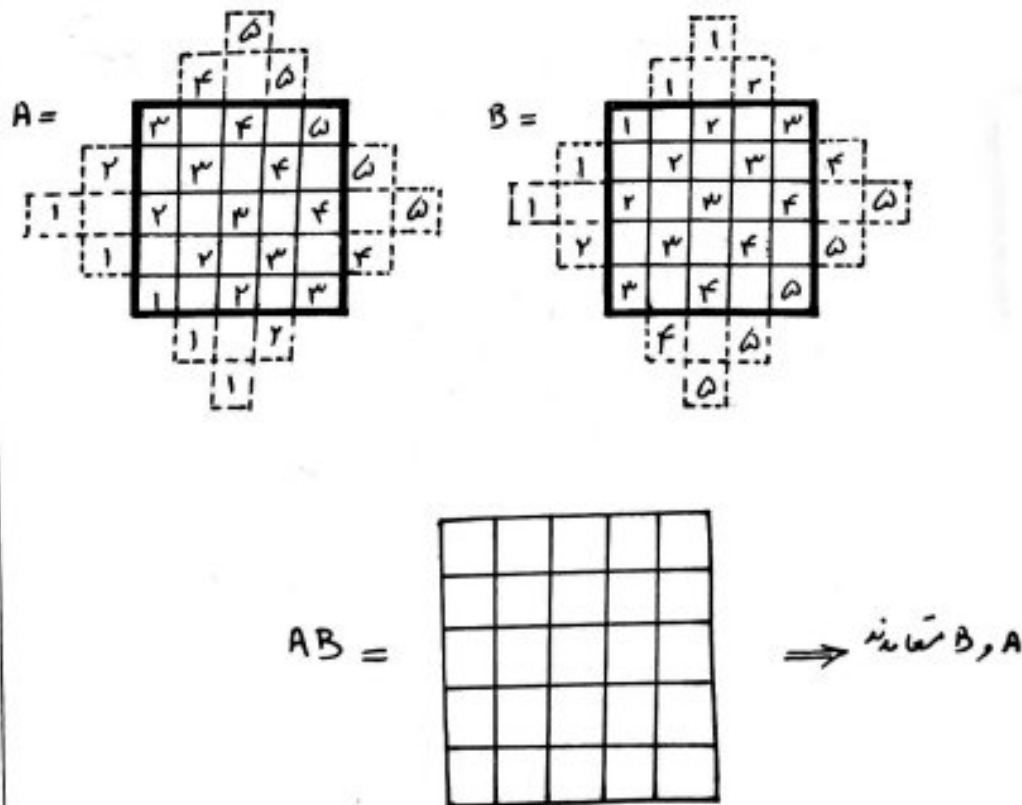
یک روش برای ساختن دو مربع لائین متعامد از مرتبه فرد

(همانند روشی که بار ساختن مربع لائین مرتبه فرد گفته شد)

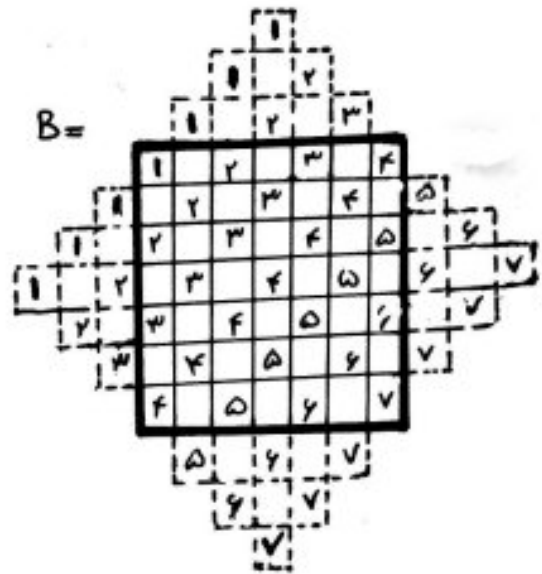
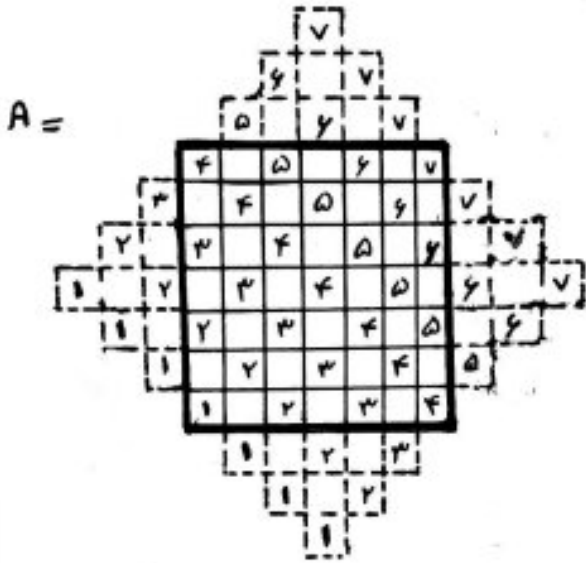
مثال ۱: ساختن دو مربع لائین متعامد  $3 \times 3$



مثال ۲: ساختن دو مربع لائین متعامد  $5 \times 5$



مثال ۳: ساختن دو مربع لاتین متعامد  $7 \times 7$



AB =

F	I	D	O	Y	Y	Y	Z	V	F
V	D	F	I	Y	D	Z	Y	F	I
Z	Y	V	F	I	D	O	F	I	D
Y	Z	F	I	D	O	F	I	D	Z
Z	F	I	D	O	F	I	D	Z	Y
D	Y	Z	F	I	D	O	F	I	D
I	F	D	O	Y	Z	V	F	I	D

لین سیزد



## کاربرد مربع‌های لاتین متعامد در مسائل برنامه‌ریزی

مسئله ۱: در یک کارخانه قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخ‌ریسی و ۵ نوع ایلیف در ۵ روز هفته کار کنند به طوری که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع ایلیف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و هر ایلیف در هر نوع ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته شود. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

حل:

مرحله ۱: یک مربع لاتین  $5 \times 5$ ، که سطری آن

روزهای هفته و ستون‌های آن کارگرها و درایه‌های آن شماره هر کدام از ماشین‌ها می‌باشد، در نظر می‌گیریم. یعنی هر کارگر در هر روز با یک ماشین و در طول هفته با هر ماشین دقیقاً یک بار کار کرده است.

$$A = \begin{array}{c|ccccc} & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \\ \hline \text{شنبه} & 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ \text{یکشنبه} & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ \text{دوشنبه} & 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ \text{سه‌شنبه} & 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ \text{چهارشنبه} & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{array}$$

مرحله ۲: یک مربع لاتین  $5 \times 5$ ، همانند مرحله ۱

در نظر می‌گیریم، که درایه‌های آن شماره هر کدام از ایلیف مورد استفاده می‌باشد. یعنی هر کارگر در هر روز با یک نوع ایلیف و در طول هفته با هر نوع ایلیف دقیقاً یک بار کار کرده است.

$$B = \begin{array}{c|ccccc} & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \\ \hline \text{شنبه} & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ \text{یکشنبه} & 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ \text{دوشنبه} & 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ \text{سه‌شنبه} & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ \text{چهارشنبه} & 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{array}$$

مرحله ۳: با کنار هم قرار دادن این دو مربع،

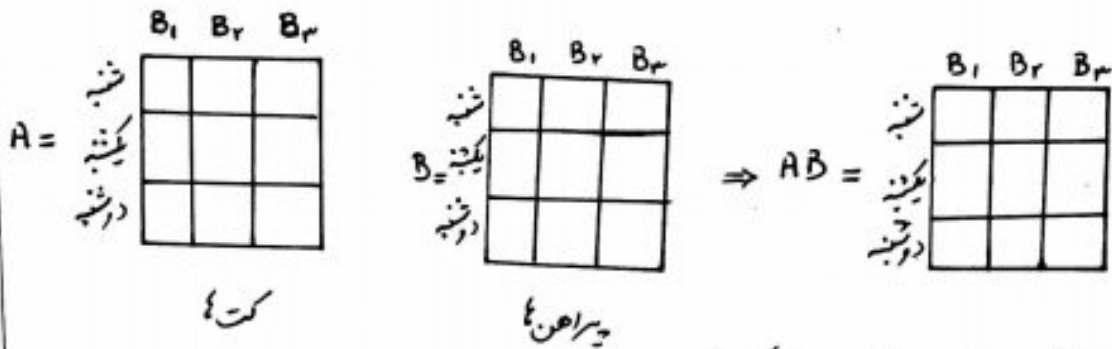
یک مربع جدید حاصل می‌شود که مثلث فوق را برنامه‌ریزی کرده است.

مثلاً کارگر شماره ۴ در روز دوشنبه با ماشین شماره ۱ و ایلیف ۱ کار کرده است.

$$AB = \begin{array}{c|ccccc} & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \\ \hline \text{شنبه} & 13 & 41 & 24 & 52 & 35 \\ \text{یکشنبه} & 45 & 23 & 51 & 34 & 12 \\ \text{دوشنبه} & 22 & 55 & 33 & 11 & 44 \\ \text{سه‌شنبه} & 54 & 32 & 15 & 43 & 21 \\ \text{چهارشنبه} & 31 & 14 & 42 & 25 & 53 \end{array}$$

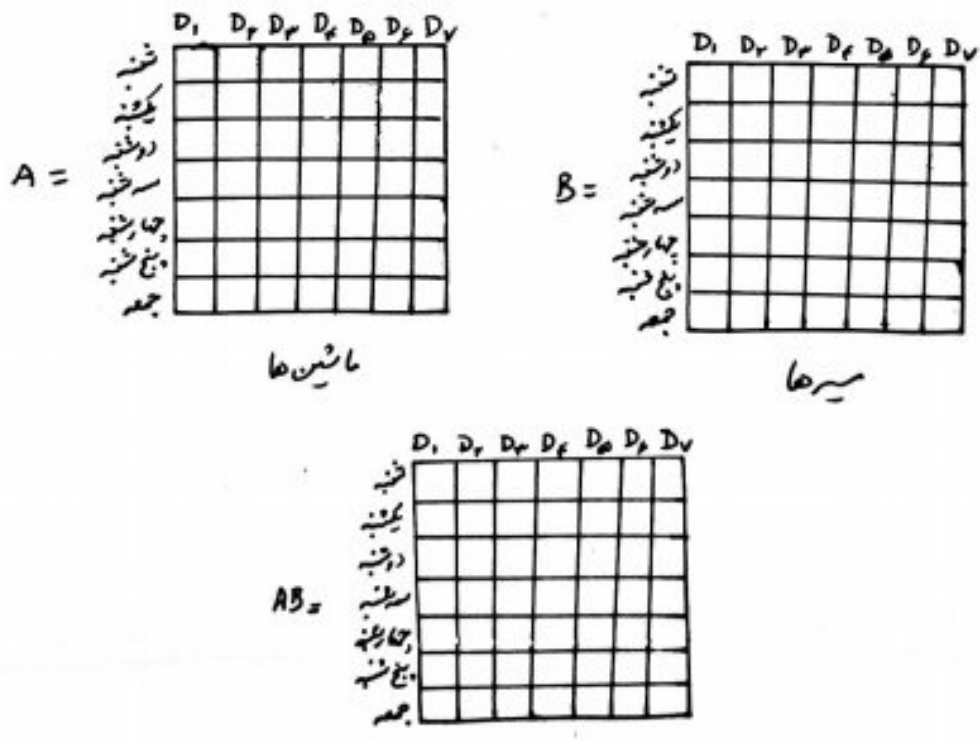
توجه: متعامد بودن این دو مربع لاتین، تضمین می‌کند که هر ایلیف در هر نوع ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته شده است. (زیرا هیچ عدد دورقمی تکراری وجود ندارد)

سوال ۲: سه برادر (تقریباً هم سبزی) در خانه سه کت و سه پیراهن دارند و می خواهند در سه روز اول هفته از این لباس به ترتیب استفاده کنند که هر فرد هر کت و هر پیراهن را دقیقاً یک بار استفاده کند و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار پوشیده شود. چگونگی انجام این کار را مشخص کنید.  
 ◀ به چند روش می توان برنامه ریزی کرد؟



◀ با فرض معلوم بودن مربع لاین مربوط به کت ها برای پیراهن ها به چند طریق می توان برنامه ریزی کرد؟

سوال ۳: در یک مسابقه اتوبیل رانی قرار است ۷ راننده در هفت روز هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسابقه شرکت کنند. مسابقه دهند به طوری که هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند و هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود (هر راننده با هر ماشین فقط یک روز و هر راننده هر روز فقط در یک مسیر رانندگی کند). برای این موضوع برنامه ریزی کنید.



تت شش سخنران قرار است در شش روز هفته در شش همایش مختلف در مورد شش موضوع مختلف سخنرانی کنند به طوری که هر سخنران در هر روز در یک همایش و در مورد یک موضوع سخنرانی نماید و هر موضوع در هر همایش یک بار مطرح می شود (هر سخنران در هر همایش فقط یک روز و هر سخنران هر روز فقط در مورد یک موضوع سخنرانی می کند). این مسئله به چند روش قابل برنامه ریزی است؟

۲۴ (۲) هیچ

۱۲ (۳)

۲ (۴)

۱ (۱)

مسئله ۹۹ در یک مسابقه سه راننده در سه روز متوالی هفته با سه نوع اتومبیل ۱، ۲، ۳ در مسیر A, B, C شرکت می کنند. هر کدام از راننده که فقط یک مسیر و یک اتومبیل را در روز انتخاب می کنند و برنامه ریزی اتومبیل به صورت مربع لاتین زیر است. به چند طریق برنامه ریزی مسیر را می توان انجام داد، به شرطی آن که نفر اول در روز اول، مسیر A را انتخاب نکند؟

	$D_1$	$D_2$	$D_3$
شنبه	۲	۳	۱
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۱	۲	۳

(اتومبیل ۱)

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

	$D_1$	$D_2$	$D_3$
شنبه			
یکشنبه			
دوشنبه			

	$D_1$	$D_2$	$D_3$
شنبه			
یکشنبه			
دوشنبه			

	$D_1$	$D_2$	$D_3$
شنبه			
یکشنبه			
دوشنبه			

	$D_1$	$D_2$	$D_3$
شنبه			
یکشنبه			
دوشنبه			

	$D_1$	$D_2$	$D_3$
شنبه			
یکشنبه			
دوشنبه			

	$D_1$	$D_2$	$D_3$
شنبه			
یکشنبه			
دوشنبه			



## اصل لانه کبوتری

اگر تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه‌ها باشد و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار گیرند، آن‌گاه لانه‌ای با حداقل دو کبوتر (بیش از یک کبوتر) وجود دارد.

مثلاً

در یک کلاس ۸ نفری، حداقل دو نفر در یک روز هفته متولد شده‌اند. زیرا اگر ۸ نفر را به عنوان ۸ کبوتر و ۷ روز هفته را به عنوان ۷ لانه در نظر بگیریم، از آن‌جا که تعداد کبوترها از تعداد لانه‌ها بیشتر است، پس طبق اصل لانه کبوتری، حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۲ نفر در یک روز هفته متولد شده‌اند.

**تذکره:** در حل مسائل مربوط به اصل لانه کبوتری، پس از تشخیص کبوترها و لانه‌ها، می‌توان تعداد کبوترها را به تعداد لانه‌ها تقسیم کرد و به عدد خارج قسمت یک واحد اضافه نمود. در این صورت حداقل تعداد کبوترهایی که (با اطمینان) در یک لانه وجود دارند، به دست می‌آید.

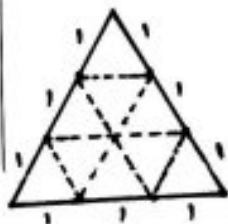
در مثال بالا:

$$\frac{8}{7} \rightarrow 1 + 1 = 2 \rightarrow \text{حداقل ۲ نفر وجود دارند که در یک روز هفته متولد شده‌اند.}$$

**مثال Ex:** نشان دهید اگر ضلع  $n$ ی یک مثلث را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ آمیزی کنیم، حداقل ۲ ضلع مثلث هم‌رنگی خواهند بود.

**تمرین Ex:** نشان دهید در یک خانواده ۵ نفری، دست کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

**مثال Ex:** در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ واحد، ۱۰ نقطه به تعداد داخل مثلث انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌ای کمتر از یک واحد دارند.



مثال: ثابت کنید در بین ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر با روز تولد یکسان وجود دارد.

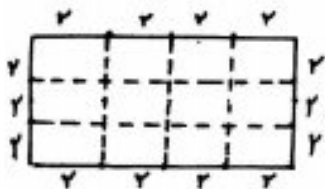
Ex

مثال: ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموع آنها عدد زوج باشد.

Ex

مثال درون یک مستطیل  $6 \times 8$  واحد، ۱۳ نقطه به دلخواه انتخاب می شود. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله ای کمتر از ۲۴ دارند.

Ex



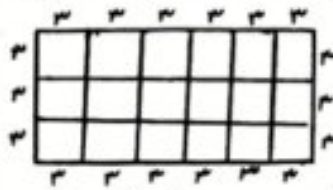
حل: مستطیل داده شده را به ۱۲ مربع  $2 \times 2$  تقسیم می کنیم.  
 حداقل ۲ نقطه در یک مربع  $\left\{ \begin{array}{l} ۱۳ \text{ کبوتر} \rightarrow ۱۳ \text{ نقطه} \\ ۱۲ \text{ لانه} \rightarrow ۱۲ \text{ مربع} \end{array} \right. \rightarrow \frac{۱۳ > ۱۲}{\text{اصل لانه کبوتری}}$  قرار می گیرند.

پس



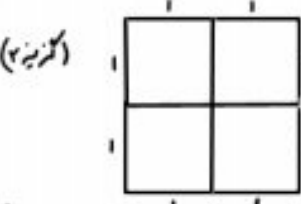
مثال درون یک مستطیل  $9 \times 18$ ، حداقل چند نقطه اختیار شود، تا مطمئن باشیم لااقل فاصله ۲ نقطه از این نقاط انتهایی، کمتر از ۳۶ باشد؟

۱۸(۲)	۱۷(۶)
۲۰(۴)	۱۹(۳)



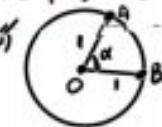
تت درون یک مربع به ضلع ۲، حداقل چند نقطه انتخاب شود، تا مطمئن باشیم لااقل ۳ نقطه از آن یک مثلثی به مساحت حداکثر  $\frac{1}{4}$  تشکیل می دهند؟

۹(۲)	۵(۱)
۱۷(۴)	۱۱(۳)



تت حداقل چند نقطه روی محیط دایره ای به شعاع واحد انتخاب شود تا دست کم فاصله دو نقطه از این نقاط حداکثر برابر ۱ باشد؟

۷(۲)	۶(۱)
۱۰(۴)	۹(۳)



مثال: نشان دهید هر زیر مجموعه ۴۳ عضوی از مجموعه  $\{1, 2, \dots, 84\}$  دارای حداقل ۲ عضو با مجموع ۸۵ است.  
Ex

تست: در یک زیر مجموعه  $n$  عضوی از اعداد طبیعی یک رقی، حداقل دو عضو وجود دارد که مجموع آنها برابر ۱۰ است. کمترین مقدار  $n$  کدام است؟

۳(۱) ۲۴  
۳(۲) ۶۴

برابر ۲۳: هر زیر مجموعه  $n$  عضوی از  $A = \{1, 2, 3, \dots, 23\}$  به طریقی حداقل دو عضو دارد که مجموع آن دو عضو ۲۴ می باشد.  
حداقل  $n$  کدام است؟

۱(۱) ۹  
۱(۲) ۱۰  
۲(۱) ۱۳  
۲(۲) ۱۴

برابر ۲۹۴: مجموعه  $S$ ، اعداد طبیعی فرد و مضرب ۳، شروع از ۳ و ختم به ۶۳ است. یک زیر مجموعه حداقل چند عضوی از  $S$  انتخاب شود که مطمئن باشیم شامل دو عضو با مجموع ۶۶ می باشد؟  
(کمترین)

۱(۱) ۵  
۱(۲) ۶  
۲(۱) ۷  
۲(۲) ۸

برابر ۹۳: در کسری ۹۰ گوی یکین قرار دارد که هر یک از اعداد دورقمی بر روی آنها نوشته شده است. حداقل چند گوی از کسیر خارج کنیم تا مطمئن باشیم جمع دو عدد از دو گوی خارج شده برابر ۱۱۰ می باشد؟

۱(۱) ۴۵  
۱(۲) ۴۶  
۲(۱) ۴۷  
۲(۲) ۴۸

مثال: نشان دهید هر زیر مجموعه ۱۳ عضوی از مجموعه  $\{1, 5, 9, 13, \dots, 81, 85\}$  دارای حداقل ۲ عضو با مجموع ۹۰ است.  
Ex

برابر ۹۸: از مجموعه اعداد  $\{5, 8, 11, \dots, 65, 68, 71\}$  که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده است، یک زیر مجموعه حداقل چند عضوی انتخاب شود تا مطمئن باشیم لائق دو عدد در این زیر مجموعه موجود است که جمع آنها ۸۲ باشد؟

۱(۱) ۱۱  
۱(۲) ۱۲  
۲(۱) ۱۳  
۲(۲) ۱۴



تت از مجموعه اعداد  $\{1, 2, \dots, 20\}$  یک زیر مجموعه با دست کم چند عضو انتخاب کنیم تا تفاضل حداقل دو عضو متعلق به آن برابر ۷ باشد؟

۸ (۱)  
۱۴ (۲)  
۱۵ (۳)  
۱۱ (۴)

تمرین فرض کنید  $S$  یک زیر مجموعه ۷ عضوی از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 21\}$  است. ثابت کنید حداقل دو زیر مجموعه متمایز از  $S$  با مجموع اعضای برابر وجود دارد.

تت از مجموعه اعداد  $\{1, 2, 3, \dots, 35\}$  حداقل چند عضو حذف کنیم تا در بین اعداد باقی مانده، مجموع هیچ دو عددی برابر ۳۵ نشود؟

۱۱ (۱)  
۱۲ (۲)  
۱۳ (۳)  
۱۴ (۴)

تت در  $140$  حداقل چند زیر مجموعه از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 7\}$  انتخاب شود تا مطمئن شویم دو زیر مجموعه با اشتراک تهی در آن وجود دارد؟

۶۵ (۱)  
۶۴ (۲)  
۴۵ (۳)  
۴۶ (۴)

تت در یک زیر مجموعه  $n$  عضوی از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$  حداقل ۳ عضو با مجموع ۱۵ وجود دارد. کمترین مقدار  $n$  که امکان است؟

۷ (۱)  
۸ (۲)  
۶ (۳)  
۵ (۴)

تت در یک کلاس با ۲۴ دانش آموز، ۷ تیم ورزشی با ۸ نفری تشکیل شده است. یک دانش آموز با عضویت در حداقل چند تیم ورزشی در این کلاس یافت می شود؟

۲ (۱)  
۳ (۲)  
۴ (۳)  
۵ (۴)

مثال Ex نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبه  $2 > p$ ، حداقل ۲ رأس هم درجه وجود دارد.

حل:

حالت ۱: گراف رأس اینزوله (تهما) ندارد. در این صورت درجه‌های رأس‌ها از  $\frac{p-1}{2}$  تا  $p-1$  است.

پس  

$$\left. \begin{array}{l} \text{حداقل ۲ رأس دارای} \\ \text{یک درجه اند.} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اصل لانه کبوتری}} \begin{array}{l} p \text{ کبوتر} \rightarrow p \text{ رأس} \\ (p-1) \text{ لانه} \rightarrow (p-1) \text{ عدد برابر درجه} \end{array}$$

حالت ۲: اگر یک رأس تنها وجود داشته باشد، در این صورت درجه‌های رأس‌ها از  $\frac{p-2}{2}$  تا  $p-1$  است.

حداقل ۲ رأس دارای  

$$\left. \begin{array}{l} \text{یک درجه اند.} \\ \text{اصل لانه کبوتری} \end{array} \right\} \begin{array}{l} p \text{ کبوتر} \rightarrow p \text{ رأس} \\ (p-1) \text{ لانه} \rightarrow (p-1) \text{ عدد برابر درجه} \end{array}$$

نتیجه: Ex در هر کلاس با  $n$  دانش آموز ( $n > 2$ )، حداقل ۲ دانش آموز وجود دارد که تعداد دوستان آنها در آن کلاس، با هم برابر است.

توضیح: رابطه دوستی بین افراد یک گراف ساده است. پس یک گراف ساده با  $n$  رأس وجود دارد که هر رأس آن یک دانش آموز و یال‌ها دوستی بین آنها را نشان می‌دهد. یعنی درجه هر رأس، تعداد دوستان دانش آموز متناظر با آن رأس را در کلاس نشان می‌دهد. از طرفی می‌دانیم در گراف ساده، حداقل ۲ رأس هم درجه وجود دارد. پس حداقل ۲ دانش آموز با تعداد دوستان برابر، در آن کلاس، یافت می‌شود.

مثال: Ex نشان دهید در بین هر ۵ عدد صحیح دلخواه، حداقل دو عدد وجود دارد که در تقسیم بر ۴، باقی مانده یکسان دارند (یا حداقل ۲ عدد وجود دارد که به بیانه ۴ هم نمانند یا حداقل ۲ عدد وجود دارد که تفاضل آنها بر ۴ بخش پذیر است).

نتیجه: در بین هر  $(n+1)$  عدد صحیح دلخواه (یا بیشتر)، حداقل ۲ عدد با باقی مانده یکسان در تقسیم بر عدد طبیعی  $n$  وجود دارد. (یا حداقل ۲ عدد وجود دارد که به بیانه  $n$  هم نمانند یا تفاضل آنها بر  $n$  بخش پذیر است).



مثال Ex پنج نقطه در صورتی که مختصات زوج و فرد دارند ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از آنها، مختصات نقطه دلخواه صحیح است.

سوال ۹۲ H.W حداقل چند زوج مرتب به صورت  $(a, b)$  با مختصات اعداد صحیح و مثبت انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم در ۳ زوج انتخابی، جمع مختصات اول و جمع مختصات دوم، اعداد زوج هستند؟ (۳ نمره)

۴(۲) ۳(۶)  
۶(۴) ۵(۳)

سوال حداقل چند عدد طبیعی (که بجز ۵ و ۳، ۷ و ۵ بر هیچ عدد اول دیگری بخش پذیر نیستند) انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حاصل ضرب دو عدد از این اعداد، مربع کامل است؟

۶(۲) ۵(۶)  
۱۰(۴) ۹(۳)

مثال Ex در یک دبیرستان با ۵۰۵ دانش آموز، نشان دهید حداقل ۷ نفر از آنها (وزنه و ماه تولدشان یکسان است)

سوال ۱۰۱ H.W در یک کلاس ۶۵ نفری، بیشترین مقدار  $n$  به گزینی که مطمئن باشیم حداقل  $n$  نفر دارای ماه تولد یکسان هستند، کدام است؟

۶(۲) ۵(۶)  
۸(۴) ۷(۳)

سوال ۹۰ H.W مجموعه  $S$  دارای ۵۰ عضو از اعداد طبیعی است. در تقسیم عضوی  $S$  بر عدد ۱۲، حداقل چند عضو، باقی مانده یک دارند؟

۴(۶) ۳(۶)  
۶(۴) ۵(۳)

سوال H.W درون کیسه ای ۱۰۰ مهره با رنگ های سفید، سیاه، قرمز، آبی، سبز و زرد وجود دارد. حداقل چند مهره می توانیم از این کیسه وجود دارد؟ (۳ نمره)

۱۶(۲) ۱۵(۶)  
۱۸(۴) ۱۷(۳)



تعمیم اصل لانه کبوتری

اگر  $(k+1)$  کبوتر یا بیشتر  $(k+2 < n < 2k+1)$  در  $n$  لانه قرار بگیرند، آن گاه لانه‌ای وجود دارد که حداقل  $(k+1)$  کبوتر در آن قرار گیرد. Ex

مثال: در یک کلاس، حداقل چند نفر لازم است که اطمینان داشته باشیم حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسان دارند؟ Ex

حل: اگر ۱۲ یا ۱۳ را به عنوان  $n$  لانه در نظر بگیریم، طبق تعمیم اصل لانه کبوتری،  $k+1=7$  و در نتیجه  $k=6$  است. پس تعداد کبوترها (دانش‌آموزان) برابر است با

$$kn+1 = 6 \times 12 + 1 = 73$$

مثال: در یک سالن ورزشی حداقل چند تماشاگر لازم است تا اطمینان داشته باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ Ex

مثال: در یک زیرمجموعه  $m$  عضوی از اعداد صحیح، دست کم ۵ عضو وجود دارد که در تقسیم بر عدد ۱۵ باقی‌مانده یکسان دارند. حداقل  $n$  را بیابید Ex

مثال: در یک دبیرستان دست کم چند دانش‌آموز وجود داشته باشد تا مطمئن باشیم دست کم ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم نامشان غیر تکراری و مثل هم است؟ Ex

مثال: در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشد تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟ Ex

برابر کمترین تعداد افرادی که حداقل دو نفر از آنها در یک ماه از سال و در یک روز هفته متولد شده‌اند کدام است؟ H.W

- ۷۵ (۱)
- ۷۸ (۲)
- ۸۸ (۳)
- ۸۵ (۴)

تیر در یک سالن امتحان دست کم چند دانش‌آموز لازم است تا حداقل ۳ نفر آن‌ها در آزمون تکی ۳ گزینه‌ای با ۴ سوال دارای پاسخ بزرگ یکسان باشند؟ (فرض کنید پاسخ به تمام سوال‌ها الزامی است)

- ۲۱۸۸ (۱)
- ۲۸۸۴ (۲)
- ۲۲۶۴ (۳)
- ۴۳۷۵ (۴)

سوال ۹۵: یک تاس هگن را حداقل چند بار پرتاب کنیم تا به طور یقین سه بار یا بیشتر، نتیجه یکسان داشته باشیم؟

۱۲ (۱)  
۱۳ (۲)  
۱۸ (۳)  
۱۹ (۴)

سوال ۹۶: کبوتر در حداقل چند لانه قرار گیرند تا حداقل یک لانه با بیش از دو کبوتر وجود داشته باشد؟

۳۱ (۱)  
۳۲ (۲)  
۳۳ (۳)  
۳۴ (۴)

سوال ۹۷: شاخه گل را در حداقل چند گلدان قرار دهیم تا مطمئن باشیم حداقل یک گلدان با دست کم ۵ شاخه گل وجود دارد؟

Ex

سوال ۹۸: در یک کلاس ۳۰ نفری، ۷ نفر نامزد انتخاب مشاوره با امور مدرسه اند. انتخاب شونده باید رأی بیشتر از سایرین داشته باشد. حداقل رأی انتخاب شونده کدام است؟

(گزینه ۳)

۵ (۱)  
۶ (۲)  
۷ (۳)  
۸ (۴)

سوال ۹۹: در یک فروشگاه لباس، شلوار در ۵ رنگ مختلف، ۶ سایز متفاوت و ۳ نوع پارچه متمایز موجودند. حداقل چند شلوار انتخاب کنیم تا دست کم ۳ شلوار با رنگ، سایز و پارچه یکسان داشته باشیم؟

۴۲ (۱)  
۲۹ (۲)  
۱۸۱ (۳)  
۱۸۰ (۴)

عشق در حفظ می ماند  
و حس در آتش در آید

و بیخ لعل ترین تفاوت میان عشق و حس در آتش است.  
(دکتر حسینی)

سراسر ۸۹  
 حداقل چند عدد از مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$  انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم لااقل دو عدد آنها متوجهی مشترک دارند؟

۹۶  
 ۱۰۲  
 ۱۱۴  
 ۱۲۴

سراسر ۹۳  
 هر یک از اعداد ۱ تا ۳۰ را بر روی ۳۰ گوی یکسان نوشته در کيسه ای قرار می دهیم. حداقل چند گوی بیرون آوریم تا به طور یقین دست کم دو عدد یا مقسوم علیه مشترک بزرگتر از ۱ داشته باشیم؟ (سینه ۳)

۱۰۶  
 ۱۱۶  
 ۱۲۴  
 ۱۳۴

سراسر ۹۴  
 کيسه ای شامل ۴ مهره قرمز، ۵ مهره سیاه و ۷ مهره سفید است. حداقل چند مهره خارج کنیم تا حداقل یکی از مهره های سفید باشد؟

۸۶  
 ۹۶  
 ۱۰۴  
 ۱۱۴

سراسر ۹۵  
 کيسه ای شامل ۴ مهره سیاه، ۳ مهره سفید، ۲ مهره بنفش و ۳ مهره قرمز است. حداقل چند مهره از کيسه خارج کنیم تا مطمئن شویم دست کم سه رنگ متفاوت خارج شده است؟

۶۶  
 ۷۲  
 ۸۴  
 ۱۱۴

سراسر ۹۶  
 در جعبه ای ۳ گوی قرمز، ۵ گوی سفید، ۷ گوی آبی و ۹ گوی زرد موجود است. حداقل چند گوی خارج کنیم تا مطمئن باشیم دست کم ۶ گوی هم رنگ خارج شده است؟

۱۷۴  
 ۱۸۴  
 ۱۹۴  
 ۲۰۴

سراسر ۹۷  
 در کيسه ای ۵ گوی سفید، ۴ گوی قرمز و ۳ گوی بنفش وجود دارد. حداقل چند گوی از کيسه خارج کنیم تا مطمئن باشیم بیش از ۳ گوی سفید یا بیش از ۲ گوی قرمز خارج شده است؟

۸۶  
 ۹۲  
 ۱۰۴  
 ۱۱۴

سراسر ۹۸  
 در کيسه ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۳ مهره بنفش موجود است. دست کم چند مهره از کيسه بیرون آوریم تا مطمئن باشیم لااقل ۳ مهره سفید یا ۳ مهره سیاه یا ۲ مهره بنفش بیرون آمده است؟

۹۶  
 ۱۰۴  
 ۱۱۴  
 ۱۲۴

سراسر ۹۹  
 در جعبه ای ۷ کتاب ادبی، ۲ کتاب هنر و ۱۰ کتاب ریاضی موجود است. حداقل چند کتاب از این جعبه برداریم تا مطمئن باشیم حداقل ۴ کتاب هم موضوع است؟

۱۰۶  
 ۹۶  
 ۱۱۴  
 ۱۲۴



پدیده تصادفی

هر آزمایشی که نتیجه آن از قبل مشخص نباشد. مانند پرتاب یک سکه، پرتاب تاس و ...

فضای نمونه (S)

مجموعه تمام نتایج ممکن از انجام یک پدیده تصادفی را می گویند.

مثال: فضای نمونه پرتاب یک تاس عبارت است از  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

مثال: فضای نمونه پرتاب دو سکه با هم (دو بار پرتاب یک سکه) عبارت است از

تعمیم مثال فوق:

۲ حالت $\rightarrow S_1 = \{a, b\}$ فضای نمونه پرتاب یک سکه	$\left. \begin{array}{l} 2^n \\ \text{پرتاب } n \text{ سکه} \\ \text{یک سکه} \end{array} \right\}$
$2 \times 2 = 2^2$ حالت $\rightarrow S_1 \times S_1$ دو سکه با هم (دو بار پرتاب یک سکه)	
$2 \times 2 \times 2 = 2^3$ حالت $\rightarrow S_1 \times S_1 \times S_1$ سه سکه با هم (سه بار پرتاب یک سکه)	

نتیجه: اگر فضای نمونه یک بار انجام یک پدیده تصادفی باشد، فضای نمونه  $n$  بار تکرار آن عبارت است از

$S^n = S \times S \times \dots \times S$

پس اگر آزمایشی در یک بار انجام، نتیجه داشته باشد، در  $n$  بار تکرار آن،  $n$  نتیجه دارد.

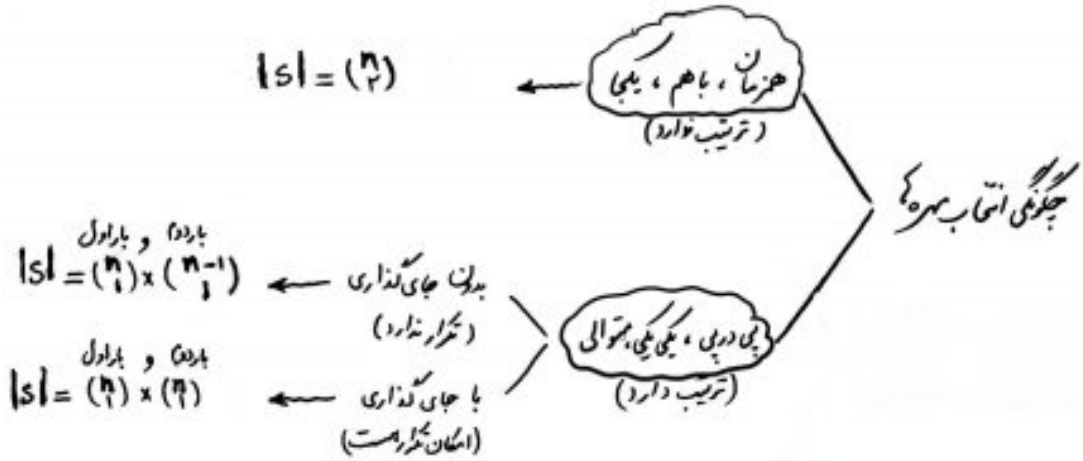
مثال: فضای نمونه هر یک از پدیده های زیر را بیابید.

- (الف) ۵ بار پرتاب یک سکه  $\leftarrow$
- (ب) پرتاب ۳ تاس با هم  $\leftarrow$
- (ت) پرتاب ۳ سکه و ۲ تاس با هم  $\leftarrow$

مثال: یک راننده تاکسی خالی در ایستگاه عدالت ۳ مسافر سواری کند. اما خالی حرکت نمی کند. فضای نمونه برار رفت و برگشت این پدیده چند عضو دارد؟

پرتاب $n$ سکه متناظر با هم (پرتاب $n$ بار یک سکه)	$\rightarrow 2^n$
یک خانواده $n$ فرزندی	$\rightarrow 2^n$
پرتاب $n$ تاس متناظر با هم (پرتاب $n$ بار یک تاس)	$\rightarrow 6^n$

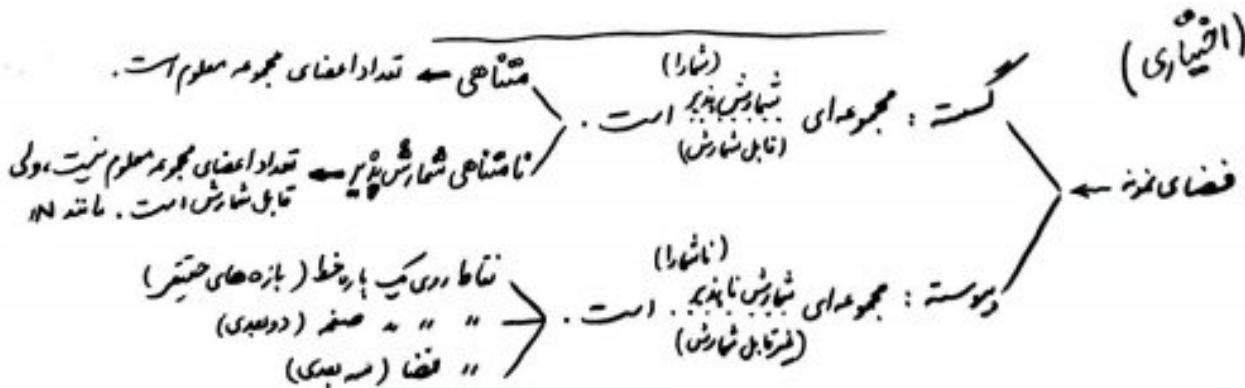
مثال: کیه ای شامل n مهره (متمايز) است. دو مهره به تصادف از کيسه بيرون مي آدریم. در مورد تعداد عضرهای فضای نمونه اين آزمون محب کيسه.



(از چگونگی انتخاب مهره ها در مثال ذکر شده باشد، هنرنا فرض کنید)

شايد بتوان بگفته شده بازگشت و ميراث کفاز زياد است  
ولي شرم انگيز کفاز کوي و ميراث پايان خست

(اقتياري)



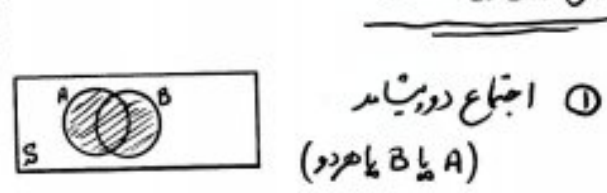
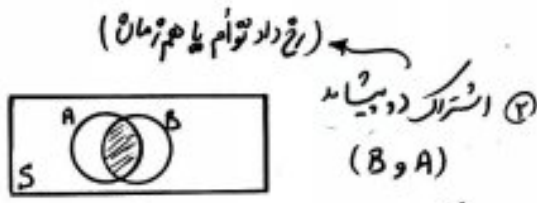
پیشامد

زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه است. به عبارت دیگر

مثال: در پرتاب دو تاس با هم، پیشامد آن که مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۸ باشد را مشخص کنید.

پیشامد حتمی  $\rightarrow$  فضای نمونه (S): هواره رخ می‌دهد  $\leftarrow$  مثال در پرتاب یک تاس، یکی از اعداد ۱ تا ۶ ظاهر می‌شود.  
پیشامد نشدنی  $\leftarrow \emptyset$ : هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد  $\leftarrow$  مثال در پرتاب یک تاس، عدد ۷ ظاهر می‌شود. (غیر ممکن)

اعمال روی پیشامدها

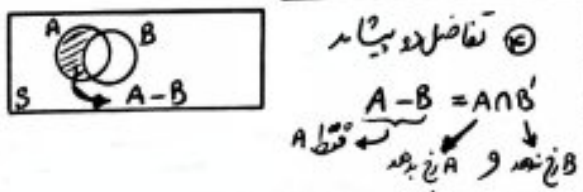
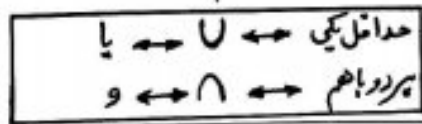


اشتراک دو پیشامد زمانی رخ می‌دهد که

اجتماع دو پیشامد زمانی رخ می‌دهد که

هر دو پیشامد با هم اتفاق بیفتند.

حداقل یکی از دو پیشامد اتفاق بیفتند.



بخش A و بخش B  
قطه A  
زمانی رخ می‌دهد که

زمانی رخ می‌دهد که

قطه اولی اتفاق بیفتد

خود آن پیشامد اتفاق بیفتد.

$(A - B) \cup (B - A)$   
قطه A    قطه B

نقطه‌ای از دو پیشامد





مثال: فرض کنید A, B, C سه پیشامد از فضای نمونه S می باشند. به کمک جبر مجموعی هر از زیر موارد زیر را نشان دهید.

- (الف) A و B رخ بدهند و C رخ ندهد ←
- (ب) فقط A اتفاق بیفتد ←
- (پ) حداقل یکی از این سه پیشامد رخ بدهد ←
- (ت) فقط یکی رخ بدهد ←
- (ث) حداقل یکی رخ بدهد ← (فقط یکی یا هیچکدام)



دو پیشامد ناسازگار (مجزا یا جدا از هم)  $(A, B \text{ ناسازگار} \iff A \cap B = \emptyset)$

دو پیشامد را ناسازگار می گوئیم اگر در آنها اثر هر دو با هم اتفاق نیفتند. مجزا یا جدا رخ دادن توانسته باشند

مثلاً در آزمایش پرتاب یک تاس دو پیشامد  $\left. \begin{array}{l} A: \text{ عدد زوج ظاهر شده است} \\ B: \text{ عدد فرد ظاهر شده است} \end{array} \right\}$  ناسازگارند.



n پیشامد ناسازگار

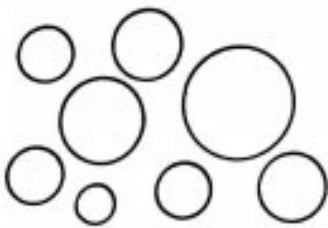
رخ دادن تمام هگی آنها غیر ممکن است، به عبارت دیگر

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \emptyset \quad \text{یا} \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = \emptyset$$

\* n پیشامد دو به دو ناسازگار \*

رخ دادن هر دو نای آنها غیر ممکن است، به عبارت دیگر

$$\forall i \neq j: A_i \cap A_j = \emptyset$$



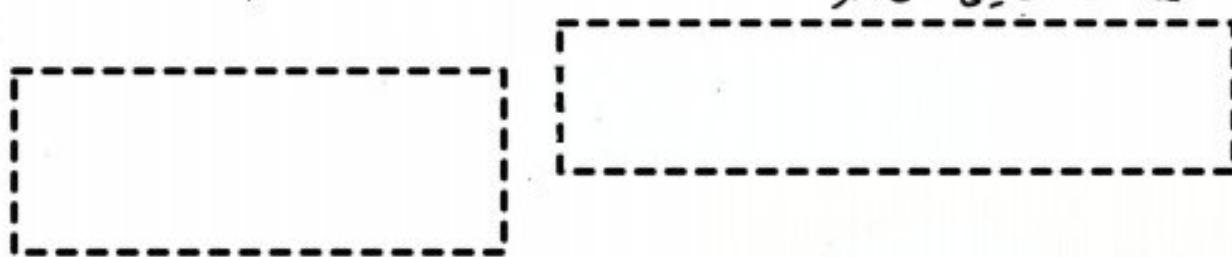
نتیجه: n پیشامد ناسازگار  $\rightarrow$  n پیشامد دو به دو ناسازگار

احتمال وقوع رویداد A:  $P(A)$ 

(Probability)

احتمال

که عددی است حقیقی متعلق به بازه  $[0, 1]$  که به یک رویداد نسبت داده می‌شود و بیانگر میزان اطمینان از وقوع آن رویداد است.



### اصول احتمال (اصول کولموگوروف)

اصل ۱: احتمال رخ دادن رویداد حتمی برابر با ۱ است  $P(S) = 1$

\* اصل ۲:

تعمیم اصل ۲: اگر  $n$  رویداد  $A_1, A_2, \dots, A_n$  دو به دو ناسازگار باشند، آنگاه

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

هم‌شانس: شانس (احتمال) رخ دادن تمام اعضا با هم برابر است. مانند سکه سالم (مستان، سفید، تاس سالم (هگس)، ... همه‌های یکسان، ...

غیر هم‌شانس: هم‌شانس نیست. یعنی احتمال رخ دادن یکی عضو بیشتر یا کمتر از عضو دیگر است. مانند تاسی که دو وجه آن ۶ است!

\* محاسبه احتمال رویدادهای نمونه‌ای گسسته و هم‌شانس (احتمال ساده یا کلاسیک)

اگر  $S$  یک فضای نمونه‌ای گسسته و هم‌شانس و  $A$  رویدادی از آن فضا باشد، آنگاه

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{|A|}{|S|}$$

سراسر با کدام احتمال رقم سمت راست پلاک اولین از سبده که از بزرگراه خارج می شود از ۴ بیشتر نیست یا معرب ۳ می باشد؟  
(رقم صفر در پلاک اتومبیل به کار نمی رود)

سراسر در پرتاب دو تاس سالم با هم، با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده عددی اول است؟

$$151 = 4^2 = 16$$

$$181 = 15 \rightarrow P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \text{ ک}$$

$$2 \text{ مجموع} \rightarrow (1,1)$$

$$3 \text{ مجموع} \rightarrow (1,2), (2,1)$$

$$5 \text{ مجموع} \rightarrow (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)$$

$$7 \text{ مجموع} \rightarrow (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$$

$$11 \text{ مجموع} \rightarrow (5,6), (6,5)$$

سراسر ۱۴۰۱ دو تاس هگن را پرتاب می کنیم. با کدام احتمال حداقل یک عدد معرب ۳ و مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ است؟

تحت در پرتاب دو تاس سالم با هم، با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده کمتر از ۱۰ است؟

سراسر ۹۲ دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده تجزی معرب ۴ است؟

تحت ۱۱۰۳ دو تاس سالم را با هم می اندازیم. احتمال این که حاصل ضرب دو عدد ظاهر شده، معرب ۶ است؟

جواب:  $\frac{5}{12}$

تحت در پرتاب دو تاس فرزند آبی، با کدام احتمال عدد تاس قرمز از عدد تاس آبی را عادی کند؟

تحت در پرتاب دو تاس فرزند آبی، با کدام احتمال عدد تاس قرمز از عدد تاس آبی کوچکتر است؟



مثال در پرتاب سه تاس سالم باهم، با کدام احتمال دو عدد از سه عدد ظاهر شده، یکسان اند؟

مثال در پرتاب سه تاس همگن باهم، چه قدر احتمال دارد مجموع سه عدد ظاهر شده فرد باشد؟

مثال در پرتاب سه تاس سالم باهم، با کدام احتمال مجموع سه تاس برابر ۱۵ است؟

مثال در پرتاب سه تاس قرمز، آبی و سفید، با کدام احتمال عدد تاس قرمز از عدد ظاهر شده توسط دو تاس آبی و سفید بزرگتر است؟

مثال در پرتاب سه تاس قرمز، آبی و سفید، با کدام احتمال عدد تاس سفید با مجموع اعداد ظاهر شده توسط تاس های قرمز آبی برابر است؟

این ...  
در یک بازی ۱۶ نفره به هر نفر یکی از شماره های ۳، ۴، ۵، ...، ۱۸ اختصاص می دهیم. سه تاس را پرتاب می کنیم و اعداد رو شده را با یکدیگر جمع می کنیم. شخصی که آن شماره را داشته باشد، انتخاب می شود. احتمال این که شخص شماره ۱۰ انتخاب شود کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{8}$$



سراسر ۳۰ لایب از ۱۰ لایب موجود فروخته است. اگر سه لایب به تصادف انتخاب شود، با کدام احتمال هر سه سالم اند؟

\* با کدام احتمال فقط یکی سالم است؟  
\* با کدام احتمال حداقل دو لایب سالم است؟

سراسر در ظرفی ۵ مهره به شماره های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ ریخته ایم. دو مهره با هم از ظرف خارج می کنیم. احتمال آن که مجموع شماره های بزرگتر از ۵ باشد کدام است؟

حل

$$|S| = \binom{5}{2} = 10$$

$$|A| = 6 \rightarrow P(A) = \frac{6}{10}$$

$$\hookrightarrow \{5,1\}, \{5,2\}, \{5,3\}, \{5,4\}, \{4,2\}, \{4,3\}$$

سراسر در ظرفی شش مهره به شماره های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ ریخته شده اند. دو مهره با هم بیرون می آوریم. با کدام احتمال شماره های این دو مهره (عدد در ستونی اند)!

سراسر پنج مهره به شماره های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ در ظرفی ریخته ایم. سه مهره به تصادف و با هم از ظرف بیرون می آوریم. احتمال آن که مجموع سه عدد خارج شده زوج باشد چقدر است؟

سراسر شش گوی یکسان به شماره های ۱ تا ۶ در یک ظرف قرار دارند. به تصادف دو گوی از آنها بیرون می آوریم. با کدام احتمال جمع اعداد روی این دو گوی کمتر از ۷ است؟ (جواب:  $\frac{4}{15}$ )

سراسر ۹ اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ بر روی ۹ کارت یکسان فروخته شده است. به تصادف دو کارت از بین آن ها بیرون می آوریم. با کدام احتمال مجموع عدد این دو کارت برابر ۱۱ است؟

تیت ۱۱.۳ دو رأس از یک شش ضلعی به تصادف انتخاب می شود. با کدام احتمال این دو رأس مجاور نیستند؟ (جواب:  $\frac{1}{6}$ )

برای هر اعداد ۱ تا ۶ را بر روی ۶ کارت کین نوشته اند. اگر به تصادف دو کارت از بین آنها بیرون آوریم. با کدام احتمال جمع اعداد این دو کارت زوج است!

$$|S| = \binom{6}{2} = 15$$

$$|A| = \binom{2}{2} + \binom{4}{2} = 7 \rightarrow P(A) = \frac{7}{15} = 7/15 \checkmark$$

هر دو عدد یا هر دو زوج

مسئله: درون کسبه ای ۳ مهره سفید، ۵ مهره سیاه وجود دارد. ۲ مهره به تصادف به طرد؟؟ بیرون می آوریم. با کدام احتمال

$ S  = \binom{6}{2} = 64$ دوی دومی با جای گذاری $\frac{\text{دوی سفید و اول سفید}}{\binom{3}{2} \times \binom{3}{1}}$ $\frac{3 \times 3}{64}$	$ S  = \binom{6}{2} = 56$ بی دومی به جای گذاری $\frac{\text{دوی سفید و اول سیاه}}{\binom{3}{2} \times \binom{4}{1}}$ $\frac{3 \times 4}{56}$	$ S  = \binom{6}{2} = 28$ هم رنگ (یکجا با هم) $\frac{\binom{3}{2}}{28}$	چگونگی انتخاب مهره ها الف) هر دو مهره سفید است؟
$\frac{\text{دوی سیاه و اول سیاه}}{\binom{4}{2} \times \binom{2}{1}}$ $\frac{4 \times 2}{64}$	$\frac{\text{دوی سیاه و اول سیاه}}{\binom{4}{2} \times \binom{2}{1}}$ $\frac{4 \times 2}{56}$	$\frac{\binom{5}{2}}{28}$	ب) هر دو مهره سیاه است؟
(الف) + (ب)	(الف) + (ب) <small>برای هر دوی</small>	(الف) + (ب) <small>برای هر دوی</small>	پ) هر دو مهره هر رنگ است؟
$\frac{\binom{3}{2} \times \binom{3}{1} + \binom{4}{2} \times \binom{2}{1}}{64}$	$\frac{\binom{3}{2} \times \binom{4}{1} + \binom{4}{2} \times \binom{2}{1}}{56}$	$\frac{\binom{3}{2} \times \binom{3}{1}}{28}$ <small>(برای هر دوی)</small>	ت) هر دو مهره با هم رنگ است؟
(الف) + (ت)	(الف) + (ت)	(الف) + (ت)	ث) حداقل یکی سفید است؟ یکی سفید یا هر دو سفید
(ب) + (ت)	(ب) + (ت)	(ب) + (ت)	ج) حداکثر یکی سفید است؟ یکی سفید یا هر دو سیاه

برای هر کسبه ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است. مهره ای به تصادف بیرون آورده و پس از مشاهده رنگ آن به کسبه برمی گردانیم. سپس مهره دوم بیرون می آوریم. احتمال این که فقط یک مهره سفید مشاهده شده باشد چقدر است؟

برای هر کسبه ای دو آزمایشی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می شود. به تصادف متوالی سه موش از بین آنها انتخاب می شود. با کدام احتمال اولین موش سفید و دومین موش سیاه است؟



سراسری  
از بین ۴ داوطلب رشته تجری و ۶ داوطلب رشته ریاضی، ۴ نفر به تعداد انتخاب می‌شوند. با کلام احتمال ۲ نفر آنان رشته ریاضی می‌باشند؟

(کلانزاد  $\rightarrow 10 = 7 + 3$ )  
 $|S| = \binom{10}{4} = 210$

$|A| = \binom{7}{2} \times \binom{3}{2} = 90$  →  $P(A) = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$  ✓  
 دو نفر تجری و دو نفر ریاضی

سراسری  
از ۴ دانش آموز سال اول و ۵ دانش آموز سال دوم ۶ نفر برای شرکت در یک اردو به تعداد انتخاب شده اند. احتمال آن که ۲ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند کدام است!

(جواب:  $\frac{5}{14}$ )

سراسری  
در ظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید موجود است. به تعداد ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کلام احتمال حداقل یک مهره آبی خارج می‌شود؟

سراسری  
در آزمون ۷ نفر شرکت کرده‌اند که بر روی ۳ آزمون آزمایش انجام شده است. اگر ۲ نفر از این ۷ نفر به تعداد انتخاب شوند با کدام احتمال حداقل یکی از آن دو آزمون را انجام شده است؟

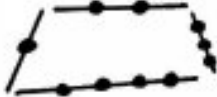
(جواب:  $\frac{5}{7}$ )

سراسری  
در جعبه‌ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تعداد ۴ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید خارج شده است؟

سراسری  
از بین زیر مجموعه‌ها ۴ عضو مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  یکی به تعداد انتخاب می‌شود. احتمال این که شامل اعداد ۲ باشد؟

(جواب:  $\frac{4}{15}$ )

سراسری  
از ۱۰ نقطه‌ای شکل متقابل ۴ نقطه به تعداد انتخاب می‌شود. احتمال آن که با چهار نقطه انتخاب شده بتوان یک چهارضلعی منتظم به طوری که روی هر خط نقطه یک رأس چهارضلعی قرار داشته باشد کدام است؟



سراسری  
از هر چهار گروه آزمایشی به ترتیب ۱، ۲، ۳ و ۴ نفر داوطلب شرکت در آزمون هستند. اگر به تعداد ۴ نفر از بین آنها معرفی شوند، با کدام احتمال از هر گروه یک نفر معرفی شده است؟

(برابری)

سراسری  
در جعبه‌ای ۴ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. به تعداد ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال نقطه‌ای از مهره‌ها سفید است؟

(جواب:  $\frac{10}{21}$ )

مثال ۳ دانش آموز و ۵ دانشجو به طور تصادفی در یک ردیف قرار می گیرند. با کدام احتمال

این دانش آموزان کنار هم می ایستند؟

$$\frac{3! \times 5!}{8!} \rightarrow P(A) = \frac{6! \times 3!}{8!} = \frac{3}{28} \checkmark$$

(ب) دانش آموزان کنار هم و دانشجو نیز کنار هم می ایستند! 
$$\frac{2! \times 3! \times 5!}{8!} = \frac{1}{28} \checkmark$$

(پ) در دو انتهای صف دانشجو می ایستد؟ 
$$\frac{\binom{5}{2} \times 2! \times 6!}{8!} = \frac{5}{14} \checkmark$$

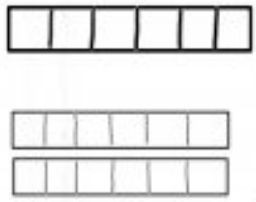
(ت) هیچ دو دانش آموزی کنار هم نیستند! 
$$\frac{\binom{6}{3} \times 3! \times 5!}{8!} = \frac{5}{14} \checkmark$$

برای هر حرفی ATAXIA را بنویسید به طور تصادفی کنار هم قرار می دهیم. با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می گیرند؟

سوال ۹ در جعبه ای ۵ مهر به شماره های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهرها را به طور تصادفی به پی در پی و بدون جایگزینی خارج می کنیم. با کدام احتمال در مهره با شماره فرد متوالیاً خارج نمی شوند؟

برای هر یک از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ بر روی شش گوی یکسان فرشته شده است. به طور تصادفی، متوالی هم یک گوی از جعبه خارج می کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج می شوند؟ (جواب: ۵/۸)

برای هر یک از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را در یکی از ۶ خانه های هم ردیف به تصادف قرار می دهیم. با کدام احتمال این ارقام در خانه های متوالی و در رقم زوج کنار هم قرار می گیرند؟



برای هر شش، هفتی و ۴ کارمند دور یک میز می نشینند. با کدام احتمال هفتی مقابل رئیس قرار می گیرد؟

حل 
$$|S| = (6-1)! = 5!$$

$$|A| = (5-1)! = 4! \rightarrow P(A) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$$



برای بررسی هر یک از چند کارت یکین اعداد سه رقمی حاصل از جایگزینی ترکیبات مجموعه اعداد  $\{2, 4, 5, 6, 7\}$  را نوشته، به تصادف یک کارت از بین آنها می‌آوریم. با کدام احتمال دو رقم از اعداد این کارت هافزی باشند؟

مثال: با ارقام ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ یک عدد چهار رقمی به تصادف ساخته می‌شود. احتمال این که این عدد بزرگتر از ۴۰۰۰ باشد کدام است؟

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{الف) تکرار مجاز است.} \\ \text{فرض} \\ \text{حالات ممکن} \rightarrow \frac{5}{5} \times \frac{5}{5} \times \frac{5}{5} \times \frac{5}{5} = 5 \times 5^3 = 1000 \\ \text{ب) تکرار مجاز نیست.} \\ \text{فرض} \\ \text{حالات مطلوب} \rightarrow \frac{7}{4} \times \frac{5}{5} \times \frac{5}{5} \times \frac{5}{5} = 4 \times 5^3 - 1 = 863 \rightarrow P(\text{الف}) = \frac{863}{1000} \end{array} \right.$$

ب) تکرار مجاز نیست. (جواب: ۷۸)  
H.W

سوال: اگر یک عدد سه رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ به وجود آید، احتمال این که این عدد زوج باشد؟

سوال: اگر یک عدد طبیعی چهار رقمی کمتر از ۵۰۰۰ به طور تصادفی با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ به وجود آید، احتمال آن که مضرب ۵ باشد؟  
(جواب:  $\frac{1}{4}$ )  
H.W

سوال: در زمین اعداد طبیعی سه رقمی، به تصادف یک عدد برداشته ایم. با کدام احتمال لااقل یک رقم ۲ در این عدد ظاهر می‌شود؟

سوال: در کبیره ای ۵ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کبیره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره کمی خارج شده متفاوت است؟

$$n(S) = \binom{12}{3} = 220$$

$$P(\text{سه رنگ متفاوت}) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1}}{220} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

(جواب:  $\frac{29}{44}$ )

سوال: با کدام احتمال فقط دو مهره هم رنگ می‌باشند؟  
H.W



سراسر ۹۶  
 و به تعداد یک کارت برمی دارند. با کدام احتمال هیچ کد ام اسم خود را بدون آن آورد؟  
 (جواب:  $\frac{1}{3}$ )

سراسر ۹۶  
 شش عدد توپ، تعدادی در ۳ جعبه متمایز انداخته شده اند. با کدام احتمال هیچ جعبه ای بدون توپ نمی ماند؟

سراسر ۲۹۶  
 ۵ مهره یک به تعداد ۳ جعبه متمایز ریخته شده اند. با کدام احتمال لا اقل در یکی از جعبه ۲ مهره جای گرفته است؟

$x_1$	$x_2$	$x_3$	
۲	۰	۳	●
۲	۱	۱	▲
۲	۲	۰	○
۰	۲	۳	■
۱	۲	۱	▲
۳	۲	۰	○
۰	۳	۲	■
۱	۲	۲	●
۲	۱	۲	○
۳	۰	۳	■

۵ توپ متمایز به تعداد ۳ جعبه متمایز ریخته اند. با کدام احتمال هیچ جعبه ای بدون توپ نیست؟  
 (جواب:  $\frac{25}{81}$ )

سراسر ۹۷  
 ظرف A شامل ۵ مهره با شماره های یک رقمی فرد و ظرف B دارای ۳ مهره با شماره های یک رقمی زوج غیر صفر است. از هر ظرف یک مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال حاصل ضرب آنها از ۱۰ بیشتر است؟

سراسر ۹۷  
 ظرف A شامل ۸ مهره از اعداد ۸ تا ۱۵ و ظرف B شامل ۵ مهره از اعداد ۱ تا ۵ است. از هر ظرف یک مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال مجموع آن ها از ۸ بیشتر است؟  
 (جواب:  $\frac{3}{8}$ )

سوال ۱۴۰۰ ف  
دوی هر کارت یکی از اعداد ۱ تا ۱۲ را نوشته و سپس در یک کیسه قرار می‌دهیم. به دنبال یک کارت از کیسه بیرون می‌آوریم. اگر عدد زوج باشد، یک عدد دیگر از کیسه بیرون می‌آوریم و درست راست عدد اول قرار می‌دهیم. اگر عدد فرد باشد، یک تاس پرتاب کرده و عدد رفته را درست راست عدد اول قرار می‌دهیم. پس از اعداد ساخته شده، در همه حالات های ممکن، مجموعه A را تشکیل می‌دهیم. یک عدد از مجموعه A انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال، عدد انتخابی بر ۴ بخش پذیر است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

سوال ۱۴۰۰: بریک از اعداد ۱ تا ۲۱ را روی یک کارت می‌نویسیم و در یک کبیسه قرار می‌دهیم. سپس دو کارت به تصادف و به ترتیب از کبیسه خارج کرده و کنار یکدیگر قرار می‌دهیم تا عددی جدید حاصل شود. اعداد تشکیل شده از هفت حالت‌های ممکن را در مجموعه  $A$  قرار می‌دهیم. یک عدد از مجموعه  $A$  انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عدد انتخابی برعکس پذیر باشد، کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{13}{21} & (1) \\ \frac{45}{41} & (2) \\ \frac{11}{20} & (3) \\ \frac{67}{41} & (4) \end{array}$$



تجربی ۱۴۰۰ با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ زیر مجموعه ای از اعداد طبیعی می سازیم که در هر عضو آن، رقم تکراری به کار نرفته است. یک عضو از مجموعه فوق انتخاب می کنیم. احتمال این که عضو انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد، کدام است؟

تجربی ۱۴۰۰  
۲  
پس سوال .... احتمال این که عضو انتخاب شده بر ۳ بخش پذیر باشد، کدام است!

احتمال غیر هم شانس

سوال: در برتیب یک سکه ناسالم، اگر احتمال آمدن "رؤ" نصف احتمال آمدن "بنت" باشد، احتمال برتیب از حالت های "رؤ" و "بنت" را محاسبه کنید.

برای هر  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ،  $p(1) = 2p(2) = 3p(3) = 4p(4)$ ، آنگاه  $p(1)$ !

سوال: سه نفر به نام های  $a$ ،  $b$  و  $c$  با هم مسابقه می دهند. شانس پیروزی  $a$  دو برابر  $b$  و شانس پیروزی  $c$  نصف  $a$  است.

با کدام احتمال  $a$  یا  $c$  می برند؟  
 فرض ساز  $\begin{cases} p(a) = 2p(b) \\ p(c) = \frac{1}{2}p(b) \end{cases}$  if  $p(b) = x$   $p(a) = 2x$ ،  $p(c) = \frac{x}{2}$   
 از طرفی  $p(a) + p(b) + p(c) = 1 \rightarrow 2x + x + \frac{x}{2} = 1 \rightarrow x = \frac{2}{5}$

$$\text{جواب} = p(b \cup c) = p(b) + p(c) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \checkmark$$

نکته: (منطقی بزنه)

سوال: یک تاس به گونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر وجه آن متناسب با عدد روی همان وجه است. در یک بار برتیب این تاس احتمال آن که عددی زوج ظاهر شود کدام است؟

برای هر  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  که احتمال وقوع هر عدد زوج، ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در یک برتیب، احتمال وقوع عددی بزرگتر از ۳ کدام است!

$$\text{جواب} = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1 \rightarrow x = \frac{1}{12}$$

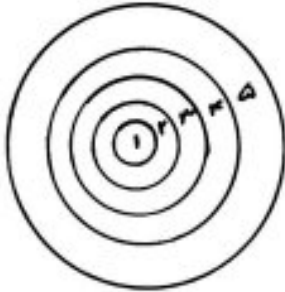
$$\text{جواب} = p(\{3, 4, 5, 6\}) = \frac{p(4)}{3x} + \frac{p(5)}{x} + \frac{p(6)}{3x} = \frac{x}{12} + \frac{1}{12} + \frac{x}{12} = \frac{x}{6} \checkmark$$

سوال: در یک تجربه تعدادی  $S = \{x, y, z\}$  فضای نمونه است،  $p(x)$ ،  $p(y)$  و  $p(z)$  یک دنباله حسابی با قدر نسبت  $\frac{1}{2}$  تشکیل می دهند. مطلوب است  $p(\{x, z\})$ !

بررسی ۱۲۰۱ در یک تجربه تصادفی،  $S = \{x, y, z\}$  یک فضای نمونه است. اگر  $p(x), p(y), p(z)$  یک دنباله هندسی با قدر نسبت کمتر از واحد تشکیل دهند و اوسط هندسی آن  $\frac{1}{6}$  باشد، کمترین مقدار احتمال یک پیشامد ساده در  $S$ ، چقدر است؟

$$\begin{aligned} (1) & \frac{2-\sqrt{2}}{5} & (2) & \frac{2-\sqrt{2}}{5} \\ (3) & \frac{2-\sqrt{2}}{10} & (4) & \frac{2-\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

مثال در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره‌ای در شکل، با پنج ناحیه مجزا، اگر احتمال اصابت به ناحیه اول برابر  $x$  و احتمال اصابت به ناحیه  $k$  ام برابر  $x(k-1)$  فرض شود، چقدر احتمال دارد دارت به ناحیه اول یا چهارم برخورد کند؟



مثال اگر  $S = \{a, b, c, d\}$  و  $p(\{a, b, c\}) = \frac{1}{3}$  و  $p(\{b, c, d\}) = 2p(a) = \frac{2}{5}$ ، آن گاه  $p(\{b, d\})$  چقدر است؟

بررسی ۱۲۰۲ مجموعه  $S = \{x, y, z, t, w\}$  فضای نمونه یک آزمایش تصادفی و  $A = \{x, y\}$  و  $B = \{x, y, z, t\}$  و  $C = \{x, y, w\}$  سه پیشامد از  $S$  هستند. اگر  $p(A) = \frac{1}{5}$  و  $p(B) = \frac{3}{5}$  باشد، مقدار  $p(C)$  کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) & \frac{24}{35} & (2) & \frac{14}{35} \\ (3) & \frac{11}{35} & (4) & \frac{19}{35} \end{aligned}$$

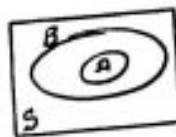


قضیه‌های احتمال

قضیه ۱: احتمال رخ دادن پیشامد تهی برابر صفر است.  $P(\emptyset) = 0$

نسیجه:  $P(A \cap B) = 0 \iff A, B$  دو پیشامد نامازگارند

قضیه ۲: برابر دو پیشامد  $A$  و  $B$  داریم  $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$



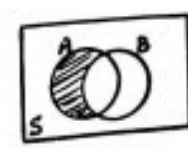
نسیجه ۱: اگر  $A$  پیشامدی در کوزه از فضای نمونه  $S$  باشد، آنگاه  $0 \leq P(A) \leq 1$

یعنی احتمال مستقل  
برای هر حقیقی  $[0, 1]$  آ

توجه:  $A \subseteq S \xrightarrow{ق ۱} P(A) \leq P(S)$   
زیرا

نسیجه ۲: اگر  $A, B$  دو پیشامد در کوزه از فضای نمونه  $S$  باشند، آنگاه

- (الف)  $P(A) \leq P(A \cup B)$  ،  $P(B) \leq P(A \cup B)$   
زیرا  $A \subseteq (A \cup B)$
- (ب)  $P(A \cap B) \leq P(A)$  ،  $P(A \cap B) \leq P(B)$   
زیرا  $(A \cap B) \subseteq A$
- (ج)  $P(A - B) \leq P(A)$  ،  $P(B - A) \leq P(B)$   
زیرا  $(A - B) \subseteq A$
- (د)  $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$

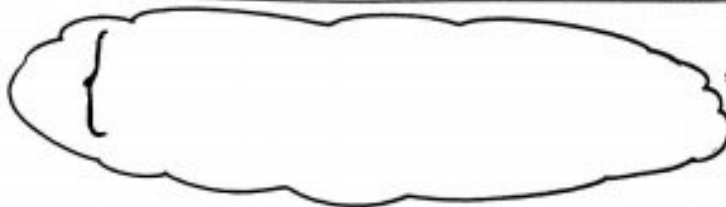
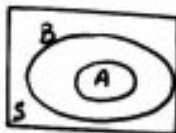


قضیه ۳: اگر  $A, B$  دو پیشامد در کوزه از فضای نمونه  $S$  باشند، آنگاه قضیه تفاضل

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$





نتیجه ۱

نتیجه ۲ محاسبه احتمال رخ دادن تقاطعی از دو پیشامد A و B

قضیه ۴ (قضیه اجتماع در حالت کلی) اگر A و B دو پیشامد در کوله از فضای نمونه S باشند، آنگاه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

و بار سه پیشامد داریم

نتیجه: اگر A و B دو پیشامد در کوله از فضای نمونه S باشند، آنگاه

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

و بار n پیشامد در کوله  $A_n, \dots, A_2, A_1$  داریم

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$P(S)$$

قضیه ۵ (قضیه متمم) اگر A پیشامد در کوله از فضای نمونه S باشد، آنگاه

سراسر: کیبای شامل ۳ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۵ مهره سبز است. ۳ مهره به تصادف و هم زمان از کیب خارج می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل ۲ مهره از مهره‌های خارج شده سبز است؟

حل

$$|S| = \binom{12}{3} = 220$$

$$P(\text{حداکثر ۲ مهره سبز}) = 1 - P(\text{۳ مهره سبز}) = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{220} = \frac{215}{220} \checkmark$$

سراسر برای انجام مسابقه‌ای ۴ نفر از گروه ریاضی و ۶ نفر از گروه تجربی داوطلب شده‌اند. اگر به طور تصادف ۴ نفر از بین آنان انتخاب شوند، با کدام احتمال تعداد افراد انتخابی در این دو گروه متساوت‌اند؟

سراسر اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونه S باشند، کدام رابطه بین احتمال پیشامدها درست است؟

$$P(A) + P(B) + P(A' \cap B') = 1 \quad (1)$$

$$P(A) \cdot P(B) + P(A' \cup B') = 1 \quad (2)$$

$$P(A) + P(B) + P(A' \cap B) = 1 \quad (3)$$

$$P(A) \cdot P(B) + P(A' \cap B') = 1 \quad (4)$$

حل

اصل ۲:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  (برای A و B ناسازگار)

تعیین:  $1 - P((A \cup B)') = P(A) + P(B)$

درجه ۳:  $1 - P(A' \cap B') = P(A) + P(B) \rightarrow$  گزینه ۳

تحت در برتباب دو تاس سالم با هم، چقدر احتمال دارد مجموع دو تاس بزرگتر از ۴ و غیر مساوی باشند؟

سراسر شش مهره با شماره‌های ۱، ۲، ...، ۶ در ظرفی قرار دارد. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم و به جای‌گذاری دومه‌ده دیگر خارج می‌کنیم. احتمال خارج شدن شماره ۳ کدام است؟



برابر ۹۹  
تجزی  
۰.۱۰ فردی صفت این ساده اند. با کدام احتمال دو نفر مورد نظر از آن ها، در کنار هم نمی‌نهند؟

$$\frac{3}{4} \quad \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{10} \quad \frac{3}{5} \quad (3)$$

۴ اگر احتمال قبولی در هر دو امتحان یکی از دو درس  $0.75$  باشد، احتمال قبولی در هر دو درس فیزیک  $0.55$  و احتمال قبولی در هر دو درس شیمی  $0.6$  است. اگر احتمال قبولی در هر دو امتحان یکی از دو درس  $0.75$  باشد، احتمال قبولی در هر دو درس چقدر است؟

$$P(\text{قبولی در شیمی} \cap \text{قبولی در فیزیک}) = P(\text{قبولی در فیزیک}) + P(\text{قبولی در شیمی}) - P(\text{قبولی در شیمی} \cup \text{قبولی در فیزیک})$$

$$0.6 = 0.55 + 0.6 - x \rightarrow x = 0.55$$

۵ کارمندان اداره ای مطابق جدول زیر می باشند. کارمندی به تصادف انتخاب می شود. احتمال این که مرد یا لیسانس باشد چقدر است؟

	لیسانس	دیپلم
زن	۵	۱۵
مرد	۲۰	۱۰

$$\text{کلی کارمندان} = 50 \rightarrow |S| = \binom{50}{1} = 50$$

$$P(\text{مرد} \cup \text{لیسانس}) = P(\text{مرد}) + P(\text{لیسانس}) - P(\text{مرد} \cap \text{لیسانس})$$

لا اقل یکی از اعداد ۴ یا ۹ باشد

۶ از مجموعه اعداد  $\{100, 101, 102, \dots, 700\}$  عددی به تصادف انتخاب می شود. با کدام احتمال این عدد مضرب ۴ یا مضرب ۹ است؟

$$|S| = \binom{601}{1} = 601 \rightarrow 700 - 99 = 601$$

$$\begin{cases} \text{تعداد مضرب ۴} = \left\lfloor \frac{601}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{4} \right\rfloor = 126 \\ \text{تعداد مضرب ۹} = \left\lfloor \frac{601}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{9} \right\rfloor = 55 \\ \text{تعداد مضرب ۳۶} = \left\lfloor \frac{601}{36} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{36} \right\rfloor = 13 \end{cases}$$

با کدام احتمال مضرب ۴ است و مضرب ۹ نیست؟

با کدام احتمال نه مضرب ۴ و نه مضرب ۹ است؟

با کدام احتمال مضرب ۴ است ولی نه مضرب ۹ نیست یا مضرب ۳۶ نیست ولی نه مضرب ۴ است؟  
بیان کنید: (تعداد مضرب یکی از اعداد ۴ یا ۹ است) یا (مضرب ۴ یا ۹ است ولی مضرب ۳۶ نیست)

تست اگر  $P(A-B) = \frac{2}{17}$  و  $P(B-A) = \frac{10}{17}$  و  $P(B) = 3P(A)$ ، آنگاه  $P(A \cup B)$  کدام است؟

حل

$$\begin{cases} P(A-B) = \frac{2}{17} \rightarrow P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{17} \\ P(B-A) = \frac{10}{17} \rightarrow \frac{P(B)}{3P(A)} - P(A \cap B) = \frac{10}{17} \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2P(A) = \frac{8}{17} \rightarrow P(A) = \frac{4}{17}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{17} + \frac{12}{17} - \frac{2}{17} = \frac{14}{17} \checkmark$$

تست اگر  $P(A) + P(B) = 1,8$ ، حداکثر  $P(A' \cap B')$  کدام است؟

برای سفر در میانه هتل ۷۲ مسافر وجود دارد که ۲۳ نفر آنان تاجرند و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده اند. اگر ۸ نفر از تاجران برای اولین بار سفر کرده باشند با کدام احتمال فرد انتخابی از بین مسافران این هتل، نه تاجر است و نه برای اولین بار سفر کرده است؟  
(جواب:  $\frac{5}{8}$ )

برای سفر ۹۲ نفر A و B دو چیز آمد از نصاب سفرهای S باشند بطوری که  $P(A) = \frac{1}{4}$ ،  $P(B) = \frac{1}{6}$ ،  $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ ، آنگاه  $P(A' \cap B)$  کدام است؟

برای سفر ۵ نفر از کسانی که مخموز آن ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز است، به تعداد ۳ مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال بین مهره‌های خارج شده، مهره سفید نیست، مهره سیاه نیست؟

احتمال شرطی (کاهش فضای نمونه)

در برخی مسائل اعلام می شود پیشامد  $B$  مانند  $B$  رخ داده است ( $B \neq \emptyset$ ) و آزمایش خواهند احتمال رخ دادن پیشامد دیگر مانند  $A$  را، با توجه به این که  $B$  رخ داده است، محاسبه کنیم (احتمال رخ دادن  $A$  به تنهایی مورد نظر نیست)؛ که در این صورت می گوئیم "احتمال رخ دادن  $A$  به شرط رخ دادن  $B$ " و می نویسیم  $P(A|B)$  به شرط

مثال: در پرتاب یک تاس سالم،

الف) احتمال اینکه عدد زوج ظاهر شود چقدر است؟

ب) اگر بدانیم تاس عددی بزرگتر از ۳ آمده است، با کدام احتمال عدد زوج ظاهر می شود؟

نتیجه:

پاسخ: یک تاس ممکن را انداخته ایم. برآمد حاصل مغز پر نیست. احتمال آن که شماره‌ی ظاهر شده ۲ باشد کدام است؟

مثال: جعبه‌ای شامل ۵ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز است. مهره‌ای به تعادف خارج می‌کنیم. اگر سیاه نباشد، با کدام احتمال قرمز است؟

مثال: جعبه‌ای شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. به طور متوالی و بدون جای‌گذاری، دو مهره به تعادف بیرون می‌آوریم. اگر اولین مهره سفید باشد، با کدام احتمال دومین مهره نیز سفید است؟

مثال: در پرتاب دو تاس سالم، اگر تاس اول بزرگتر از ۴ آمده باشد، با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده ۸ است؟



تت در پرتاب دو تاس سالم با هم اگر حداقل یکی از تاس‌ها ۵ باشد، با کدام احتمال دو تاس دو عدد متوالی را نشان می‌دهند؟

تت در پرتاب دو تاس سالم با هم هر دو تاس کوچکتر از ۵ ظاهر شده است. احتمال آن که مجموع دو تاس برابر ۴ باشد، کدام است؟

$$\text{حله} \quad S = \left( \begin{matrix} \text{تاس ۱} \\ \text{تاس ۲} \end{matrix} \right) = \left( \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \right) \text{ و } \left( \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \right)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\text{حالت ۴} \times \text{حالت ۴} = 16 \text{ حالت ممکن}$$

$$\text{احتمال} = \frac{3}{16} \checkmark \rightarrow \{(1,3), (2,2), (3,1)\} \rightarrow \text{حالات مطلوب}$$

تت در پرتاب ۴ تاس سالم با هم، اگر چهار عدد متوالی ظاهر شده باشد، با کدام احتمال یکی از تاس‌ها ۲ است؟ (جواب:  $\frac{1}{5}$ )

تت سه تاس همگن را انداختیم. اگر حاصل جمع شماره‌های رول شده کمتر از ۶ باشد، احتمال آن که شماره یکی از تاس‌ها رول شده ۲ باشد، کدام است؟

تت یک تاس سالم را سه بار متوالی پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع سه عدد ظاهر شده ۱۵ باشد، با کدام احتمال هر سه عدد مساوی اند؟

تت در پرتاب دو تاس قرمز و آبی، عدد تاس قرمز بزرگتر از آبی ظاهر شده، احتمال آن که مجموع دو تاس ۶ باشد، کدام است؟

$$\text{حله} \quad \begin{matrix} \text{قرمز آبی: ۱۵ حالت} \\ \text{آبی قرمز: ۱۵ حالت} \\ \text{نشان داده شده} \end{matrix}$$

$$\text{حالت ۳۰ مساویانه} \rightarrow \text{۶ حالت دو تاس مساویانه} \rightarrow 36 = 6^2 = \text{کل حالات پرتاب دو تاس}$$

$$\text{آبی قرمز آبی قرمز} \rightarrow \text{احتمال} = \frac{2}{3} \checkmark \rightarrow \{(5,1), (4,2)\} = \text{حالات مطلوب}$$

تت خانواده‌ای دارای چهار فرزند است. اگر بدانیم دو فرزند اول آن‌ها پسر است، احتمال آن که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشد، کدام است؟

(جواب:  $\frac{1}{4}$ )

سوال ۹۱ در پرتاب دو تاس سالم باهم، می‌دانیم جمع دو عدد رو شده کمتر از ۱۰ است. با کدام احتمال هر دو عدد فردند؟

تست ۴۰۳ در پرتاب دو تاس سالم باهم، می‌دانیم جمع دو عدد رو شده بزرگتر از ۵ است. با کدام احتمال هر دو عدد مساوی اند؟  
(جواب:  $\frac{2}{13}$ )

سوال ۹۲ پنج مهره سفید با شماره های ۱ تا ۵ و پنج مهره سیاه با شماره های ۱ تا ۵ و یکین در ظرفی قرار می‌دهیم. به تعداد دومهره از بین آنها بیرون می‌آوریم. اگر مجموع شماره های هر دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال هر دو مهره یکسانند؟

سوال ۹۳ دو کارت به تعداد از بین ۹ کارت یکسان به شماره های ۱ تا ۹ بر می‌آوریم. اگر مجموع اعداد روی این دو کارت زوج باشد، با کدام احتمال هر دو عدد فردند؟  
(جواب:  $\frac{5}{8}$ )

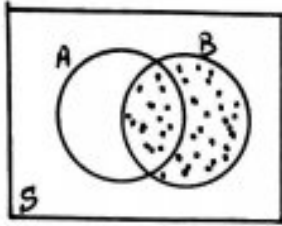
سوال ۹۴ تاس هگونی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این که لااقل یکی از تاس های رو شده ۲ باشد کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad \frac{5}{11} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{3}{4}$$

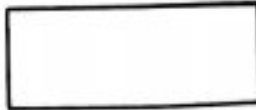
سوال ۹۵ احتمال این که لااقل یکی از تاس های رو شده ۳ باشد کدام است؟

(جواب:  $\frac{23}{54}$ )

فرمول احتمال شرطی ←



$P(A|B) = ?$   
 (نوع داده است  $(B \neq \emptyset)$ )



۹۶ سراسر  
 یک فضای نمونه متشکل از  $a, b, c, d, e$  است. اگر  $P(a) = \frac{1}{4}$  و  $P(\{a, b, c\}) = \frac{2}{3}$  باشد، آن گاه  $P(\{b, c, e\} | \{a, b, c\})$  کدام است؟

۹۸ سراسر  
 احتمال موفقیت فردی در آزمون اول  $\frac{1}{7}$  و در آزمون دوم  $\frac{1}{4}$  است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم  $\frac{1}{8}$  است. با کدام احتمال لایق در یکی از این دو آزمون، موفق می شود؟

۹۹ سراسر  
 دو پیشامد  $A$  و  $B$  در فضای نمونه  $S$  هستند. اگر  $P(A) = \frac{1}{4}$ ،  $P(B|A) = \frac{1}{5}$ ،  $P(B) = \frac{1}{3}$  باشد، آن گاه  $P(B|A')$  کدام است؟

۹۹ سراسر  
 H.W  
 امیر و بهروز هر کدام به ترتیب با احتمال  $\frac{1}{6}$  و  $\frac{1}{3}$  در یک مسابقه، علمی شرکت می کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز برابر  $\frac{1}{5}$  است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز کدام است؟  
 (جواب:  $\frac{9}{14}$ )

۹۳ سراسر  
 H.W  
 اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه  $S$  باشند به طوری که  $P(A) = \frac{1}{2}$ ،  $P(B) = \frac{1}{3}$ ،  $P(B|A) = \frac{1}{4}$  آن گاه  $P(B|A')$  کدام است؟  
 (جواب:  $\frac{1}{9}$ )



بر اساس ۱۲٪ فرض کنید علی و حسن دو کارخانه باشند که با احتمال  $\frac{1}{6}$  و  $\frac{1}{4}$  به هدف می زنند. اگر هر کدام یک بار سرتراشاندازی کنند و بدینم هدفی یک تیر به هدف اصابت کرده است. با کدام احتمال علی به هدف زده است؟

$$\frac{15}{19} \quad \frac{5}{6}$$

$$\frac{17}{25} \quad \frac{3}{4}$$

چندتکه مفهم

تیکه ۱: هر احتمال یک احتمال شرطی محسوب می شود. به عبارت دیگر  $P(A) = P(A|B)$  توجه: این آنگاه می توانیم

تیکه ۲:  $P(A|B) = P(B|A) = 0 \iff A, B$  دو پدیده ناسازگانه.

تیکه ۳: فرمول احتمال شرطی در اصول احتمال صدق می کند. به عبارت دیگر

اصل ۱  $P(S|c) = 1 \quad c \neq \emptyset$

اصل ۲  $P(A \cup B|c) = P(A|c) + P(B|c) \iff A, B$  ناسازگانه

تیکه ۴: فرمول احتمال شرطی در قضیه های احتمال صدق می کند. به عبارت دیگر

۱)  $P(\emptyset|c) = 0$

۲)  $A \subseteq B \implies P(A|c) \leq P(B|c)$

۳)  $P(A - B|c) = P(A|c) - P(A \cap B|c)$

۴)  $P(A \cup B|c) = P(A|c) + P(B|c) - P(A \cap B|c)$

۵)  $P(A'|c) = 1 - P(A|c)$

بر فرض می بینیم بسیار

در بیان هر سبب دلنه با محدثه

دلنه هر سبب هر محاسبه

چینا از عجیب دلنه با ششم سبب!

قضیه ضرب احتمالها (محاسبه احتمال رخداد توأم دو رویداد)

اگر  $A$  و  $B$  دو رویداد (ناقص) با احتمال‌های مثبت از فضای نمونه  $S$  باشند، آنگاه

$$\begin{cases} P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \\ P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \end{cases}$$

سوال: بر حسب تجربه گذشته می‌دانیم احتمال این که رتبه اول سال آخر رشته ریاضی دبیرستانی درگنکور قبول شود  $9/10$  است. با توجه به سوابق تحصیلی دانش‌آموز، احتمال این که او در سال آخر رشته ریاضی دبیرستان رتبه اول شود  $9/10$  است. احتمال این که این دانش‌آموز هم رتبه اول شود و هم درگنکور قبول شود چه قدر است؟

سوال: احتمال زنده ماندن در یک عمل بیرون عضو برابر  $5/10$  است. اگر بیماری پس از عمل زنده باشد، احتمال این که بدن او در طول یک ماه دوباره قابل کشف و معیّر  $2/10$  است. احتمال زنده ماندن یک بیمار بیرونی پس از این دو مرحله چه قدر است؟

$$\text{حل} \quad P(\text{زنده ماندن در عمل} \mid \text{زنده ماندن پس از یک ماه}) = P(\text{زنده ماندن در عمل}) \cdot P(\text{زنده ماندن پس از یک ماه} \mid \text{زنده ماندن در عمل}) = 5/10 \times (1 - 2/10) = 4/10$$

سوال: در یک تاس سالم اگر عددی بزرگتر از ۳ بیاید، مجاز به برتاب تاس دوم هستیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده کمتر از ۸ است؟

$$\begin{aligned} \text{حل} \quad P(\text{تاس اول} > 3 \mid \text{مجموع دو تاس} < 8) &= P(\text{تاس اول} > 3) \cdot P(\text{مجموع دو تاس} < 8 \mid \text{تاس اول} > 3) \\ &= \frac{3}{6} \times \frac{4}{18} \\ &= \frac{1}{9} \checkmark \end{aligned}$$

تیم: تاس اول (۱ تا ۶) و تاس دوم (۱ تا ۶) = ۱۸ حالت ممکن  
حالت ممکن:  $(4,1), (4,2), (5,1), (5,2), (6,1)$

سوال: امیر و بابک عضو تیم ۴ نفره والیبال اند و قد هیچ دو نفری در تیم برابر نیست. اگر امیر از بابک بلندتر باشد، با کدام احتمال امیر (الف) امیر بلند قدترین عضو تیم است؟

$$\begin{aligned} \text{حل} \quad P(\text{امیر از بابک بلندتر است} \mid \text{امیر از بابک بلندتر است}) &= \frac{P(\text{امیر بلند قدترین است} \cap \text{امیر از بابک بلندتر است})}{P(\text{امیر از بابک بلندتر است})} \\ &= \frac{P(\text{امیر بلند قدترین است}) \cdot P(\text{امیر از بابک بلندتر است} \mid \text{امیر بلند قدترین است})}{1/2} = \frac{1/4 \times 1}{1/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ب) امیر از نظر بلندی قد تقریباً از هم تیم است؟

$$P(\text{امیر از نظر بلندی قد تقریباً از هم تیم است} | \text{امیر از نظر قد تقریباً از هم تیم است}) = \frac{P(\text{امیر از نظر بلندی قد تقریباً از هم تیم است} \cap \text{امیر از نظر قد تقریباً از هم تیم است})}{P(\text{امیر از نظر قد تقریباً از هم تیم است})}$$

$$= \frac{P(\text{امیر از نظر قد تقریباً از هم تیم است}) \cdot P(\text{امیر از نظر بلندی قد تقریباً از هم تیم است} | \text{امیر از نظر قد تقریباً از هم تیم است})}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

سوال ۱۸: در یک کیسه ۱۶ گوی به شماره های ۱ تا ۱۶ وجود دارد. دو گوی به طور متوالی و بدون جای گذاری به تصادف انتخاب می کنند. اگر به این شماره گوی دوم از شماره گوی اول کمتر است، با کدام احتمال شماره گوی اول ۱۶ است؟

$$\frac{1}{16} \times \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$$

قضیه ضرب احتمال ها برای سه پیشامد

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

سوی بیخ برسد به شرط  
دومی بیخ به عدد  
اولی بیخ به عدد  
بیخ داد اولی و دومی  
به شرط رخ داد اولی  
بیخ دادن توأم سه پیشامد

سوال ۱۹: جعبه ای شامل ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. سه مهره به طور متوالی و بدون جای گذاری به تصادف خارج می کنند. با کدام احتمال

(۴ سفید  
۶ سیاه)

الف) هر سه مهره سفید اند؟

$$P(\text{اولی و دومی سفید} | \text{سومی سفید}) \cdot P(\text{اولی سفید} | \text{دومی سفید}) \cdot P(\text{اولی سفید}) = P(\text{سومی سفید} \cap \text{دومی سفید} \cap \text{اولی سفید}) = \text{جواب}$$

$$= \quad \times \quad \times \quad =$$

ب) سه مهره به طور یکی در میان رنگ متفاوت دارند؟

سوال ۲۰: یک بازیکن بکنبال اگر روحیه خوبی داشته باشد، با احتمال ۹۰ درصد و اگر روحیه خوبی نداشته باشد، با احتمال ۶۰ درصد برتاب خود را وارد سبد می کند. بر برتابی را که وارد سبد کند، بر برتاب بعدی روحیه خوبی دارد، در غیر این صورت روحیه خوبی ندارد. فرض کنید در ابتدای بازی روحیه خوبی دارد. احتمال این که از سه برتاب متوالی دقیقاً دو برتاب آخر را وارد سبد کند چقدر است؟



## احتمال کل

در برخی مسائل محاسبه احتمال مطلوب به تنهایی ممکن نیست و باید آنچه که در مراحل قبل بیخ داده است بگنجد دارد. در این نوع مسائل فضای نته به پیشامدهای ارزشمند است که احتمال مطلوب را باید در هر یک از این افزایشها به طور جداگانه محاسبه نمود و با هم جمع کرد. عدد حاصل احتمال کل نامیده می شود.

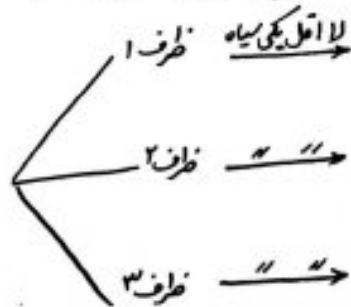
برابر دو ظرف همانند، اولی دارای ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و دومی دارای ۶ مهره سفید و ۸ مهره سیاه است. با چشم بسته یکی از این دو ظرف را اختیار کرده و مهره ای از آن بیرون می آوریم. احتمال این که مهره سفید باشد کدام است؟



سوال: دو ظرف با محتویات زیر موجود است. یک تاس سالم را می اندازیم. اگر پایید طرف اول و در غیر این صورت طرف دوم را انتخاب می کنیم و سپس مهره ای از ظرف انتخابی خارج می کنیم. احتمال سفید بودن این مهره کدام است؟

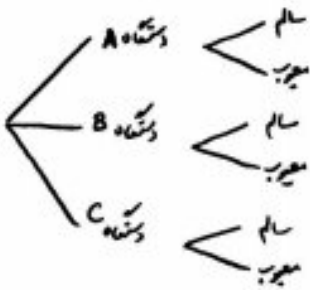
۶ سفید	۴ سیاه	ظرف ۱
۲ سفید	۵ سیاه	ظرف ۲

برابر ۹۹ سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهره سفید، در دومی ۹ مهره سیاه و در سومی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. به تصادف از یکی ظرف ۲، مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال لا اقل یکی از این دو مهره سفید است؟

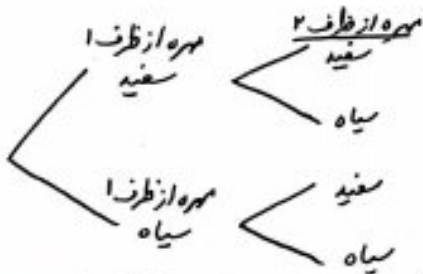
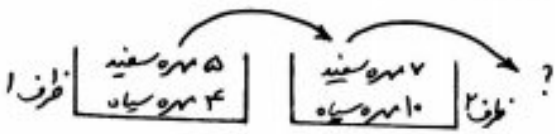


برابر ۹۹ درجه ۱، اول ۳ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و درجه ۲، دوم ۳ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟

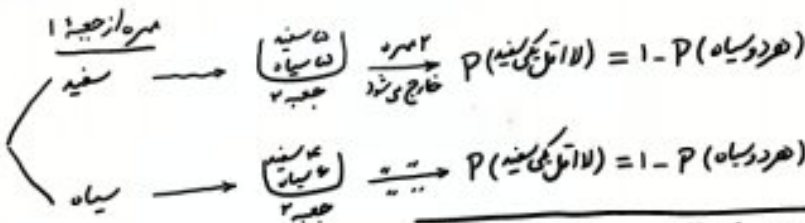
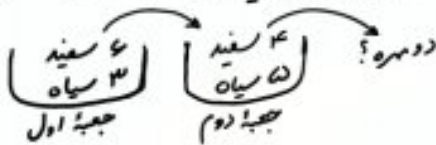
برای در کارخانه‌ای سه دستگاه A، B و C به ترتیب ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد محصولات را تولید می‌کنند و می‌دانیم محصولات این سه دستگاه به ترتیب ۱۰، ۱۰ و ۲۰ درصد معیوب اند. محصولی که به تصادف از این کارخانه انتخاب می‌شود، با کدام احتمال سالم است؟



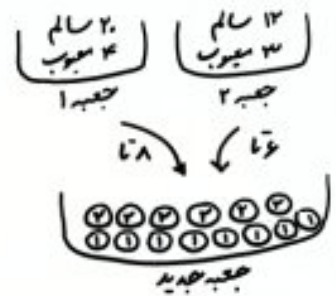
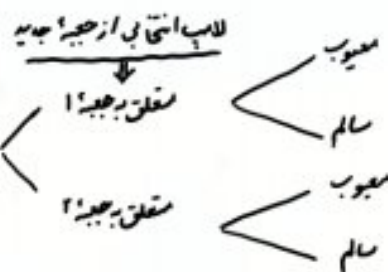
برای دو ظرف داریم. در اولی ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در دومی ۷ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه است. از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رویت در ظرف دوم قرار می‌دهیم. آنگاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟



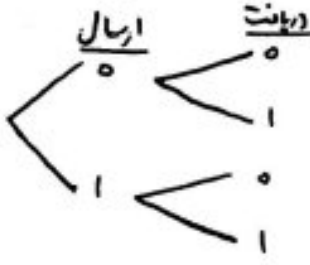
برای در جعبه اول ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه دوم ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارد. از جعبه اول یک مهره به دلخواه خارج می‌کنیم و در جعبه دوم می‌اندازیم. پس دو مهره از جعبه دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لایه‌های یکی از این دو مهره سفید است؟



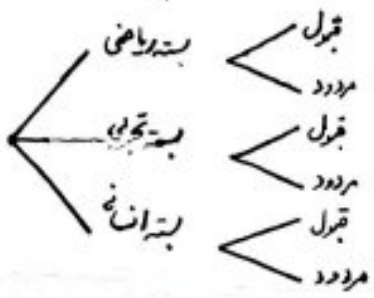
برای در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لاپ می‌گین موجود است. در جعبه اول ۴ و در جعبه دوم ۳ لاپ معیوب اند. از اولی ۸ و از دومی ۶ لاپ به تصادف برداشته و در جعبه جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک لاپ انتخابی از جعبه جدید معیوب است؟



مثال در یک دستگاه مجابره کننده خط ۰ و ۱ با احتمال های به ترتیب ۰.۷ و ۰.۳ ارسال می شوند. چون خطا وجود دارد، احتمال آن که صفر ارسال شده همان صفر دریافت کرده برابر ۰.۹ و احتمال آن که یک ارسال شده همان یک دریافت کرده برابر ۰.۸ است. با کدام احتمال در گیرنده صفر دریافت می شود؟

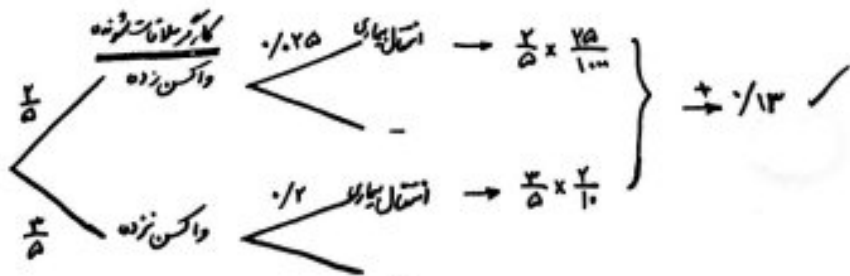


سوال ۲۹۸ هر روز جهت شرکت در یک مسابقه، از بین پرسش های ۵ بسته ریاضی، ۷ بسته تجویز و ۶ بسته علوم انسانی، به تصادف یک بسته اختیار کرده است. احتمال برنده شدن در هر بسته این درلاس به ترتیب ۰.۷، ۰.۸ و ۰.۹ است. با کدام احتمال هر روز برنده می شود؟



سوال ۹۳ طرف ۸ دلاری ۴ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و هر یک از دو طرف یک B و C دلاری ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از سه طرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره های خارج شده سفید است؟ (جواب: ۲۵/۶۳)

سوال ۹۴ احتمال انتقال بیماری مسمی به افرادی که واکسن زده اند ۰.۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰.۲ است. ۲/۵ کارگران واکسین شده اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند. با کدام احتمال این بیماری منتقل می شود؟



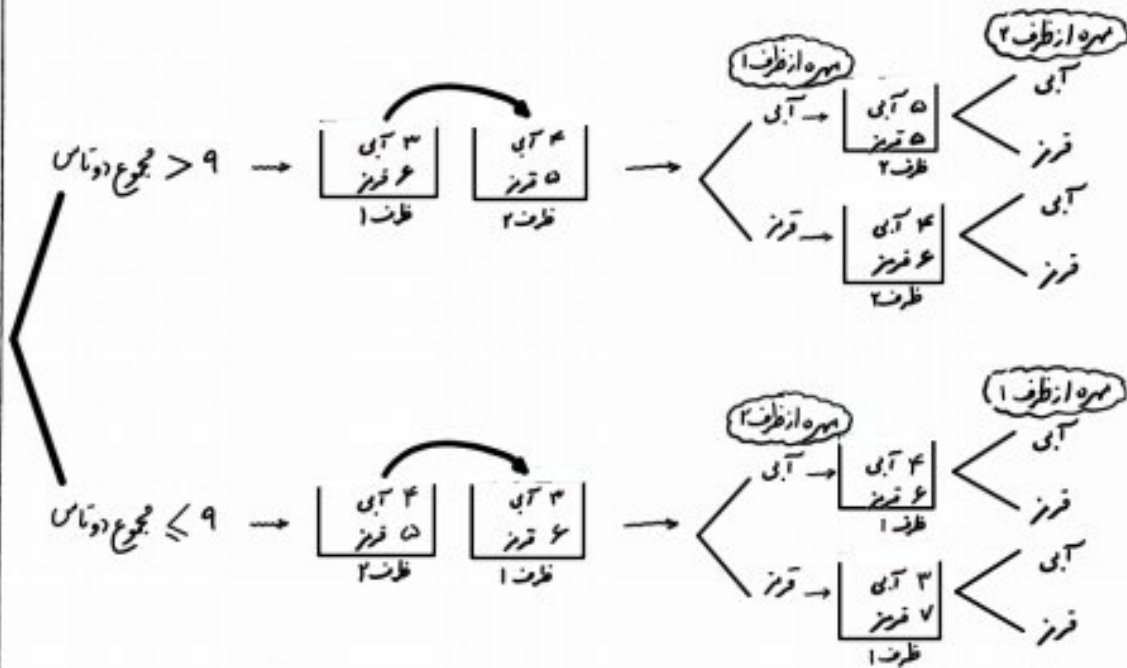
سوال ۹۵ در یک دستگاه ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آنها دفترچه سلامت دارد؟ (جواب: ۷/۴۶۹)



سوال ۱۴۰۰ در ظرف اول ۳ مهره آبی و ۶ مهره قرمز و در ظرف دوم ۳ مهره آبی و ۵ مهره قرمز قرار دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد پرتاب شده از ۹ بیشتر باشد، به تصادف از ظرف اول یک مهره خارج کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهره بیشتر انتخاب می‌کنیم. احتمال این که مهره قرمز باشد، کدام است؟

(۱)  $\frac{157}{270}$     (۲)  $\frac{165}{270}$

(۳)  $\frac{173}{270}$     (۴)  $\frac{180}{270}$



براساس ۱۴۰۰ خان  
 در ظرف اول ۳ مهره آبی و ۶ مهره قرمز و در ظرف دوم ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز قرار دارند.  
<sup>H.W</sup> دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده ۷ یا ۱۰ باشد، به تصادف یک مهره از ظرف اول  
 خارج کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و ظرف اول  
 اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهره بیشتر انتخاب می‌کنیم. احتمال این که این مهره آبی باشد  
 کدام است؟

(گزینه ۲)

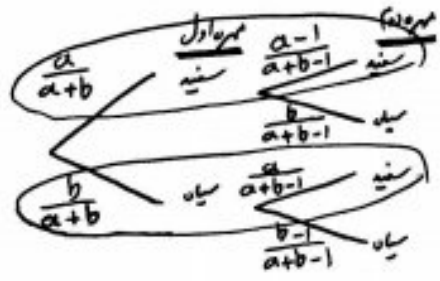
$$\frac{7}{18} \quad (۱) \quad \frac{11}{30} \quad (۲)$$

$$\frac{19}{30} \quad (۳) \quad \frac{11}{18} \quad (۴)$$

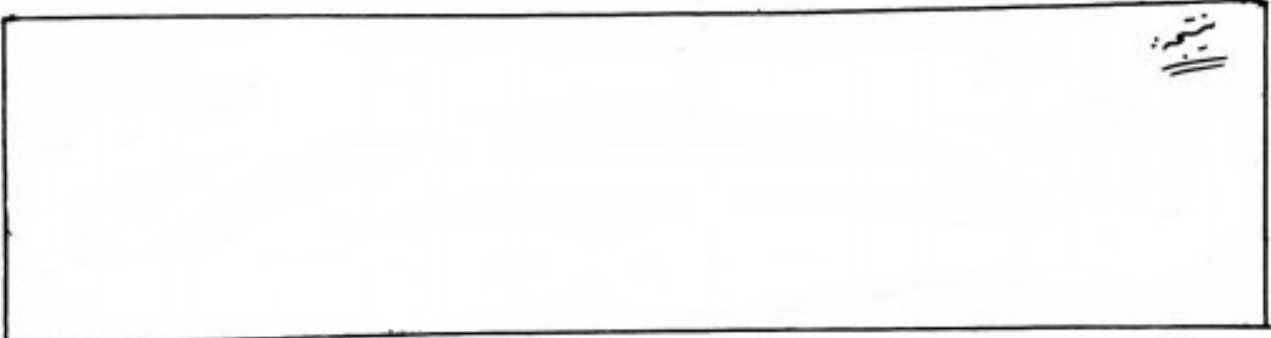
مسئله ۸ بولیا

کسبه ای شامل  $a$  مهره سفید و  $b$  مهره سیاه است. مهره ای به تصادف از کسبه بیرون می آوریم و بدون مشاهده رنگ آن کنار می گذاریم. سپس مهره دیگری از کسبه بیرون می آوریم. احتمال سفید بودن مهره دوم چند است؟

( $a$  سفید  
 $b$  سیاه)



$$P(\text{دو سفید}) = \frac{a}{a+b} \times \frac{a-1}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \times \frac{a}{a+b-1} = \frac{a(a-1) + ab}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{a(a-1+b)}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{a}{a+b} = P(\text{اولی سفید})$$



۹۳ و ۹۴  
۹۶  
کسبه ای شامل ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. سه مهره به تصادف و همزمان از کسبه بیرون رویت خارج شده است. از چهار مهره باقی مانده یک مهره خارج می کنیم. احتمال سفید بودن مهره آخری چند است؟

۹۲  
درجه ای از مهره سفید و ۹ مهره سیاه وجود دارد. دهمه متوالیاً بیرون جای گذاری خارج می کنیم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟

۹۱  
درجه ای از ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. ابتدا یک مهره را بیرون رویت خارج می کنیم. پس از این بقیه مهره ها، ۲ مهره برمی داریم. با کدام احتمال هر دو مهره اخیر سفید است؟

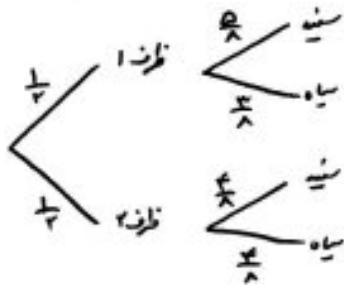
تقریب ۹۰  
کسبه ای شامل  $a$  مهره سفید و  $b$  مهره سیاه است. مهره ای به تصادف از کسبه خارج می نمایم و به جای آن،  $n$  مهره هم رنگ با آن در کسبه قرار می دهیم. پس مهره ای از کسبه به طور تصادفی بیرون می آوریم. احتمال سفید بودن این مهره چقدر است؟ (جواب:  $\frac{a}{a+b}$ )



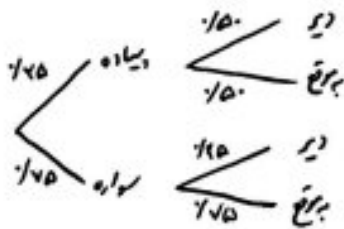
قاعده ضرب

در هر مسأله حائز مسأله احتمال کل، فضای نمونه به پیشامدهای افزایش یافته است، ولی نتیجه آزمایش مشخص می باشد و با توجه به اینکه نتیجه آزمایش مشخص می باشد، احتمال رخ دادن یکی از افزایشها مورد نظر است. یعنی مطلوب ترکیب احتمال شرطی است. که چهار بافتن آن نمودار درختی مسأله را رسم می کنیم. با توجه به شرط داده شده (نتیجه آزمایش که مشخص است)، حالت های ممکن را روی نمودار درختی مشخص می کنیم رسم هر یک از احتمال مطلوب می پردازیم. این روش را عمدتاً به عنوان نامیده می شود.

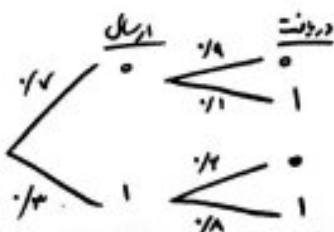
**مثال:** دو ظرف مشابه داریم. اولی شامل ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و دومی شامل ۴ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. با چشم بسته از یکی از ظرف ها مهره ای خارج می نمایم. اگر این مهره سفید باشد، با کدام احتمال از ظرف اول خارج شده است؟



**تمرین:** دانش آموزی در ۲۵ درصد موارد زیاد و در ۷۵ درصد موارد شماره بدست می دهد. اگر زیاد بردارد در ۵۰ درصد مواقع و اگر شماره بردارد در ۲۵ درصد مواقع دیر می رسد. اگر روزی دیر رسیده باشد، با کدام احتمال پیدا شده است؟ (جواب: ۷۴)

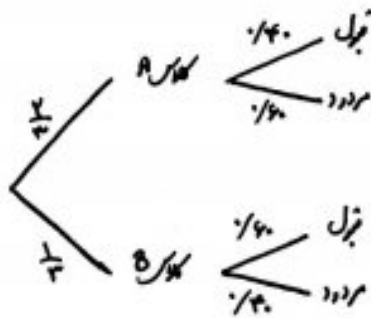


**مثال:** در یک دستگاه شماره کننده قوطی ۵ و ۱ با احتمال های به ترتیب ۰.۷ و ۰.۳ ارسال می شوند. چون خطا وجود دارد، احتمال آن که صفی ارسال شده همان صف دریافت گردد برابر ۰.۸ و احتمال آن که یک ارسال شده همان یک دریافت گردد برابر ۰.۸ است. اگر در گیرنده صف دریافت کرده باشیم، با کدام احتمال صف نیز ارسال شده است؟



۱۲. در یک آزمون از دو کلاس A و B، ۴۰ درصد دانش آموزان کلاس A و ۶۰ درصد دانش آموزان کلاس B قبل از آزمون اگر تعداد دانش آموزان کلاس A دو برابر کلاس B باشد و فرضی به تصادف از بین قبولی در هر کلاس انتخاب شود، تقریباً با کدام احتمال، این فرد از کلاس A است؟

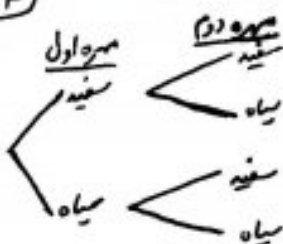
- ۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{5}$
- ۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{3}$



۱۳. شغل کیسای شامل ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. در مهره پی در پی بدون جایگزینی خارج می‌نماییم.

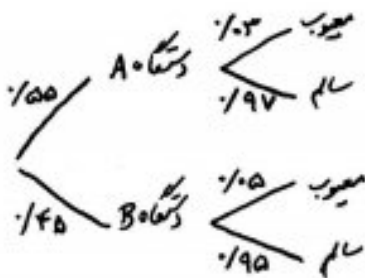
الف) با کدام احتمال مهره دوم سفید است؟

۶ سفید  
۴ سیاه



ب) اگر مهره دوم سفید باشد، با کدام احتمال مهره اول نیز سفید است؟

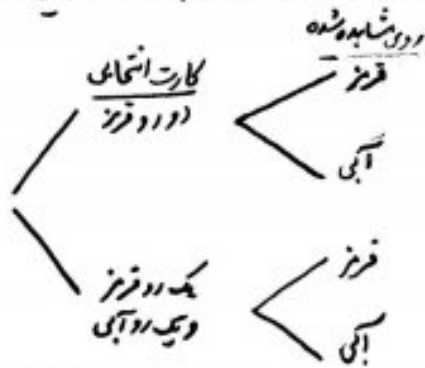
۱۴. در یک شرکت تولیدی، ۵۵ درصد کالا محصول دستگاه A، ۳۰ درصد معیوب و ۴۵ درصد آن محصول دستگاه B با احتمال ۵ درصد معیوب است. اگر یک کالا را به طور تصادفی انتخاب کنیم و بدانیم که معیوب است، با کدام احتمال این کالا محصول دستگاه A است؟



$$P(A | \text{معیوب}) = \frac{1/55 \times 1/3}{1/55 \times 1/3 + 1/45 \times 1/5}$$

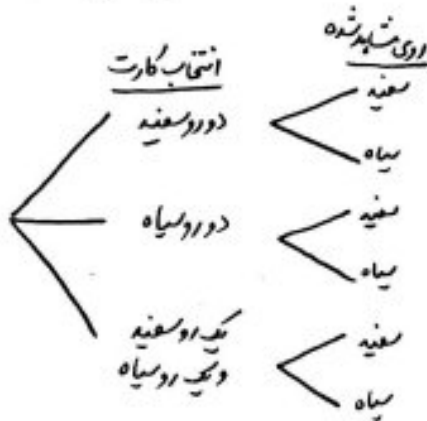
۱۵. ششای: دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت ددو قرمز و ۸ کارت یک روز قرمز و یک رو آبی است. کاری به تصادف از این دسته برداری و یک روی آن را می‌بینیم.

الف) احتمال این که آن روز قرمز باشد چند است؟

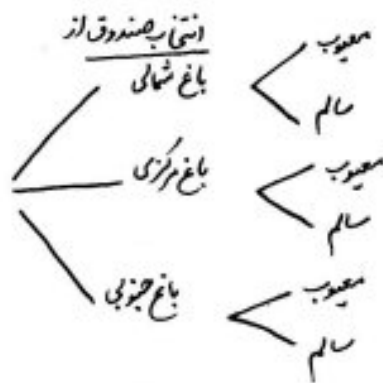


ب) اگر روی شش دیده شده قرمز باشد، با کدام احتمال روی دیگر کارت نیز قرمز است؟

**مثال** فرض کنید سه کارت داریم. اولی دو رو سفید، دومی دو رو سیاه و سومی یک رو سفید و یک رو سیاه است. کارتی به تصادف انتخاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم یک روی آن سفید است. احتمال این برد روی آن سفید باشد چقدر است؟



**تمرین** سه صندوق سیب از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم و به ترتیب ۱۰، ۵ و ۲۰ درصد معیوب باشند. از یکی از صندوق‌ها یک سیب به تصادف برمی‌داریم.



الف) احتمال معیوب بودن سیب انتخابی کدام است؟  
(جواب:  $\frac{7}{6}$ )

ب) اگر سیب انتخابی معیوب باشد، با کدام احتمال متعلق به باغ مرکزی است؟  
(جواب:  $\frac{1}{7}$ )

**مثال** یک شرکت بیمه، مشتریان خود را به دو گروه "پرخطر" با احتمال  $\frac{1}{4}$  تصادف در سال و "کم خطر" با احتمال  $\frac{3}{4}$  تصادف در سال، تقسیم کرده است. فرض کنیم ۳۰ درصد مشتریان این شرکت، "پرخطر" می‌باشند. اگر فردی به تصادف از مشتریان این شرکت، که می‌دانیم در یک سال تصادف داشته است، انتخاب کنیم، احتمال این که در گروه پرخطر باشد، چقدر است؟



پیشاهای مستقل

دو پیشاه را مستقل می‌گیریم هرگاه رخ دادن یکی در رخ دادن دیگری تأثیر نداشته باشد. به عبارت دیگر نتیجه این دو پیشاه  
 ربطی بهم ندارند. به عنوان مثال زدن کینه دو تاس سالم را با هم می‌انزایم. واضح است که نتیجه تاس اول در نتیجه  
 تاس دوم تأثیر ندارد و برعکس. به عبارت دیگر مستقلانه و مشکلی در آن گفت

بنابراین

دو پیشاه A و B از کیفیاتی هستند مستقل اند اگر و تنها اگر

سوال: در تیرتاب یک تاس سالم و یک سکه سالم

الف) اگر باینم تاس عدد ۶ آمده است، با کدام احتمال سکه "تو" می‌آید؟

ب) اگر باینم سکه "تو" آمده است، با کدام احتمال تاس عدد ۶ می‌آید؟

سوال: یک سکه سالم را صد بار انداخته‌ام، هر صد بار "تو" آمده است. احتمال آن که در تیرتاب صدوم "تو" بیاید کدام است؟

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

↔ A و B دو پیشاه مستقل اند

\* نتیجه مهم

اینتر

سوال: در تیرتاب یک تاس سالم و یک سکه سالم، احتمال آن که سکه "تو" و تاس ۶ بیاید کدام است؟

$$P(\text{تاس } 6 \cap \text{سکه تو}) = P(\text{سکه تو}) \cdot P(\text{تاس } 6) =$$

در تیرتاب دو تاس سالم با کدام احتمال هیچ کدام از اعداد ظاهر شده مغرب نیست؟

سوال: در کارخانه‌های دو دستگاه، مستقل از هم کار می‌کنند. احتمال آن که هوشیار از این دو دستگاه کار کند ۰/۴ است. احتمال آن که هوشیار کار کند

(جواب: ۰/۱۶)

مثال: دو نفر به نام های A و B با احتمال های قهوه ای به ترتیب ۰.۷ و ۰.۸ در یک آزمون شرکت می کنند.  
 (الف) احتمال آن که هر دو قبول شوند چقدر است!

ب) احتمال آن که حداقل یکی قبول شود چقدر است!



برای هر دو احتمال موفقیت فردی در یک آزمون مستقل، ۲ برابر احتمال موفقیت دوست وی است. احتمال موفقیت لائل یکی از آن دو،  $\frac{3}{4}$  است.  
 احتمال موفقیت این فرد کدام است؟

مثال: احتمال این که x یک مسأله ریاضی را حل کند  $\frac{3}{4}$  و احتمال این که y همین مسأله را حل کند  $\frac{2}{3}$  است. این مسأله را به هر دو می دهند تا حل کنند. احتمال این که این مسأله حل شود چقدر است؟

حل  $P(x \cup y) = P(x) + P(y) - P(x) \cdot P(y) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$

برای هر دو دو سکه و یک تاس را با هم برتاب می کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه "زو" یا تاس ۶ ظاهر می شود؟

برای هر دو یک سکه و دو تاس را با هم برتاب می کنیم. با کدام احتمال جمع عدد دو تاس بیشتر از ۴ یا سکه "زو" ظاهر شده است؟

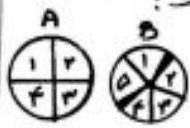
برای هر دو برای رسیدن به مرحله نهایی مسابقه ورزشی لازم است تیم های شرکت کننده در دو دوره مسابقه متعاقباً متعاقباً شرکت نمایند. تیمی که در هر دو دوره بازنده شود به مرحله نهایی راه نمی یابد. اگر احتمال پیروزی در هر بازی برای تیمی ۰.۴ باشد، احتمال حضور این تیم در مرحله نهایی کدام است؟

برای هر دو در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. به تعدادی از هر ظرف ۲ مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال چهار مهره خارج شده هر یک اند؟

برای هر دو سه سکه و یک تاس را با هم برتاب می کنیم. احتمال این که لائل یکی از پویش های سکه بگیرد یا عدد تاس زوج باشد کدام است؟  
 (جواب:  $\frac{11}{16}$ )

سراسرخ در ظرفی ۳ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۵ مهره سبز موجود است. در ظرف دیگر ۶ مهره سفید و ۲ مهره سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال رنگ این دو مهره متفاوت است؟

برای هر یک از دو عقرب A و B رابرتیت به ۴ قطاع و ۵ قطاع مساوی با شماره‌های {۱, ۲, ۳, ۴} و {۱, ۲, ۳, ۴, ۵} تقسیم می‌کنیم عقربه‌ها هر دو عقربه‌های چرخانیم. احتمال این که عدد عقربه روی ناحیه‌ی املا مساوی هم قرار بگیرند کدام است؟



$$P(A \cap B) = P(1 \cap 1) + P(2 \cap 2) + P(3 \cap 3) + P(4 \cap 4)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$$

تیت H.W  
روی تاسی ارقام ۱، ۲، ۲، ۳، ۳، ۳، ۳ نوشته شده است. در برناب ۲ بار این تاس، احتمال این که مجموع دو عدد نوشته شده برابر ۴ شود کدام است؟  
(جواب:  $\frac{5}{18}$ )

سراسرخ در دو پیشامد مستقل A و B، اگر  $P(A \cap B) = \frac{1}{7}$  و  $P(A \cup B) = \frac{1}{6}$ ، با فرض  $P(B) > P(A)$  احتمال وقوع پیشامد B کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{7}$
- (۲)  $\frac{1}{3}$
- (۳)  $\frac{1}{4}$
- (۴)  $\frac{1}{25}$

تیت H.W  
برای دو پیشامد مستقل A و B از فضای نمونه‌ی S، اگر  $P(A - B) = \frac{1}{3}$  و  $P(B - A) = \frac{1}{6}$ ، آن گاه بیشترین مقدار  $P(A \cup B)$  کدام است؟

(گزینه ۳)

- (۱)  $\frac{1}{2}$
- (۲)  $\frac{1}{3}$
- (۳)  $\frac{4}{5}$
- (۴)  $\frac{1}{6}$



تذکره

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \iff A, B \text{ دوپیشامه وابسته اند}$$

سوال ۴: در آزمون پر تاب دو تاس سالم با هم در پیشامه  $A$ : تاس اول عدد ۴ است.  $B$ : مجموع دو تاس برابر  $n$  است. نشان دهید برای  $n=7$  این دو پیشامه مستقل اند و برای  $n=6$  وابسته اند.

حل:

$n(S) = 2^2 = 4$

$A = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\} \rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$B = \{(1,4), (2,5), (3,4), (4,2), (5,2), (6,1)\} \rightarrow P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$A \cap B = \{(4,2)\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(B) \rightarrow$  مستقل ✓

$B = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\} \rightarrow P(B) = \frac{5}{36}$

$A \cap B = \{(4,2)\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq P(A) \cdot P(B) \rightarrow$  وابسته ✓

سوال ۵: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامه از فضای نمونه  $S$  باشند و  $P(A) \cdot P(B) + P(A' \cap B') = 1$  باشد، آن گاه  $A$  و  $B$  نسبت به هم چگونه اند؟

(۱) نام سازگار (۲) مستقل  
(۳) سازگار (۴) وابسته

تذکره H.W: سکه ای همگن را سه بار متوالی می اندازیم. اگر  $A$  پیشامه رخ دادن "رود" در دو پر تاب اول،  $B$  پیشامه رخ دادن "پشت" در پر تاب سوم و  $C$  پیشامه رخ دادن دقیقاً در پشت در سه پر تاب باشد، آن گاه دو پیشامه  $A$  و  $B$  نسبت به هم ..... و دو پیشامه  $B$  و  $C$  نسبت به هم ..... هستند.

(۱) مستقل، مستقل (۲) مستقل، وابسته (۳) وابسته، مستقل (۴) وابسته، وابسته

(گزینه ۲)

تذکره متمم گری استقلال پیغامها را حفظ می کند. به عبارت دیگر

قضیه: اگر  $A$  و  $B$  دو پیغام مستقل از فضای نمونه  $S$  باشند. آنگاه

(الف)  $A'$  و  $B$  نیز مستقل اند.  
 (ب)  $A$  و  $B'$  نیز مستقل اند.  
 (پ)  $A'$  و  $B'$  نیز مستقل اند.

(این قضیه قابل تعمیم است)

مثال: دو نفر تیرانداز به نام های  $A$  و  $B$  با احتمال های به ترتیب  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{3}$  هدفی را می زنند. اگر هر کدام فقط یک بار



تیراندازی کنند، با کدام احتمال

(الف) فقط  $A$  به هدف می زند؟

(ب) فقط یکی به هدف می زند؟

(ج) هیچ کدام به هدف نمی زنند؟

مثال اگر  $A$  و  $B$  دو پیغام مستقل باشند و  $P(A \cap B) = \frac{1}{7}$  و  $P(A \cap B') = \frac{1}{4}$ ، آنگاه  $P(A \cup B')$  چقدر است؟

دو پیغام مستقل	دو پیغام ناسازگار
	
$A \cap B \neq \emptyset \leftrightarrow$ می توانند با هم رخ بدهند	$A \cap B = \emptyset \leftrightarrow$ با هم رخ نمی دهند
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ استراک تبدیل به ضرب	$P(A \cap B) = 0$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ اجماع تبدیل به جمع
رخ دادن یکی در رخ دادن دیگری تأثیری ندارد.	رخ دادن یکی، رخ ندادن دیگری را سبب می شود

تذکره اگر دو پیغام مستقل و ناسازگار باشند، آنگاه حد اعلی یکی نقض دیگری است.

$$\left. \begin{aligned}
 A \text{ و } B \text{ دو پیغام ناسازگار} &\rightarrow P(A \cap B) = 0 \\
 A \text{ و } B \text{ دو پیغام مستقل} &\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 \text{ناسازگار و مستقل} &P(A) \cdot P(B) = 0 \\
 &\rightarrow \frac{P(A)}{\text{شدن } A} \text{ یا } \frac{P(B)}{\text{شدن } B}
 \end{aligned}$$

نتیجه اگر دو پیغام با احتمال هار مثبت، ناسازگار باشند، آنگاه مستقل نیستند و اگر مستقل باشند، آنگاه ناسازگار نیستند. (این دو مفهوم دلیل بهم ندارند!!)

تذکره ۳ اگر  $n$  پیشامد  $A_1, A_2, \dots, A_n$  مستقل باشند، آنگاه

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

توجه کنید اگر تباری بالا برقرار باشد نمی توان گفت  $n$  پیشامد مستقل داریم (دو شرطی نیست). در حالت کلی:

\*  $n$  پیشامد مستقل اند اگر و تنها اگر احتمال اشتراک هر تعداد از آنها با حاصل ضرب احتمال آنها برابر شود.

پایه سه تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال اعداد دو سه و مضرب ۳ می آیند؟

حل  $P(\text{تاس اول مضرب ۳ باشد}) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{8}{27}$  ✓

سوال: در یک کلاس ۱۰ نفری با کدام احتمال

الف) هگی در روز شنبه متولد شده اند؟  
 حل  $P(\text{همگی شنبه} \cap \dots \cap \text{دو شنبه} \cap \text{اولی شنبه}) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \dots \times \frac{1}{7} = (\frac{1}{7})^{10}$  ✓

ب) هگی در یک روز هفته متولد شده اند؟

حل  $P(\text{هگی جمعه}) + P(\text{هگی شنبه}) + \dots + P(\text{هگی یکشنبه}) = (\frac{1}{7})^{10} + (\frac{1}{7})^{10} + \dots + (\frac{1}{7})^{10} = 7 \times (\frac{1}{7})^{10} = (\frac{1}{7})^9$  ✓

پایه H.W اگر به طور تصادفی سه نفر از جامعه ای انتخاب شوند، با کدام احتمال قرط ماه تاریخ تولد برابر سه یکدیگر است؟  
 (جواب:  $(\frac{1}{37})^2$ )

تست سه نفر به نام های A, B, C با احتمال های قبولی به ترتیب ۵۰، ۶۰ و ۷۰ درصد در یک شرکت می کنند. با کدام احتمال حداقل یکی قبول می شود؟

پایه H.W سه نفر مشغول رزرت می یک پیام هستند. احتمال صرفیت آنها به ترتیب  $\frac{2}{3}$ ،  $\frac{3}{4}$  و  $\frac{1}{6}$  است. با کدام احتمال لااقل یکی موفق می شود؟  
 (جواب:  $\frac{23}{24}$ )

تست در پرتاب سه تاس سالم احتمال آن که حداقل یک بار شش ظاهر شود، کدام است؟

حل  $P(\text{حداقل یک بار ۶}) = 1 - P(\text{هیچ بار ۶}) = 1 - (\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}) = \frac{91}{216}$  ✓



تست یک که را چند مرتبه پرتاب کنیم تا احتمال آمدن دست کم یک بار "۲" بیش از ۹۹ درصد باشد؟

- ۱) حداقل ۵ مرتبه
- ۲) حداقل ۷ مرتبه
- ۳) حداقل ۵ مرتبه
- ۴) حداقل ۷ مرتبه

برسوز ۹۰ درصدی در یک ظرف ۵ گوی قرمز با شماره های (۱ تا ۵) و چهار گوی آبی با شماره های (۱ تا ۴) قرار دارند. به طور تصادف یک گوی از هر ظرف خارج می کنیم. با کدام احتمال لاقط شماره یک از آنها ۲ است؟

حل

$$P(\text{صیح کدام ۲}) = 1 - P(\text{لاقط شماره یک ۲})$$

$$= 1 - P(\text{آبی غیر ۲} \cap \text{قرمز غیر ۲}) = 1 - \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{5}$$

احتمال آن که شخصی جواب پنج سوال تست دوگزینه ای را به تصادف صحیح انتخاب کند چقدر برابر احتمال انتخاب به تصادف صحیح پنج تست چهارگزینه ای است؟

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\right)^5 \xrightarrow{\text{پنج سوال}} \frac{1}{32} \xrightarrow{\text{احتمال جواب صحیح}} \text{تست دوگزینه ای} \\ & \left(\frac{1}{4}\right)^5 \xrightarrow{\text{پنج تست}} \frac{1}{1024} \xrightarrow{\text{تست چهارگزینه ای}} \end{aligned} \right\} \text{نیست } 2^5 = 32 \checkmark$$

سوال احتمال این که روز تولد سه نفر

(الف) در روزهای مختلف هفته باشند، چقدر است؟  
(ب) همسر (ب)

(ب) هکلی ششم باشند چقدر است؟

(ب) فقط دو نفر ششم باشند چقدر است؟

(ب) حداقل دو نفر ششم باشند چقدر است؟

در من چیز است

شیرین کینه

شیرین طلبه ج

پنهان استیم که در علم منجلیه به هم نماندیم  
بعضی ها که هر آنکه کسی که در علم منجلیه

احتمال دو جله ای (فرضول برنولی)

فرضول ۳

(آزمون برنولی، بر آزمایشی که دو نتیجه داشته باشد (موفقیت و شکست))

تکرار  $n$  بار یک آزمایشی دو حالته (آزمون برنولی) است (تعداد تکرار  $n$  مشخص است)دقیقاً  $x$  بار موفقیت است (و در نتیجه  $n-x$  بار شکست)معلوم نیست که موفقیت  $x$  در کدام دفعات است و باید  $x$  موفقیت از  $n$  تکرار انتخاب شود.

مثال: یک تاس سالم را ۵ بار می اندازیم.

الف) احتمال این که فقط در بار اول، سوم و چهارم ظاهر شود چقدر است؟

ب) احتمال اینکه دقیقاً سه بار ظاهر شود چقدر است؟

مثال: تیر اندازی با احتمال  $\frac{1}{4}$  هدفی را می زند. اگر ۱۰ بار شلیک کند، با کدام احتمال ۷ بار به هدف میزند؟سوال: احتمال موفقیت در یک عمل جراحی  $\frac{4}{5}$  است. اگر این عمل بر روی ۵ نفر صورت گیرد، با کدام احتمال جراحی ۴ نفر موفقیت آمیز است؟

سوال: از نوزدی پدر ۸۰ درصد آنها جوانی زند. اگر سه پدر از این خانواده متولد شود، با کدام احتمال لا اقل دو پسر جوانی زند؟

$$(\frac{1}{4})^3 + (\frac{1}{4})^2 \cdot (\frac{3}{4}) = \frac{1}{8} \checkmark$$

سوال: در ۱۰ بار پرتاب یک تاس سالم، با کدام احتمال ۶ بار عددی بزرگتر از ۳ ظاهر شود؟

سوال: در یک خانواده ۵ فرزند با کدام احتمال حداقل ۴ دختر وجود دارد؟

سوال: در پرتاب ۴ سکه سالم با هم، احتمال این که فقط ۳ سکه رو یا فقط ۳ سکه پشت بیاید چقدر است؟

مثال: در یک آزمون با ۱۰ سوال پنج گزینه‌ای، دانش آموزی به تمام سوال‌ها به طور تصادفی پاسخ می‌دهد.  
احتمال این که

(الف) تمام سوال‌ها را صحیح جواب داده باشد چقدر است؟

(ب) فقط به پنج سوال اول پاسخ صحیح داده باشد، چقدر است؟

(ج) یکی از سوال‌ها را پاسخ صحیح بدهد، چقدر است؟

کنند؟  
تغییری

سوال ۷ در ۲n بار پرتاب یک سکه سالم، احتمال مساوی بودن تعداد "رو"ها و "تیت"ها با افزایش n چقدر

(۱) افزایش می‌یابد.

(۲) کاهش می‌یابد.

(۳) متناوباً تغییر می‌کند.

(۴) تغییری نمی‌کند.

تمرین ۴.۳: در پرتاب چهار سکه سالم، اگر احتمال آمدن حداقل ۲ بار روی سکه را  $P(A)$  و احتمال آمدن حداقل ۲ بار تیت سکه را

$P(B)$  در نظر بگیریم، آن‌گاه  $P(A \cap B)$  چقدر است؟

(جواب:  $\frac{5}{16}$ )

سوال ۸ سکه‌ها را سالم را پرتاب می‌کنیم، اگر "رو" بیاید تاس را می‌ریزیم و اگر "تیت" بیاید، سکه دیگر را با هم می‌اندازم.

احتمال این که دقیقاً یک سکه "رو" ظاهر شود کدام است؟

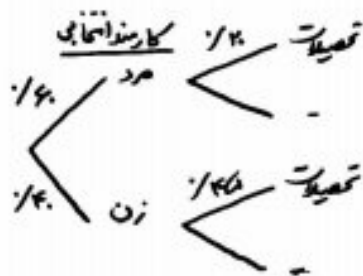
تمرین ۴.۳: در صد خانواده ۴ فرزندی مطلوب است  
(الف) احتمال این که فرزند اول و آخر دختر باشد؟  
(ب) دو فرزند این خانواده دختر باشد؟

تمرین ۴.۳: در صد نفر ۸۰ درصد افراد یک شهر با سوادند. اگر ۵ نفر  
از این شهر انتخاب کنیم، با کدام احتمال  
(الف) همه ۵ نفری سوادند؟  
(ب) فقط یکی بی‌سواد است؟



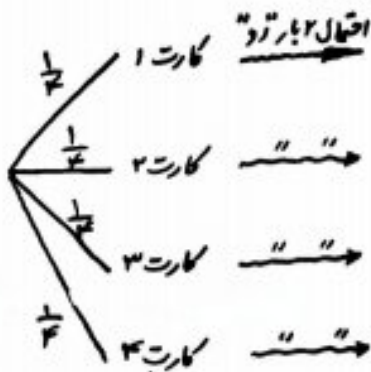
سوال ۹۴ تجربی  
در پرتاب یک سکه، اگر "ر" بیاید یک پرتاب از مجاز است ۵ پرتابها کند و اگر "ت" بیاید، ۳ پرتابها می کند. می دانیم احتمال اصابت هر پرتابها شده  $\frac{3}{5}$  است. با کدام احتمال فقط یک پرتاب اصابت می کند؟

سوال ۹۳ تجربی  
شصت درصد کارکنان سازمانی مرد و چهل درصد آنان زن هستند. می دانیم که ۲۰ درصد مردان و ۴۵ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر به تعداد ۳ نفر از بین آنها انتخاب شود، با کدام احتمال ۲ نفر آنها تحصیلات دانشگاهی دارند؟



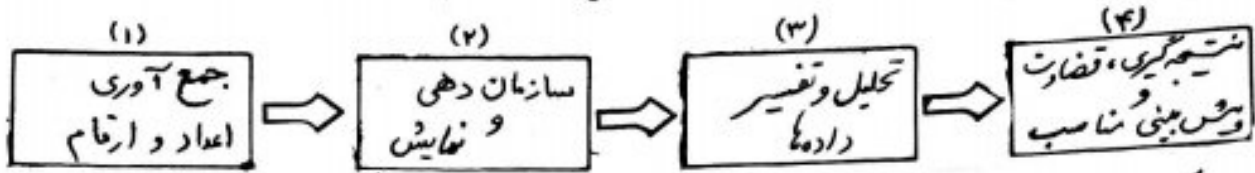
سوال ۹۵ تجربی  
آزمایش فقط دو نتیجه شگفت و روزی دارد. احتمال روزی در برابر  $\frac{3}{4}$  است. در ۴ بار این آزمایش مستقل، احتمال ۴ روزی چند برابر احتمال ۳ روزی است؟  
(جواب:  $\frac{9}{4}$ )

سوال  
از بین چهار کارت با شماره های ۱ تا ۴ کاری به تعداد انتخاب می کنیم و سپس سکه ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می کنیم. اگر ۲ بار "ر" بیاید، با کدام احتمال کارت شماره ۳ انتخاب شده است؟



آمار: مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار: مجموعه روش‌هایی است شامل:



واحد آماری: به هر یک از افراد یا اشیائی گویند که داده‌های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گردآوری می‌شود.



جامعه (جامعه آماری): مجموعه کل واحد‌های آماری را می‌گویند.  
\* به تعداد عضوهای جامعه، اندازه (حجم) جامعه می‌گویند.

نمونه (نمونه آماری): زیرمجموعه‌ای از جامعه آماری است. (به دلیل زیاد بودن اندازه جامعه و برای صرفه جویی در وقت و هزینه، زیرمجموعه‌ای از جامعه را در نظر می‌گیریم)

\* به تعداد عضوهای نمونه، اندازه (حجم) نمونه می‌گویند. اندازه جامعه < اندازه نمونه

متغیر: هر ویژگی از اشیاء یا افراد، که در اعضای جامعه یکسان نیست و معمولاً از عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند را متغیر می‌گویند.

\* عدد یا عبارتی که به ویژگی یک عضو (متغیر) نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر نامیده می‌شود. (مشاهده)

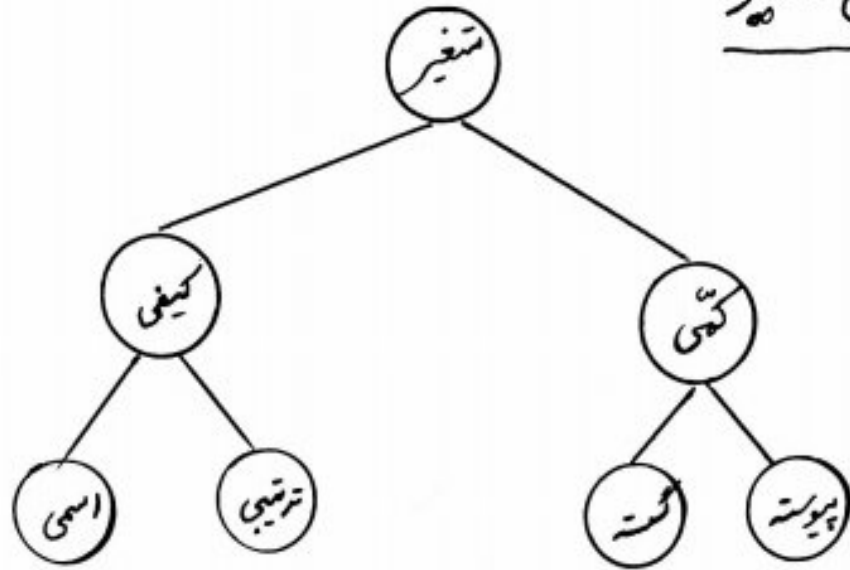
مثال: ① برای بررسی کیفیت مرکبات انسان مازندران، بخشی از مرکبات شهرستان باجل را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

و با عبارت‌های درجه یک، درجه دو و درجه سه طبقه‌بندی نموده‌ایم.

② برای بررسی درصد بیکاری افراد ساکن در استان کردستان، از چند شهر این استان افرادی را

مورد پرسش قرار دادیم و درصد بیکاری در این استان ۳۵ به دست آمده است.

سرشماری: تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. اندازه نمونه = اندازه جامعه  
معیایب: ۱. وقت گیر بودن ۲. پرهزینه ۳. دردسترس نبودن تمام اعضای جامعه ۴. از بین رفتن اعضای جامعه

انواع متغیرمثال:

- |                                       |                             |
|---------------------------------------|-----------------------------|
| دمای هوای اتاق در ساعتهای مختلف ←     | قد افراد کلاس ←             |
| سطح تحصیلات افراد جامعه ←             | تعداد دانش آموزان کلاس ←    |
| نژاد انسان های کره زمین ←             | وضعیت تأهل افراد استخدامی ← |
| نمارة پلاک اتومبیل های در شهر تهران ← | رژیم های غذایی ←            |
| مراحل پرورش ماهی ←                    | نمره درس آمار و احتمال ←    |
| شدت بارندگی در فصل بهار امسال ←       | گروه خونی افراد ←           |

آمار توصیفی: محاسبه پارامترهای (ویژگی های) جامعه مورد مطالعه، با استفاده از سرشماری آمارگیری از  
گروه آوری داده های کل جامعه، با ارائه روش های برای سازماندهی و توصیف داده ها،  
از طریق جدول های فراوانی، نمودارها، پارامترهای مرکزی و پارامترهای پراکندگی، به  
مطالعه جامعه می پردازد.



فراوانی

\* فراوانی یک داده: تعداد دفعات مشاهده یک داده را می‌گویند  $f_i$  فراوانی داده نام  $f_i$   
(فراوانی مطلق)

مثال  $f = 3$  فراوانی داده ۲ ۳, ۱, ۵, ۴, ۲, ۲, ۳, ۲, ۱, ۶

\* فراوانی نسبی یک داده  $\leftarrow$  برابری با  $\frac{\text{فراوانی داده}}{\text{تعداد کل داده‌ها}}$

پس اگر تعداد کل داده‌های آماری برابر با  $n$  باشد (یعنی  $n = f_1 + f_2 + \dots$ ) در نگاه

$$\text{فراوانی نسبی داده نام} = \frac{f_i}{n}$$

در مثال بالا فراوانی نسبی داده ۲ برابر است با  $\frac{۳}{۱۵}$  (زیرا تعداد کل داده‌ها  $n = ۱۵$  است)

\* درصد فراوانی نسبی یک داده  $\leftarrow$  برابری با  $۱۰۰ \times \text{فراوانی نسبی داده}$

در مثال بالا درصد فراوانی نسبی داده ۲ برابر است با  $\frac{۳}{۱۵} \times ۱۰۰ = ۲۰\%$

\* جدول فراوانی  $\leftarrow$  برای تنظیم و طبقه بندی داده‌ها

↓  
برای برنوع متغیری می‌توان شکل داد.

داده $x_i$	فراوانی $f_i$	فراوانی نسبی $\frac{f_i}{n}$	درصد فراوانی نسبی $\frac{f_i}{n} \times ۱۰۰$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
مجموع	$n$	۱	۱۰۰%

مثال: فرض کنید از ۳۰ دانش آموز یک دبیرستان، در مورد رشته ورزشی انتخابی آنها در رنگ تربیت بدنی پرسش به عمل آمده است.

رشته ورزشی	فراوانی	فراوانی نسبی	درصد فراوانی نسبی
والیبال	۸۰	$\frac{۸۰}{۳۰}$	$\frac{۸۰}{۳۰} \times ۱۰۰ = ۲۶۶,۶\%$
فوتبال	۹۰	$\frac{۹۰}{۳۰}$	$\frac{۹۰}{۳۰} \times ۱۰۰ = ۳۰۰\%$
بسکتبال	۶۵	$\frac{۶۵}{۳۰}$	$\frac{۶۵}{۳۰} \times ۱۰۰ = ۲۱۶,۷\%$
تنیس روی میز	۶۵	$\frac{۶۵}{۳۰}$	$\frac{۶۵}{۳۰} \times ۱۰۰ = ۲۱۶,۷\%$
مجموع	۳۰۰	۱	۱۰۰

دسته بندی داده ها — زمانی که داده های جمع آوری شده تولید و پراکنده اند!

- به طرز کلی عضوهای هر دسته، از نظر ویژگی مورد بررسی به یکدیگر شباهت دارند.
- در اکثر مواقع در مورد داده های مربوط به تغییر کمتی پیوسته، نیاز به دسته بندی داریم.

مرحله ۱: "دامنه تغییرات" <sup>Range</sup>، یعنی اختلاف بزرگترین داده و کوچکترین داده را می یابیم.

$$R = x_{max} - x_{min} \quad (\text{دامنه تغییرات را با } R \text{ نشان می دهیم})$$

مرحله ۲: با فرض این که تعداد دسته ها برابر  $k$  باشد، آن گاه طول هر دسته را (که با  $C$  نشان می دهیم) به صورت  $C = \frac{R}{k}$  می یابیم.

مرحله ۳: از کوچکترین داده شروع می کنیم و تا  $C$  تا  $C$  تا جلوی ردیم و دسته های را می نویسیم. در ساختن دسته ها، ابتدای تمام دسته ها را پیوسته و انتهای آن ها را پاژ در نظر می گیریم، به جز دسته آخر که هر دو پیوسته در نظر می گیریم.

مثال: فرض کنید قد بیست دانش آموز یک کلاس را اندازه گیری کرده ایم و نتایج زیر به دست آمده است:

- ۱۷۲، ۱۷۱، ۱۶۲، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۵۵، ۱۵۹، ۱۶۷، ۱۶۳، ۱۶۲  
 ۱۴۹، ۱۵۱، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۴، ۱۷۵، ۱۷۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۵۲

اگر بخواهیم داده ها را در ۴ دسته تقسیم کنیم، داریم:

$$R = \max - \min = 179 - 147 = 32 \xrightarrow{k=4} C = \frac{32}{4} = 8$$

پس داریم:

دسته ها	فردانی	فردانی نپی	درصد فردانی نپی
[147, 155)	5	$\frac{5}{20}$	25%
[155, 163)	6	$\frac{6}{20}$	30%
[163, 171)	4	$\frac{4}{20}$	20%
[171, 179]	5	$\frac{5}{20}$	25%
جمع	20	1	100%

\* عدد پایین هر دسته را کران پایین و عدد بالای هر دسته را کران بالای گوئیم.  
 $C = b - a$  <sup>تفاوت</sup>  
 کران بالا  $b$  و کران پایین  $a$

\* مرکز (نشان یا نماینده) دسته: میانگین کران های بالا و پایین هر دسته را می گویند. (چون داده های هر دسته، با هم شباهت دارند، مرکز دسته نماینده نام داده های آن دسته است)

\* مرکز دسته لزوماً در بین داده ها نیست.  
 نتیجه ۱: اگر  $x_i$  مرکز دسته  $i$ ام و  $C$  طول هر دسته باشد، آن گاه  $x_i = \frac{a+b}{2}$  مرکز دسته  $[a, b]$  است.

نتیجه ۱: اگر  $x_i$  مرکز دسته  $i$ ام و  $C$  طول هر دسته باشد، آن گاه  $x_i = \frac{a+b}{2}$  مرکز دسته  $[a, b]$  است.  
 $a = x_i - \frac{C}{2}$  کران پایین دسته  $i$ ام و  $b = x_i + \frac{C}{2}$  کران بالای دسته  $i$ ام

سوالی ۹۰ داده آماری در ۷ طبقه دسته بندی شده اند. اگر ۲۰ داده جدید به این جدول اضافه شود، فراوانی نسبی دسته وسط تغییر نمی کند. نسبت اقرائین داده های دسته مذکور به فراوانی مطلق قبلی آن کدام است؟

$$\frac{1}{8} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{5} \text{ (۴)}$$

سوالی ۹۱ در دسته بندی ۱۲۰ داده آماری در ۹ طبقه، دسته اول به صورت [۲۲, ۲۵] می باشد. می دانیم ۴۵ درصد داده کمتر از ۳۴ و فراوانی نسبی دسته وسط  $\frac{1}{2}$  است. تعداد داده های کمتر از ۳۷ کدام است؟

$$۷۶ \text{ (۱)} \quad ۶۷ \text{ (۲)}$$

$$۸۴ \text{ (۳)} \quad ۷۱ \text{ (۴)}$$

سوالی ۹۲ تعدادی داده آماری را در ۱۳ طبقه دسته بندی کرده ایم. کران پایین دسته دوم ۷ و مرکز دسته هشتم ۳۳ است. مرکز دسته آخر کدام است؟

$$۴۷ \text{ (۱)} \quad ۴۹ \text{ (۲)}$$

$$۵۱ \text{ (۳)} \quad ۵۳ \text{ (۴)}$$

گزینه ۲

سوالی ۹۳ با توجه به جدول مقابل حاصل  $x - y + z - t$  کدام است؟

دسته	فراوانی	فراوانی نسبی	درصد فراوانی نسبی
[۳, ۶)	x	t	
[۶, ۹)	y		۳۰
[۹, ۱۲]	۵		z
مجموع	۲۵		

$$۱۹,۲ \text{ (۱)} \quad ۱۰,۴ \text{ (۲)}$$

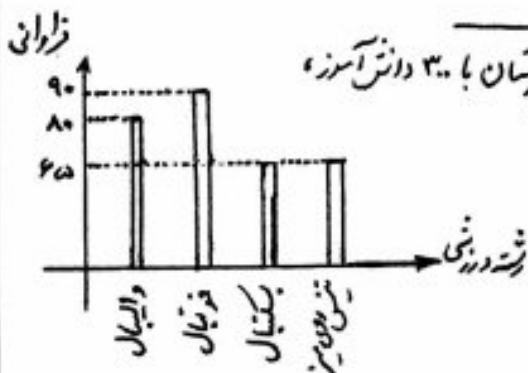
$$۱۱,۲ \text{ (۳)} \quad ۱۳,۲ \text{ (۴)}$$



نمودارها — برای نمایش و توصیف بهتر داده ها

الف) نمودار میله ای مناسب برای نمایش تغییراتی کمی گسسته و متغیر کمی کیفی

- ◀ خرد داده ها یا شماره آنها روی محور افقی
- ◀ فراوانی داده ها یا فراوانی نسبی داده ها روی محور عمودی (در برخی موارد برای نشان دادن فراوانی نسبی را قرار داد)
- ◀ ارتفاع هر میله، متناسب با فراوانی (فراوانی نسبی) هر داده
- ◀ میله ها یک بعدی فرض می شوند.
- ◀ ترتیب میله ها مهم نیست.



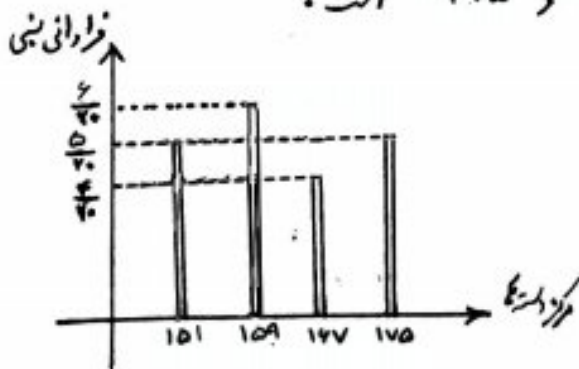
مثال: در مثال مربوط به رشته های درسی دانش آموزان یک دبیرستان با ۳۰۰ دانش آموز، نمودار میله ای به صورت متقابل است:

تذکره: برای رسم نمودار میله ای مربوط به داده های کمی پیوسته از مرکز هر دسته به عنوان نماینده داده های آن دسته، روی محور افقی استفاده می کنیم.

مثال: برای رسم نمودار میله ای مثال مربوط به اندازه گیری قد به بیت دانش آموز یک کلاس داریم:

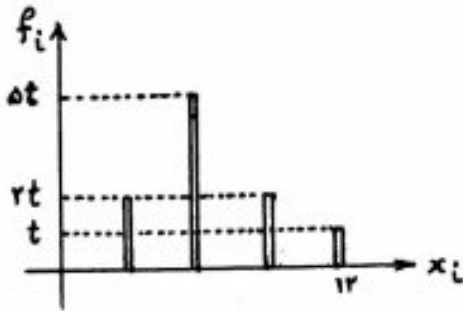
$$[147, 155] \xrightarrow{\text{مرکز دسته اول}} \frac{147 + 155}{2} = 151$$

به همین ترتیب مرکز سه دسته دیگر، ۱۵۹، ۱۶۷، ۱۷۵ است.



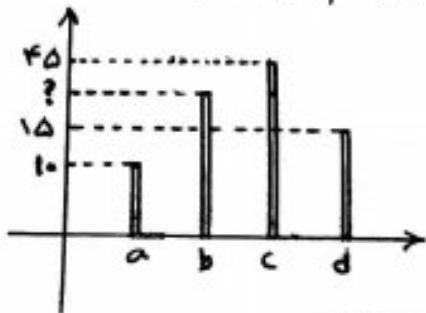
توجه: روی محور عمودی، فراوانی، فراوانی نسبی یا درصد فراوانی نسبی داده قرار می گیرد.

تست در نمودار میله‌ای متناهی روی محور افقی، از مرکز برداشته استفاده شده است. اگر طول دسته‌ها یکسان باشد، درصد فراوانی نسبی دسته (۶، ۱۰) کدام است؟



۲۰	۴	۱۰	(۱)
۳۰	۴	۲۰	(۳)

تست نمودار میله‌ای ۷۰ داده آماری به صورت متناهی است. اگر محور قائم، درصد فراوانی نسبی باشد، آن گاه فراوانی مطلق داده b کدام است؟ (گزینه‌ها)



۲۱	(۲)	۲۰	(۱)
۳۱	(۴)	۳۰	(۳)

ب) نمودار دایره‌ای مناسب برای نمایش تغییرهای کمی گسته و متغیرهای کیفی

◀ از تقسیم یک دایره به قطاع‌های به نسبت فراوانی برداشته به دست می‌آید.

◀ اگر  $\alpha_i$  زاویه مرکزی قطاع مربوط به داده  $i$ ام با فراوانی  $f_i$  باشد، آن گاه

$$\frac{\alpha_i}{360^\circ} = \frac{f_i}{n} \Rightarrow \alpha_i = \frac{f_i}{n} \times 360^\circ \quad (n \text{ تعداد کل داده‌هاست})$$

◀ در نمودار دایره‌ای، اندازه شعاع دایره مهم نیست.

◀ ترتیب قرار گرفتن قطاع‌ها اهمیتی ندارد.

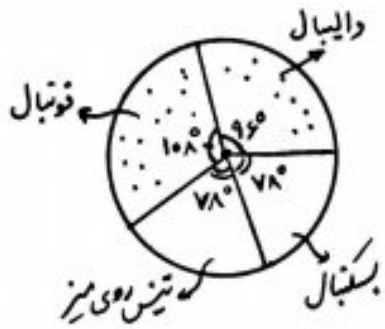
◀ در کتاب درسی آمار و احتمال برای رسم نمودار دایره‌ای، ابتدا دایره را به ۱۰ قطاع مساوی (زاویه مرکزی هر قطاع  $36^\circ$ ) تقسیم می‌کنند و لذا هر قطاع، ۱۰ درصد دایره است.

پس با توجه به فراوانی نسبی برداشته، مشخص می‌کنند که تعداد قطاع‌های مربوط به برداشته، از ۱۰ قسمت مذکور چقدر است. در این روش اگر  $m$  تعداد قطاع‌های مربوط به داده  $i$ ام با فراوانی  $f_i$  از قسمت مذکور باشد، آن گاه

$$\frac{f_i}{n} = \frac{m}{10} \Rightarrow m = \frac{f_i}{n} \times 10 \quad (n \text{ تعداد کل داده‌هاست})$$

**مثال:** در مثال مربوط به رشته های ورزشی دانش آموزان یک دبیرستان با ۳۰۰ دانش آموز

مغزدار دایره ای به صورت زیر است:



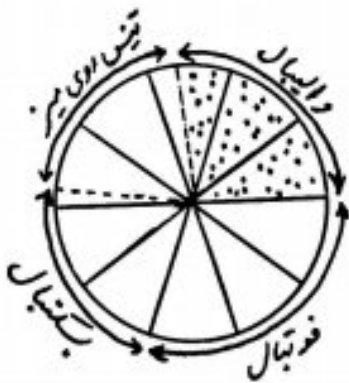
$$\alpha_V = \frac{90}{360} \times 360 = 96^\circ$$

$$\alpha_F = \frac{78}{360} \times 360 = 108^\circ$$

$$\alpha_B = \frac{78}{360} \times 360 = 78^\circ$$

$$\alpha_T = \frac{54}{360} \times 360 = 78^\circ$$

مطابق با روش کتاب درسی آمار و احتمال، مغزدار دایره ای به صورت زیر است:



$$m_V = \frac{90}{360} \times 10 = \frac{10}{4} = 2 \frac{2}{4}$$

$$m_F = \frac{78}{360} \times 10 = 3$$

$$m_B = \frac{78}{360} \times 10 = \frac{13}{6} = 2 \frac{1}{6}$$

$$m_T = \frac{54}{360} \times 10 = \frac{13}{6} = 2 \frac{1}{6}$$

افراد یک جامعه به سه گروه سنی تقسیم شده اند، که مغزدار دایره ای آنها با زاویه مرکزی بر حسب درجه رسم شده است. گروه سنی با زاویه مرکزی  $\alpha$  شامل چند درصد این جامعه است؟



۳۲,۵ (۲)	۳۳ (۱)
۳۷,۵ (۴)	۳۶ (۳)

در جدول زیر، مرکز دسته با درصد فراوانی نسبی داده شده است. در مغزدار دایره ای، زاویه مربوط به بازه

مرکز دسته	۱۷,۵	۲۰,۵	۲۳,۵	۲۶,۵	۲۹,۵
درصد فراوانی نسبی	۱۷	۲۰,۵	۲۲	x	۱۸

[۲۵,۲۸] چند درصد است؟

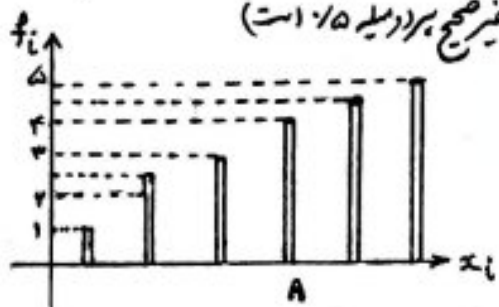
۸۱ (۲)	۷۲ (۱)
۹۰ (۳)	۸۴ (۴)

در مغزدار دایره ای ۳ داده آماری دسته بندی شده، دسته اول ۳ قطاع از ۱۰ قسمت مساوی را به خود اختصاص داده است. چند داده به داده های دسته اول اضافه کنیم تا ۲,۵ قطاع از ۱۰ قسمت دایره را شامل شود؟

۲ (۲)	۱ (۱)
۲ (۳)	۳ (۴)



برای هر  $x_i$  در متایه سطح زیر کشت غله‌ای در شش استان، نمودار میلاری مقابل رسم شده است. در نمودار دایره‌ای، زوایای مرکزی متناظر استان A چند درجه است؟ (قسمت غیر صحیح برابر میل ۰/۵ است)



حل:  $n = 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 = 20$

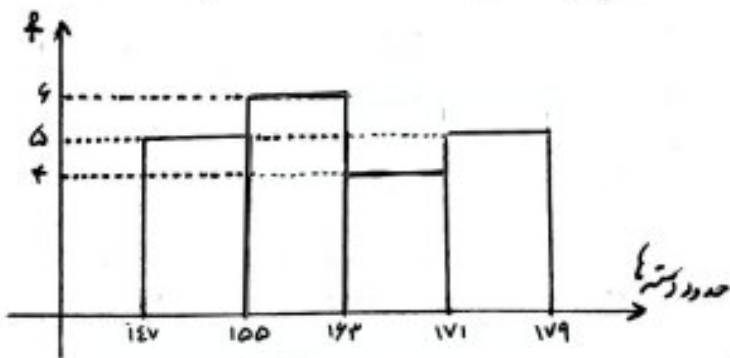
$\rightarrow \alpha_A = \frac{f_A}{n} \times 360^\circ = \frac{4}{20} \times 360^\circ = 72^\circ$

۶۴ (۱)  
۹۶ (۴)

ب) نمودار بافت ننگانت (هیستوگرام) مناسب برای نمایش تغییرهای کمی پیوسته

- ◀ حدود دسته‌ها یا بازه‌های پیوسته روی محور افقی
- ◀ فرادانی یا فرادانی نبی یا درصد فرادانی نبی هر دسته روی محور عمودی
- ◀ برای هر دسته یک مستطیل نمایش داده می‌شود که معمولاً ضلعی از مستطیل که روی محور افقی قرار می‌گیرد، برابر با طول دسته (C) و ضلع دیگر آن برابر با فرادانی (فرادانی نبی) دسته  $(\frac{f_i}{n}$  یا  $f_i$ ) است.

مثال: برای رسم نمودار بافت ننگانت مثال مربوط به اندازه گیری قد بابت دانش آموز یک کلاس داریم:



نکته: اگر طول دسته‌ها برابر با C و تعداد کل داده‌ها n باشد، آن‌گاه مساحت تمام مستطیل‌ها در نمودار بافت ننگانت برابر است با nC.

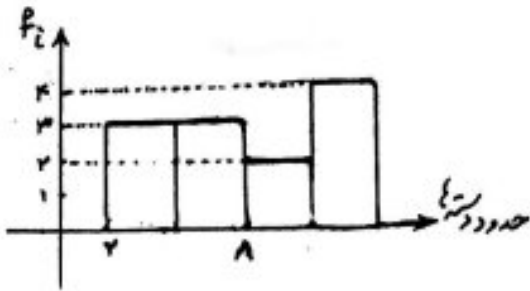
اثبات

$$f_1 \times C + f_2 \times C + \dots = (f_1 + f_2 + \dots) \times C = nC$$

مساحت مستطیل      مساحت مستطیل      متناظر با دسته اول      متناظر با دسته دوم

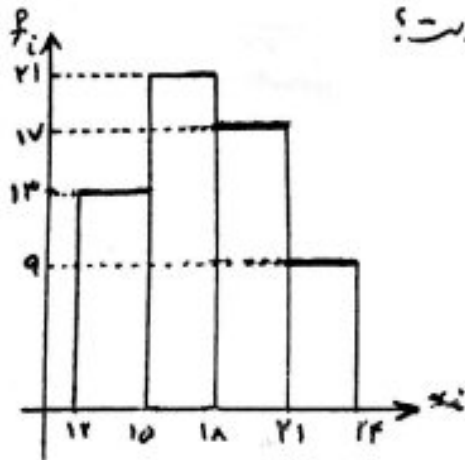
تست تعدادی داده آماری را در ۴ دسته قرار داده ایم. ماگر نمودار بافت ننگانت مربوط به این ۴ دسته، به صورت مقابل باشد، در نمودار دایره ای این داده، زاویه مرکزی قطاع دسته چهارم چند درجه است؟

- ۶۰ (۱)
- ۸۱ (۲)
- ۱۲۰ (۳)
- ۱۶۲ (۴)



برای ۹۵ از داده های آماری با نمودار بافت ننگانت زیر، سه داده ۱۴، ۱۶ و ۱۶ حذف شده است در نمودار دایره ای داده های جدید، بزرگترین زاویه مرکزی نظیر دسته کج، چند درجه است؟

- ۹۰ (۱)
- ۱۰۵ (۲)
- ۱۲۰ (۳)
- ۱۳۵ (۴)



تست با اندازه گیری وزن دانش آموزان یک کلاس مشاهده های زیر حاصل شده است. اگر این داده را در ۵ طبقه دسته بندی کنیم و طول تمام دسته ها یکسان باشد، مساحت مستطیل دسته ما قبل آخر در نمودار بافت ننگانت کدام است؟ (محمود محمدی فراوانی نبی می باشد)

- ۵۰، ۵۲، ۵۴، ۵۷، ۵۹، ۶۲، ۶۳، ۶۳، ۶۵، ۶۶
- ۷۱، ۷۴، ۷۵، ۷۵، ۷۸، ۸۰، ۸۱، ۸۴، ۸۴، ۸۵

- ۱/۸ (۱)
- ۱/۴ (۲)
- ۱/۷ (۳)
- ۱/۴ (۴)

(گزینه ۴)

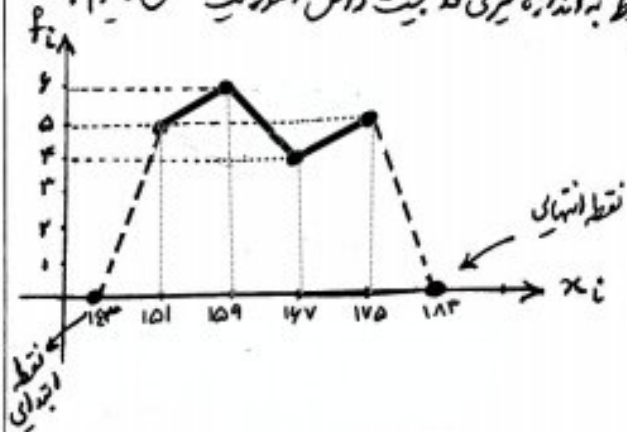
رکبت  
 آهسته  
 میکنم  
 در نگاه  
 نشسته ام به در نگاه  
 تو از کدام راه میرسی؟!

(ه.ا.سایه)

ت) نمودار چند بر فراوانی مناسب برای نمایش تغییرهای کمی پیوسته

- ◁ مرکز دسته ها روی محور افقی و فراوانی بر دسته روی محور عمودی دینظر گرفته می شود.
- ◁ نقاطی را در نظری بگیریم که طول آنها مرکز دسته و عرض آن ها فراوانی همان دسته می باشد.
- ◁ از مرکز دسته اول به اندازه طول هر دسته (C)، به عقب می رویم و نقطه ابتدایی را روی محور افقی (با فراوانی صفر) و از مرکز دسته آخر نیز به اندازه C، به جلوتر می رویم و نقطه انتهایی را روی محور افقی (با فراوانی صفر) می یابیم. سپس نقطه ابتدایی و نقاط مشخص شده در مرحله قبل و نقطه انتهایی را با پارچه خط به هم وصل می کنیم.
- \* در واقع، نمودار چند بر فراوانی، همان نمودار بافت نگار است، که وسط عرض بالایی تمام مستطیل ها با نقاط ابتدای آنهایی (که در بالا مشخص کردیم)، به طور متوالی به صورت خط شکسته به هم وصل می شوند.
- \* مساحت زیر نمودار چند بر فراوانی با مساحت زیر نمودار بافت نگار است (مجموع مساحت های مستطیل ها) برابر است.  $(S = n \cdot C)$

مثال: برای رسم نمودار چند بر فراوانی مثال مربوط به اندازه گیری قد بزرگسالان دانش آموزان کلاس داریم:

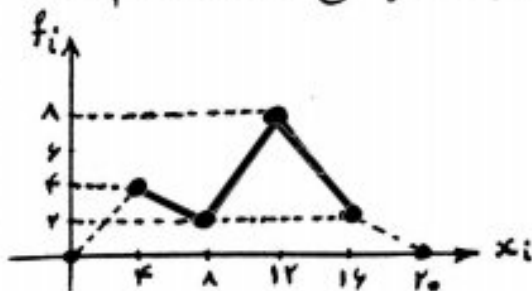


\* توجه کنید منحنیات هر نقطه به صورت زیر است:

$(x_i, f_i)$   
 فراوانی دسته  $\uparrow$   
 مرکز دسته  $\uparrow$

تت در نمودار چند بر فراوانی متقابل، پس از حذف داده های ۱۳، ۱۷، زاویه قطاع متساظر با دسته سوم در نمودار

دایره های چند درجه است؟



۲۴ (۳) ۳۸  
 ۹۶ (۴) ۱۲۰



معیارهای گرایش به مرکز سه میانگین میانه، مد

الف) میانگین: برابر با حاصل تقسیم مجموع داده‌ها بر تعداد آن‌ها می‌باشد  $\bar{x}$   
(آن را متوسط داده‌ها نیز می‌گویند)

$$x_1, x_2, \dots, x_n \xrightarrow{\text{میانگین}} \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$x_{\min} < \bar{x} < x_{\max} \quad \text{نوع}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n \bar{x} \quad \text{بنابراین}$$

صحت میانگین پنج داده آماری برابر ۱۷ است. اگر دو عدد ۱۰ و ۱۷ را به این داده‌ها اضافه کنیم، میانگین هفت داده جدید کدام است؟

- ۱۴ (۲)
- ۱۵ (۱)
- ۱۶ (۳)
- ۱۷ (۴)

\* میانگین موزون (وزن دار) داده‌ها

پرتگاه داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  دارای وزن (ضریب یا تکرار)  $w_1, w_2, \dots, w_n$  باشند، آن‌گاه برای محاسبه میانگین داریم:

$$\bar{x}_w = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

هر داده در وزن (ضریب یا تکرار) خودش ضرب می‌شود و نتایج با هم جمع می‌گردد. سپس عدد حاصل را بر مجموع وزن‌ها (ضریب‌ها یا تکرارها) تقسیم می‌کنیم.

صحت در صدگی یک دانش آموز در یک آزمون در درس عمومی به صورت جدول زیر است. اگر میانگین درصدی این دانش آموز برابر ۳۰ باشد، درصد درس زبان انگلیسی کدام است؟

زبان انگلیسی	۲۵ (۲)	۲۰ (۱)
دین و زندگی عربی	۲۵ (۳)	۳۰ (۳)
ادبیات	۲۰	۴۰
درس	۳۰	۲۰
درصد	۲	۳
ضریب	۴	۲

تذکرا: هرگاه جدول فراوانی داشته باشیم، برای محاسبه میانگین همانند میانگین موزون عمل می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots}{f_1 + f_2 + \dots}$$

تذکرا: هرگاه جدول فراوانی نسبی داشته باشیم، برای محاسبه میانگین داریم:

$$\bar{x} = \frac{f_1}{n} x_1 + \frac{f_2}{n} x_2 + \dots$$

تذکره ۳: هرگاه داده‌ها به صورت دسته بندی شده باشند، برای محاسبه میانگین، از مرکز هر دسته به عنوان نماینده آن دسته استفاده می‌کنیم.

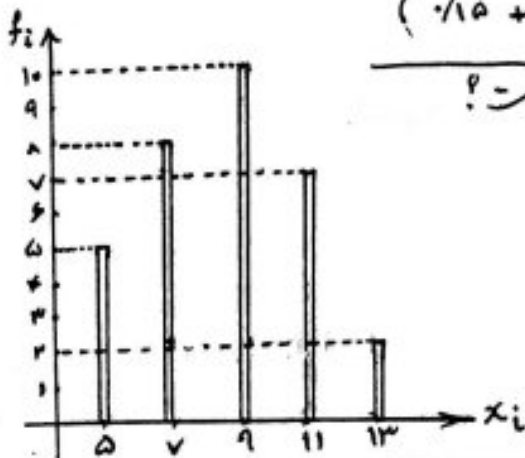
تذکره ۴: داده‌های آماری در دسته با فراوانی نسبی، در جدول زیر آمده‌اند. میانگین این داده‌ها کدام است؟

حدود دسته	[۱۰-۱۴)	[۱۴، ۱۸)	[۱۸، ۲۲)	[۲۲، ۲۶]	۱۸،۴ (۲)	۱۶،۴ (۱)
فراوانی نسبی	۱/۱۵	۱/۳	۱/۲۵	a	۱۸،۸ (۴)	۱۶،۸ (۳)

مرکز دسته چهارم  
مرکز دسته سوم  
مرکز دسته دوم  
مرکز دسته اول

$$\bar{x} = \frac{1}{15} \times 12 + \frac{1}{3} \times 16 + \frac{1}{25} \times 20 + \frac{1}{3} \times 24 = 18,8 \checkmark$$

$$(\frac{1}{15} + \frac{1}{3} + \frac{1}{25} + a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{3})$$



برابر ۲۹۵ (تراز ۹۹) با توجه به نمودار میله‌ای مقابل، میانگین داده‌ها کدام است؟

- ۸،۵۲ (۲)
- ۸،۴۲ (۱)
- ۸،۷۵ (۴)
- ۸،۶۵ (۳)

برابر ۹۹ تفاضل میان دو مانگه...؟

تذکره ۴: مجموع تفاضل تمام داده‌ها از میانگین، همواره صفر است. یعنی

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = \underbrace{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}_{n\bar{x}} - n\bar{x} = 0$$

تذکره ۵: اگر اختلاف از میانگین داده‌های آماری به ترتیب ۲، ۳، ۲، -۳، ۲، ۵، -۱، ۰، ۲، ۵، ۱ باشد، آن‌گاه a کدام است؟

- ۱،۲۵ (۱)
- ۲،۵ (۴)
- ۱،۲۵ (۲)
- ۲،۵ (۳)

برابر ۱۳۰۰ در یک مطالعه آماری ۸۳ داده جمع آوری شده است. اگر قران دوم انحراف از میانگین داده‌ها برابر ۱ یا صفر باشد، حاصل چند داده با میانگین این داده‌ها برابر هستند؟

- ۱۴ (۱)
- ۳۳ (۲)

تذکره ۵ (ویژگی خطی میانگین): هرگاه داده‌ها را  $a$  برابر کنیم، سپس هر یک از داده‌ها را با عدد ثابت  $b$  جمع کنیم، میانگین داده‌های جدید نیز  $a$  برابر میانگین قبلی به اضافه  $b$  می‌باشد. یعنی

داده‌ها:  $x_1, x_2, \dots$   $\xrightarrow{\text{میانگین}}$   $\bar{x}$

داده‌های جدید:  $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots$   $\xrightarrow{\text{میانگین}}$   $a\bar{x} + b$

نتیجه:  $\overline{ax+b} = a\bar{x} + b$

تست آمیختگی داده‌های آماري  $(3x_1+2), (3x_2+2), \dots, (3x_n+2)$  برابر ۲۶ باشد، آنگاه میانگین داده‌های  $(2x_1-3), (2x_2-3), \dots, (2x_n-3)$  کدام است؟

۱۳۶    ۲۶۰  
۸۱    ۴۹۳

تذکره ۶ (محاسبه سریع میانگین): در مواقعی که داده‌های آماري، اعداد بزرگی باشند، می‌توان از پهنه داده‌ها عددی مانند  $k$  (که تا حد ممکن وسط داده‌ها می‌باشد) کم کرد و میانگین داده‌های جدید را محاسبه نمود. سپس به میانگین بدست آمده،  $k$  را می‌افزاییم.

۸۰، ۸۱، ۸۵، ۹۲، ۹۴، ۹۶، ۹۷  
۱۰۰، ۱۰۰، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۸

سوال ۹۲ تمام داده‌های متقابل را سه برابر کردیم، سپس ۴۰ واحد از آنها کم می‌کنیم. میانگین داده‌های جدید کدام است؟

۲۴۵    ۲۴۰  
۲۵۵    ۲۵۰

سوال ۹۱ میانگین ۵۰ داده دسته بندی شده زیر بارش سریع کدام است؟ (گزینه‌ها)

$x_i$	۱۱۰	۱۱۶	۱۲۲	۱۲۸	۱۳۴
$f_i$	۵	۸	۱۵	۱۲	۱۰

۱۲۳، ۶۸    ۱۲۳، ۶۲ (۱)  
۱۲۴، ۰۶    ۱۲۴، ۰۴ (۳)

$x$	۱۰	۱۲	۱۲	۱۵	۱۷	۱۸
$f$	۵	۸	۷	۱۰	۶	۴

سوال ۹۸ نمرات ۳ دانش آموز یک کلاس در جدول زیر آمده است. میانگین وزنی نمرات کدام است؟

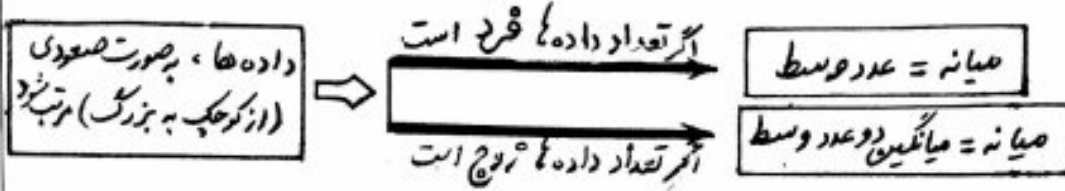
۱۴، ۲۰    ۱۴، ۲۵ (۲)  
۱۴، ۷۵ (۲)    ۱۴، ۳ (۳)



پ) میانگین عددی است که تعداد داده های بزرگ تر از آن با تعداد داده های کوچک تر از آن برابر می باشد. به عبارت دیگر

عدد وسط مجموعه ای از داده ها، که به صورت صعودی (از کوچک به بزرگ) مرتب شده اند، میانگین داده ها نامیده می شود و با نماد  $Q_2$  نشان داده می شود.

\* روش به دست آوردن میانگین داده ها:



◁ اگر تعداد داده ها  $n$  باشد،

- در حالتی که  $n$  عددی فرد است، میانگین داده  $(\frac{n+1}{2})$  ام است.
- در حالتی که  $n$  عددی زوج است، میانگین دو داده  $(\frac{n}{2})$  ام و  $(\frac{n}{2} + 1)$  ام است.

مثال میانگین داده های زیر را بیابید.

الف) ۹، ۲۳، ۲۱، ۱۷، ۱۴، ۲۱، ۱۱ ← مرتب

ب) ۱۰، ۲۰، ۲۳، ۱۸، ۱۷، ۱۲ ← مرتب

◁ همان طریقی مشاهده می شود، در حالتی که تعداد داده ها فرد است، میانگین در بین داده ها است و در حالتی که تعداد داده ها زوج است، میانگین در بین داده ها نیست!

◁ میانگین، نسبت به اندازه داده های آماری (بزرگی یا کوچکی داده ها) بی تاثیر است.

◁ اگر فراوانی داده ها به یک نسبت کم یا زیاد شود، مثلاً نصف یا دو برابر شوند، میانگین تغییر نمی کند.

◁ ویژگی خیلی میانگین: اگر تمام داده ها را در عدد ثابت  $a$  ضرب کنیم و سپس هر کدام را با مقدار ثابت  $b$  جمع نماییم، میانگین داده ها نیز در عدد  $a$  ضرب شده و با مقدار  $b$  جمع می شود.

سراسر ۹۷٪ اگر میانگین ۹ داده ۱۸، ۱۶، ۱۱، ۱۴، ۱۰، ۷، ۸، ۹ و ۲۰ برابر ۳۳ باشد، میانگین آنها کدام است!  
 تجزی  
 ۱۰ (۶) ۱۱  
 ۱۲ (۴) ۱۳

سراسر ۹۰٪ در ۸۰ داده آمار دسته بندی شده، فراوانی نسبی دسته اول ۱/۱۱۲۵ می باشد. اگر ۱۰ داده بزرگتر از میانگین به آنها افزوده شود، فراوانی نسبی جدید در دسته اول کدام است؟  
 ۱/۱۰۲۵  
 ۰/۱  
 ...

x	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۶	۱۸
f	۶	۹	۱۰	۱۲	۸	۵

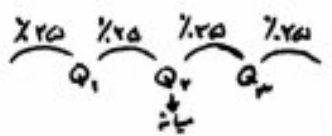
سراسر ۹۸٪ فراتر آمار ۵۰ دانش آموز یک کلاس در جدول مقابل آمده است.  
 اختلاف میانگین دوزن نمرات از میانگین آنها کدام است؟ (مؤلفه ۲)  
 ۲۲۸ (۱) ۲۳۲ (۲)  
 ۲۳۸ (۳) ۲۳۶ (۴)

پس از مرتب کردن داده به صورت صعودی،

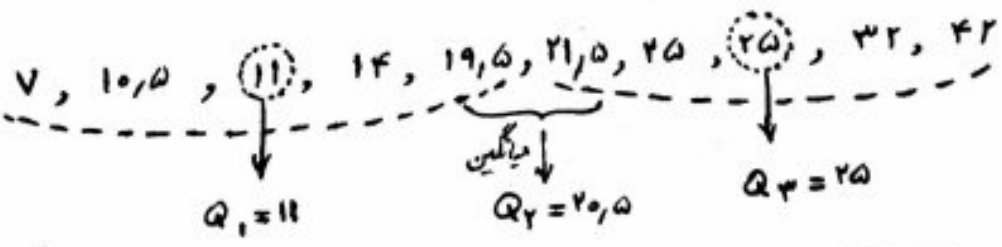
چارک ها

- میانگین کلی داده را مشخص می کنیم، که همان چارک دوم است (Q2).
- میانگین داده های کمتر از میانگین اصلی، چارک اول نامیده می شود (Q1).
- میانگین داده های بیشتر از میانگین اصلی، چارک سوم نامیده می شود (Q3).

داده که را به چارکیت مساوی تقسیم بندی می کنند:



مثال داده های ۴۲، ۷، ۱۱، ۳۲، ۲۵، ۱۹، ۱۵، ۱۴، ۲۱، ۵، ۲۵، ۱۰، ۵ را در تظری گیریم. برای یافتن چارک ها، ابتدا این داده را به طر صعودی مرتب می کنیم:



نیت اگر چارک اول مجموعهای از داده ها، میانگین داده های ۲۰ ام و ۲۱ ام باشد و چارک دوم در بین داده ها موجود باشد، چارک سوم کدام است؟

- ۱) داده ۶۱ ام
- ۲) میانگین داده های ۱۹ ام و ۲۰ ام
- ۳) داده ۶۲ ام
- ۴) میانگین داده های ۶۲ ام و ۶۳ ام

سوال ۹۹: پنج بیکاری یک کشور در ۱۰ سال گذشته به صورت زیر است. مقدار  $\frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$  کدام است؟

۱)  $-\frac{1}{2}$     ۲)  $-\frac{1}{3}$   
 ۳)  $\frac{1}{3}$     ۴)  $\frac{1}{2}$

۱۱, ۵    ۱۲, ۸    ۱۳, ۵    ۱۱, ۲    ۱۲, ۳    ۱۰, ۶    ۱۱, ۹    ۱۰, ۶    ۳۰, ۲    ۱۲, ۷

توجه: اختلاف چارک اول و سوم داده که را، "دامنه میان چارکی" می‌گویند و با نام  $IQR$  نشان می‌دهیم.

$IQR = Q_3 - Q_1$

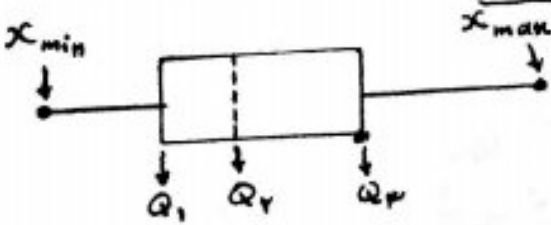
توجه ۲: اگر داده به صورت دسته بندی باشند، برای یافتن چارکها، از مرکز دسته که استفاده می‌شود.

نکته: با توجه به جدول فراوانی متقابل، دامنه میان چارکی این داده که کدام است؟

حدود دسته	[۴, ۸)	[۸, ۱۲)	[۱۲, ۱۶]
فراوانی	۵	۶	۴

۱) ۷    ۲) ۵  
 ۳) ۶    ۴) ۴

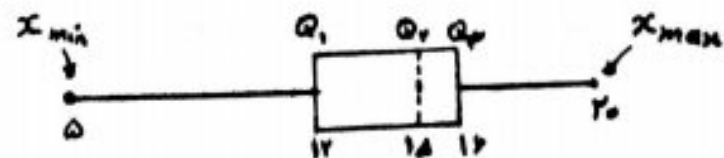
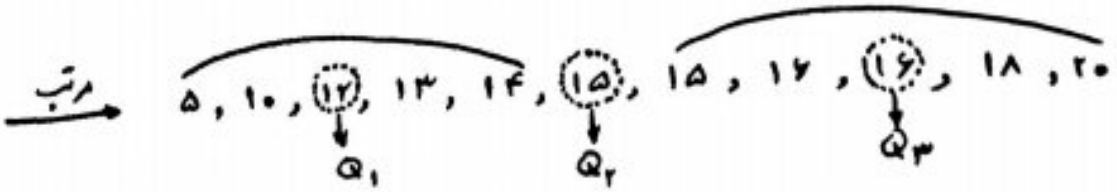
نمودار جعبه ای



۴ بر اساس پنج مقدار رسم می‌شود:  
 ۱. کوچکترین داده    ۲. چارک اول    ۳. چارک دوم (میان)  
 ۴. چارک سوم    ۵. بزرگترین داده

عمل قرار گرفتن میان در جعبه، لزوماً وسط جعبه نیست و بستگی به داده‌های آماری دارد.

مثال: رسم نمودار جعبه ای برای داده‌های: ۵, ۱۸, ۱۰, ۲۰, ۱۵, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۲, ۱۳





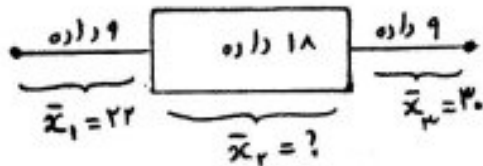
تت دامنه تغییرات داده‌های زیر با دامنه تغییرات داده‌های داخل دروی جعبه در نمودار جعبه‌ای چند واحد اختلاف دارند؟

۲۲, ۸, ۲۱, ۱۹, ۱, ۴, ۲۵, ۲۲, ۳۵, ۳۲, ۲۷, ۴۵, ۵۵, ۶۵

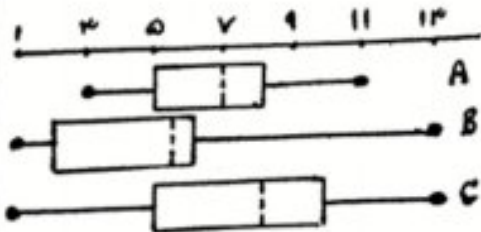
۴۵ (۱)  
۴۶ (۲)  
۴۷ (۳)  
۴۸ (۴)

برابر ۹۰ در نمودار جعبه‌ای ۳۶ داده آماری، میانگین داده‌های دو طرف جعبه، به طور جداگانه، به ترتیب ۳۰ و ۲۰ می‌باشد. اگر میانگین تمام داده‌ها ۲۷٫۵ باشد، میانگین داده‌های داخل دروی جعبه کدام است؟

۲۸ (۱)  
۲۹ (۲)  
۲۸٫۵ (۳)  
۲۹٫۵ (۴)



تت نمودار زیر، پرداخت حقوق کارمندان در سه شرکت A، B و C (بر حسب میلیون تومان) می‌باشد. (الف) پرداخت حقوق در کدام شرکت بهتر است؟



(ب) وضعیت پرداخت حقوق در کدام شرکت به هم نزدیک است؟

(پ) در کدام شرکت اختلاف کمترین است؟

پاسخ به سه سؤال فوق به صورت سه تایی (الف، ب، پ) کدام است؟

(۱) (A, B, C) (۲) (B, A, C)

(۳) (C, A, B) (۴) (A, B, C)

تت نیمی از ۱۴۰ خانوار دو تعدادی داده آماری برابر ۳ است. فریب میانگین داده‌های کوچک‌تر از میان، ۶ واحد کوچک‌تر از میانگین داده‌ها است. بزرگ‌تر از میان است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین داده‌ها کدام است؟

۴ (۱)  
۴٫۵ (۲)  
۳ (۳)  
۱٫۵ (۴)

پ) صد (نفا) ← داده‌ای که بیشترین فراوانی را دارد.

◀ اگر دو داده، بیشترین فراوانی را داشته باشند، آن گاه این داده، دو مد دارند.

◀ اگر همه داده‌ها فراوانی داشته باشند، آن گاه این داده، مد ندارند.

◀ بر تفسیری روی داده‌ها اعمال شود، همان تغییر روی مد نیز رخ می‌دهد.

سوال: مد داده‌های زیر را تعیین کنید.

الف) ۸ ← ۲, ۷, ۸, ۱, ۹, ۸, ۶, ۸

ب) ۳, ۳ ← ۳, ۴, ۴, ۴, ۱, ۵, ۳, ۲, ۳

ج) ← ۱, ۱, ۲, ۲, ۳, ۳, ۴, ۴

تت اگر داده‌های ۲, ۸, ۱, ۵, ۶, ۸, ۲, ۵, ۶ فاقد مد باشند، آن گاه در نمودار جعبه‌ای این داده‌ها، میانگین داده‌های درون جعبه کدام است؟

۵, ۵۶ (۲) ۵, ۲۵

۶ (۳) ۶

برابر ۶۹۳ در مجموعه اعداد {۶۳, ۷۰, ۶۴, ۵۰, ۷۷, ۶۵, ۶۴, x} به ازای کدام مقدار x، شش‌ضلعی میانگین، مد و میانگین با هم برابرند؟

۶۴ (۱) ۶۴

۶۶ (۳) ۶۶

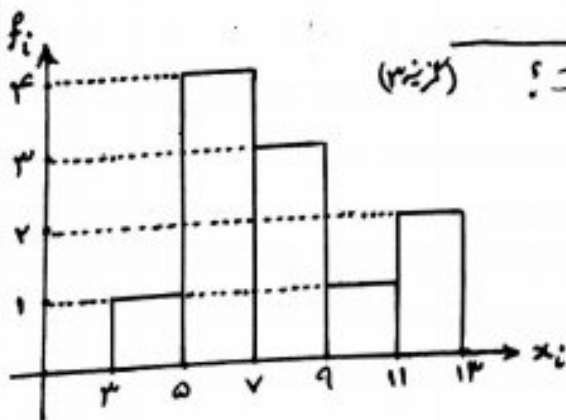
تت با توجه به نمودار بافت شگارت متناهی، کدام نتیجه‌گیری درست است؟ (گزینه‌ها)

۱) مد < میانگین < میان

۲) میانگین < مد < میان

۳) میانگین = مد < میان

۴) میانگین < مد



داده دور افتاده سه تفاوت بسیار زیادی با سایر داده‌ها دارد و میانگین را تحت تأثیر قرار می‌دهد. آماروی میانه و مد تأثیری ندارند و یا تأثیر کمی دارند.

مثال ۱:

الف)  $9, 12, 13, 15, 15, 50 \rightarrow \bar{x} = \frac{9+12+13+15+15+50}{6} = 19$   
 میان  $Q_2 = 14$  داده دور افتاده



ب)  $9, 12, 13, 15, 15 \rightarrow \bar{x} = \frac{9+12+13+15+15}{5} = 12.8$   
 میان  $Q_2 = 13$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، با حذف داده دور افتاده، بیشترین تغییر روی میانگین رخ می‌دهد. میانگین کمترین تغییر را دارد و مد در هر دو گروه از داده‌ها ثابت است (عدد ۱۵).

نتیجه: برای انتخاب معیار بهتر، هرگاه داده دور افتاده وجود داشته باشد، به کار بردن میانگین نسبت به میانگین ارجح‌تر است.

تت: درصد تورم در سال گذشته به طور ماه به ماه به صورت

- ۸, ۹, ۱۰, ۱۰, ۱۲, ۹, ۵, ۹, ۱۱, ۸, ۱۳, ۱۷, ۴, ۱۸

اعلام شده است. برای بررسی آماری کدام شاخص پیشنهاد می‌شود؟

- ۱) مد
- ۲) فراوانی
- ۳) میانگین
- ۴) میان

تت: یک شرکت بیمه برای تعیین حق بیمه شخص ثالث در سال آینده، خسارت‌های پرداخت شده در سال جاری را مورد بررسی قرار داده است. میانگین خسارت‌های پرداخت شده ۸۵ میلیون ریال، میانگین آنها برابر با ۴۲,۲ میلیون ریال و حد آنها ۹۰ میلیون ریال است. این شرکت کدام شاخص را برای تعیین حق بیمه در سال آینده در نظر بگیرد تا ضرر نکند؟

- ۱) مد
- ۲) فراوانی
- ۳) میانگین
- ۴) میان

(۳ گزینه)



معیارهای پراکندگی: ۱. دامنه تغییرات ۲. واریانس ۳. انحراف معیار ۴. ضریب تغییرات

چرا معیارهای پراکندگی مورد نیاز است؟ به مثال زیر که میزان درآمد سه نفر را در سه جامعه مختلف نشان می‌دهد، توجه کنید:

	جامعه A	جامعه B	جامعه C
درآمد نفر اول	۳	۲,۵	۷
" " دوم	۳	۳	۱,۵
" " سوم	۳	۳,۵	۱/۵
میانگین	۳	۳	۳

در هر سه جامعه، میانگین درآمد سه نفر یکسان است. میانگین دو جامعه A و B با میانگین برابر است و در جامعه C برابر با عدد ۵ را است. هر سه جامعه فاقد شد می باشند. بنابراین با معیارهای گزارش به مرکز نمی توان قضاوت درستی در مورد سه جامعه مذکور داشت.

۱. دامنه تغییرات ← اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین مقدار داده رای نویسیم.

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

- ◁ اگر همه داده‌ها با هم برابر باشند، دامنه تغییرات برابر صفری شود و برعکس.
- ◁ اگر به تمام داده‌ها، یک عدد ثابت مانند  $p$  اضافه یا کم گردد، دامنه تغییرات عوض نمی‌شود.
- ◁ اگر تمام داده‌ها، در عدد ثابت مانند  $a$  ضرب شوند، دامنه تغییرات نیز در  $|a|$  ضرب می‌شود.

◁ دامنه تغییرات یک معیار مربع برای تعیین میزان پراکندگی داده‌هاست. به عبارت دیگر

هرچه دامنه تغییرات داده‌ها زیاد باشد، پراکندگی داده‌ها زیاد است.

◁ دامنه تغییرات فقط بزرگترین و کوچکترین داده را در نظر می‌گیرد، پس لزوماً معیار مناسبی برای پراکندگی داده‌ها نیست!!

توجه: دامنه تغییرات داده‌های  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  برابر ۱۷ است. دامنه تغییرات داده‌های  $10 - \alpha_i$  به اعداد ۱۰ تا ۱۱۱ می‌باشد که نام است!

۱۱۲ (۲) ۱۱۱ (۱)

۱۰۲ (۳) ۱۱۲ (۳)

۲. واریانس ← میانگین مجذور مقادیر اختلاف از میانگین داده‌ها را می‌گوییم. نماد  $\sigma^2$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

- ◀ ویژگی مهم واریانس آن است که پراکنندگی داده‌ها را با در نظر گرفتن تمام داده‌ها، مورد بررسی قرار می‌دهد.
- ◀ بررسی پراکنندگی داده‌ها زمانی معنی پیدا می‌کند که هر یک از داده‌ها نسبت به یک مرکز مقایسه شوند. (بهترین معیار برابر مرکز داده‌ها، همان میانگین داده‌هاست)
- ◀ برای یافتن واریانس داده‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مرحله ۱: محاسبه میانگین کل داده‌ها    مرحله ۲: محاسبه اختلاف از میانگین برای هر داده

یعنی فاصله (تفاضل) هر داده از میانگین را می‌یابیم.

مرحله ۳: محاسبه "مربع" مقادیر بدست آمده از مرحله ۲

توجه کنید که می‌دانیم مجموع اختلاف از میانگین داده‌ها، همواره صفر است و برای حل این مشکل، از توان دوم مقادیر اختلاف از میانگین استفاده می‌کنیم.

مرحله ۴: محاسبه میانگین مقادیر بدست آمده از مرحله ۳

(یعنی مجموع مربع‌های اختلاف از میانگین تمام داده‌ها را می‌یابیم و جواب را بر تعداد داده‌ها تقسیم می‌کنیم.)

**مثال:** واریانس داده‌های ۱۲, ۸, ۱۶, ۲۰, ۱۴, ۸ را بیابید.

حله

$$\bar{x} = \frac{12 + 8 + 16 + 20 + 14 + 8}{6} = 13 \xrightarrow{\text{مرحله ۲}} \begin{cases} 12 - 13 = -1, & 8 - 13 = -5 \\ 16 - 13 = 3, & 20 - 13 = 7 \\ 14 - 13 = 1, & 8 - 13 = -5 \end{cases}$$

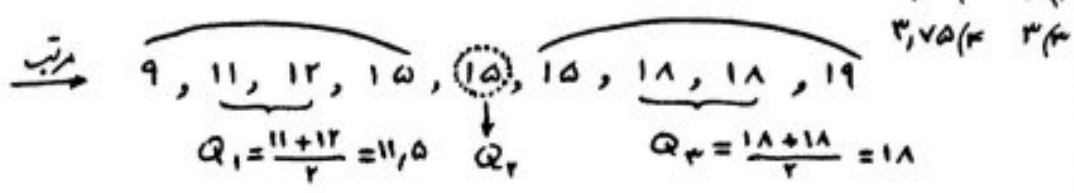
$$\xrightarrow{\text{مرحله ۳}} \begin{cases} (-1)^2 = 1, & (-5)^2 = 25 \\ 3^2 = 9, & 7^2 = 49 \\ 1^2 = 1, & (-5)^2 = 25 \end{cases} \xrightarrow{\text{مرحله ۴}} \sigma^2 = \frac{1 + 25 + 9 + 49 + 1 + 25}{6} = 18,33$$

**برای سنجش** میانگین شش داده آماری عددی طبیعی است و توان دوم اختلاف از میانگین این داده‌ها، به صورت  $9, a^2, 0, 9, b^2, 1$  است. اگر واریانس این داده‌ها برابر ۴ باشد، مقدار  $ab$  کدام است؟ ( $a, b \in \mathbb{Z}$ )

$$\begin{matrix} 4(2) & 4(1) \\ -2(3) & 2(3) \end{matrix}$$

تست در نمودار جعبه‌ای داده‌های ۹، ۱۸، ۱۹، ۱۸، ۱۲، ۱۵، ۱۵، ۱۱، ۱۵ واریانس داده‌های داخل و روی جعبه کدام است؟

حل



واضح است که داده‌های داخل و روی جعبه عبارت‌اند از: ۱۲، ۱۵، ۱۵، ۱۵، ۱۸، ۱۸ و برای محاسبه واریانس این داده‌ها داریم:

$$\bar{x} = \frac{12+15+15+15+18+18}{6} = 15,5$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(12-15,5)^2 + 3(15-15,5)^2 + 2(18-15,5)^2}{6} = 4,25 \checkmark$$

تست ۸ داده آماری با میانگین ۱۵ و واریانس ۴ مفروضه‌اند. اگر دو داده ۱۲، ۱۸ به این داده‌ها افزوده شود در این صورت واریانس ۱۰ داده حاصل چه تغییری می‌کند؟ (۱) یک واحد کم می‌شود (۲) تغییری نمی‌کند (۳) یک واحد زیاد می‌شود (۴) دو واحد زیاد می‌شود.

حل

$$\begin{cases} \bar{x} = 15 \xrightarrow{n=8} x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 8 \times 15 = 120 \\ \sigma^2 = 4 \rightarrow \frac{(x_1-15)^2 + (x_2-15)^2 + \dots + (x_8-15)^2}{8} = 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow (x_1-15)^2 + (x_2-15)^2 + \dots + (x_8-15)^2 = 32$$

از طرفی چون  $\frac{12+18}{2} = 15$  پس با افزودن این دو داده جدید، میانگین ده داده حاصل همچنان ۱۵ است. پس

$$\sigma_{جدید}^2 = \frac{\overbrace{(x_1-15)^2 + (x_2-15)^2 + \dots + (x_8-15)^2}^{32} + (12-15)^2 + (18-15)^2}{10} = \frac{32+9+9}{10} = 5$$

پس واریانس ۱۰ داده حاصل، یک واحد افزایش می‌یابد.



نکته ۱: گاهی اوقات در مسأله، به جای داده، مجموع مربعات آنها به همراه میانگین یا مجموع داده و تعداد داده، مشخص است. در این صورت برای محاسبه واریانس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

فرمول دوم واریانس

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

اثبات

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - 2\bar{x}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + n\bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - 2\bar{x} \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) + \bar{x}^2$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

سوال ۲۹۲: میانگین طول اضلاع مربعی ۱۲ داریانس آنها ۵ است. میانگین مساحت مربعی کدام است؟

- ۱) ۱۲۴
- ۲) ۱۳۴
- ۳) ۱۴۹
- ۴) ۱۶۹

سوال ۴۰۳: اگر مجموع ۱۰ داده آماری ۴۰ و مجموع مربعات آنها ۲۰۰ باشد، واریانس این داده کدام است؟

(گزینه ۲)

- ۱) ۲
- ۲) ۴
- ۳) ۱۶
- ۴) ۲۰

نکته ۲: اگر تمام داده‌های با عدد ثابتی مانند  $a$  جمع شوند، واریانس آنها تغییری نمی‌کند. اگر تمام داده‌های در عدد ثابتی مانند  $a$  ضرب شوند، واریانس آنها، در مجذور آن عدد ثابت یعنی در  $a^2$  ضرب می‌شود.

تست: واریانس داده‌های  $a-1, a+1, a+3, a+5$  چند برابر واریانس داده‌های  $a-3, a, a+3, a+6, a+9$  است؟

$$\frac{5}{18} \text{ و } \frac{4}{16}$$

$$\frac{8}{11} \text{ و } \frac{7}{10}$$

راستی: واریانس  $n$  داده، که تشکیل یک تصاعد عددی (حسابی) با قدر نسبت  $d$  می‌دهند، برابر است با

$$\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12} d^2$$

درست بالا  $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 = \frac{4^2-1}{12} (2)^2 = 5 \rightarrow \text{تصادف حسابی در زمره اول داده که ۴ داده با قدر نسبت ۲} \\ \sigma_2^2 = \frac{5^2-1}{12} (4)^2 = 18 \rightarrow \text{" " " " دوم " " ۵ داده با قدر نسبت ۴} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{نسبت}} \frac{5}{18} \checkmark$

$$\begin{cases} (1 + 0/01)^{325} = 37,8 \\ (1 - 0/01)^{325} = 0/03 \end{cases}$$

ریاضیات نشان می‌دهد که در طول یک سال "اندک بهتر یا بدتر بودن" چگونه موفقیت یا شکست شما را رقم می‌زند. پس برای موفقیت کمی بیشتر تلاش کنیم. 😊

نتیجه:

نکته ۳: اگر تمام داده‌ها با هم مساوی باشند، واریانس آنها صفر است و برعکس.

برابر ۹۱٪ واریانس ۱۱ داده آماری صفر است. اگر داده‌های ۲۴، ۱۶ و ۲۶ به آن‌ها اضافه شود، میانگین داده‌ها تغییری نمی‌کند. واریانس ۱۴ داده حاصل کدام است؟

۲ (۲) ۴ (۱)  
۳ (۱) ۴ (۳)

نکته ۴: اگر داده‌های آماری دارای وزن یا فراوانی باشند، آن‌گاه واریانس آنها عبارت است از:

$$\sigma^2 = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_n(x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

\* در حالت داده‌های موزون، به جای  $f$  از  $w$  و به جای  $\bar{x}$  از  $\bar{x}_w$  استفاده می‌شود.

برابر ۹۴٪ اگر میانگین داده‌های دسته‌بندی شده، برابر ۱۶ باشد، با تعیین فراوانی دسته چهارم، مقدار واریانس کدام است؟

فراوانی دسته	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی	۵	۷	۱۰	$\alpha$	۳

۴ (۱) ۴,۹۲  
۴ (۳) ۵,۵۵  
۴ (۲) ۵,۷۴

حل: از آن جایی که  $\bar{x} = 16$  پس اگر ۱۶ واحد از غایبه برداشته کم کنیم، انبساط نیز ۱۶ واحد کم می‌شود و میانگین داده‌های جدید (یعنی اعداد ۴، ۲، ۰، -۲، -۴) برابر صفر می‌گردد (راه سریع)، داریم:

$$\frac{5 \times (-4) + 7 \times (-2) + 10 \times (0) + \alpha \times (2) + 3 \times (4)}{5 + 7 + 10 + \alpha + 3} = 0 \Rightarrow -22 + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 11$$

اکنون جای محاسبه واریانس داریم:

$$\sigma^2 = \frac{5(12-16)^2 + 7(14-16)^2 + 10(16-16)^2 + 11(18-16)^2 + 3(20-16)^2}{5 + 7 + 10 + 11 + 3}$$

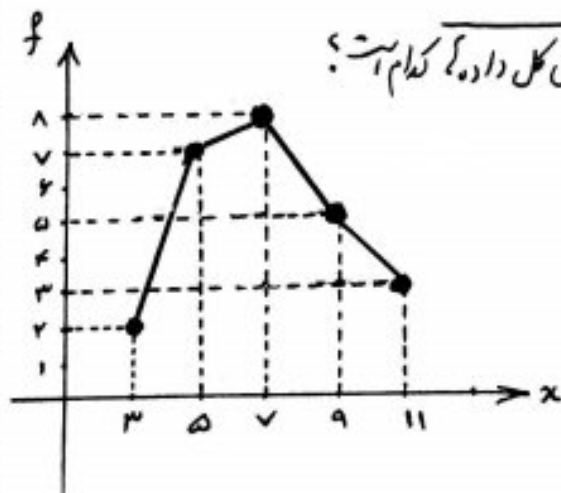
$$= \frac{5 \times (-4)^2 + 7 \times (-2)^2 + 10 \times (0)^2 + 11 \times (2)^2 + 3 \times (4)^2}{36} = \frac{200}{36} = 5,55 \checkmark$$



در داده‌های آماري با جدول فراواني زير، مقدار واريانس با روش مربع کتام است؟  
 به ابر ۲۹۷  
 تجرد

$x$	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱	۲۳
$f$	۶	۸	۷	۱۰	۹

۳,۸۲ (۲)	۳,۲۶ (۱)
۷,۶۴ (۴)	۷,۳۲ (۳)



با توجه به نمودار چند بر فراواني مقابل، واريانس کل داده‌ها کتام است؟  
 به ابر ۹۵

۴,۸ (۲)	۴,۵ (۱)
۵,۱۲ (۴)	۴,۹۲ (۳)

حل: واضح است که جدول فراواني داده‌ها

به صورت زير است:

$x$	۳	۵	۷	۹	۱۱
$f$	۲	۷	۸	۵	۳

اکنون برار محاسبه واريانس داريم:

سوال ۱۴۰۰  
در جدول فراوانی داده کمی زیر، مقدار میانگین برابر ۱۳٫۵ و اختلاف چارک اول و سوم ۱۷ است. به هر یک از داده کمی جدول ۴ واحد اضافه می‌کنیم. واریانس جدول جدید کدام است؟

دارد	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۲۸	۳۱	$\alpha$
فراوانی	۳	۲	۶	۳	۲	۵	۱

- (۱) ۷۱٫۵ (۲) ۷۱  
(۳) ۷۲ (۴) ۷۲٫۵

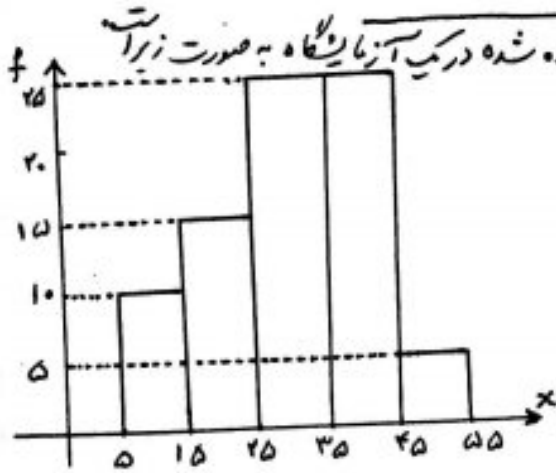
سوال ۱۴۰۰  
جدول فراوانی داده کمی زیر مفروض اند. اگر مقدار میانگین برابر ۱۳ باشد، واریانس داده کمی کدام است؟

دارد	۸	۱۲	۱۳	۱۴	۲۶	۲۷	۲۸	$\alpha$
فراوانی	۳	۲	۶	۳	۱	۱	۵	۱

- (۱) ۵۴٫۸۶ (۲) ۵۵٫۰۳  
(۳) ۵۵٫۳۶ (۴) ۵۵٫۶۳

(گزینه ۳)

نقشه ۵: برای محاسبه واریانس داده‌های دسته بندی شده، در جدول فراوانی، از مرکز دسته استفاده می‌کنیم.



واریانس طول این گیاه کدام است؟

- ۱) ۹۰
- ۲) ۱۰۰
- ۳) ۱۲۰
- ۴) ۱۲۵

حل: جدول فراوانی داده‌ها، با توجه به مرکز هر دسته، عبارت است از:

$x_i$	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
$f_i$	۱۰	۱۵	۲۵	۲۵	۵

اکنون برای محاسبه واریانس این داده‌ها داریم:

نقشه ۶: برای محاسبه واریانس از روی فراوانی نسبی داده‌ها، داریم:

$$\sigma^2 = \frac{f_1}{n} (x_1 - \bar{x})^2 + \frac{f_2}{n} (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + \frac{f_n}{n} (x_n - \bar{x})^2$$

جدول رو به روی فراوانی نسبی داده‌های دسته بندی شده است. با تعیین  $\alpha$ ، مقدار واریانس کدام است؟

مرکز دسته	۸	۱۲	۱۶	۲۰
فراوانی نسبی	۱/۱	۱/۲۵	۱/۲	$\alpha$

- ۱) ۱۶,۵
- ۲) ۱۶,۸
- ۳) ۱۷,۲
- ۴) ۱۷,۶

حل:

$$\alpha = 1/45 \rightarrow \alpha = 1/45$$

$$\bar{x} = 1/1 \times 8 + 1/25 \times 12 + 1/2 \times 16 + 1/45 \times 20 = 16$$

$$\sigma^2 = 1/1 \times (8-16)^2 + 1/25 \times (12-16)^2 + 1/2 \times (16-16)^2 + 1/45 \times (20-16)^2 = 17,6$$



### ۳. انحراف معیار ← جذر واریانس رای گویند $\sigma$

(توجه کنید که چون واریانس به صورت واحد مربع بیان می شود، پس با جذر گرفتن از آن به عددی می رسیم که بر حسب واحد داده که باشد و نه مجدد آنها.)

بنابراین انحراف معیار برای  $n$  داده  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  برابر است با:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

(سایر نکات و ادوات به همین ترتیب، با جذر گرفتن، برای انحراف معیار برقرارند)

نتیجه ۱: در نکات مربوط به واریانس دیدیم که

◀ اگر مقداری ثابت به همه داده ها اضافه شود، واریانس آنها تغییری نمی کند، پس انحراف معیار هم تغییر نمی کند.

◀ اگر مقدار ثابت مانند  $\alpha$  در تمام داده ها ضرب شود، واریانس آنها در  $\alpha^2$  و انحراف معیار آنها در  $|\alpha|$  ضرب می شود.

نتیجه ۲: اگر انحراف معیار مجموعه داده ها، عددی کوچک باشد، به این معناست که پراکندگی داده ها حول میانگین آنها کم و در نتیجه داده ها به هم نزدیک ترند (جامعه یک دست می باشد و یا به عبارتی عادلانه تر است). اما اگر انحراف معیار مجموعه داده ها، عددی بزرگ باشد، بدین معناست که پراکندگی داده ها حول میانگین آنها زیاد و در نتیجه داده ها از هم دور می باشند (وجود اختلاف طبقاتی زیاد در جامعه!).

تذکره: اگر انحراف معیار داده ای  $-\frac{1}{5}x_1 + 2, -\frac{1}{5}x_2 + 2, \dots, -\frac{1}{5}x_n + 2$  برابر  $1,4$  باشد، آن گاه انحراف معیار داده های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  کدام است؟

$$\begin{array}{l} 2,8 \quad (1) \\ 7,4 \quad (2) \\ 1,4 \quad (3) \\ 7,4 \quad (4) \end{array}$$

سوال ۹۷ در جدول فراوانی داده آماری زیر، انحراف معیار و باروشی مربع کدام است!

$x$	۲۷	۲۹	۳۱	۳۳	۳۵	۲,۷ (۲)	۲,۶ (۱)
$f$	۷	۱۰	۱۳	۱۱	۹	۲,۹ (۴)	۲,۸ (۳)

حل: ابتدا عدد ۳۱ (که در وسط داده قرار دارد) را از همه داده کم می کنیم. داریم:

$x - 31$	-۴	-۲	۰	۲	۴	$\rightarrow \bar{x} = \frac{7x(-4) + 10x(-2) + 0 + 11x2 + 9x4}{7 + 10 + 13 + 11 + 9}$
$f$	۷	۱۰	۱۳	۱۱	۹	

$\rightarrow \bar{x} = 12$

$\Rightarrow \sigma^2 =$

سوال ۹۸ یک جامعه با اندازه ۱۲ و واریانس ۱۲,۶ با جامعه دیگری با اندازه ۲۴ و واریانس ۷,۲ تشکیل جامعه ای جدید می دهند. اگر میانگین این دو جامعه یکسان باشد، انحراف معیار جامعه جدید کدام است!

۳ (۲) ۲,۹ (۱)  
۳,۲ (۴) ۳,۱ (۳)

«دو نکته مهم»

اگر دو جامعه میانگین یکسان داشته باشند، در صورتی که اندازه اولی  $n_1$  و واریانس آن  $\sigma_1^2$  و اندازه دومی  $n_2$  و واریانس آن  $\sigma_2^2$  باشد، آن گاه واریانس جامعه حاصل از ترکیب آنها برابر است با:

(این نکته قابل تعمیم است)

$$\frac{n_1 \times \sigma_1^2 + n_2 \times \sigma_2^2}{n_1 + n_2}$$

تجربی ۱۵۰: ۹ داده آماری را در نظر بگیرید. اختلاف مثبت داده آماری از میانگین برابر +۱ یا -۱، و اختلاف یک داده از میانگین برابر صفر است. انحراف معیار این داده که کدام است؟

۲,۴ (۲) ۴ (۱)  
۲,۴ (۴) ۴ (۳)

تجربی ۱۵۰: انحراف معیارش داده آماری ۲، و اختلاف آنها از میانگین برابر ۰,۵، ۰,۰، -۱,۰، -۱,۰، ۳، است. اگر  $\sigma > 0$  باشد، مقدار  $\sigma$  کدام است؟

۲ (۲) ۳ (۱)  
-۲ (۴) -۳ (۳)

سوال ۲۹۷: شش داده آماری با میانگین ۱۲ و واریانس ۶ با ۹ داده دیگر با میانگین ۱۴ و واریانس ۴ ترکیب شده اند. انحراف معیار گروه جدید کدام است؟

$$2,2 \quad (1) \quad 2,3 \quad (2)$$

$$2,4 \quad (3) \quad 2,5 \quad (4)$$

سوال ۲۹۸: در ۲۵ داده آماری، میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ می باشد. اگر داده کمی با محور تصحیح H.W. ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ از بین آنها حذف شوند، واریانس داده کمی باقی مانده کدام است؟ (گزینه ۴)

$$14,72 \quad (1) \quad 14,81 \quad (2)$$

$$15,33 \quad (3) \quad 16,22 \quad (4)$$



## ۰۴ ضریب تغییرات

← حاصل تقسیم انحراف معیار داده با میانگین داده است.

ضریب تغییرات را با  $C.V$  نشان می دهند.

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

- ◁ در حالتی که واریانس (انحراف معیار) دو جامعه مورد مقایسه، یکسان باشد، میزان پراکندگی را بر اساس ضریب تغییرات بررسی می کنند.
- ◁ ضریب تغییرات، عبارت است از میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین.
- ◁ هر چه ضریب تغییرات کمتر باشد، میزان پراکندگی داده کمتر است و این موضوع در علم آمار مطلوب می باشد.
- ◁ از ضریب تغییرات، که معیاری بدون واحد می باشد، می توان برای مقایسه میزان پراکندگی دو یا چند جامعه آماری که بر حسب یک واحد نمی باشند، استفاده کرد. به عنوان مثال متاينه پراکندگی داده های قد و داده های وزن افراد در یک کلاس.
- ◁ اگر تمام داده های با عدد ثابت مثبتی مانند  $\alpha$  جمع شوند، ضریب تغییرات کاهش می یابد. زیرا انحراف معیار تغییری نمی کند، اما میانگین به اندازه  $\alpha$  افزایش می یابد.
- ◁ همچنین اگر تمام داده های به اندازه عدد ثابت مثبتی مانند  $\alpha$  کم شوند، ضریب تغییرات افزایش می یابد.
- ◁ اگر تمام داده های در عدد ثابت مثبتی مانند  $\alpha$  ضرب شوند، ضریب تغییرات تغییری نمی کند. اما اگر عدد ثابت  $\alpha$ ، منفی باشد، ضریب تغییرات، قرینه می گردد.

سوال ۲۹۸ میزان بارندگی یک استان در ۱۰ سال گذشته به صورت زیر است. در فائش خود از جعبه ای، ضریب تغییرات داده های داخل جعبه کدام است؟

(۵۹, ۳۹, ۵۶, ۴۶, ۵۰, ۵۴, ۳۷, ۴۲, ۵۷, ۳۲)

۰/۰۷ (۱)  
۰/۰۹ (۲)  
۰/۱۲ (۳)  
۰/۱۵ (۴)

برابر ۹۲ در ۱۳ داده آماری، مجموع تمام داده‌ها ۷۲ و مجموع مجذورات آنها ۴۸۰ می‌باشد. ضریب تغییرات  $\frac{92}{296}$  این داده‌ها کدام است!

(۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{2}{9}$

(۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{2}{5}$

برابر ۹۵ داده‌های  $x_i = 1, 2, 3, 4, 5$  مفروض است. ضریب تغییرات داده‌های  $u_i = 12x_i + 6$  کدام است؟

$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3 \rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5}} = \sqrt{2}$  (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{5}{2}$

$\rightarrow C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$  برای داده‌های جدید  $(C.V) = \text{---}$

برابر ۹۳ با توجه به جدول آماری دسته بندی شده روبه‌رو، مقدار ضریب تغییرات داده‌های  $x$  کدام است؟

$x - 44$	-۳	-۱	۱	۳	۵
فراوانی	۴	۷	۵	۳	۱

(۱)  $\frac{1}{0.5}$  (۲)  $\frac{1}{0.8}$  (۳)  $\frac{1}{1}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

حل: اگر میانگین داده‌های داده شده در جدول را بیابیم، آن‌گاه میانگین داده‌های  $x$ ، ۴۴ واحد بیشتر است.

میانگین داده‌های جدول  $= \frac{4x(-3) + 7x(-1) + 5x(1) + 3x(3) + 1x(5)}{4+7+5+3+1} = 0 \xrightarrow{+44} \bar{x} = 44$

اما انحراف معیار داده‌های جدول با انحراف معیار داده‌های  $x$  برابر است، پس

$\sigma = \sqrt{\frac{4(-3)^2 + 7(-1)^2 + 5(1)^2 + 3(3)^2 + 1(5)^2}{20}} = \sqrt{5}$  برای داده‌های  $x$   $C.V = \frac{\sqrt{5}}{44} = 0.05$  (۱)  $\frac{1}{0.5}$  (۲)  $\frac{1}{0.8}$  (۳)  $\frac{1}{1}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

برابر ۹۵ میانگین طول اضلاع مربع‌های ۱۵ واحد با ضریب تغییرات  $\frac{1}{2}$  محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع‌ها تقریباً کدام است!

(۱) ۲۲۴ (۲) ۲۲۲ (۳) ۲۳۴ (۴) ۲۳۶

برابر ۹۸ در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند. میانگین نمرات مسولیت‌پذیری و مهارت‌های آن‌ها در روز اول به ترتیب ۸۵ و ۲۵ و در روز دوم ۷۲ و ۱۶ است. کدام گروه بهتری باشد؟

برابر ۹۳ نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به صورت مقابل است.

- A: ۱۵, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۹  
B: ۱۲, ۱۴, ۱۷, ۱۴, ۱۷, ۱۸

دقت عمل کدام بیشتر است؟

(۱) H (۲) B (۳) نیز قابل پیش بینی نیست

حل  $\bar{x}_A = \frac{15+14+15+16+17+19}{6} = 16$   
 $\bar{x}_B = \frac{12+14+17+14+17+18}{6} = 16$

$\sigma_A^2 = \frac{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (3)^2}{6} = \frac{14}{6}$  و  $\sigma_B^2 = \frac{(0)^2 + (-2)^2 + (0)^2 + (-2)^2 + (1)^2 + (1)^2}{6} = \frac{14}{6}$

پس  $\sigma_B < \sigma_A$  و لذا  $(C.V)_B < (C.V)_A$  پس دقت B بیشتر است

آمار استنباطی: فرایند نتیجه‌گیری درباره پارامترهای جامعه بر اساس نمونه است.

به عبارت دیگر چون همواره دسترسی به کل جامعه (عمل سرشماری) به راحتی امکان پذیر نیست (زمان بُرد و پُرهزینه است)، بنابراین با استفاده از نتایج نمونه، تجزیه و تحلیل داده‌های نمونه با کمک نظریه احتمال و تخمین، به تصمیماتی در مورد کل جامعه می‌توان دست یافت.

۱. آمارگیری: گردآوری داده‌ها به یکی از روش‌های ممکن.

۲. آمارگیری: کسی که آمارگیری را انجام می‌دهد.

### روش‌های گردآوری داده‌ها

۱. مشاهده: گردآوری داده‌ها بدون نیاز به فرود پاسخ‌گو (اگر به دقت زیادی نیاز باشد، مناسب نیست)

۲. پرسش‌نامه: مجموعه‌ای از سوالات از پیش تعیین شده که توسط تعدادی پاسخ‌گو تکمیل می‌شود (بسیار مهم)

(هرچند آن تعداد واحد‌های نمونه زیاد باشد، این روش زمان‌بر است.)

۳. در ضمن سوالات باید با هدف آمارگیری هماهنگ باشد. سوالات تا حد ممکن

ساده و واضح باشد و از مطرح کردن سوالاتی که پاسخ دادن به آنها نوعی آزار

به همراه داشته باشد و یا سوالاتی که نظر خاصی را القا می‌کند، خودداری شود.

۳. مصاحبه: معمولاً بین دو نفر صورت می‌گیرد؛ یکی مصاحبه‌گر (همان آمارگیر) و دیگری مصاحبه‌شونده

که پاسخ‌گو است. از این روش بیشتر زمانی استفاده می‌شود که آمارگیر از همه پاسخ‌گویی

ممکن اطلاع کافی ندارد. (هرچند ممکن است سوالات در حین مصاحبه تغییر کنند)

۴. دادگان: شامل مجموعه‌ای از اطلاعات ذخیره شده است و داده‌ها از این مجموعه به دست می‌آیند.

(هرچند همیشه اطلاعات ثبتی در اختیار نیست)



- مسئله:** در هر یک از موضوعات زیر، روش بهتر برای گردآوری داده‌ها را مشخص کنید.
- الف) میزان تأخیر پروازهای داخلی فرودگاه در سال گذشته ←
  - ب) نظر دانش آموزان در مورد کیفیت آزمون‌های برگزار شده در سال تحصیلی ←
  - پ) تعداد وسایل نقلیه عبوری از ساعت ۱۲ شب تا صبح با تعداد از اتوبان خاص ←
  - ت) بررسی راه کار بهبود الگوی تغذیه مردم در سطح جامعه ←
  - ث) تحقیق در مورد تعداد ازدواج‌های ثبت شده در استان البرزگان ←
  - ج) سرشماری نفوس و مسکن در ایران ←
  - ح) بررسی ساعت‌های خواب دانش آموزان کلاس ←
  - ز) میزان رضایت مشتریان بانک از نحوه برخورد و رسیدگی به درخواست آنها ←
  - خ) سن پیم دانش آموزان در سه بر حسب ماه در پایه دوازدهم ←
  - د) تعداد سرنشینان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر ←
  - ذ) بررسی میزان مطالعه زنان خانه دار در کشور ←

**پارامتر (پارامتر جامعه):** یک مشخصه عددی است که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشد قابل محاسبه است. پارامتر جامعه به رغم ثابت بودن، مجهول است.



**آماره (آماره نمونه):** مشخصه عددی است که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه به دست می‌آید. آماره‌ها از نمونه‌ای به نمونه (تغییر کننده) و از آنها برای تخمین پارامتر جامعه استفاده می‌شود.

**مسئله:** دو یک زمین کث درزی با کت پهنه‌دانه، وزن یک تنگ پهنه‌دانه را اندازه‌گیری می‌کنیم. این عمل ..... است و میانگین وزن همه پهنه‌دانه‌های قابل برداشت در این زمین، ..... می‌باشد زیرا این عدد برای همه اعضای جامعه است. برای بررسی سازه پهنه‌دانه‌ها، بخشی از کل پهنه‌دانه‌ها را بررسی می‌نماییم، که این بخش ..... نامیده می‌شود و نسبت تعداد پهنه‌دانه‌های دارای مزه "خوب" در این بخش، یک ..... است.

**مثال:** در هر یک از موارد زیر، شخص کینه عدوی که زیر آن خط کشیده شده است، پارامتر جامعه یا آماره مغز است؟

(الف) در یک دبیرستان، ۴۸٪ درصد دانش آموزان با دوچرخه به مدرسه می آیند.

(ب) در یک دبیرستان، با بررسی دانش آموزان پایه دوازدهم دریافته ایم که ۴۷ درصد آنها با دوچرخه می آیند.

(ج) در یک نظرسنجی علمی، ۵۲ درصد از دانشمندان اروپایی مرکز تحقیقات بین المللی گفته اند که زمین در حال محرم شدن است.

(د) سخنگوی سازمان بیمه اعلام کرده است که نسبت بیمه زمانی که بیمه عمر دارند، برابر ۳۰ درصد است.

(ه) مدیریت هتل دریافته است که از بین ۲۰ هتل استانبولی، ۱۰ درصد آنها قصد سفر دوباره و اقامت در این هتل را دارند.

(و) در یک نظرسنجی، درباره مشاغل، ۱۲٫۵ درصد افرادی که مورد سؤال قرار گرفته اند، بیکار بوده اند.

(ز) نیروی انتظامی اعلام کرده است که تعداد سرقت های سال گذشته در شهر تهران، که شامل تلفن همراه بوده، برابر ۲۶۴۱ عدد است.

(ح) در نمونه تصادفی از دندان پزشکان، ۸۰ درصد آنها یک غیردندان خاص را برای موارک زدن توصیه می کنند.

(ط) یک شرکت تولید کننده گوشی تلفن همراه، اعلام کرده است میانگین عمر بیمه محصولانش، حد اقل ۵ سال است.

**نمونه گسبیری و روش های آن** نمونه گیری: فرایند انتخاب نمونه ای از یک جامعه، به منظور تعمیم اطلاعات آن جامعه

اگر جامعه آماری کوچک باشد، برای مطالعه آن از سرشماری استفاده می کنیم، ولی قبلاً دیدیم که سرشماری معیابی دارد و برای جامعه بزرگ، باید از طریق نمونه گیری بررسی را انجام دهیم.

الف) نمونه گیری غیر احتمالی: عضوهای جامعه، شانس مشخصی برای انتخاب شدن در نمونه ندارند.

- ۱. نمونه گیری در دسترس (راحت): عضوهای در دسترس در نمونه انتخاب می شوند.
- ۲. نمونه گیری غیر تصادفی: عامل شانس در نمونه نقشی ندارد.
- ۳. نمونه گیری تصادفی: به سراغ اعضای خاصی از جامعه می رویم.

سوال: روش نمونه‌گیری دربریک از بررسی‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) برای بررسی سلامت دهان و دندان به یک مرکز دندان پزشکی در محله خود مراجعه کردیم.

(ب) برای بررسی از یک قفس بزرگ خرگوش‌های یک آزمایشگاه، بدون برنامه‌ریزی قبلی، خرگوش‌هایی را بررسی کردیم که در دستمان به آنها می‌خورد.

(ج) در مطالعاتی که در آنها فرایند سنجش برای شخصی که سنجیده می‌شود نامحسوس است یا دردسر آفرین است، داوطلبانی که حاضر به پاسخ به سوالات ما در یک نظر سنجی می‌شوند، انتخاب می‌گردند.

(د) نمونه‌گیری احتمالی: نمونه‌گیری است که همه واحدهای آماری، احتمالی معلوم برای انتخاب در نمونه داشته باشد و از روش تصادفی برای انتخاب واحدهای نمونه استفا (نمونه).

روش‌ها: ۱. تصادفی ساده ۲. خوشه‌ای ۳. طبقه‌ای ۴. سامانمند (سیستماتیک)

### ۱. نمونه‌گیری تصادفی ساده

روش از نمونه‌گیری است که در آن همه واحدهای آماری برای انتخاب شدن در نمونه، احتمال یکسان دارند.

سوال: می‌خواهیم متوسط درآمدها کارکنان یک مجتمع تجاری را محاسبه کنیم. فرض کنید در این مجتمع ۲۰ نفر کار می‌کنند. اگر اسامی این افراد را بر روی برتهای کوچک بنویسیم و ۷ اسم را به تصادف از بین آنها انتخاب کنیم، "نمونه‌گیری تصادفی ساده" انجام داده ایم. زیرا تمام افراد (همه واحدهای جامعه) احتمال برابر برای انتخاب شدن دارند.

• اشکال این روش: اگر اندازه جامعه بزرگ باشد، یعنی تعداد واحدهای آماری زیاد باشند، دسترسی به فهرستی از اعضای جامعه و دسترسی به اعضای انتخابی دشوار و پرهزینه است.



**نکته ۱:** در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده، انتخاب یک نمونه با حجم  $n$  از یک جامعه با اندازه  $N$ ، احتمال انتخاب هر کدام از نمونه‌های با اندازه  $n$  (که همگی شانس برابر برای انتخاب شدن دارند) برابر است با  $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ .

**مثال:** می‌خواهیم از جامعه‌ای با اندازه ۴، یک نمونه ۲ عضوی انتخاب کنیم. احتمال انتخاب نمونه چهارم چیست؟

نمونه ۲ عضوی	{a,b}	{a,c}	{a,d}	{b,c}	{b,d}	{c,d}	جواب $\frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$
احتمال	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

**نکته ۲:** "نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جای‌گذاری" سه هر واحد آماری فقط یک بار می‌تواند در نمونه بیاید.

\* در این روش احتمال انتخاب برای اولین عضو برابر با  $\frac{1}{N}$   
 برای دومین عضو برابر با  $\frac{1}{N-1}$   
 برای  $n$  امین عضو برابر با  $\frac{1}{N-n+1}$  است.

**نکته ۳:** "نمونه‌گیری تصادفی ساده با جای‌گذاری" سه هر واحد آماری می‌تواند بیش از یک بار در نمونه بیاید.

یعنی نمونه اول، پس از انتخاب شدن، به جامعه برگردانده می‌شود و شانس مجدد برای انتخاب در نمونه را دارد و این موضوع تا انتخاب  $n$  امین عضو ادامه دارد.

\* در این روش احتمال انتخاب برای هر یک از اعضای جامعه  $\frac{1}{N}$  برابر است.

**توجه ۱:** در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جای‌گذاری، احتمال انتخاب نمونه‌ای به اندازه  $n$  برابر است با

$$\frac{1}{N} \times \frac{1}{N-1} \times \dots \times \frac{1}{N-n+1} = \frac{(N-n)!}{N!}$$

**توجه ۲:** در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده با جای‌گذاری، احتمال انتخاب نمونه‌ای به اندازه  $n$  برابر است با

$$\frac{1}{N} \times \frac{1}{N} \times \dots \times \frac{1}{N} = \frac{1}{N^n}$$

**نتیجه ۱:** اگر اندازه جامعه بزرگ باشد ( $N \rightarrow \infty$ )، نمونه‌گیری تصادفی ساده در هر دو حالت بدون جای‌گذاری و با جای‌گذاری، مشابه یکدیگر فرض می‌شوند و احتمال انتخاب نمونه‌ای با اندازه  $n$  از جامعه‌ای با حجم  $N$  برابر با  $\frac{1}{N^n}$  فرض می‌شود.

تتت باروش نمونه‌گیری تصادفی ساده از یک کلاس ۲۵ نفری، افرادی را به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم

الف) اگر از نمونه اول الحلاع نداشته باشیم، احتمال این که هر عضو، دومین عضو نمونه باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{25} \quad (1)$$

$$\frac{1}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{625} \quad (3)$$

$$\frac{1}{25} \quad (4)$$

تتت

ب) اگر نمونه‌گیری بدون جای‌گذاری باشد و از نمونه اول خبر نداشته باشیم، هر عضو با کدام احتمال دومین عضو نمونه است؟

$$\frac{1}{60} \quad (1)$$

$$\frac{1}{24} \quad (2)$$

$$\frac{1}{625} \quad (3)$$

$$\frac{1}{552} \quad (4)$$

تتت

ب) اگر نمونه‌گیری بدون جای‌گذاری باشد و از نمونه اول خبر نداشته باشیم، با کدام احتمال هر عضو سومین عضو نمونه است؟

$$\frac{1}{25} \quad (1)$$

$$\frac{1}{24} \quad (2)$$

تتت جامعه  $\{a, b, c, d, e, f\}$  را در نظر می‌گیریم. اگر باروش نمونه‌گیری تصادفی ساده و با جای‌گذاری، عمل کنیم، با کدام احتمال  $a$  نمونه اول و دوم سیت و در نمونه سوم ظاهر می‌شود؟

$$\frac{1}{216} \quad (1)$$

$$\frac{1}{125} \quad (2)$$

$$\frac{1}{216} \quad (3)$$

$$\frac{1}{552} \quad (4)$$

تتت از جامعه  $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ، نمونه‌ای ۴ عضوی به روش تصادفی ساده انتخاب می‌کنیم. نمونه‌های  $\{a, b, e, f\}$  یا  $\{b, d, f, g\}$  با چه احتمالی انتخاب می‌شوند؟ (کلیتاً)

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\frac{1}{35} \quad (2)$$

$$\frac{1}{35} \quad (3)$$

$$\frac{1}{35} \quad (4)$$

چیزی که بهت آید زنده رو فراموش کن

آمار در سهایی که بهت دادند رو از یاد ببر

## ۲. نمونه‌گیری خوشه‌ای

جامعه به خوشه (گروه) مای تقسیم می‌شود. یعنی واحدهای نمونه‌گیری اولیه در جامعه گروه‌های یا خوشه‌های می‌باشند، که از آنها به تصادف چند خوشه انتخاب می‌گردد. سپس بمبنی واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب شده را به عنوان نمونه در نظر می‌گیرند. (به عبارت دیگر در هر خوشه انتخابی، سرشماری انجام می‌گیرد.)

**مسئله:** در شهر کاشان قرار است از ۱۲۰ محله موجود، که هر کدام متشکل از ۵۰ خانوار می‌باشند، به سرانغ ۱۵۰۰ خانوار برویم و از آنها در مورد نوع تغذیه فرزندان تحقیق کنیم. در این صورت، اگر هر محله را به عنوان یک خوشه در نظر بگیریم، باید از ۱۲۰ محله موجود تعداد ۳۰ محله را به تصادف انتخاب نماییم (روش نمونه‌گیری تصادفی ساده) و سپس از ۳۰ محله انتخابی هر ۵۰ خانوار آن را به عنوان نمونه در نظر بگیریم. در این صورت  $(30 \times 50 = 1500)$  خانوار را برای آمارگیری در اختیار داریم.

**نکته ۱:** هر چه پراکندگی در خوشه‌ها بیشتر باشد، یعنی ناهمگن تر باشند، نمونه‌گیری خوشه‌ای نتیجه بهتری دارد. ولی در حالت کلی، خوشه‌های باید شبیه هم باشند. یعنی تفاوت بین خوشه‌ها کم و تفاوت درون خوشه‌ها باید زیاد باشد.

**نکته ۲:** در روش نمونه‌گیری خوشه‌ای، احتمال انتخاب خوشه‌ها به عنوان واحدهای آماری، گویا از آن جایی که پس از انتخاب هر خوشه، تمام اعضای آن سرشماری می‌شوند (انتخاب می‌گردند) در نمونه وجود دارند، پس احتمال انتخاب واحدهای آماری برابر با احتمال انتخاب خوشه مربوط به آن واحد است. پس احتمال انتخاب عضو نیز کمین می‌باشد. توجه کنید که احتمال انتخاب هر عضو، به تعداد اعضای خوشه مربوط به آن عضو ربطی ندارد و به تعداد کل خوشه‌ها بستگی دارد.

در مثال بالا احتمال انتخاب هر محله (خوشه) برابر با  $\frac{1}{120} = \frac{30}{3600}$  و در نتیجه احتمال انتخاب هر خانوار از هر محله انتخاب شده نیز برابر با  $\frac{1}{3600}$  است.

\* اشکال روش نمونه‌گیری خوشه‌ای: برآورد (مابسی) با خطاهای زیاد را شامل می‌شود زیرا اعضای هر خوشه انتخابی همواره شبیه هم هستند.



۳. نمونه‌گیری طبقه‌ای

جامعه به زیرجامعه‌های مجزا (که عضو مشترکی ندارند) طبقه‌بندی می‌شود و یک نمونه تصادفی ساده از هر طبقه انتخاب می‌شود. به عبارت دیگر

"جامعه از چند قسمت جداگانه (که باهم اشتراکی ندارند) تشکیل می‌شود و افراد یا اشیای هر قسمت دارای ویژگی یکسانی می‌باشند و در هر قسمت به طور جداگانه نمونه‌گیری تصادفی ساده انجام می‌شود."

سوال: کارشناسان حوزه سلامت، قصد دارند در مورد وضعیت قد افراد جامعه بررسی آماری انجام دهند. برای این منظور افراد جامعه را به دو طبقه مرد و زن تقسیم می‌کنند و از هر طبقه تعدادی را به عنوان نمونه (متناسب با حجم هر طبقه) به طور تصادفی (یعنی با روش نمونه‌گیری تصادفی ساده در هر طبقه) انتخاب می‌کنند.

نکته ۱: هر چه پراکندگی درون هر طبقه کمتر باشد، یعنی اعضا در ویژگی مورد نظر به هم نزدیک‌تر و همگن‌تر باشند، نمونه‌گیری طبقه‌ای نتیجه بهتری دارد. (برعکس خوشه‌ای)

بنابراین در نمونه‌گیری طبقه‌ای تا آنجا که ممکن است تفاوت در دو طبقه کم و تفاوت بین طبقه‌ها باید زیاده باشد.

نکته ۲: در روش نمونه‌گیری طبقه‌ای، احتمال انتخاب شدن عضوهای هر طبقه، در بین خودشان، یکسان است (یعنی داده‌های هر طبقه هم‌شان‌اند)، اما از آن جایی که تعداد عضوهای انتخابی از هر طبقه، متناسب با حجم آن طبقه است، پس در حالت کلی شان‌انتخاب عضوها یکسان نیست، مگر آن که تعداد عضوهای تمام طبقات یکسان باشند.

نکته ۳: اگر جامعه‌ای با اندازه  $N$  را به  $m$  طبقه با تعداد عضوهای  $N_1, N_2, \dots, N_m$  تقسیم بندی نماییم، تعداد عضوهای انتخابی از طبقه  $i$ ام ( $1 \leq i \leq m$ ) در یک نمونه  $n$  عضوی برابر است با:

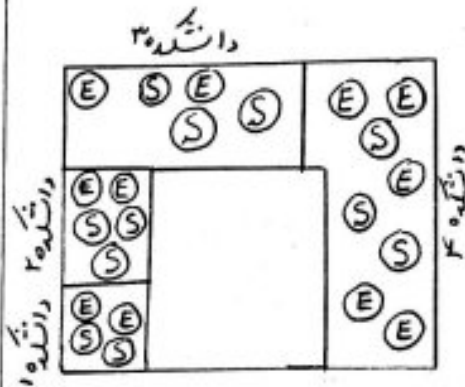
$$\frac{N_i}{N} \times n$$

\* اشکال روش نمونه‌گیری طبقه‌ای: پرتوزمین و زمان بر است، اما دقت نمونه‌گیری افزایش می‌یابد.

مثال: محله‌ای دارای ۲۵۰ خانوار است، که ۲۵، ۱۷۵ و ۵۰ خانوار به ترتیب درآمد کم، متوسط و زیاد دارند. با استفاده از روش نمونه‌گیری طبقه‌ای، نمونه‌ای با اندازه ۲۰ خانوار متناسب با درآمدهای مذکور مشخص کنید.

$$\begin{aligned} ۲ &= \frac{۲۵}{۲۵۰} \times ۲۰ = \text{اندازه نمونه} \times \frac{\text{تعداد خانوارهای طبقه کم درآمد}}{\text{تعداد کل خانوارها}} = \text{تعداد خانوارهای انتخابی از طبقه کم درآمدها} \\ ۱۴ &= \frac{۱۷۵}{۲۵۰} \times ۲۰ = \text{اندازه نمونه} \times \frac{\text{تعداد خانوارهای طبقه متوسط}}{\text{تعداد کل خانوارها}} = \text{تعداد خانوارهای انتخابی از طبقه متوسط} \\ ۴ &= \frac{۵۰}{۲۵۰} \times ۲۰ = \text{اندازه نمونه} \times \frac{\text{تعداد خانوارهای طبقه با درآمد زیاد}}{\text{تعداد کل خانوارها}} = \text{تعداد خانوارهای انتخابی از طبقه با درآمد زیاد} \end{aligned}$$

تت: در یک دانشگاه، ۴ دانشکده مختلف مطابق شکل وجود دارد. دانش جویان رشته‌های مهندسی را با حرف E و سایر دانش جویان را با حرف S نشان داده‌ایم.



آر با روش نمونه‌گیری طبقه‌ای یک نمونه ۴ عضوی انتخاب کنیم، چند احتمال دارد همه عضوه‌های نمونه از دانش جویان رشته‌های مهندسی باشند؟

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \quad (۱) \quad \frac{1}{3} \quad (۲) \\ \frac{1}{8} \quad (۳) \quad \frac{1}{12} \quad (۴) \end{aligned}$$

تت: از یک جامعه ۱۰۰ عضوی، نمونه‌ای با اندازه ۱۲ مورد نظر است. اگر جامعه را به ۴ بخش ۲۵ عضوی تقسیم کنیم و از هر کدام ۳ عضو انتخاب نماییم، روش نمونه‌گیری و احتمال انتخاب هر عضو جامعه کدام است؟

$$\begin{aligned} (۱) \text{ خوشه‌ای، } \frac{1}{12} \quad (۲) \text{ خوشه‌ای، } \frac{1}{3} \\ (۳) \text{ طبقه‌ای، } \frac{1}{12} \quad (۴) \text{ طبقه‌ای، } \frac{1}{3} \end{aligned}$$

تمام اعضای

تت: جامعه‌ای ۱۵۰ عضوی دارد. اگر این جامعه را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم نماییم و دو قسمت را به عنوان نمونه انتخاب کنیم، روش نمونه‌گیری و احتمال انتخاب هر عضو جامعه کدام است؟

$$\begin{aligned} (۱) \text{ خوشه‌ای، } \frac{2}{15} \quad (۲) \text{ خوشه‌ای، } \frac{1}{5} \\ (۳) \text{ طبقه‌ای، } \frac{2}{15} \quad (۴) \text{ طبقه‌ای، } \frac{1}{5} \end{aligned}$$



## ۴. نمونه‌گیری سامان‌مند (سیستماتیک)

نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای است که در آن اندازه طبقات با هم برابر است. فقط از طبقه اول واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود و با همان روش از طبقات دیگر، این کار انجام می‌گیرد.

◀ برای انجام نمونه‌گیری سیستماتیک به روش زیر عمل می‌کنیم:

- ابتدا حجم جامعه را بر حجم نمونه تقسیم می‌کنیم و جزء صحیح این مقدار را  $k$  فرض می‌کنیم.  $k = \left[ \frac{N}{n} \right]$
- سپس یک عدد تصادفی بین  $1$  تا  $k$  در نظر می‌گیریم. آن عدد تصادفی، شماره اولین عضو از طبقه اول می‌باشد، که در نمونه انتخابی قرار می‌گیرد.
- از شماره اولین عضو انتخابی،  $k$  تا  $k$  تا جلوی بوم و سایر عضوهای نمونه را مشخص می‌کنیم.

مثال: در یک دبیرستان با ۲۰۰ دانش‌آموز، نمونه‌ای با اندازه ۲۰ مورد نظر است. در این صورت

$$k = \left[ \frac{200}{20} \right] = 10$$

پس از طبقه اول عضو شماره ۷ انتخاب می‌شود. با افزودن عدد ۱۰ به ۷، عضو بعدی شماره ۱۷ از طبقه دوم و ... است. بنابراین عضوهای نمونه مورد نظر عبارتند از:

$$7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97, 107, 117, 127, 137, 147, 157, 167, 177, 187, 197$$

نکته ۱: در روش نمونه‌گیری سامان‌مند، برای انتخاب نمونه‌ای با  $n$  عضو (نمونه‌ای با اندازه یا حجم  $n$ )، ابتدا جامعه را به  $n$  طبقه  $k$  عضوی تقسیم می‌کنیم. اگر شماره عضو انتخابی از گروه اول،  $a_1$  باشد (که به صورت تصادفی انتخاب شده است)، آن‌گاه بقیه عضوهای نمونه، به کمک فرمول تعادل حسابی  $a_n = a_1 + (n-1)k$  به دست می‌آیند.

نکته ۲: در روش نمونه‌گیری سامان‌مند، اگر جامعه به  $n$  گروه  $k$  عضوی طبقه‌بندی شده باشد، هر عضو جامعه، با احتمال  $\frac{1}{k}$ ، در نمونه ظاهر می‌شود. پس تمام عضوهای شانس برابر دارند.

\* در واقع روش نمونه‌گیری سیستماتیک، تغییر شکل یافته روش نمونه‌گیری تصادفی ساده است. در صورتی که

فهرستی از عضوهای جامعه در دسترس باشد، این روش بسیار سریع و مقرون به صرفه است.



**تت** از بین ۷۵ دانش آموز یک کلاس، که از شماره ۱ تا شماره ۷۵ فهرست شده اند، به روش سیستماتیک یک نمونه ۵ نفری انتخاب می کنیم. اگر دانش آموز شماره ۶۲ عضو نمونه باشد، دومین عدد انتخابی در این نمونه ۵ نفری کدام است؟

۱) ۱۶      ۲) ۱۷  
۳) ۳۲      ۴) ۳۳

**تت** در یک سالن امتحانات، از بین افرادی که روی صندلی های شماره ۳ تا ۷۷ نشسته اند، قرار است به روش سامان مند، نمونه ای با احتمال  $\frac{1}{6}$  انتخاب گردد. اگر صندلی شماره ۱۶ سومین عدد انتخاب شده در نمونه مذکور باشد، آخرین عدد انتخابی در این نمونه کدام است؟

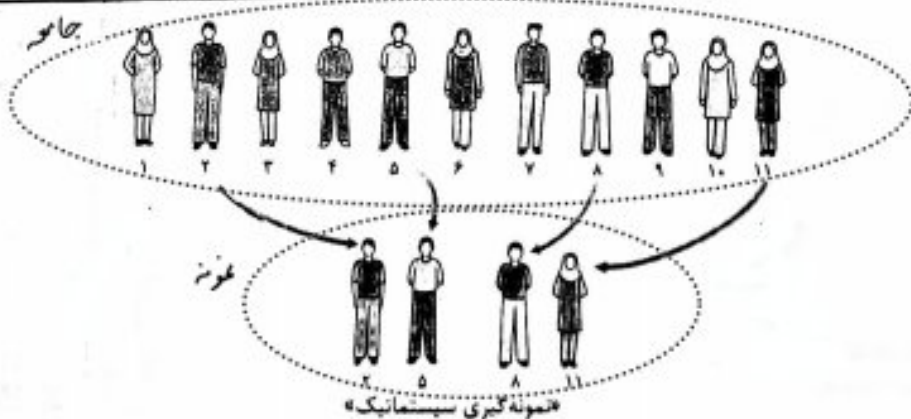
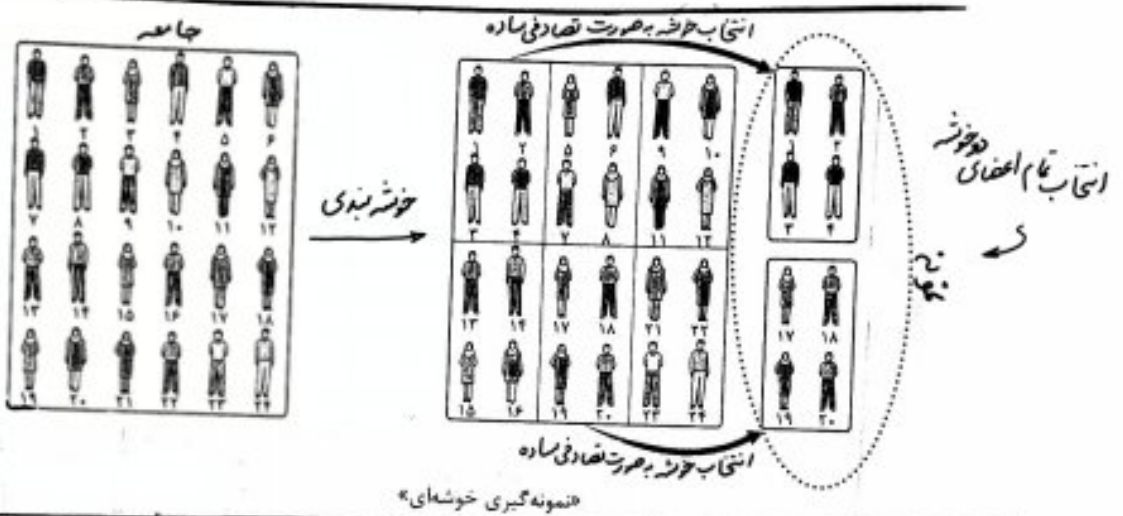
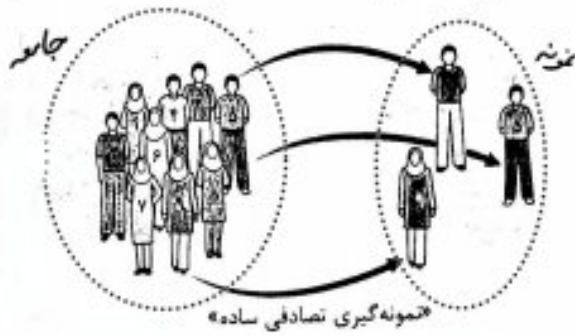
۱) ۲۶      ۲) ۳۲  
۳) ۶۶      ۴) ۷۶

**تت** در یک بانک، جهت ارتقای خدمات رسانی به مشتریان، در یک روز از بین شماره های ۷ تا ۷۱، به روش سیستماتیک یک نمونه ۵ نفری انتخاب می شود و از آن ها درخواست می نمایند با پر کردن پرسشنامه، بانک را در رسیدن به این هدف یاری کنند. اگر شماره ۱۷ اولین فرد انتخابی باشد، کدام شماره در بین افرادی که پرسش نامه را پر می کنند، وجود دارد؟

۱) ۵۶      ۲) ۴۲  
۳) ۴۵      ۴) ۶۸

روش نمونه گیری	مزایا	معایب
تصدیق ساده	شانس انتخاب شدن برای همه اعضا مساوی است	عدم دسترسی مناسب به همه واحدهای آماری در جامعه بزرگ (این روش نمونه گیری زیاد دارد)
خوشه ای	کم هزینه و سریع	امکان ایجاد خطا به دلیل تنوع ویژگی در خوشه ها
طبقه ای	اطمینان از انتخاب عضو از همه طبقات در نمونه	زمان برد و پرهزینه، واحدهای آماری لزوماً شانس برابر برای انتخاب ندارند
سیستماتیک	شانس انتخاب اعضا یکسان، سریع و کم هزینه	پدیده وجود یک فهرست از واحدهای آماری قابل انجام نیست

# جمع بندی در شکل های زیر، هر روش نمونه گیری احتمالی، به صورت یکجا نمایش داده شده



برای دانش آموزان یک شهر از مقطع ابتدایی تا کلاس دوازدهم، یک عدد پنج رقمی به صورت زیر اختصاص می یابد: دو رقم اول سمت راست نمایش پایه تحصیلی (از ۱ تا ۱۲)، دو رقم دوم نمایش سن (از ۵ تا ۱۸) و رقم پنجم جنسیت (پسر ۱ و دختر ۲). سپس اعداد را به ترتیب صعودی در یک مجموعه قرار می دهیم. سن صدمین عضو مجموعه کدام است؟ (ممکن است عدد پنج رقمی مورد نظر به هیچ فردی اختصاص نیابد، ولی در محاسبه شمرده شود)

۱۳ (۱) ۱۴ (۲)

۱۵ (۳) ۱۶ (۴)

برای یک مجموعه ۱۰۰ نفری از شهروندان یک شهر یک کد شش رقمی به صورت زیر ساخته می شود: دو رقم سمت راست، سن شهروند (از ۱۵ تا ۸۵)، سه رقم بعدی تعداد افراد هم سن (۱۰۰ - ۰۰۰) و رقم ششم جنسیت (مرد ۱ و زن ۲) اختصاص می یابد. سپس کدهای به دست آمده را به ترتیب صعودی در یک مجموعه قرار می دهیم. سن مورد انتظار برای ده پنجاهمین عضو مجموعه کدام است؟ (اگر چه ممکن است شهروندی به آن اختصاص نیابد)

(۴ گزینه)

۱۵ (۱) ۱۴ (۲)

۵۴ (۳) ۵۵ (۴)



**نکته:** در جامعه‌ای به اندازه  $N$ ، احتمال انتخاب هر عضو جامعه در نمونه‌ای به اندازه  $n$  برابر است با  $\frac{n}{N}$ .

توجه: این احتمال به روش نمونه‌گیری ربطی ندارد. به عبارت دیگر با هر یک از چهار روش نمونه‌گیری تصادفی ساده، خوشه‌ای، طبقه‌ای (به شرط آن که تعداد اعضای طبقات برابر باشد) و سیستماتیک، این احتمال همواره  $\frac{n}{N}$  می‌باشد.

**سوال:** فرض کنید جامعه‌ای از  $N=100$  عضو تشکیل شده و نمونه‌ای به اندازه  $n=20$  از آن مورد نظر است.

(مطابق نکته بالا احتمال انتخاب هر عضو جامعه در نمونه، برابر با  $\frac{20}{100} = 2\%$  می‌باشد)

حال بررسی می‌کنیم در هر یک حالت‌های زیر، احتمال انتخاب هر عضو جامعه در نمونه چقدر است؟

**الف) از بین ۱۰۰ عضو جامعه، یک نمونه ۲۰ تایی به تصادف انتخاب شود.**

روش نمونه‌گیری در این حالت، تصادفی ساده است. از آن جایی که یک عضو خاص از جامعه، در نمونه

باید ۱۹ عضو دیگر، از ۹۹ عضو باقی مانده انتخاب شود (توجه کنید که فضای نمونه،  $(100)$

عضو دارد)، پس احتمال انتخاب هر عضو جامعه، به عنوان نمونه در این حالت برابر است با:

$$P = \frac{\binom{99}{19}}{\binom{100}{20}} = \frac{\frac{99!}{19! \times 80!}}{\frac{100!}{20! \times 80!}} = \frac{99! \times 20!}{19! \times 100!} = \frac{20}{100} = 2\%$$

**ب) جامعه به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شود و دو قسمت به عنوان نمونه انتخاب گردد.**

روش نمونه‌گیری در این حالت، خوشه‌ای است. ابتدا ۲ قسمت از ۱۰ قسمت انتخاب

می‌شود که از هر قسمت، هر ۱۰ عضو آن انتخاب می‌گردد. پس فضای نمونه،  $\binom{10}{2} = 45$

عضو دارد. از آن جایی که یک عضو خاص از جامعه، در نمونه است، پس خوشه مربوط به این عضو

انتخاب شده است (ثابت) و باید یک خوشه دیگر از ۹ خوشه باقی مانده انتخاب گردد.

پس احتمال انتخاب هر عضو جامعه، به عنوان نمونه، در این حالت برابر است با:

$$P = \frac{\binom{9}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5} = 20\%$$

(ب) جامعه به دو قسمت ۵۰ تایی تقسیم شود و از هر قسمت نمونه تصادفی ۱۰ تایی انتخاب گردد.

◀ روش نمونه‌گیری در این حالت، طبقه‌ای است. واضح است که فضای نمونه دارای  $(10)(50)$  عضو است. از آن جایی که یک عضو خاص از جامعه، در نمونه است، پس از قسمت مربوط به آن عضو، باید ۹ عضو دیگر از ۴۹ عضو باقی‌مانده انتخاب گردد (توجه کنید که از قسمت دیگر هم ۱۰ عضو از ۵۰ عضو انتخاب می‌شود). پس احتمال انتخاب هر عضو جامعه، به عنوان نمونه در این حالت برابر است با:

$$P = \frac{\binom{49}{9} \binom{50}{10}}{\binom{50}{10} \binom{50}{10}} = \frac{\frac{49!}{9! \times 40!}}{\frac{50!}{10! \times 40!}} = \frac{10! \times 40!}{9! \times 50!} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

(ت) جامعه به تصادف به ۲۰ قسمت مساوی تقسیم شود و از قسمت اول دومین عضو به تصادف انتخاب گردد و از قسمت‌های بعدی نیز، دومین عضو انتخاب شود.

◀ روش نمونه‌گیری در این حالت، یتما تک است. چون هر یک از قسمت‌ها، دارای ۵ عضو می‌باشد، پس احتمال انتخاب هر عضو در هر قسمت (مثلاً احتمال انتخاب دومین عضو) برابر با  $\frac{1}{5}$  است و احتمال انتخاب هر عضو به شماره با عضو انتخابی در قسمت اول، برابر  $\frac{1}{5}$  می‌باشد. پس احتمال انتخاب هر عضو جامعه، به عنوان نمونه، در این حالت برابر است با:

$$P = \frac{1}{5} \times 1 \times 1 \times \dots \times 1 = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

از نظر غور کنیز نه  
کنش خطی شمره و بلانش

مثال: در هر یک از موارد زیر، روش نمونه‌گیری را مشخص کنید:

(الف) در کلاس با ۶۰ دانش‌آموز، که در شش ردیف ۱۰ نفری نشسته‌اند، می‌خواهیم نمونه‌ای ۱۰ نفری از دانش‌آموزان انتخاب کنیم. برای این منظور یک تاس سالم را پرتاب می‌کنیم و با توجه به عدد ظاهر شده از تاس، تمام دانش‌آموزان در ردیف هم‌شماره با عدد تاس را انتخاب می‌کنیم.

(ب) یک کارخانه تولید آبیرو، ۳ خط تولید برای سه نوع آبیرو دارد. بازرسی اداره بهداشت، برای تحقیق در مورد کیفیت آبیرو، از هر خط تولید تعدادی آبیرو به تصادف انتخاب می‌کند.

(ج) برای نظرسنجی درباره یک فیلم، در انتهای بکران، گفت‌وگوهای خروجی از سالن سینما پرسش به عمل می‌آید. پرسش‌ها از گفت‌وگو اول، چهارم، پنجم، نهم، دوازدهم، ... صورت پذیرفته است.

(د) یک شرکت کنترل کیفی، برای بررسی قطعات تولید شده در یک کارخانه، هر ۱۰۰۰ امین قطعه تولیدی را بررسی می‌کند.

(ه) در یک کلاس با ۶۰ دانش‌آموز، که در شش ردیف ۱۰ نفری نشسته‌اند، می‌خواهیم نمونه‌ای ۱۰ نفری از دانش‌آموزان انتخاب کنیم. برای این منظور از هر ردیف، یک نفر را به تصادف انتخاب می‌نماییم.

(و) یک شرکت هواپیمایی به طور تصادفی یکی از پروازهای روزانه خود را انتخاب می‌کند و از تمام مسافران این پرواز در مورد رضایت‌مندی آنها از غذای داخل هواپیمای سؤال می‌پرسد.

(ز) برای بررسی نظر مردم در مورد افزایش قیمت بنزین، یک نمونه تصادفی از هر گروه سنی ۴۰-۵۰، ۲۵-۳۰، ۵۰-۶۰ و ۶۵-۷۵ به نسبت جمعیت هر گروه به کل جمعیت جامعه، انتخاب می‌نماییم.

(ح) در یک تحقیق علمی در مورد وزن افراد جامعه، تعدادی زن و تعدادی مرد، به نسبت جمعیت، انتخاب می‌گردد.

(ط) برای بررسی میزان درآمد افراد جامعه، دولت تصمیم می‌گیرد به طور تصادفی، چند استان از کشور را انتخاب کند و از تمام ساکنین آن استان‌ها میزان درآمد آنها سؤال می‌شود.

(ث) در یک اداره، از بین ۴۵ کارمند، قرار است یک هیئت بازرسی ۷ نفره انتخاب گردد. برای این منظور اسامی کارمندان را روی برگه‌های مختلف می‌نویسند و برگه‌ها را داخل یک کیسه قرار می‌دهند و از ۷ نفر از مراجعین درخواست می‌کنند هر کدام یک برگه به تصادف از کیسه خارج کنند.



نمونه گیری آریب

در روش های نمونه گیری، باید نمونه انتخابی برای نتیجه گیری در مورد کل جامعه قابل استفاده باشد. اگر نمونه گیری به گونه ای باشد که نمونه انتخابی در برگیرنده همه ویژگی های جامعه باشد، یک نمونه گیری ایده آل است.

اگر یک روش نمونه گیری از نمونه گیری ایده آل فاصله بگیرد و به سمتی خاص انحراف پیدا کند می گوئیم آن روش نمونه گیری آریب است. آمارشناسان تلاش می کنند تا با شناسایی منابع تولید آریبی، نمونه گیری را تا جایی که می توانند تا آریب نکنند.

سوال: دلیل آریب بودن برخی از نمونه گیری های زیر را توضیح دهید.

الف) یک سازمان نظرسنجی، درباره نتایج انتخابات ریاست جمهوری یک کشور، که دو کاندیدای A و B دارد، از افراد یک استان پرسش به عمل می آورد. کاندیدای A را پسران این رقابت معرفی می کنند.

ب) سازمان سلامت اعلام کرده است ۴۲ درصد از زنان جامعه اضافه وزن دارند. این سازمان نمونه گیری را از بین زنان ۲۵-۴۰ سال انجام داده است.

ج) مدیر یک رستوران قصد دارد پنج نوع غذای جدید به منوی رستوران اضافه کند. برای این که نظر مشتریان خود را در مورد این کار بداند، از کارکنان می خواهد در ۷ روز متوالی، از ۱۰ نفر اولی که برای ناهار به این رستوران می آیند، نظر سنجی نمایند.

د) برای بررسی متوسط ساعت مطالعه افراد در شهر تهران، از اعضای چند کتابخانه معروف شهر، نمونه گیری می شود.

ه) برای یافتن میانگین تعداد افراد خانوارها، به طور تصادفی از اشخاص سطح جامعه در مورد تعداد اعضای خانوارها آماره ال می شود.

برآورد (تخمین)

● برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه

مقدار عددی حاصل از جای‌گذاری اعداد نمونه تصادفی در آماره نظیر آن پارامترهای گزیننده به بیان دیگر مقدار عددی آماره را برآورد یا برآورد نقطه‌ای می‌نامند.

مثال فرض کنید یک شرکت تولید لیوان شیشه‌ای می‌خواهد تعداد لیوان‌هایی که در یک بسته فرای

متناسب با بُعد خانوارهای کشور (میانگین تعداد اعضای خانوارها) مشخص کند. پس

در این مثال بُعد خانوارهای کشور (میانگین تعداد اعضای خانوارها) پارامتر جامعه است.

از آن جایی که امکان سرشماری کل خانوارهای کشور برابر این شرکت غیرممکن است، لذا تصمیم می‌گیرد

بُعد خانوارهای خریدارهای محصول خود را به وسیله نمونه‌گیری انجام دهد. مثلاً بُعد خانوار

را به صورت زیر مشخص کرده است.

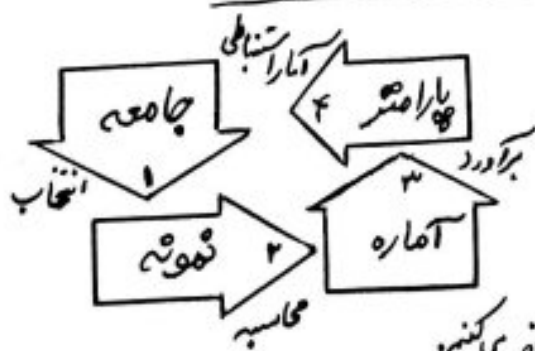
۴, ۱, ۳, ۳, ۵, ۲, ۵, ۲, ۲

واضح است که میانگین بُعد این ۹ خانوار  $\frac{4+1+3+3+5+2+5+2+2}{9} = 3$  است.

در این صورت عدد ۳ برابر بُعد خانوارهای یک آماره (آماره نمونه) است.

حال اگر کارشناس این شرکت، از روی همین عدد، اعلام نماید که بُعد خانوارهای

کشور، عدد ۳ می‌باشد، برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه را با عدد ۳ مشخص کرده است.



نتیجه: روند کلی برآورد نقطه‌ای

به صورت متقابل است:

- ① پارامتر جامعه را، که می‌خواهیم برآورد کنیم، در نظر می‌گیریم.
- ② با انتخاب از جامعه (به کمک روش‌های نمونه‌گیری)، نمونه را مشخص می‌کنیم.
- ③ آماره‌ها متناسباً پارامتر جامعه را در نمونه می‌یابیم.
- ④ مقدار آماره نمونه را به عنوان برآورد پارامتر جامعه (برآورد نقطه‌ای) اعلام می‌کنیم.

نکته - ۳

اگر پارامتر جامعه را میانگین جامعه در نظر بگیریم، آن گاه هر چند اندازه (جم) نمونه را زیاد کنیم، برآورد میانگین نمونه (آماره) به میانگین جامعه (پارامتر) نزدیک می شود.  
(در واقع با افزایش تعداد اعضای نمونه، خطای برآورد نقطه ای کاهش می یابد.)

مثال: می خواهیم میانگین درآمد خانوارهای یک کوه را بیابیم. فرض کنید این کوه از ۶ خانواره (پارامتر جامعه)

با درآمدهای ماهیانه به ترتیب ۹، ۲، ۵، ۳، ۱، ۴ میلیون تشکیل شده باشد. واضح است که میانگین درآمد ماهیانه خانوارهای این کوه (میانگین جامعه) برابر است با:

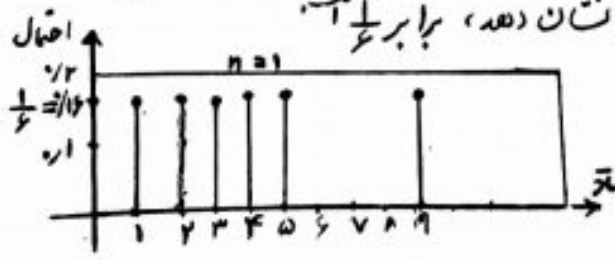
$$\mu = \frac{4+1+3+5+2+9}{6} = 4 \quad (\text{میانگین جامعه را با } \mu \text{ نشان می دهند})$$

اکنون فرض کنید میانگین جامعه را نداریم و می خواهیم با انتخاب نمونه ای به اندازه  $n$  از جامعه میانگین جامعه را برآورد کنیم. داریم:

① اندازه نمونه  $n=1$  است. تعداد نمونه ای یک عضوی برابر با  $\binom{6}{1} = 6$  است.

نمونه	{4}	{1}	{3}	{5}	{2}	{9}	واضح است که آماره مورد بررسی (میانگین درآمد ماهیانه خانوارهای کوه مورد نظر) در هر نمونه انتخابی، با عدد خود نمونه برابر
$\bar{x}$	4	1	3	5	2	9	
احتمال	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

است. یعنی با انتخاب نمونه تک عضوی (خانواره ای که درآمد ماهیانه ۴ میلیون دارد)، میانگین درآمد ماهیانه این نمونه، همان ۴ است. پس احتمال انتخاب نمونه ای تک عضوی که میانگین این نمونه، برآورد درستی از میانگین جامعه را نشان دهد، برابر  $\frac{1}{6}$  است.



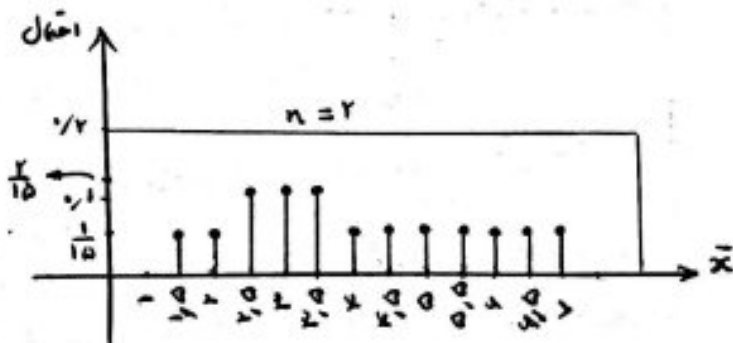
بر حسب تعداد میانگین نمونه (محور افقی) و احتمال برکدام (محور عمودی) نمودار میله ای رسم می شود.



۲) اندازه نمونه  $n = 2$  است. تعداد نمونه‌های دوتایی برابر با  $\binom{6}{2} = 15$  است.

نمونه	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,5}	{1,6}	{2,5}	{3,5}	{4,5}	{1,9}	{2,9}	{3,9}	{4,9}	{5,9}
$\bar{x}$	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	
احتمال	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

واضح است که آماره مورد بررسی (میانگین درآمدهای ماهیانه خانوارهای کوچک مورد نظر) در هر نمونه انتخابی، میانگین دو عدد همان نمونه است. به عنوان مثال با انتخاب نمونه {3,5}، میانگین نمونه  $\frac{3+5}{2} = 4$  می‌باشد. همان طور که مشاهده می‌شود با انتخاب، نمونه به اندازه  $n = 2$ ، تعداد میانگین‌های بیشتری نزدیک به میانگین جامعه (عدد 4) به دست می‌آید.

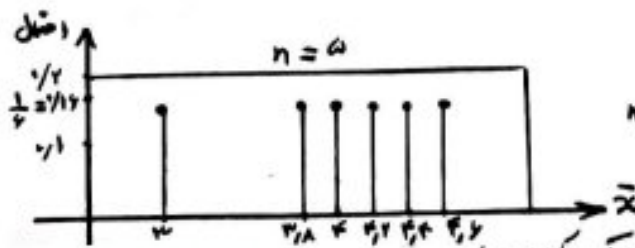


◀ خودارمیده ای :

۳) اندازه نمونه  $n = 5$  است. تعداد نمونه‌های ۵ تایی برابر با  $\binom{6}{5} = 6$  است.

نمونه	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,9}	{1,2,3,5,9}	{1,2,4,5,9}	{1,3,4,5,9}	{2,3,4,5,9}
$\bar{x}$	3	3,8	4	4,2	4,4	4,6
احتمال	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

واضح است که آماره مورد بررسی (میانگین درآمدهای ماهیانه خانوارهای کوچک مورد نظر) در هر نمونه انتخابی، میانگین ۵ عدد همان نمونه است. به عنوان مثال با انتخاب نمونه {1,2,3,5,9}، میانگین نمونه  $\frac{1+2+3+5+9}{5} = 4$  می‌باشد.

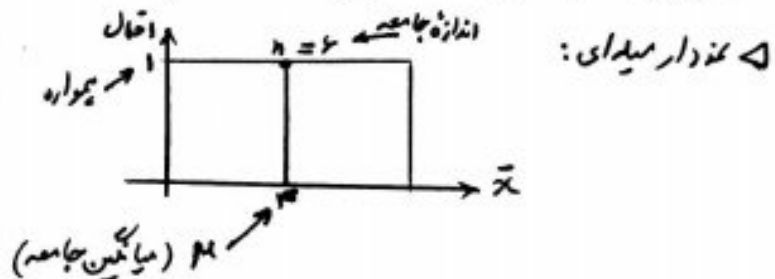


◀ خودارمیده ای :  
 از تنوع میله‌ها (احتمال هر نمونه) یکسان است و با  $n=5$  برابر است. اما میانگین نمونه (آماره) به میانگین جامعه (در اینجا ۴) نزدیک‌تر می‌باشد (خطای برآورد کمتر است).

نتیجه: در یک جامعه با اندازه  $n$ ، احتمال رخ دادن میانگین نمونه‌ای تک‌عضوی و احتمال رخ دادن میانگین نمونه‌ای  $(n-1)$  عضوی <sup>یک‌گانه</sup> برابر با  $\frac{1}{n}$  است و لذا در نمودار میله‌ای هر دو، ارتفاع میله یکسان می‌باشد. اما در درجات  $(n-1)$  عضوی، خطای برآورد میانگین به مراتب کمتر شده است.

④ اندازه نمونه  $n=6$  است. تعداد نمونه برابر با  $\binom{6}{1} = 6$  است. در واقع اندازه نمونه با اندازه جامعه برابر است. پس میانگین نمونه با میانگین جامعه برابر می‌باشد و در نمودار میله‌ای فقط یک میله وجود دارد، که احتمال رخ دادن آن برابر ۱ است.

نمونه	{1, 2, 3, 4, 5, 6}
$\bar{x}$	4
احتمال	1



تست: از جامعه‌ای ۶ عضوی با مقادیر ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷ نمونه‌ای به اندازه ۲ در قطری <sup>بکدام</sup> با کدام احتمال میانگین جامعه به درستی برآورد می‌شود؟

- $\frac{1}{5}$  (۱)
- $\frac{2}{5}$  (۲)
- $\frac{3}{5}$  (۳)
- $\frac{4}{5}$  (۴)
- $\frac{1}{15}$  (۵)

حل: ابتدا میانگین جامعه را می‌یابیم:  $\mu = \frac{12+13+14+15+16+17}{6} = 14,5$

از طرفی تعداد نمونه‌های ۲ عضوی برابر با  $\binom{6}{2} = 15$  است. اکنون نمونه‌های ۲ عضوی با میانگین ۱۴,۵ که مطلوب سوال می‌باشد (یعنی با میانگین جامعه برابر باشد و برآورد میانگین جامعه درست باشد) را می‌یابیم (توجه کنید که باید جمع دو عضو نمونه برابر با ۲۹ شود):

برابر ۲۱۴۰۱ از اعداد ۰ تا  $N$ ، پنج عدد ۰، ۲، ۵، ۸ و ۱۱ به تعداد انتخاب شده اند. برآورد نقطه‌ای  $N$  بگنجان میانگین کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۲۴
- ۱۴ (۳) ۱۶۴

تنت با انتخاب نمونه‌ای به اندازه ۳ از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، چند احتمال دارد میانگین آماره نمونه برابر ۳ شود؟ (نمونه ۳)

- ۱ (۱)  $\frac{1}{2}$
- ۳ (۳)  $\frac{1}{25}$

تنت با توجه به جدول مقابل، احتمال این که میانگین برآورد شده از جامعه، بیشتر از ۳ باشد، کدام است؟

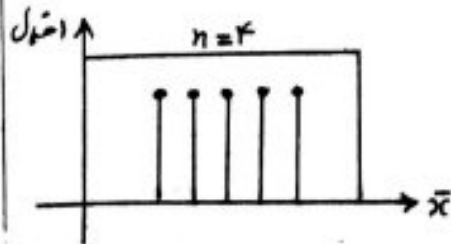
نمونه	A	B	C	D	E
$\bar{x}$	۲,۵	۳	۳,۵	۴	۴,۵
احتمال	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\alpha$

- ۱ (۱)  $\frac{1}{4}$
- ۳ (۳)  $\frac{1}{5}$

تنت در جامعه‌ای احتمال انتخاب نمونه ۳ عضوی  $\{x, y, z\}$  برابر  $\frac{1}{35}$  است. احتمال انتخاب نمونه  $\{a, b\}$  در این جامعه چقدر است؟

- ۱ (۱)  $\frac{1}{35}$
- ۳ (۳)  $\frac{1}{11}$

تنت نمودار میل‌ای یک نمونه با اندازه  $n=4$  از یک جامعه به صورت مقابل است. احتمال انتخاب یک نمونه ۳ عضوی از این جامعه کدام است؟





## انحراف معیار برآورد میانگین (انحراف معیار میانگین نمونه)

انحراف معیار اعداد حاصل از میانگین برآورد شده توسط نمونه برای کویم  $\sigma_{\bar{x}}$   $\leftarrow$   $\sigma_{\bar{x}}$

**مثال:** در مثال مربوط به برآورد میانگین درآمد ماهیانه خانوارهای کوچک مورد کشف، دیدیم که تعداد <sup>میانگین</sup> حاصل از نمونه‌های با اندازه  $n=5$  عبارت از انداز:

۳، ۳،۸، ۴، ۴،۲، ۴،۴، ۴،۶

الآن انحراف معیار این شش عدد را می‌یابیم:

- ابتدا میانگین این شش عدد را می‌سب می‌کنیم (میانگین میانگین‌های حاصل از نمونه‌ها)

$$\frac{3 + 3,8 + 4 + 4,2 + 4,4 + 4,6}{6} = 4 \quad (\text{جالبه! این میانگین جامعه است})$$

الآن به محاسبه انحراف معیار می‌پردازیم:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{(3-4)^2 + (3,8-4)^2 + (4-4)^2 + (4,2-4)^2 + (4,4-4)^2 + (4,6-4)^2}{6}} \approx 0,52$$

حال اگر همین عملیات را برای تعداد <sup>میانگین</sup> حاصل از نمونه‌های با اندازه  $n=2$  انجام دهیم، انحراف معیار میانگین <sup>نمونه</sup> برابر با ۱,۴۳ به دست می‌آید. یعنی پراکندگی میانگین نمونه‌ها در حالتی که  $n=2$  می‌باشد، نسبت به حالت  $n=5$  بیشتر است. به عبارت دیگر

هر چه در حجم (اندازه) نمونه افزایش یابد، انحراف معیار میانگین کاهش پیدا می‌کند و در نتیجه برآورد دقیق‌تری شود.

نکته مهم: "ارتباط بین انحراف معیار جامعه و انحراف معیار میانگین نمونه"

اگر  $\sigma_{\bar{x}}$  انحراف معیار برآورد میانگین (انحراف معیار میانگین نمونه) باشد،  
برای نمونه‌ای به اندازه  $n$  از جامعه‌ای با انحراف معیار  $\sigma$  باشد،

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

آن‌گاه

- \* به کمک این رابطه می‌توان از انحراف معیار میانگین نمونه، به انحراف معیار جامعه رسید.
  - \* انحراف معیار برآورد میانگین ( $\sigma_{\bar{x}}$ ) با جذر اندازه نمونه، نسبت عکس دارد.
- یعنی اگر  $n_1$  و  $n_2$  اندازه دو نمونه از یک جامعه و انحراف معیار برآورد میانگین برای هر کدام از این نمونه‌ها به ترتیب  $(\sigma_{\bar{x}})_1$  و  $(\sigma_{\bar{x}})_2$  باشد،

$$\frac{(\sigma_{\bar{x}})_2}{(\sigma_{\bar{x}})_1} = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}$$

تست: اگر در این جامعه‌ای ۹ باشد، اندازه نمونه چقدر باشد تا انحراف معیار برآورد میانگین برابر ۰/۰۶ شود؟

$$\begin{aligned} 125 & (1) \\ 250 & (2) \\ 1250 & (3) \\ 2500 & (4) \end{aligned}$$

تست: در این جامعه‌ای ۶۰۲۵ است. همه داده‌ها را ۲ برابر می‌کنیم و سپس نمونه‌ای با حجم ۱۴۴ در نظر می‌گیریم. انحراف معیار میانگین نمونه‌ها کدام است؟

$$\begin{aligned} 1/4 & (1) \\ 1/41 & (2) \\ 1/42 & (3) \\ 1/43 & (4) \end{aligned}$$

تست: برای برآورد میانگین در یک جامعه از دو نمونه تصادفی استفاده کرده‌ایم. اندازه نمونه دوم را طوری انتخاب می‌کنیم که انحراف معیار برآورد میانگین با نمونه دوم،  $\frac{1}{3}$  برابر مقدار محاسبه شده با نمونه اول باشد. اندازه نمونه دوم چقدر برابر اندازه نمونه اول است؟

$$\begin{aligned} 1,5 & (1) \\ 2,25 & (2) \\ 2,75 & (3) \\ 3,5 & (4) \end{aligned}$$

## ● برآورد بازه‌ای پارامتر جامعه

برآورد بازه‌ای پارامتر جامعه یا بازه اطمینان پارامتر جامعه عبارت است از بازه‌ای عددی برای پارامتر به همراه یک درصد اطمینان که ضریب اطمینان نامیده می‌شود.

در بحث برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه، در مورد میانگین جامعه، دریافتیم که در بسیاری از مواقع میانگین نمونه با میانگین جامعه برابر نیست و نمونه‌گیری و نتیجه برآورد میانگین با خطا همراه است. برای رفع این مشکل از برآورد بازه‌ای استفاده می‌کنیم. برآورد بازه‌ای محدوده‌ای را به ما نشان می‌دهد که پارامتر جامعه (میانگین جامعه)، با یک ضریب اطمینانی، که با درصد بیان می‌شود، در آن بازه قرار دارد.

اگر  $\bar{x}$  میانگین نمونه‌ای به اندازه  $n$  از جامعه‌ای با انحراف معیار  $\sigma$  باشد، اطمینان بیش از ۹۵ درصد، میانگین جامعه ( $\mu$ ) در بازه زیر قرار دارد:

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{یا} \quad \bar{x} - 2\sigma_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + 2\sigma_{\bar{x}}$$

به عبارت دیگر

$$\mu \in \left[ \bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad \text{یا} \quad \mu \in \left[ \bar{x} - 2\sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 2\sigma_{\bar{x}} \right]$$

نتیجه ۱: بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین جامعه را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$\xrightarrow{-(\bar{x})} -\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu - \bar{x} \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{تعریف قدر مطلق}} |\mu - \bar{x}| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

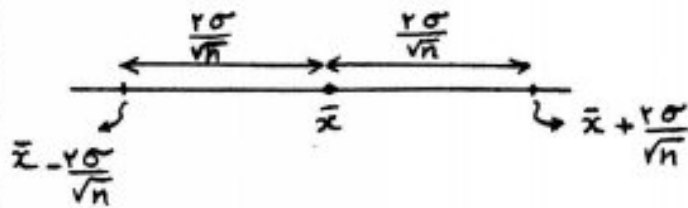
\* عبارت  $|\mu - \bar{x}|$  را میزان خطای برآورد نقطه‌ای میانگین را نشان می‌دهد.

\* حد اکثر خطای قابل قبول در محاسبه میانگین جامعه، با استفاده از میانگین نمونه، برابر با  $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$  است.

\* اگر اندازه نمونه،  $k$  برابر شود، حد اکثر خطای قابل قبول برآورد،  $\frac{1}{\sqrt{k}}$  برابر می‌شود.



نتیجه ۲: بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین، به صورت زیر روی یک محور نمایش داده می شود:



بنابراین

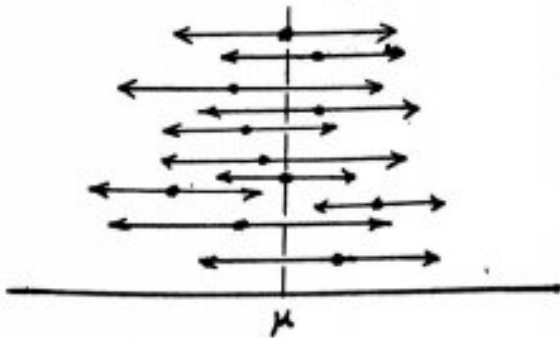
طول بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد برابر است با:  $\frac{45}{\sqrt{n}}$

و مرکز این بازه همواره  $\bar{x}$  است.

نتیجه ۳: منظور از بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد، آن است که در بیش از ۹۵ درصد موارد از نمونه گیری  $n$ ، بازه به دست آمده برای هر بار نمونه گیری، شامل میانگین جامعه است. مثلاً اگر ۴۰ بار نمونه گیری صورت پذیرفته است، بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد، به ما می گوید که اگر بازه اطمینان هر بار نمونه گیری را (مطابق با نتیجه ۲) رسم کنیم، بیش از  $40 \times 95 = 38$  مورد آنها، شامل میانگین جامعه اند. بازه هایی که شامل میانگین جامعه نمی باشند، خطای برآورد اند.

توجه: اگر در رابطه بازه اطمینان، به جای ضریب ۲، عدد بزرگ تری قرار دهیم، برآورد بازه های با اطمینان بیشتر (مثلاً بیش از ۹۶ درصد، بیش از ۹۷ درصد، ۱۰۰) به دست می آید.

« هر چه ضریب اطمینان بیشتر شود، طول بازه اطمینان افزایش می یابد. »



تت در جامعه‌ای با انحراف معیار ۱٫۵، نمونه‌ای به اندازه ۴ با مقادیر ۲، ۲٫۵، ۴٫۵، ۱۱ انتخاب کرده‌ام. بازه اطمینان ۹۵٪ برای میانگین این جامعه کدام است؟

- (۱) [۳، ۵] (۲) [۳، ۲]  
(۳) [۳، ۵، ۵، ۵] (۴) [۳، ۵، ۶، ۵]

حل: ابتدا میانگین نمونه را می‌یابیم:

$$\bar{x} = \frac{2 + 2.5 + 4.5 + 11}{4} = 5$$

پس:

تت اگر حد اکثر خطای برآورد نقطه‌ای میانگین در نمونه‌ای به حجم ۴۰۰ برابر ۲۵٪ باشد، آن گاه واریانس جامعه کدام است؟

- (۱) ۲٫۲۵ (۲) ۲٫۵  
(۳) ۶٫۲۵ (۴) ۵٫۵

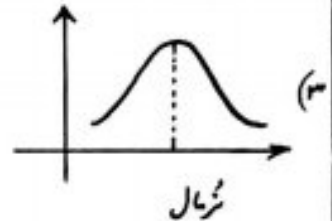
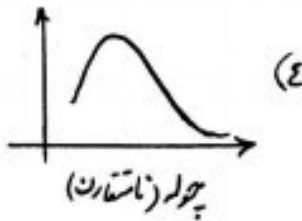
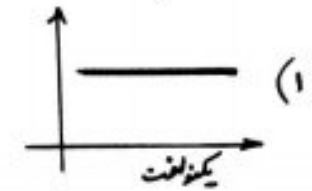
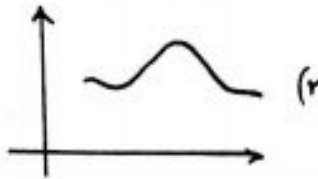
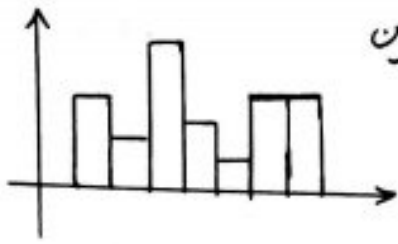
تت میانگین جامعه‌ای (با انحراف معیار ۳)، با اطمینان ۹۵٪ از ۱۵،۳۵ برآورد شده است. تعداد عضوهای نمونه کدام است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۳۲  
(۳) ۱۲۵ (۴) ۱۰۰

تت بر اساس نمونه‌ای به اندازه ۴۰۰، شاخص پوشیدگی دندان در سال ۱۳۹۶ برابر ۹ است (۳ تا دندان کشیده شده، ۳ تا پوشیده، ۳ تا پُر شده). انحراف معیار این سه مورد به ترتیب ۲٫۱، ۲٫۶ و ۱ است. کران بالای بازه اطمینان ۹۵٪ برای میانگین این سه مورد کدام است؟

- (۱) ۳٫۲، ۳٫۱، ۳٫۱۶  
(۲) ۳٫۱۶، ۳٫۱، ۳٫۲  
(۳) ۳٫۱، ۳٫۱۶، ۳٫۲  
(۴) ۳٫۱، ۳٫۲، ۳٫۱۶

تت H.W  
مؤدار بافت نگاشت یک جامعه به صورت مقابل است. اگر از این جامعه ۲۰۰ بار نمونه گیری با حجم زیاد انجام دهیم، مؤدار چند بر فراوانی برآورد می‌آیند به کدام است؟



نکته: اگر حجم نمونه زیاد باشد  $(n > 30)$ ، بدون توجه به مؤدار جامعه، مؤدار چند بر فراوانی برآورد می‌آیند، به صورت شرفال است. (۴ گزینه)

اختیاری  
تت  
انحراف معیار درآمد افراد یک جامعه ۱٫۲ است. در یک نمونه به اندازه ۴ از این جامعه، درآمد ۴ به صورت ۳٫۵، ۳، ۴ و ۱٫۵ می‌باشد. خط فقر در این جامعه، با اطمینان بیش از ۹۵ درصد، در چه بازه‌ای قرار می‌گیرد؟

(۱)  $[۲٫۳, ۲٫۷]$  (۲)  $[۱٫۴, ۴٫۶]$

(۳)  $[۲٫۸, ۹٫۲]$  (۴)  $[۲٫۲, ۳٫۸]$

بیاد سالما از راه دل سخن  
در تمام جهان این سخن مثل شیر  
امام مسلم ریاضی با د خدایت  
از رساله ما خانه جمل شود