به نام آنکه جان را فکرت آموخت

۱۴۰۱-۱۴۰۲

درس :

آمار و احتمال

و

ریاضیات گسسته

مبحث :

منطق ریاضی
مجموعه
ترکیبیات
احتمال
آمار توصیفی
آمار استنباطی

تهیه و تنظیم : مهندس ترکمن

گزاره (Proposition)

← جمله ای است خبری که بتوان دقیق و بدون ابهام ارزش درستی یا نادرستی آن را مشخص کرد. هرچند ممکن است در حال حاضر نتوان ارزش آن را تعیین کرد.

پس جملات ناکامل (ناقص)، سؤالی، تعجبی، امری، عاطفی (احساسی)، گزاره نیستند.

تست کدام جمله یک گزاره محسوب نمی‌شود؟

۱) هر معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

۲) در پرتاب یک تاس سالم، احتمال ظاهر شدن عدد زوج برابر $\frac{1}{2}$ است.

۳) ای کاش همهٔ دانش آموزانم در کنکور قبول شوند.

۴) هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت.

گزاره‌نما

← هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل می‌شود.

مثلاً a عددی فرد است ، او یک شاعر است ، احتمال رخ داد پیشامد A برابر $\frac{1}{2}$ است.

دامنهٔ متغیر گزاره‌نما (Domain) ← مجموعهٔ مقادیری که می‌توان به جای متغیر (های) یک گزاره‌نما قرار داد تا تبدیل به یک گزاره شود.

نماد : D

مثلاً

a عددی فرد است ←

او یک شاعر است ←

احتمال رخ داد پیشامد A برابر $\frac{1}{2}$ است ←

مجموعهٔ جواب گزاره نما ← زیرمجموعه ای از دامنهٔ متغیر گزاره نما، که بازای تمام عضوهای آن، گزاره نما، تبدیل به گزاره ای با ارزش درست می شود.

نماد : S

$S \subseteq D$

مثلاً : الف) a عددی فرد است ← $D = \mathbb{Z}$

ب) در پرتاب یک تاس سالم احتمال رخ دادن پیشامد A برابر $\frac{1}{2}$ است ←

ج) $x^2 - 3x + 2 = 0$ ← $D = \mathbb{R}$

نقیض یک گزاره (Negation) ← نقیض گزارهٔ P، گزاره ای است که ارزش آن مخالف ارزش گزارهٔ P می باشد و با نماد $\sim P$ نشان داده می شود.

به کمک منفی کردن فعل جمله خبری گزاره به دست می آید یا قرار دادن عبارت "چنین نیست که" در ابتدای گزاره

مثلاً

P : $\sqrt{2}$ عددی گنگ است $\xrightarrow{\text{نقیض}}$

$\sim P$: $\sqrt{2}$ عددی گنگ نیست

$\sim P$: $\sqrt{2}$ عددی گویا است

$\sim P$: چنین نیست که $\sqrt{2}$ عددی گنگ است

P : عدد ۱۷ مضرب ۳ است $\xrightarrow{\text{نقیض}}$

$\sim P$: عدد ۱۷ مضرب ۳ نیست

$\sim P$: چنین نیست که عدد ۱۷ مضرب ۳ است

توجه : $\sim(\sim P) \equiv P$

دو گزارهٔ هم ارز (هم ارزش): ستون مربوط به هر کدام از این دو گزاره در جدول ارزش درستی آن‌ها یکسان است.

نماد : $\equiv$

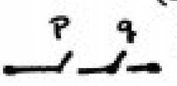
ترکیب گزاره ها (گزاره‌های مرکب) ← ترکیب عطفی ، فصلی ، شرطی ، دوشرطی

ترکیب عطفی دو گزاره نماد $\wedge$ ← بین دو گزاره حرف "و" قرار داده می‌شود.

فقط زمانی ارزش آن درست است که هر دو گزاره درست باشند.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

شبیه دو کلید متوالی (سری)



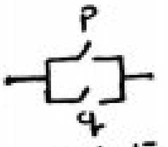
جریان زمانی برقرار است که هر دو کلید بسته باشند.

ترکیب فصلی دو گزاره نماد $\vee$ ← بین دو گزاره حرف "یا" قرار داده می‌شود.

فقط زمانی ارزش آن نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

شبیه دو کلید موازی



جریان زمانی برقرار نیست که هر دو کلید باز باشند.

تست کدام یک دارای ارزش نادرست است؟

۱) $(x^2+1=0) \vee$ (عدد ۲۱۹۷۱۴ مضرب ۱۱ است)

۲) (عدد π گنگ است) و (مربع دو قطر عمود بر هم دارد.)

۳) عدد 5^9+8 اول است یا عدد ۴۶۲۱۴۸ مربع است.

۴) $\{1\} \in \{1,2,\{1\},\{2\}\}$ و $\{1\} \subseteq \{1,2,\{1\},\{2\}\}$

تست) با توجه به جدول مقابل، دوتایی (a, b) کدام است؟

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
عدد $2^{12}+1$ مرکب است	......	a	....
......	عدد n^4+1 به ازای تمام اعداد طبیعی n، اول نیست.	....	b

۱) (د، د) ۲) (ن، د)
۳) (د، ن) ۴) (ن، ن)

گزارهٔ همیشه درست (True) $\xleftarrow{\text{درجدول}}$ همواره ارزش آن "د" است. $\xleftarrow{\text{نماد}}$ T

گزارهٔ همیشه نادرست (False) $\xleftarrow{\text{درجدول}}$ همواره ارزش آن "ن" است. $\xleftarrow{\text{نماد}}$ F

نقیض یکدیگرند

نکته: برای گزاره دلخواه p داریم:

$$\begin{cases} p \vee F \equiv p \\ p \wedge T \equiv p \end{cases} \qquad \begin{cases} p \vee T \equiv T \\ p \wedge F \equiv F \end{cases} \qquad \begin{cases} p \vee \sim p \equiv T \\ p \wedge \sim p \equiv F \end{cases}$$

ویژگی های ترکیب عطفی و ترکیب فصلی

۱) خودتوانی
$$\begin{cases} p \wedge p \equiv p \\ p \vee p \equiv p \end{cases}$$

۲) جا به جایی
$$\begin{cases} p \wedge q \equiv q \wedge p \\ p \vee q \equiv q \vee p \end{cases}$$

۳) شرکت پذیری
$$\begin{cases} (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \\ (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \end{cases}$$

۴) توزیع پذیری
↓
(فاکتورگیری)
$$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

۵) جذب ← دو ویژگی دارد: هم ∧ و هم ∨ دیده می‌شود / یک گزاره، تکراری شود
← هم ارز است با گزاره تکرار شده ☺

$$\begin{cases} p\wedge(p\vee q)\equiv p \\ p\vee(p\wedge q)\equiv p \end{cases}$$

نتیجه ۱: $p\wedge q\equiv p \Leftrightarrow p\vee q\equiv q$

نتیجه ۲: $p\wedge q\equiv p\vee q \Leftrightarrow p\equiv q$

۶) قانون دمورگان
↓
تک تک را نقیض می‌کند
علامت وسط را برعکس می‌کند

$$\sim(p\wedge q)\equiv \sim p\vee \sim q$$
$$\sim(p\vee q)\equiv \sim p\wedge \sim q$$

مثلاً نقیض گزاره («عدد π گنگ است» یا «قطرهای مستطیل برابرند») عبارت است از:

نقیض گزاره ($2\in\{1,2,3,4\}$ و $25^{12}\leq 12^{25}$) عبارت است از:

۷) قانون پوشانی (شبه جذب)

$$\begin{cases} p\vee(\sim p\wedge q)\equiv p\vee q \\ p\wedge(\sim p\vee q)\equiv p\wedge q \end{cases}$$

تست: گزاره $(p\vee q)\wedge(p\vee \sim q)$ هم ارز کدام گزاره است؟

۱) p ۲) q
۳) $\sim p$ ۴) $\sim q$

تست (۹۰): کدام گزاره همواره نادرست است؟ (گزینه ۴)

۱) $(p\wedge q)\vee p$ ۲) $(p\wedge q)\vee \sim q$ ۳) $(p\vee q)\wedge \sim p$ ۴) $\sim(p\vee q)\wedge p$

ترکیب شرطی دو گزاره ← نماد ← $\Rightarrow$ ← "اگر p آن‌گاه q" : $p \Rightarrow q$

p : مقدم (فرض) ، q : تالی (حکم)

فقط زمانی ارزش آن نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

p	q	p ⇒ q
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

ن ⇒ ○

هر گزاره شرطی با انتفای مقدم درست است

مثلاً

الف) اگر ۲ > ۵ ، آن‌گاه عدد ۸ اول است. ←

ب) (۳ | ۲^۷ + ۱ ⇒ ۶ | ۵^۹ + ۱) ←

پ) اگر {۲} ∈ {۱,۲,۳} ، آن‌گاه {۲} ⊆ {۱,۲,۳} ←

چند ویژگی مهم

① ترکیب شرطی هر گزاره دلخواه با خودش، گزاره‌ای همیشه درست است. $P \Rightarrow P \equiv T$

② تبدیل گزاره شرطی به ترکیب فصلی

(همانندی "نافذ") ☺

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

نقیض اولی ، فاصل ، دومی

شکل کلی : □ ⇒ ○ ≡ ~□ ∨ ○

۳) قانون عطف مقدمات

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

۴) توزیع پذیری "$\vee$" نسبت به "$\Rightarrow$"

$$p \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)$$

توجه : "$\wedge$" نسبت به "$\Rightarrow$" توزیع پذیر نیست.

$$p \wedge (q \Rightarrow r) \not\equiv (p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$$

۵) توزیع پذیری "$\Rightarrow$" از چپ نسبت به "$\vee$" و "$\wedge$"

$$\begin{cases} p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \\ p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \end{cases}$$

اثبات اولی

توجه : "$\Rightarrow$" از راست نسبت به "$\vee$"، "$\wedge$" توزیع نمی‌شود.

$$\begin{cases} (p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \\ (p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \end{cases}$$

اثبات اولی

۶) قانون تعدی (قیاس)

$$\{[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)\} \equiv T$$

تست اگر p گزاره‌ای با ارزش درست و q و r دو گزاره دلخواه باشند، کدام یک گزاره‌ای همیشه درست است؟

۱) $(\sim p \wedge q) \Rightarrow r$
۲) $(p \wedge q) \Rightarrow r$
۳) $(\sim p \vee q) \Rightarrow r$
۴) $(p \vee q) \Rightarrow r$

سراسری خ ۹۹ کدام یک از گزاره‌های زیر، هم ارز منطقی گزاره $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q)$ است؟

۱) p
۲) q
۳) $p \wedge q$
۴) $p \Rightarrow q$

تست اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، کدام یک گزاره‌ای همیشه درست است؟

۱) $p \Rightarrow (p \vee q)$
۲) $p \Rightarrow (\sim p \wedge q)$
۳) $p \Rightarrow \sim(p \vee q)$
۴) $p \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

تست اگر ارزش گزاره $\sim q \wedge (p \Rightarrow q)$ درست باشد، کدام گزاره همیشه درست است؟

۱) p
۲) q
۳) $\sim p \vee q$
۴) $\sim p \wedge q$

سراسری خ ۹۸ گزاره $(p \wedge r) \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$، با کدام گزاره زیر، هم ارزش است؟

۱) $p \vee (q \wedge r)$
۲) $p \wedge (q \vee r)$
۳) $r \Rightarrow (p \wedge q)$
۴) $r \Rightarrow (p \vee q)$

تست اگر ارزش گزاره $p \Rightarrow [\sim q \Rightarrow (r \Rightarrow q)]$ درست و ارزش گزاره q نادرست باشد، آنگاه ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

۱) $p \wedge q$
۲) $p \Rightarrow \sim r$
۳) $\sim(p \vee \sim q)$
۴) $\sim q \Rightarrow (p \wedge q)$

ان ۱۴۰۰ جدول ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر با جدول ارزش گزاره‌ی $(q\vee r)\Rightarrow(p\vee q)$ یکسان نیست؟

۱) $p\Rightarrow(q\vee r)$ ۲) $(p\wedge q)\vee r$ ۳) $\sim p\vee q\vee r$ ۴) $(p\Rightarrow q)\vee r$

ان ۱۴۰۰ اگر گزاره‌های $\sim p\Rightarrow q$ و $p\Rightarrow q$ هردو درست باشند، آنگاه کدام گزاره زیر همواره درست است؟

۱) $(q\vee p)\Rightarrow q$ ۲) $(q\vee p)\Rightarrow p$ ۳) $p\wedge\sim q$ ۴) $(q\vee p)\Rightarrow(p\wedge q)$

ان ۱۴۰۰ خ جدول ارزش کدام گزاره، با جدول ارزش گزاره‌ی $(p\Rightarrow q)\Rightarrow\overline{(r\wedge(p\Rightarrow q))}$ یکسان نیست؟

۱) $p\vee q\vee r$ ۲) $(p\wedge\sim q)\vee r$ ۳) $\sim(p\Rightarrow q)\vee r$ ۴) $(p\vee r)\wedge(q\Rightarrow r)$

ان ۱۴۰۰ گزاره‌ی $\overline{((\sim p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow\sim q))}\Rightarrow p$، در کدام حالت نادرست است؟

۱) p و q درست
۲) $\sim p$ و $\sim q$ نادرست
۳) p، $\sim q$ درست
۴) p، $\sim q$ نادرست

سراسری ۱۴۰۱ خ ارزش گزاره‌ی $\overline{(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)}$ در کدام حالت زیر درست است؟

۱) p درست، q نادرست، r درست
۲) p نادرست، q نادرست، r نادرست
۳) p درست، q درست، r نادرست
۴) p نادرست، q درست، r نادرست

سراسری ۱۴۰۰ — ارزش گزاره $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست است. احتمال این که ارزش گزاره r نادرست باشد کدام است؟

۱) $\frac{3}{7}$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{4}{7}$ ۴) $\frac{2}{3}$

p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$
د	د	د	د	
د	د	ن	د	
د	ن	د	د	
د	ن	ن	ن	
ن	د	د	د	
ن	د	ن	د	
ن	ن	د	د	
ن	ن	ن	ن	

سراسری ۱۴۰۰ خ — H.W

ارزش گزاره $(p \vee q) \Rightarrow r$ نادرست است. احتمال این که q نادرست باشد کدام است؟

(گزینه ۲)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{1}{2}$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	
د	د	ن	د	
د	ن	د	د	
د	ن	ن	د	
ن	د	د	د	
ن	د	ن	د	
ن	ن	د	ن	
ن	ن	ن	ن	

بیان یک ترکیب شرطی درست به صورت شرط لازم و شرط کافی ←

$\square \Rightarrow \bigcirc$

شرط کافی ($\square$) — شرط لازم ($\bigcirc$)

مثلاً گزاره شرطی "اگر سه ضلع یک مثلث مساوی باشند، آن گاه مثلث متساوی الاضلاع است"

به صورت‌های زیر بیان می‌شود:

- شرط کافی برای متساوی الاضلاع بودن مثلث، آن است که سه ضلع آن مساوی باشند.
- مساوی بودن سه ضلع مثلث شرط کافی برای متساوی الاضلاع بودن آن است.
- شرط لازم برای مثلث با سه ضلع مساوی، آن است که متساوی الاضلاع باشد.
- متساوی الاضلاع بودن مثلث شرط لازم برای مساوی بودن سه ضلع مثلث است.

تست برای دو عدد حقیقی a و b، $a^2=b^2$ چه شرطی برای $a=-b$ است؟

۱) لازم
۲) کافی
۳) لازم و کافی
۴) نه لازم و نه کافی

نقیض یک ترکیب شرطی

(سراسری ۹۸)

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

شکل کلی

$$\sim(\square \Rightarrow \bigcirc) \equiv \square \wedge \sim\bigcirc$$

اثبات

مثلاً

الف) اگر یک مثلث قائم الزاویه باشد، آن گاه میانه وارد بر بزرگ‌ترین ضلع، نصف آن ضلع است.

نقیض ←

ب) اگر $a^2=b^2$، آن گاه ($a=b$ یا $a=-b$).

نقیض ←

پ) اگر ($a>b$ و $c>0$)، آن گاه $ac>bc$.

نقیض ←

عکس نقیض یک ترکیب شرطی ⟵ هم‌ارز با خودِ ترکیب شرطی است.

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

اساس کار: اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)

اثبات

مثلاً

الف) اگر یک دانش‌آموز درس بخواند، آن‌گاه در امتحان نهایی قبول می‌شود.

عکس نقیض

ب) $a^2 = b^2$ یک شرط لازم برای $a = b$ است.

عکس نقیض

پ) اگر $a \overset{3}{\equiv} b$ و $a \overset{5}{\equiv} b$، آن‌گاه $a \overset{15}{\equiv} b$

عکس نقیض

تست H.W: عکس نقیض گزاره "اگر یک چهارضلعی لوزی باشد یا دارای دو قطر برابر باشد، آن‌گاه چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است و مستطیل است" کدام است؟

۱) اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع و مستطیل نباشد، آن‌گاه لوزی است یا دو قطر برابر دارد.

۲) اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع یا مستطیل نباشد، آن‌گاه لوزی نیست و دو قطر برابر ندارد.

۳) اگر یک چهارضلعی لوزی نباشد و دارای دو قطر برابر نباشد، آن‌گاه متوازی‌الاضلاع نیست یا مستطیل نیست.

۴) اگر یک چهارضلعی لوزی نباشد یا دارای دو قطر برابر نباشد، آن‌گاه متوازی‌الاضلاع نیست و مستطیل نیست.

(گزینه ۲)

ترکیب دوشرطی دو گزاره ← نماد ← $\Leftrightarrow$ ← اگر p، آنگاه q و برعکس: $p \Leftrightarrow q$ (اگر و تنها اگر)

فقط زمانی ارزش آن درست است که دو گزاره هم‌ارزش باشند.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

اساس کار گزاره‌های هم‌ارز (اثبات بازگشتی)

برای اثبات درستی $p \Leftrightarrow q$، می‌توان نشان داد $p \equiv q$.
(برگرفته از ترازوی دو کفه‌ای)

△ در صورت درستی گزاره دوشرطی $p \Leftrightarrow q$، آن را قضیه دوشرطی می‌نامند (شرط لازم و کافی)

توجه:

① ترکیب دوشرطی هر گزاره با خودش همواره درست است. $\boxed{p \Leftrightarrow p \equiv T}$

② " " " با نقیض خودش همواره نادرست است. $\boxed{p \Leftrightarrow \sim p \equiv F}$

③ ترکیب دوشرطی دو گزاره، ترکیب عطفی ترکیب شرطی دو گزاره با عکس آن است.

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

$$\equiv [(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \vee [(\sim p \vee q) \wedge p]$$

$$\equiv [\underbrace{(\sim p \wedge \sim q)}_{\sim(p \vee q)} \vee \underbrace{(q \wedge \sim q)}_{F}] \vee [\underbrace{(\sim p \wedge p)}_{F} \vee \underbrace{(q \wedge p)}_{p \wedge q}]$$

$$\equiv \sim(p \vee q) \vee (p \wedge q)$$

(سراسری ۹۹)

نقیض ترکیب دوشرطی

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

مثال: نقیض گزاره $x = y \Leftrightarrow \sin x = \sin y$ عبارت است از:

$x \neq y \Leftrightarrow \sin x = \sin y$ یا $x = y \Leftrightarrow \sin x \neq \sin y$

توجه:

تست با توجه به جدول مقابل سه‌تایی (a, b, c) کدام است؟

p	q	$p\Rightarrow q$	$p\wedge q$	$p\Leftrightarrow q$
$65 \mid 2^{18}+1$	...	د	....	a
....	عدد $2^{2^5}+1$ اول است	b	....	ن
عدد ۷۱۳ غیراول است	...	...	c	د

۱) (د، ن، د) ۲) (د، د، د)
۳) (د، د، ن) ۴) (د، ن، ن)

تست اگر ارزش گزارهٔ $[p\wedge(r\Leftrightarrow q)]\Rightarrow(\sim p\vee r)$ نادرست باشد، آن‌گاه به‌جای گزارهٔ $\sim q$ کدام گزاره می‌تواند قرار گیرد؟

۱) هر عدد اول، فرد است. ۲) بی‌شمار عدد اول وجود دارد.
۳) هر مربع کامل زوج است. ۴) عدد 2^n+3 به ازای همه اعداد طبیعی n، اول است.

سراسری ۹۹ کدام یک از گزاره‌های زیر، هم‌ارز منطقی گزارهٔ $p\Leftrightarrow q$ است؟

۱) $(p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)$

۲) $(p\vee q)\vee\sim(p\wedge q)$

۳) $(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$

۴) $(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)$

حرف‌هایی است برای نگفتن

و ارزش واقعی هر کس به اندازه حرف‌هایی است که برای نگفتن دارد

(دکتر شریعتی)

سراسری ۱۴۰۱ کدام گزاره زیر، هم‌ارز منطقی گزاره $q \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ است؟

۱) p ۲) $p \vee q$

۳) q ۴) $\sim p \Leftrightarrow q$

انسانی ۱۴۰۰ خ ارزش گزاره $\overline{(\sim(p \Leftrightarrow q) \wedge p) \Rightarrow \sim q}$ ، کدام است؟

۱) همواره درست است.

۲) همواره نادرست است.

۳) به ارزش p بستگی دارد.

۴) به ارزش q بستگی دارد.

انسانی ۱۴۰۱ ه اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره دلخواه باشد. ارزش کدام گزاره درست است؟

۱) $(p \Leftrightarrow \sim q) \vee r$ ۲) $\sim(p \wedge \sim q) \wedge r$ ۳) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q)$ ۴) $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \vee q)$

ویژگی‌های ترکیب عطفی و ترکیب فصلی در یک نگاه

خودتوانی: $\begin{cases} p\wedge p\equiv p \\ p\vee p\equiv p \end{cases}$	جابجایی: $\begin{cases} p\wedge q\equiv q\wedge p \\ p\vee q\equiv q\vee p \end{cases}$
شرکت‌پذیری: $\begin{cases} p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r \\ p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r \end{cases}$	توزیع‌پذیری (فاکتورگیری): $\begin{cases} p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r) \\ p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r) \end{cases}$
جذب: $\begin{cases} p\wedge(p\vee q)\equiv p \\ p\vee(p\wedge q)\equiv p \end{cases}$ شبه‌جذب (هم‌پوشانی): $\begin{cases} p\wedge(\sim p\vee q)\equiv p\wedge q \\ p\vee(\sim p\wedge q)\equiv p\vee q \end{cases}$	دمورگان: $\begin{cases} \sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q \\ \sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q \end{cases}$
$\begin{cases} p\wedge F\equiv F \\ p\vee F\equiv p \end{cases}$, $\begin{cases} p\wedge T\equiv p \\ p\vee T\equiv T \end{cases}$	$\begin{cases} p\wedge q\equiv p \leftrightarrow p\vee q\equiv q \\ p\wedge q\equiv p\vee q \leftrightarrow p\equiv q \end{cases}$

ویژگی‌های ترکیب شرطی و ترکیب دو شرطی در یک نگاه

$$p\Rightarrow q\equiv \underbrace{\sim p\vee q}_{\text{ناقد}} \equiv \underbrace{\sim q\Rightarrow\sim p}_{\text{عکس نقیض}}$$

$T\Rightarrow F\equiv F$	$F\Rightarrow p\equiv T$ (انتفای مقدم)	$p\Rightarrow p\equiv T$

$[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)]\Rightarrow(p\Rightarrow r)]\equiv T$ (تعدی)	$p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$ (عطف مقدمات)
$\begin{cases} (p\vee q)\Rightarrow r\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r) \\ (p\wedge q)\Rightarrow r\equiv(p\Rightarrow r)\vee(q\Rightarrow r) \end{cases}$ توزیع‌پذیری $\Rightarrow$ روی $\vee$ و $\wedge$ از راست امکان‌پذیر نیست!	$\begin{cases} p\Rightarrow(q\vee r)\equiv(p\Rightarrow q)\vee(p\Rightarrow r) \\ p\Rightarrow(q\wedge r)\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r) \end{cases}$ توزیع‌پذیری $\Rightarrow$ روی $\vee$ و $\wedge$ از چپ امکان‌پذیر است.
$\vee$ روی $\Rightarrow$ توزیع‌پذیر است. $\wedge$ روی $\Rightarrow$ توزیع‌پذیر نیست!!	$\begin{cases} p\vee(q\Rightarrow r)\equiv(p\vee q)\Rightarrow(p\vee r) \\ p\wedge(q\Rightarrow r)\equiv\ ?? \end{cases}$

$$p\Leftrightarrow q\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)\equiv\sim(p\vee q)\vee(p\wedge q)$$

$p\Leftrightarrow q\equiv\sim p\Leftrightarrow\sim q\equiv\sim q\Leftrightarrow\sim p$ (شبه عکس نقیض)	$\begin{cases} p\Leftrightarrow p\equiv T \\ p\Leftrightarrow\sim p\equiv F \end{cases}$

$$\begin{cases} \sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q & \text{(نقیض ترکیب شرطی)} \\ \sim(p\Leftrightarrow q)\equiv p\Leftrightarrow\sim q\equiv\sim p\Leftrightarrow q & \text{(نقیض ترکیب دوشرطی)} \end{cases}$$

گزاره های سوری

① گزارهٔ با سور عمومی ⟵ خاصیتی برای همه (All) عضوهای یک مجموعه بیان می‌شود ⟵ نماد $\forall$

$\forall x \; ; \; P(x)$ ⟵ به ازای هر xای که در $P(x)$ صدق می‌کند
یا برای هر x ، $P(x)$ برقرار است.

زمانی درست است که $S = D$ ، یعنی مجموعهٔ جواب گزاره نما ، با دامنه برابر باشد
به عبارت دیگر مثال نقض برای آن یافت نشود.

مثال:

الف) $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; x^2 \geq x \xrightarrow{\text{بیان}}$

ب) $\forall k \in \mathbb{Z} \; ; \; k.(k+1) = 29 \xrightarrow{\text{بیان}}$

ج) $\forall \underset{x \neq 0}{x \in \mathbb{R}} \; ; \; x + \frac{1}{x} \geq 2 \xrightarrow{\text{بیان}}$

تست H.W: اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 5\}$ دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری

الف) $\forall x \in A \; ; \; x + 2 \leq 9$ ب) $\forall x \in A \; ; \; x + 1 \geq 3$ کدام است؟

(گزینه ۱)

۱) الف: درست ، ب: نادرست
۲) الف: درست ، ب: درست
۳) الف: نادرست ، ب: درست
۴) الف: نادرست ، ب: نادرست

② گزاره با سور وجودی ⟵ خاصیتی برای بعضی از عضوهای یک مجموعه بیان می‌شود $\xrightarrow{\text{نماد}}$ $\exists$ (Exist)

$\exists x\ ;\ p(x) \Rightarrow$ وجود دارد xای که در $p(x)$ صدق کند
یا برای بعضی از مقادیر x، $p(x)$ برقرار است

زمانی درست است که $S \neq \phi$، یعنی مجموعهٔ جواب گزاره‌نما، حداقل یک عضو داشته باشد.

مثلاً

الف) $\exists x \in \mathbb{Z}\ ;\ |x|<1 \xrightarrow{\text{بیان}}$

ب) $\exists a \in \mathbb{R}\ ;\ a^3 = a \xrightarrow{\text{بیان}}$

پ) $\exists x \in \mathbb{N}\ ;\ 2x^2 + 3x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{بیان}}$

نقیض گزاره های سوری

$$\boxed{\begin{aligned} &\sim (\forall x\ ;\ p(x)) \equiv \exists x\ ;\ \sim p(x) \\ &\sim (\exists x\ ;\ p(x)) \equiv \forall x\ ;\ \sim p(x) \end{aligned}}$$

مثلاً

الف) $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 > 0 \xrightarrow{\text{نقیض}}$

ب) $\exists x \in \mathbb{Z}\ ;\ x.(x+1) = 2k \xrightarrow{\text{نقیض}}$

پ) $\forall a \in \mathbb{N}\ ;\ ((a=2k) \vee (a=2k+1)) \xrightarrow{\text{نقیض}}$

ت) $\exists x \in \mathbb{R}\ ;\ ((x^2>0) \wedge (x^2<0)) \xrightarrow{\text{نقیض}}$

ث) $\forall y \in \mathbb{R}\ ;\ ((y>0) \Rightarrow (y^2>1)) \xrightarrow{\text{نقیض}}$

ج) $\exists x \in \mathbb{Z}\ ;\ ((x^2+1=0) \Leftrightarrow (x^2<0)) \xrightarrow{\text{نقیض}}$

سراسری خارج ۹۸ کدام گزاره سوری زیر، دارای ارزش درست است؟

۱) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + 2 > 2x$

۲) $\exists x \in \mathbb{R}: \frac{x-1}{x} = x$

۳) $\exists x \in \mathbb{R}: \left| x + \frac{1}{x} \right| < 2$

۴) $\forall x \in \mathbb{R}: \frac{x^2-4}{x-2} = x+2$

سراسری ۹۸ گزاره سوری $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}: P(x,y)$، با کدام گزاره‌نمای $P(x,y)$ دارای ارزش درست است؟

۱) $y - x = 6$

۲) $x - y = 6$

۳) $x + y = 6$

۴) $xy = 6$

سراسری ۱۴۰۰ گزاره‌نمای $|x+y| = [x] + [y]$ به ازای کدام دو سور برقرار است؟ $(x, y \in \mathbb{R})$ (گزینه ۴)

۱) $\forall x \forall y$

۲) $\forall x \exists y$

۳) $\exists x \forall y$

۴) $\exists x \exists y$

نکته: تعویض جای دو سور غیر هم‌نام در حالت کلی مجاز نیست.

مثال:

الف) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}: x > y \xrightarrow{\text{بیان}}$

ب) $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}: x > y \xrightarrow{\text{بیان}}$

مجموعه
Set

مجموعه ← هواره

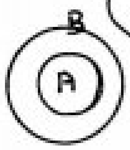
مجموعهٔ مرجع (جهانی): همهٔ عضوها را دارد ← نماد U
(Universe)

مجموعهٔ تهی: هیچ عضوی ندارد ← نماد ϕ یا $\{\ \}$

زیرمجموعه
Subset

$$A \subseteq B \iff (\forall x \in U\ ;\ x \in A \Rightarrow x \in B)$$

همهٔ عضوهای A، در B باشند.



پس هر مجموعه‌ای، زیرمجموعهٔ U است.

نتیجه:

$$A \not\subseteq B \iff$$

ویژگی ها:

۱) هر مجموعه، زیرمجموعهٔ خودش است. $A \subseteq A$

۲) مجموعهٔ تهی، زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است. $\phi \subseteq A$

۳) خاصیت تعدّی

$$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$$

* شرط تساوی دو مجموعه: هر یک زیرمجموعهٔ دیگری باشند (شرط لازم و کافی)

$$(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \iff A = B$$

* نتیجه: برای مجموعهٔ دلخواه A از مرجع U داریم:

$$\boxed{\begin{cases} A \subseteq \phi \Rightarrow A = \phi \\ U \subseteq A \Rightarrow A = U \end{cases}}$$

قضیه: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با 2^n

* به تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه، به جز خودِ آن مجموعه، زیرمجموعه‌های محض (سره) می‌گویند.

پس تعداد زیرمجموعه‌های محض (سره) یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با $2^n - 1$

سراسری ۹۱ چند زیرمجموعه از مجموعه $\{a, b, \{a,b\}, \{b,a\}\}$ عضو $\{a,b\}$ را ندارد؟

۱) ۴ ۲) ۶
۳) ۸ ۴) ۷

سراسری اگر ۲ عضو از اعضای مجموعه A کم کنیم، از تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود. مجموعه A دارای چند زیرمجموعه ناتهی است؟

۱) ۶۳ ۲) ۱۲۷
۳) ۵۱۱ ۴) ۱۰۲۳

سراسری خ اگر $A=\{2\}$، $B=\{2,\{2\}\}$ و $C=\{\{2\},\{2,\{2\}\}\}$، کدام نادرست است؟

۱) $B\subseteq C$
۲) $A\subset B$
۳) $A\in B$
۴) $B\in C$

نکته:
$\bigcirc \in \square$: خود دایره در مربع باشد
$\bigcirc \subseteq \square$: تمام عضوهای دایره در مربع باشد

سراسری ۹۵ H.W اگر $A=\{2\}$، $B=\{3,5,\{2\}\}$ و $C=\{\{\{2\},3,5\},2\}$، کدام نادرست است؟
(گزینه ۲)

۱) $A\in B$ ۲) $A\in C$
۳) $B\in C$ ۴) $A\subset C$

سراسری اگر $A=\{a,b,\{a\},\{a,b\}\}$ و $B=\{a,b\}$، مجموعه $A-\{B\}$ چند زیرمجموعه سره ناتهی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۷
۳) ۶ ۴) ۱۴

سراسری خ اگر $A=\{a,b,\{a\},\{b\}\}$، مجموعه $A-\{A\}$ چند زیرمجموعه سره ناتهی دارد؟

۱) ۳۲ ۲) ۷
۳) ۶ ۴) ۱۵

سراسری ۹۲ خ ۱۴۰۳ — اگر $A=\{1,\{1\},\{1,2\},\{2\},2\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R};\ x^2+2=3x\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $A-B$ دارای چند زیرمجموعهٔ ناتهی است؟ (گزینه ۳)

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۷ ۴) ۱۴

سراسری ۹۴ خ — اگر $A=\{1,2,\{1,2,3\}\}$ و $B=\{1,2,3,\{1,2\}\}$ و $C=\{1,2,3\}$، کدام درست است؟

۱) $A-B=C$
۲) $B-C=\phi$
۳) $B-C=\{1,2\}$
۴) $A-B=\{C\}$

مجموعهٔ توانی یک مجموعه (Power Set) اختیاری ← مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A را گویند ← نماد $P(A)$

$$\boxed{P(A)=\{X : X\subseteq A\}} \longrightarrow \boxed{n(P(A))=2^{n(A)}}$$

مثلاً اگر $A=\{1,2\}$ ($\downarrow$ ۲ عضو)، آن‌گاه

$$P(A)=\{\underbrace{\{\ \}}_{\phi},\{1\},\{2\},\underbrace{\{1,2\}}_{A}\}$$

$P(A) \downarrow$ $2^2=4$ عضو

تست — اگر $A=\{a,b,\{a,b\}\}$، آن‌گاه تعداد عضوهای $P(P(A))$ کدام است؟

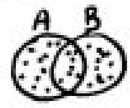
۱) ۱۲۸
۲) ۲۵۶
۳) ۶۴
۴) ۵۱۲

سراسری ۱۴۰۳ — اگر A مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی دورقمی و $B=\{7k \mid k\in A\}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ توانی $A\cap B$ چند عضو دارد؟ (گزینه ۴)

۱) ۸
۲) ۱۶
۳) ۱۶
۴) ۳۲

جبر مجموعه‌ها ← اجتماع، اشتراک، تفاضل، ضرب دکارتی

اجتماع دو مجموعه (Union) ← شکل



تعریف ← عضوهای متعلق به A یا B یا هر دو (متعلق به حداقل یکی)

$$A\cup B=\{x\in U \mid x\in A \vee x\in B\}$$

$$x\in(A\cup B)\Leftrightarrow(x\in A \vee x\in B)$$

اشتراک دو مجموعه (Intersection) ← شکل

تعریف ← عضوهای متعلق به A و B (متعلق به هر دو)

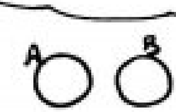
$$A\cap B=\{x\in U \mid x\in A \wedge x\in B\}$$

$$x\in(A\cap B)\Leftrightarrow(x\in A \wedge x\in B)$$

با توجه به شکل واضح است که

$$\begin{cases}A\subseteq(A\cup B)\\ B\subseteq(A\cup B)\end{cases},\quad \begin{cases}(A\cap B)\subseteq A\\ (A\cap B)\subseteq B\end{cases},\quad (A\cap B)\subseteq(A\cup B)$$

تذکر: (A و B دو مجموعه جدا از هم می‌باشند $\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$)



سراسری: اگر $n\in\mathbb{N}$ و $A_n=\{m\in\mathbb{Z} : m\geq -n ,\ 2^m\leq n\}$، آنگاه مجموعهٔ $A_3\cap A_4$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۶

۳) ۳۲ ۴) ۶۴

تذکر ۱: دو طرف دو یا چند رابطهٔ زیرمجموعه را می‌توان باهم نظیر به نظیر اجتماع یا اشتراک کرد.

$$\begin{cases}A\subseteq B\\ C\subseteq D\end{cases}\Rightarrow (A\cap C)\subseteq(B\cap D)\ ,\ (A\cup C)\subseteq(B\cup D)$$

تذکر ۲: دو طرف دو یا چند رابطهٔ تساوی را می‌توان باهم نظیر به نظیر اجتماع یا اشتراک کرد.

$$\begin{cases}A=B\\ C=D\end{cases}\Rightarrow A\cap C=B\cap D\ ,\ A\cup C=B\cup D$$

تذکر ۳: به دو طرف هر تساوی (زیرمجموعه) می‌توان مجموعهٔ دلخواهی را اجتماع یا اشتراک کرد.

$$\begin{cases}A=B \Rightarrow A\cap C=B\cap C\ ,\ A\cup C=B\cup C\\ A\subseteq B \Rightarrow (A\cap C)\subseteq(B\cap C)\ ,\ (A\cup C)\subseteq(B\cup C)\end{cases}$$

ویژگی های مهم اجتماع و اشتراک

① خودتوانی
$$\begin{cases} A\cup A = A \\ A\cap A = A \end{cases}$$

② جابه‌جایی
$$\begin{cases} A\cup B = B\cup A \\ A\cap B = B\cap A \end{cases}$$

③ شرکت پذیری
$$\begin{cases} A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C \\ A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C \end{cases}$$

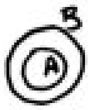
④ توزیع پذیری
$$\begin{cases} A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C) \\ A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C) \end{cases}$$

فاکتورگیری

⑤ جذب
$$\begin{cases} A\cup(A\cap B) = A \\ A\cap(A\cup B) = A \end{cases}$$

۲ ویژگی دارد ← (هم اجتماع، هم اشتراک وجود دارد. یک مجموعه تکراری می‌شود.

(جواب: مجموعهٔ تکراری می باشد.)

⑥

$$\begin{cases} A\subseteq B \Longleftrightarrow A\cup B = B \\ A\subseteq B \Longleftrightarrow A\cap B = A \end{cases}$$

(اجتماع میشه بزرگه
اشتراک میشه کوچیکه) ☺

پس $A\cup B = B \Longleftrightarrow A\cap B = A$

نتیجه:
$$\boxed{\begin{matrix} \phi\cup A = A & , & A\cup U = U \\ \phi\cap A = \phi & , & A\cap U = A \end{matrix}}$$

⑦ خاصیت "حذف پذیری" ندارند.
$$\begin{cases} A\cup B = A\cup C \not\Rightarrow B = C \\ A\cap B = A\cap C \not\Rightarrow B = C \end{cases}$$

امّا
$$[(A\cup B = A\cup C) \wedge (A\cap B) = A\cap C] \Longleftrightarrow B = C$$

⑧
$$A\cup B = A\cap B \Longleftrightarrow A = B$$

⑨
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup \dots \cup A_n \quad , \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap \dots \cap A_n$$

تمرین H.W نشان دهید

الف) $A\cup B = \phi \Longleftrightarrow A = B = \phi$

ب) $A\cap B = U \Longleftrightarrow A = B = U$

سراسری ۹۶ — اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq n \,,\, 2^m \leq 2n\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $(A_6 - A_4) \cup A_1$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵
۳) ۶ ۴) ۷

سراسری ۹۳ — اگر $A_i = [-i \,,\, \frac{9-i}{2}]$، آن‌گاه $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ به کدام صورت است؟

۱) $[-2,-1) \cup (1,2]$
۲) $[-2,-1] \cup [1,2]$
۳) $[-1,1]$
۴) ϕ

سراسری — اگر n عددی طبیعی و A_n بازهٔ $((-1)^n n \,,\, 2n)$ باشد، چند عدد صحیح به $\bigcup_{n=1}^{4} A_n$ تعلق دارد؟

۱) ۸ ۲) ۹
۳) ۱۰ ۴) ۱۱

سراسری خارج ۹۶ (H.W) — اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = (-\frac{2}{n} \,,\, \frac{n-2}{n})$ باشد، آن‌گاه $\bigcap_{i=4}^{8} A_i$ کدام است؟
(گزینه ۱)

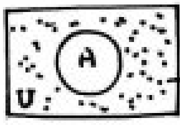
۱) $(-\frac{1}{4} \,,\, \frac{1}{2})$
۲) $(-\frac{1}{4} \,,\, \frac{3}{4})$
۳) $(-\frac{1}{2} \,,\, \frac{3}{4})$
۴) $(-\frac{1}{4} \,,\, \frac{1}{2})$

سراسری (H.W) — اگر $A_i = \{m \in \mathbb{Z} : -i \leq m \leq 8-i\}$، مجموعهٔ $\bigcup_{i=1}^{8} A_i - \bigcap_{i=1}^{8} A_i$ چند عضو دارد؟
(گزینه ۲)

۱) ۱۳ ۲) ۱۴
۳) ۱۵ ۴) ۱۲

متمم یک مجموعه (نسبت به مجموعه مرجع) (مکمل)

← متمم (مکمل) مجموعه دلخواه A (نسبت به مجموعه U)، شامل همه عضوهای متعلق به مجموعه U است که در A وجود ندارند.



متمم A

$$A' = \{x : x \in U \wedge x \notin A\} \rightarrow \begin{array}{l} x \in A' \Leftrightarrow x \notin A \\ x \in A \Leftrightarrow x \notin A' \end{array}$$

واضح است که A و A' دو مجموعه جدا از هم می باشند، یعنی $A \cap A' = \phi$

بنابراین $A \cup A' = U$

سراسری ۱۴۰۱ خ

اگر U مجموعه مرجع و $A' \cup B = A' \cap B'$ باشد، کدام مورد درست است؟

۱) $A=B$ ۲) $A=\phi$ ۳) $B=U$ ۴) $B=\phi$

نتیجه۱: تنها مجموعه ای که هم زیرمجموعه A و هم زیرمجموعه A' است، مجموعه تهی می باشد. یعنی

$$(X \subseteq A \wedge X \subseteq A') \Rightarrow X = \phi$$

نتیجه۲: تنها مجموعه ای که هم A و هم A' زیرمجموعه ای از آن می باشند، مجموعه مرجع است. یعنی

$$(A \subseteq X \wedge A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$$

ویژگی های مهم

① متمم گیری $A = B \Leftrightarrow A' = B'$

② $(A')' = A$

③ $\phi' = U \ , \ U' = \phi$

④ $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$

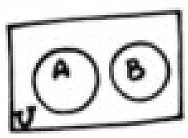
به مانند

⑤ قانون دمورگان

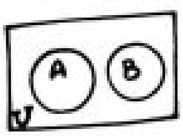
$$\begin{cases} (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases}$$

← تک تک را متمم و علامت وسط را برعکس می کند.

⑥ اگر دو مجموعه جدا از هم باشند، هر یک زیرمجموعه متمم دیگری است.



$$A \cap B = \phi \Leftrightarrow (A \subseteq B' \wedge B \subseteq A')$$



سراسری ۹۷

اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، مجموعه $(A \cap (A' \cup B)) \cup (B \cap (A' \cup B'))$ برابر کدام است؟

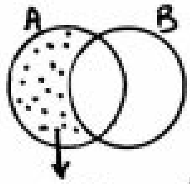
۱) $A \cap B$ ۲) $A \cup B$ ۳) B ۴) A

سراسری ۱۴۰۱

اگر A و B دو مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، مجموعه $A' \cup ((B \cap A) \cap [(B \cup A) \cap B])$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) $(A-B)'$ ۲) $B-A$ ۳) B ۴) ϕ

تفاضل دو مجموعه
Diffrence



$A-B=\{x\in U : x\in A \wedge x\notin B\}$ ← شامل عضوهایی که متعلق به A می‌باشند و متعلق به B نمی‌باشند (فقط متعلق به اولی)

$$\boxed{x\in(A-B) \Longleftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B)}$$

نتیجه: با توجه به شکل واضح است که $(A-B)\subseteq A$ و به همین ترتیب $(B-A)\subseteq B$

ویژگی‌های مهم

① تبدیل تفاضل به اشتراک

$$\boxed{A-B=A\cap B'}$$

به طور کلی

$$\boxed{\bigcirc-\square=\bigcirc\cap\square'}$$

متمم

نتیجه ۱: $A'=U-A$

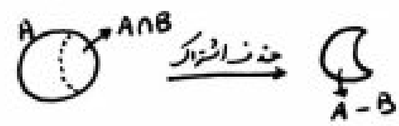
اثبات: $U-A=U\cap A'=A'$

نتیجه ۲: $A-B=B'-A'$

اثبات

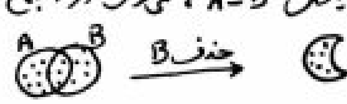
② برای یافتن $A-B$، کافی است از مجموعهٔ A، عضوهای مشترک با B را حذف کنیم. به عبارت دیگر

$$\boxed{A-B=A-(A\cap B)}$$



نتیجه: برای یافتن $A-B$، می‌توان از اجتماع این دو مجموعه، B را حذف کرد. یعنی

$$A-B=(A\cup B)-B$$



③ اگر دو مجموعه جدا از هم باشند، تفاضل آن‌ها برابر با مجموعه اولی است. (اولی = تفاضل ⟵ جدا از هم)

$$\boxed{A\cap B=\Phi \Longleftrightarrow (A-B=A \wedge B-A=B)}$$

نتیجه: برای مجموعهٔ دلخواه A داریم:

الف) $A-A=\Phi$ ب) $A-A'=A$ پ) $A-\Phi=A$ ت) $\Phi-A=\Phi$

۴) $A \subseteq B \iff A - B = \Phi$

* توجه :

۵) تفاضل از راست بر اجتماع و اشتراک توزیع پذیر است.

$$\begin{cases}(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)\\(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)\end{cases}$$

هشدار * تفاضل از چپ بر اجتماع و اشتراک توزیع نمی‌شود.

$$\begin{cases}A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)\\A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)\end{cases}$$

۶) اشتراک روی تفاضل توزیع پذیر است.

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$$

ولی اجتماع نه !!

$$A\cup(B-C)=\,??$$

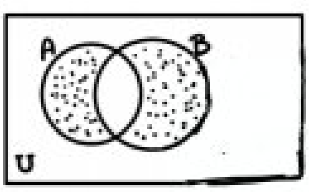
۷) $A-B=B-A \iff A=B$

۸) تفاضل خاصیت شرکت پذیری ندارد. $A-(B-C)\neq(A-B)-C$

۹) تفاضل خاصیت حذف پذیری ندارد. $A-B=A-C \not\Rightarrow B=C$

۱۰) تفاضل خاصیت جابجایی ندارد. $A-B\neq B-A$

تفاضل متقارن دو مجموعه ← شامل عضوهایی است که فقط به یکی از دو مجموعه تعلق دارد. (اختیاری)



$$A\Delta B=(\underbrace{A-B}_{\text{فقط } A})\cup(\underbrace{B-A}_{\text{فقط } B})=(A\cup B)-(A\cap B)$$

(یا)

مثال اگر A={۱,۲,۳,۴,۵} و B={۲,۳,۷}، آنگاه $A\Delta B$ را بیابید.

نکته $A'\Delta B' = A\Delta B$

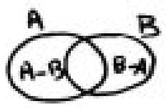
زیرا :

سراسری — مجموعهٔ $(A-B)' \cap (A\cup B) \cap A'$ برابر کدام است؟

۱) $B-A$ ۲) B
۳) ϕ ۴) A'

سراسری — اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی باشند، مجموعهٔ $[A\cup(A\cap B)]' \cap [(B\cap A)\cup(B-A)]$ برابر کدام است؟

۱) $A'-B'$ ۲) $(A-B)'$
۳) A' ۴) ϕ



سراسری ۹۱ خ — اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، $(A\cap B')-(B-A)$ برابر کدام است؟

۱) B' ۲) ϕ
۳) $A\cap B$ ۴) $A-B$

سراسری خ — متمم مجموعهٔ $C\cup A'\cup B'$ نسبت به مجموعهٔ جهانی، با کدام مجموعه برابر نیست؟

۱) $(A\cap B)-(A\cap C)$ ۲) $(A-C)\cup(B-C)$
۳) $A\cap(B-C)$ ۴) $(A\cap B)-C$

سراسری ۹۰ — اگر A، B و C سه مجموعهٔ ناتهی و $A\subset B$ باشند، حاصل $(A\cap(B-C))-(A\cap B\cap C)$ کدام است؟

۱) $A\cap C'$ ۲) $A\cap C$
۳) A ۴) B

سراسری ۹۵ خ — مجموعهٔ A دارای ۱۵ زیرمجموعهٔ ناتهی و مجموعهٔ B دارای ۸ زیرمجموعه است. مجموعهٔ $C=A\cap(A'-B)'$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸
۳) ۱۲ ۴) ۱۶

سراسری ۹۸ خ — مجموعهٔ A دارای ۵۱۲ زیرمجموعه است. مجموعهٔ $A\cap B$ دارای ۳ عضو است. تعداد زیرمجموعه‌های $(B\cup A')'$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۳۲
۳) ۴۸ ۴) ۶۴

سراسری ۹۹ فرض کنید A و B دو مجموعهٔ غیرتهی با شرط $A \subset B$ باشند، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟

۱) $B - A' = A$
۲) $A - B' = A$
۳) $A \cap B' = \phi$
۴) $B \cap A' = \phi$

سراسری ۹۹ خ فرض کنید A و B دو مجموعهٔ غیرتهی و جدا از هم، با یک مجموعهٔ مرجع باشند، کدام رابطه نادرست است؟

۱) $A \subset B'$
۲) $A - B' = \phi$
۳) $A \cap B' = A$
۴) $(A \cup B)' = \phi$

سراسری ۹۹ مجموعهٔ $(A-B) \cup \left((B\cap C)' \cap ((B' \cup A) - B)\right)$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) $A \cup B'$
۲) $A \cap B'$
۳) A
۴) B'

سراسری ۹۹ خ مجموعهٔ $(A - (A \cap B')) \cup (B \cap (A \cap B')')$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) A
۲) B
۳) A'
۴) B'

سراسری ۱۴۰۰ فرض کنید $U = A \cup B$ مجموعهٔ مرجع و $C = (A-B) \cup (B-A)$. اگر $((A'-B)' \cap C)' = B$، کدام عبارت درست است؟

۱) $B \subsetneq A$
۲) $A \cap B = \phi$
۳) $A \subsetneq B$
۴) $A = B$

سراسری ۱۴۰۰ خ H.W فرض کنید $C = (A-B) \cup (B-A)$، حاصل $(A' \cap B')' \cap C'$ کدام است؟

۱) $A \cap B$
۲) C
۳) $A \cup B$
۴) C'

(آکادمی سینا)

سراسری ۱۴۰۱ خ — اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ مرجع U باشند، مجموعهٔ $[(A\cap B)-B]'\cap[(A\cap B)\cup(A-B)]$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) A ۲) $A-B$
۳) ϕ ۴) $A'-B'$

انخ ۱۴۰۰ — اگر متمم مجموعهٔ $(A-B)\cup(B-A)$، برابر $A\cap B$ باشد، کدام عبارت درست است؟ (U مجموعهٔ مرجع است)

۱) $A\subset B$
۲) $A\subseteq B'$
۳) $A\cup B=U$
۴) $A=\phi$ یا $B=\phi$

انخ ۱۴۰۰ خ — اگر $A\subseteq B'$، حاصل $((A-B)\cup(B-A))'$ کدام است؟

۱) $A\cap B$
۲) $A\cup B$
۳) $A'\cap B'$
۴) $A'\cup B'$

ویژگی‌های اجتماع، اشتراک و متمم در یک نگاه

خودتوانی: $\begin{cases} A\cup A = A \\ A\cap A = A \end{cases}$	جابه‌جایی: $\begin{cases} A\cup B = B\cup A \\ A\cap B = B\cap A \end{cases}$
شرکت‌پذیری: $\begin{cases} A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C \\ A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C \end{cases}$	توزیع‌پذیری (فاکتورگیری): $\begin{cases} A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C) \\ A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C) \end{cases}$
$\begin{cases} A\cup(A\cap B) = A \\ A\cap(A\cup B) = A \end{cases}$ جذب $\begin{cases} A\cup(A'\cap B) = A\cup B \\ A\cap(A'\cup B) = A\cap B \end{cases}$ شبه جذب (هم‌پوشان)	دمورگان: $\begin{cases} (A\cup B)' = A'\cap B' \\ (A\cap B)' = A'\cup B' \end{cases}$
$\begin{cases} A\cup U = U \quad , \quad A\cup \phi = A \\ A\cap U = A \quad , \quad A\cap \phi = \phi \end{cases}$	اجتماع همیشه بزرگ‌تر، اشتراک همیشه کوچک‌تر: $\begin{cases} A\subseteq B \Longleftrightarrow A\cup B = B \\ A\subseteq B \Longleftrightarrow A\cap B = A \end{cases}$
$A\cup B = A\cap B \Longleftrightarrow A=B$	$A\cap B = A \Longleftrightarrow A\cup B = B$
$[(A\cup B = A\cup C) \wedge (A\cap B = A\cap C)] \Rightarrow B=C$	حذف‌پذیری ندارد: $\begin{cases} A\cup B = A\cup C \not\Rightarrow B=C \\ A\cap B = A\cap C \not\Rightarrow B=C \end{cases}$
$A\cap B=\phi \Longleftrightarrow (A\subseteq B' \wedge B\subseteq A')$ $\begin{cases} U' = \phi \\ \phi' = U \end{cases}$	$\begin{cases} A=B \Longleftrightarrow A'=B' \\ A\subseteq B \Longleftrightarrow B'\subseteq A' \end{cases}$ $\begin{cases} A\cap A' = \phi \\ A\cup A' = U \end{cases}$

ویژگی‌های تفاضل دو مجموعه در یک نگاه

$A-B = A\cap B' = A-(A\cap B) = (A\cup B)-B = B'-A'$	
$A\cap B=\phi \Longleftrightarrow (A-B=A \,,\, B-A=B)$ اول = تفاضل ← جدا از هم	$A\subseteq B \Longleftrightarrow A-B=\phi$ (اثبات = بزرگ ـ کوچک)
$A-B = B-A \Longleftrightarrow A=B$	$\begin{cases} A-A=\phi \\ \phi-A=\phi \end{cases}$ $\begin{cases} A-\phi = A \\ A-A' = A \end{cases}$
$\begin{cases} (A\cup B)-C = (A-C)\cup(B-C) \\ (A\cap B)-C = (A-C)\cap(B-C) \end{cases}$ تفاضل از راست، روی اجتماع و اشتراک توزیع‌پذیر است.	$\begin{cases} A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C) \\ A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C) \end{cases}$ تفاضل از چپ روی اجتماع و اشتراک توزیع‌پذیر نیست !!
اشتراک روی تفاضل توزیع‌پذیر است. اجتماع روی تفاضل توزیع‌پذیر نیست !!	$\begin{cases} A\cap(B-C) = (A\cap B)-(A\cap C) \\ A\cup(B-C) = ?? \end{cases}$
$A-B = A-C \not\Rightarrow B=C$ حذف‌پذیری ندارد	$A-(B-C) \neq (A-B)-C$ شرکت‌پذیری ندارد

ضرب دکارتی دو مجموعه ← ضرب دکارتی مجموعهٔ A در مجموعهٔ B، مجموعه‌ای است شامل تمام زوج‌های مرتبی که مؤلفهٔ اول آن‌ها از A و مؤلفهٔ دوم آن‌ها از B است.

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\} \rightarrow (x,y) \in (A \times B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B)$$

مثلاً:

$$A = \{1,2,3\} \quad , \quad B = \{a,b\}$$

$$\begin{cases} A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\} \\ B \times A = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\} \end{cases}$$

واضح است که

① ضرب دکارتی دو مجموعه خاصیت جابه‌جایی ندارد. $A \times B \neq B \times A$

②

$$n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \cdot n(B)$$

سراسری ۱۴۰۱ مجموعه‌های A، B، C و D را در نظر بگیرید: تعداد اعضای C، دو واحد بیشتر از A و تعداد اعضای D، سه واحد کمتر از B است. اگر تعداد اعضای مجموعهٔ $C \times B$، ۲۵ درصد بیشتر از تعداد اعضای مجموعهٔ $A \times B$ و ۱/۵ برابر تعداد اعضای مجموعهٔ $A \times D$ باشد، اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های A و B چقدر است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۱۰

تذکر

$$A^2 = A \times A = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in A\}$$

مثلاً:

$$A = \{a,b\} \Rightarrow A^2 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$$

تست ۱۴۰۳ اگر $A = \{2^k \mid k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 10\}$، آنگاه مجموعهٔ $B^2 - A^2$ چند عضو دارد؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۶
۴) ۷

(گزینهٔ ۱)

ویژگی‌های مهم

① $\phi \times A = A \times \phi = \phi$

نتیجه ۱: $\phi \times \phi = \phi$

نتیجه ۲: $A \times B = \phi \iff (A = \phi \vee B = \phi)$

نتیجه ۳: $A \times B = B \times A \iff (A = \phi \vee B = \phi \vee A = B)$

نتیجه ۴: $A \times B = B \times A \overset{A \neq \phi}{\underset{B \neq \phi}{\iff}} A = B$

تست اگر $A = \{y+2, 5, z\}$ ، $B = \{x+1, 4, -2\}$ و $A \times B = B \times A$ ، آن‌گاه $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

سراسری ۹۹ در مجموعه‌های چهارعضوی $A = \{x+2, 1, 4, y\}$ و $B = \{5, 7, z, t-1\}$ ، فرض کنید $A \times B = B \times A$ باشد. تعداد مجموعه‌ها به صورت $\{(x, y), (z, t)\}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۶

② $(A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \iff (A \times B) \subseteq (C \times D)$

دو یا چند رابطه زیرمجموعه را می‌توان نظیر به نظیر ضرب دکارتی کرد.

نتیجه ۱: $(A = C \wedge B = D) \iff A \times B = C \times D$

نتیجه ۲: $A \times B = A \times C \iff B = C$

ضرب دکارتی، خاصیت حذف‌پذیری دارد.

سراسری اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند و $(A \times B) - (B \times A) = \phi$ ، آن‌گاه کدام مجموعه غیرتهی است؟

۱) $A \cap B$ ۲) $A - B$
۳) $B - A$ ۴) $(B \times A) - (A \times B)$

۳) ضرب دکارتی روی تمام عملگرهای جبر مجموعه‌ای (اجتماع، اشتراک، تفاضل) توزیع‌پذیر است.

$$\begin{cases} A\times(B \bigcirc C) = (A\times B) \bigcirc (A\times C) \\ (B\bigcirc C)\times A = (B\times A) \bigcirc (C\times A) \end{cases}$$

۴) ضرب دکارتی و اشتراک می‌توانند، با حفظ ترتیب مجموعه‌ها، جایشان را عوض کنند.

$$(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$$

نتیجه:

$$\boxed{(A\times B)\cap(B\times A) = (A\cap B)\times\underbrace{(B\cap A)}_{A\cap B} = (A\cap B)^2}$$

سراسری ۹۳ اگر $A=\{x\in \mathbb{N} : 5<x^2<50\}$ و $B=\{3k-2 \mid k\in \mathbb{Z} \wedge 1\leq k\leq 4\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های $(A\times B)\cap(B\times A)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸
۳) ۱۶ ۴) ۳۲

سراسری ۹۲ H.W اگر $A=\{2k-1 \mid k\in \mathbb{Z} \wedge 1\leq k\leq 5\}$ و $B=\{k\in \mathbb{Z} : |k-3|\leq 2\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $(A\times B)\cap(B\times A)$ چند عضو دارد؟ (گزینه ۳)

۱) ۶ ۲) ۸
۳) ۹ ۴) ۱۶

سراسری اگر A، B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند و $(A\times B)\cap(B\times A)=\phi$، آن‌گاه مجموعهٔ $A-B$ کدام است؟

۱) A ۲) ϕ
۳) B ۴) $B-A$

تست اگر A مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی و $B=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$ ، آن‌گاه هر یک از مجموعه‌های زیر چند عضو دارد؟

الف) $A \cup B$

ب) $A - B$

پ) $A \Delta B$

ت) $(A\times B)\cap(B\times A)$

ث) $(A\times B)\cup(B\times A)$

ج) $(A\times B)-(B\times A)$

چ) $A^۲ \cap B^۲$

ح) $A^۲ - B^۲$

خ) $(A\times B)-(B\times B)$

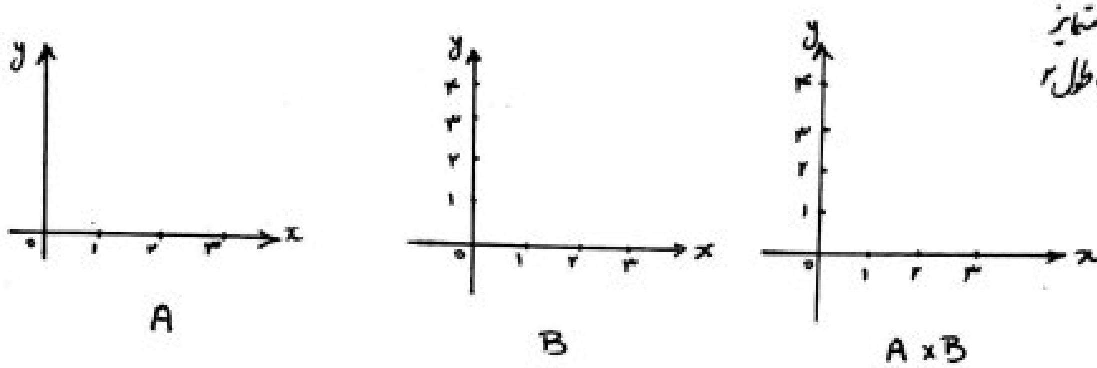
تست) اگر $A=\{x\in\mathbb{R} \mid 1\leq x\leq 3\}$ و $B=\{4\}$، آن‌گاه نمودار مختصاتی مجموعهٔ $A\times B$ کدام است؟

۱) ناحیهٔ بین دو خط موازی

۲) سطح یک مستطیل

۳) دو نقطهٔ متمایز

۴) پاره‌خطی به طول ۲



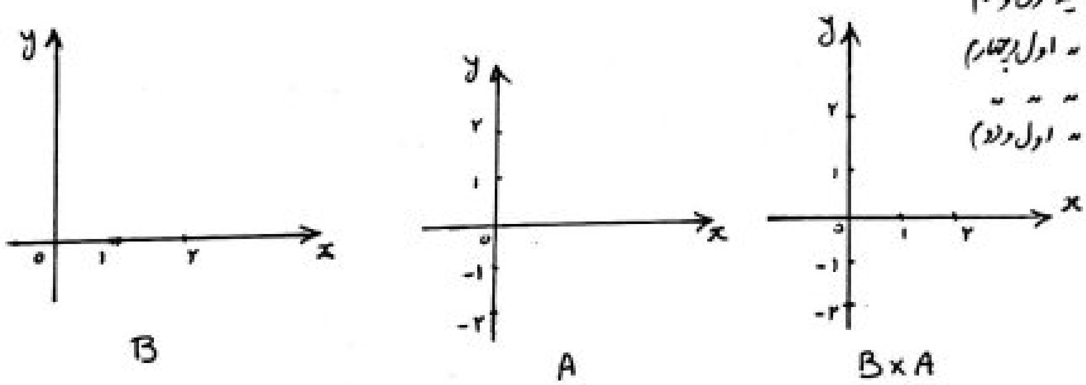
تست) اگر $A=[-2,2]$ و $B=[1,2]$، آن‌گاه نمودار مختصاتی $B\times A$ کدام است؟

۱) مستطیلی در ناحیه اول و دوم

۲) " " " اول و چهارم

۳) مربعی " " " "

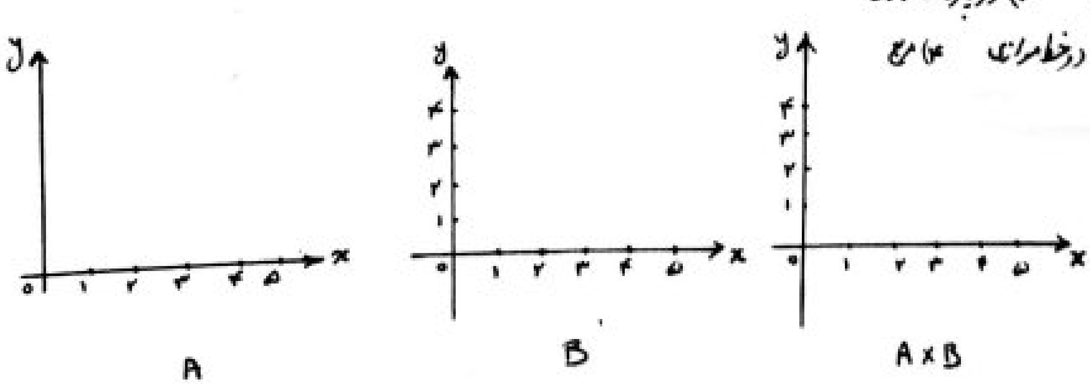
۴) مربعی " " اول و دوم



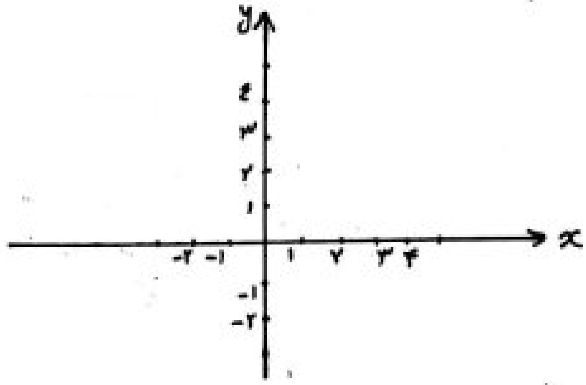
تست) اگر $A=(1,5]$ و $B=\{3,4\}$، آن‌گاه نمودار مختصاتی $A\times B$ کدام است؟

۱) مستطیل ۲) دو پاره‌خط موازی

۳) ناحیهٔ بین دو خط موازی ۴) مربع

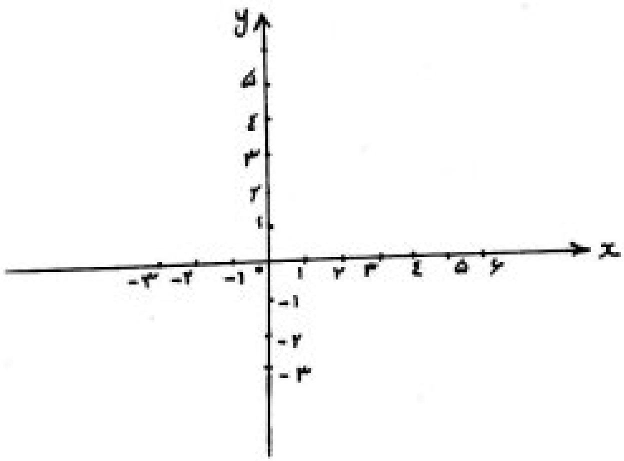


سراسری ۹۹ خ اگر $A=[1,4]$ و $B=(-1,3]$ باشند، مساحت نمودار $(A\times A)-(B\times B)$ در صفحهٔ مختصات کدام است؟



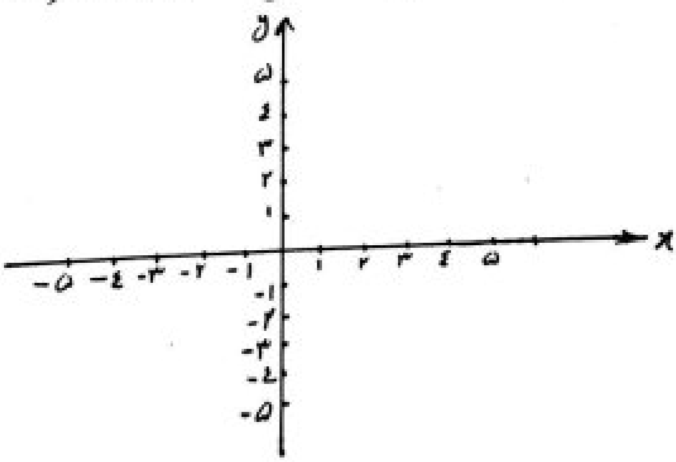
۱) ۴ ۲) ۵
۳) ۶ ۴) ۷

تمرین H.W اگر $A=[-2,5)$ و $B=[0,3]$ ، آن‌گاه مساحت نمودار $(A\times B)-A^2$ در صفحهٔ مختصات کدام است؟ (گزینه ۴)



۱) ۲۸ ۲) ۲۱
۳) ۳۲ ۴) صفر

تست اگر $A=[-4,4]$ و $B=[1,5]$ ، آن‌گاه فاصلهٔ دورترین نقطهٔ سطح نمودار $(A\times A)-(A\times B)$ از مبدأ مختصات کدام است؟



۱) $\sqrt{14}$ ۲) $\sqrt{17}$
۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{2}$

شمارش بدون شمردن

ترکیبات : روش های شمارش را بررسی می‌کند و مبتنی بر دو اصل مهم زیر است :

① اصل جمع

اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد ، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد ، برای انجام آن کار ، $m+n$ روش وجود دارد .

(اصل جمع قابل تعمیم است)

مثال : می‌دانیم انتخاب یک دانش آموز از بین سه دانش آموز به ۳ روش و انتخاب یک دانشجو از بین پنج دانشجو به ۵ روش ممکن است . به چند طریق می‌توان یک دانش آموز یا یک دانشجو انتخاب کرد؟

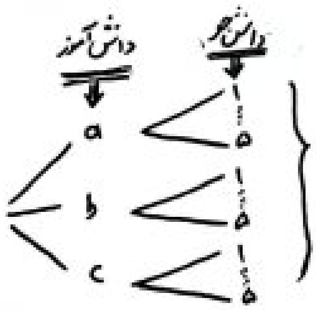
$۳ + ۵ = ۸$

② اصل ضرب

اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد ، به طوری که برای انجام مرحلهٔ اول m روش و برای انجام هرکدام از این m روش ، مرحلهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد ، کار مورد نظر با $m.n$ روش قابل انجام است .

(اصل ضرب قابل تعمیم است)

مثال ، در مثال قبل به چند طریق می‌توان یک دانش آموز و یک دانشجو انتخاب کرد؟



$۳ \times ۵ = ۱۵$

مثال عبارت های زیر هرکدام چند جمله دارند؟

الف) $(r+s).(a+b+c)$

۲ × ۳ = ۶ جمله

ب) $(x+y+z).(t+u).(a+d)$

۳ × ۲ × ۲ = ۱۲ ✓

مثال با استفاده از سه رنگ "آبی، قرمز، سبز" به چند طریق می‌توان خانه‌های زیر را رنگ کرد به طوری که هر دو خانه‌ی مجاور متفاوت باشند؟

?	?	?	?	?	?

۳ حالت × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ = ۳ × ۲^۵ = ۹۶ ✓

مثال با استفاده از حروف a، b، c چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

?	?	?	?	?

۳ حالت × ۳ × ۳ × ۳ × ۳ = ۳^۵ = ۲۴۳ ✓

* اگر قرار باشد هیچ دو حرف مجاوری یکسان نباشند، چطور؟

۳ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ = ۳ × ۲^۴ = ۴۸ ✓

مثال از بین سه داوطلب رشته ریاضی، ۴ داوطلب رشته انسانی و ۵ داوطلب رشته تجربی به چند روش می‌توان ۲ نماینده انتخاب کرد به طوری که هر دو از یک گروه نباشند؟

حل: (انسانی و تجربی) یا (انسانی و ریاضی) یا (تجربی و ریاضی)

(۴ × ۵) + (۴ × ۳) + (۵ × ۳ حالت) = ۴۷ ✓

و ⟷ ×

یا ⟷ +

مثال افراد a_1، a_2، a_3 از شهر A، b_1، b_2 و b_3 از شهر B و c_1، c_2، c_3، c_4 از شهر C قرار است سوار یک وسیله نقلیه با ظرفیت ۳ نفر شوند. می‌دانیم a_1 با b_1، a_2 با b_3 و a_3 با c_1, c_2 سازگار نیستند و نمی‌توانند با هم سوار شوند. اگر قرار باشد از هر شهر فقط یک نفر سوار شود، به چند طریق این عمل امکان‌پذیر است؟

شهر A		شهر B		شهر C	
a_1	و	b_3 یا b_2	و	?	→ ۱ × ۲ × ۴ = ۸
a_2	و	b_1 یا b_2	و	?	→ ۱ × ۲ × ۴ = ۸
a_3	و	?	و	c_3 یا c_4	→ ۱ × ۳ × ۲ = ۶

یا / یا

+ → ۲۲ ✓

تمرین H.W : خودروی سمند در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور و ۲ نوع جعبه دنده (اتوماتیک و کلاچی) تولید می‌شود.

الف) چند نوع مختلف از این خودرو تولید می‌شود؟

مدل و رنگ و حجم موتور و جعبه دنده

۵ حالت × ۱۰ × ۳ × ۲ = ۳۰۰ ✓

ب) چند نوع مختلف با رنگ سفید تولید می‌شود؟

۵ × ۱ × ۳ × ۲ = ۳۰

پ) چند نوع مختلف با رنگ سفید و اتوماتیک تولید می‌شود؟

تمرین H.W در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، ۸ تا ۱۰ خیابان، در هر خیابان ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه ۲۰ تا ۲۵ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر کارخانه‌ها در این شهرک را بیابید. (جواب: ۸۰۰۰ و ۱۵۰۰۰)

مثال چند ماتریس ۲×۳ با درایه‌های ۰ و ۱ وجود دارد؟

شش درایه ← $\begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}_{2\times 3}$

۱ یا ۰ | ۱ یا ۰ | ۱ یا ۰ | ۱ یا ۰ | ۱ یا ۰ | ۱ یا ۰

۲ حالت × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ $= 2^6 = 64$

مثال مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d,e\}$

الف) دارای چند زیرمجموعه است؟

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با: 2^n

a, b, c, d, e (هست یا نیست)

۲ حالت × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ $= 2^5 = 32$ ✓

ب) دارای چند زیرمجموعه شامل عضو a است؟

a, b, c, d, e (a: هست)

۱ حالت × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ $= 2^4 = 16$ ✓

پ) دارای چند زیرمجموعه فاقد عضو b است؟

a, b, c, d, e (b: نیست)

۲ حالت × ۱ حالت × ۲ × ۲ × ۲ $= 2^4 = 16$ ✓

ج) دارای چند زیرمجموعه شامل a و فاقد b است؟

a, b, c, d, e (a: هست، b: نیست)

۱ حالت × ۱ × ۲ × ۲ × ۲ $= 2^3 = 8$ ✓

* نتیجه: در هنگام محاسبهٔ کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه، به ازای هر شامل (فاقد) یک واحد از توان کم کنید.

مثال به چند طریق می‌توان به پنج سؤال تستی سه گزینه‌ای پاسخ داد درصورتی که

الف) هیچ محدودیتی نباشد؟ که هر سؤال ۴ حالت دارد (گزینه ۱، گزینه ۲، گزینه ۳، جواب ندادن)

سؤال ۱ | سؤال ۲ | سؤال ۳ | سؤال ۴ | سؤال ۵

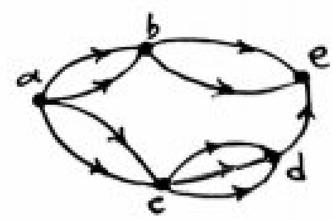
۴ حالت × ۴ × ۴ × ۴ × ۴ $= 4^5 = 1024$ ✓

ب) پاسخ به همهٔ سؤالات الزامی باشد؟

سؤال ۱ | سؤال ۲ | سؤال ۳ | سؤال ۴ | سؤال ۵

۳ حالت × ۳ × ۳ × ۳ × ۳ $= 3^5 = 243$ ✓

مثال: در شکل زیر به چند طریق می‌توان از a به e رفت؟



abe یا acde

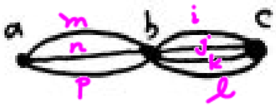
۲ × ۲ حالت + ۱ × ۳ × ۲ حالت $= 10$ ✓

هرکس بد ما به خلق گوید
ما چهرهٔ دل نخراشیم

ما خوبی او به خلق گوییم
تا هر دو دروغ گفته باشیم

مثال: با توجه به شکل مقابل به چند طریق می‌توان از a به c رفت و برگشت در صورتی

الف) یال‌های رفت و برگشت تکرار نشوند؟



رفت: a b c و برگشت: c b a

۳ حالت × ۴ × ۳ × ۲ = ۷۲ ✓

ب) مسیر رفت و برگشت یکی نباشد؟

mi , mj , mk , ml
ni , nj , nk , nl
pi , pj , pk , pl

رفت ۱۲ مسیر × برگشت ۱۱ = ۱۳۲ ✓

مثال: چند عدد پنج رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟ (تکرار ارقام مجاز است)

توجه: ارقام از ۰ تا ۹ (۱۰ حالت)

صفر نمی‌تواند

۹ حالت × ۱۰ × ۱۰ × ۱۰ × ۲ (۰ یا ۵) → ۱۸۰۰۰ ✓

مثال: چند عدد پنج رقمی مضرب ۵ وجود دارد که دو رقم سمت چپ آنها بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد؟ (تکرار ارقام مجاز است)

۸	۵
۶	۸
۵	۱
۳	۴
۱	۷

۵ × ۱۰ × ۱۰ × ۲ (۰ یا ۵) = ۱۰۰۰ ✓

مثال: چند عدد چهار رقمی وجود دارد که بزرگتر از ۴۰۰۰ باشد؟

الف) تکرار مجاز است.

۴ تا ۹: ۶ حالت × ۱۰ × ۱۰ × ۱۰ = ۶۰۰۰ − ۱ = ۵۹۹۹ ✓ (خود ۴۰۰۰)

راه دوم: ۹۹۹۹ − ۴۰۰۰ = ۵۹۹۹ ✓

ب) تکرار مجاز نیست.

۴ تا ۹: ۶ حالت × ۹ × ۸ × ۷ = ۳۰۲۴ ✓

مثال: چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۴۵۰۰ وجود دارد؟

الف) تکرار مجاز است. ۹۹۹۹ − ۴۵۰۰ = ۵۴۹۹ ✓

ب) تکرار مجاز نیست.

شروع با ۴: (۴) ۱ حالت × (۵ تا ۹) ۵ × ۸ × ۷ = ۲۸۰

یا

شروع با غیر ۴: (۵ تا ۹) ۵ حالت × ۹ × ۸ × ۷ = ۲۵۲۰

+ → ۲۸۰۰ ✓

تست H.W: تعداد اعداد پنج رقمی فرد با ارقام متمایز، به طوری که رقم صدگان آن ۲، عددی اول باشد، کدام است؟

۱) ۸۱۹۲ ۲) ۶۴۵۰ ۳) ۵۱۹۹ ۴) ۴۹۹۸

(گزینه ۴)

صدگان ۲: غیرصفر ? ? (۲) ? فرد ← {۱، ۳، ۵، ۷، ۹}

یا

صدگان غیر ۲: غیرصفر ? ? اول {۳، ۵، ۷} ? فرد

مثال: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد پنج رقمی زوج و بدون تکرار ارقام وجود دارد؟

صفر در یکان نقش داده و تکرار مجاز نیست

صفر در یکان هست / یا / صفر در یکان نیست

۱ حالت × ۲ × ۳ × ۴ حالت = ۲۴

۲ حالت × ۱ × ۲ × ۳ × ۳ حالت = ۳۶

$\xrightarrow{+}$ ۶۰ ✓

سراسری ۹۹: تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش پذیر بر ۵، با ارقام غیر تکراری، کدام است؟

۱) ۹۴۸
۲) ۹۵۲
۳) ۹۶۸
۴) ۹۷۲

صفر در یکان هست / یا / صفر در یکان نیست

۱ حالت × ۷ × ۸ × ۹ = ۵۰۴

۱ حالت × ۷ × ۸ × ۸ = ۴۴۸

$\xrightarrow{+}$ ۹۵۲ ✓

تست: برای باز کردن یک قفل رمزی چهار رقمی فرد که می‌دانیم رقم ۵ در آن به کار نرفته است، درصورتی که امتحان کردن هر رمز ۷ ثانیه طول بکشد، حداکثر چند ساعت وقت لازم است؟

تکرار مجاز است و صفر می‌تواند اول بیاید

۱) ۶ ✓ ۲) ۸٫۱ ۳) ۷٫۲۴ ۴) ۷٫۵

فرد ← {۱، ۳، ~~۵~~، ۷، ۹}

۴ حالت × ۹ × ۹ × ۹ = ۲۹۱۶ $\xrightarrow{\times 7 \text{ ثانیه}}$ ۲۰۴۱۲ ثانیه $\xrightarrow{\div 3600}$ ۵٫۷ ≃ ۶

مثال: چند عدد پنج رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن عددی زوج باشد؟ (تکرار مجاز است)

به دلخواه

غیرصفر

۹ حالت × ۱۰ × ۱۰ × ۱۰ × ۵ = ۴۵۰۰۰ ✓

if جمع چهار رقم اول = فرد → رقم یکان باید فرد باشد ← {۱، ۳، ۵، ۷، ۹}

if 〃 〃 〃 = زوج → 〃 〃 زوج 〃 ← {۰، ۲، ۴، ۶، ۸}

سراسری ۹۹ خ: تعداد اعداد چهار رقمی با ارقام غیر تکراری که شامل رقم ۵ باشند کدام است؟

۱) ۱۸۴۸ ✓
۲) ۱۷۹۲
۳) ۱۷۴۸
۴) ۱۶۵۸

روش مستقیم

۵ ؟ ؟ ؟: ۱ حالت × ۹ × ۸ × ۷ = ۵۰۴

غیرصفر ؟ ۵ ؟ ؟: ۸ × ۱ حالت × ۸ × ۷ = ۴۴۸

غیرصفر ؟ ؟ ۵ ؟: ۸ × ۸ × ۱ حالت × ۷ = ۴۴۸

غیرصفر ؟ ؟ ؟ ۵: ۸ × ۸ × ۷ × ۱ حالت = ۴۴۸

$\xrightarrow{+}$ ۱۸۴۸

روش متمم

کل ← غیرصفر: ۹ حالت × ۹ × ۸ × ۷ = ۴۵۳۶

فاقد ۵ ← غیرصفر: ۸ حالت × ۸ × ۷ × ۶ = ۲۶۸۸

$\xrightarrow{-}$ ۱۸۴۸

تست چند عدد چهاررقمی وجود دارد که دقیقاً یک رقم آن ۵، برابر ۵ باشد؟ (تکرار مجاز است)

۱) ۱۱۲۸ ۲) ۲۶۷۳ ۳) ۲۸۲۰ ۴) ۳۱۶۰

$\underset{\text{۱ حالت}}{۵} \times \underset{۹}{?} \times \underset{۹}{?} \times \underset{۹}{?} = ۷۲۹$

غیرصفر

$\underset{\text{۸ حالت}}{?} \times \underset{۱}{۵} \times \underset{۹}{\ } \times \underset{۹}{\ } = ۶۴۸ \times ۳ = ۱۹۴۴$

$+ \rightarrow ۲۶۷۳$

مثال

الف) چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

غیرصفر

$\underset{\text{۹ حالت}}{?} \times \underset{۹}{?} \times \underset{۸}{?} \times \underset{۷}{?} = ۴۵۳۶$

ب) چند عدد چهاررقمی وجود دارد که حداقل یکی از ارقام آن تکراری باشد؟

کل اعداد چهاررقمی $\rightarrow$ $\underset{\text{۹ حالت}}{?} \times \underset{۱۰}{?} \times \underset{۱۰}{?} \times \underset{۱۰}{?} = ۹۰۰۰$

روش متمم

جواب $= ۹۰۰۰ - \underbrace{۴۵۳۶}_{\text{ارقام متمایز دارند}} = \underbrace{۴۴۶۴}_{\text{حداقل یک رقم تکراری دارند}}$

تست چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز a، b، c و d به صورت $\overline{abcd}$ وجود دارد که $2 \mid (a+d)$ برقرار باشد؟

هر دو زوج یا هر دو فرد (تا زوج شود)

۱) ۲۲۴۰ ۲) ۲۰۱۶ ۳) ۲۵۲۰ ۴) ۲۸۸۰

غیرصفر

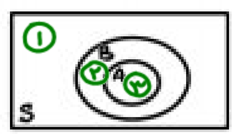
a و d هر دو زوج اند: $\underset{\text{۴ حالت}}{a} \times \underset{\ }{b} \times \underset{\ }{c} \times \underset{۴}{d}$

یا

a و d هر دو فرد اند: $\underset{\text{۵ حالت}}{a} \times \underset{\ }{b} \times \underset{\ }{c} \times \underset{۴}{d}$

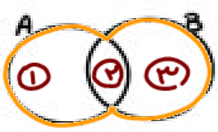
تمرین فرض کنید $S=\{a,b,c,d,e\}$ و A و B زیرمجموعه‌های S می‌باشند. تعداد زوج‌های مرتبی مانند (A, B) را بیابید به طوری که

الف) $A \subseteq B$



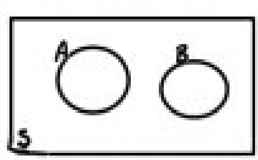
$\underset{\text{۳ حالت}}{a} \times \underset{۳}{b} \times \underset{۳}{c} \times \underset{۳}{d} \times \underset{۳}{e} = ۳^۵ = ۲۴۳$

ب) $A \cup B = S$

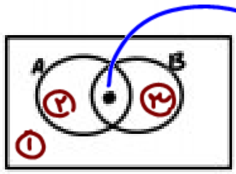


$۳^۵$

پ) $A \cap B = \phi$



ت) $n(A \cap B) = 1$



$\binom{۵}{۱} \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳$

انتخاب

$= ۵ \times ۳^۴$

تست چند زیرمجموعهٔ ۵ عضوی از مجموعهٔ اعداد طبیعی نابزرگتر از ۱۰ وجود دارد که مجموع هیچ دو عضوی از آن برابر ۱۱ نباشد؟

$\{۱, ۲, ..., ۱۰\}$

۱) ۱۲ ۲) ۲۲۶ ۳) ۱۰ ۴) ۲۵۶

جفت اعدادی که مجموع آنها برابر ۱۱ می‌باشد $\rightarrow$ (۱, ۱۰) (۲, ۹) (۳, ۸) (۴, ۷) (۵, ۶)

اگر از هر گروه یک عضو انتخاب شود آنگاه مجموع هیچ دو عضو ۱۱ نمی‌شود

$\text{۲ حالت} \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۵ = ۳۲$

جای‌گشت

جابه‌جایی اشیاء در یک "ردیف" به طوری که حالت جدیدی ایجاد شود.

مثال: با ارقام ۶، ۷، ۸ و ۹ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام وجود دارد؟

۴ حالت × ۳ × ۲ × ۱ = ۴! = ۲۴ ✓

قضیه: تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر است با n!

مثال: با حروف کلمه‌ی "دبیرستان" چند کلمه‌ی هشت حرفی وجود دارد؟ (تکرار مجاز نیست)

جایگشت ۸ حرف متمایز: ۸! = ۴۰۳۲۰

مثال: در مثال قبل چه تعداد از کلمات ساخته شده

الف) با حرف "د" شروع می‌شوند؟

۷ حرف	د

د: ثابت (۱ حالت)

۷! = ۵۰۴۰

شی ثابت در جایگشت شرکت نمی‌کند.

ب) با حرف "د" شروع و به حرف "ن" ختم می‌شوند؟

ن	۶ حرف	د

ن: ثابت، د: ثابت

۶! = ۷۲۰

پ) با حرف نقطه‌دار شروع می‌شوند؟

۷ حرف	نقطه‌دار

نقطه‌دار: ب ی ت ن

۷! × ۴ حالت = ۲۰۱۶۰

ت) به حرف نقطه‌دار ختم می‌شوند؟

ی

نقطه‌دار	۷ حرف

نقطه‌دار: ب ت ن

۳ حالت × ۷! = ۱۵۱۲۰

ث) با حرف نقطه‌دار شروع و به حرف نقطه‌دار ختم می‌شوند؟

ب ت ن

شروع با ی:

	۶ حرف	ی

۳ حالت × ۶! × ۱ حالت = ۳ × ۶!

یا

شروع با غیر ی:

؟	۶ حرف	

ب ت ن

۲ حالت × ۶! × ۳ حالت = ۶ × ۶!

یک نقطه‌دار کم شده

$+ \rightarrow$ ۹ × ۶! = ۶۴۸۰ ✓ (۶! = ۷۲۰)

مثال (EX): پنج نفر به نام های a، b، c، d و e را به چند طریق می‌توان در یک ردیف قرار داد به طوری که

الف) محدودیتی نباشد؟ ← جایگشت ۵ شی متمایز: $5! = 120$ ✓

ب) a و b همواره کنار هم باشند؟

"بجعبه"

$\underbrace{\boxed{a,b}, c, d, e}_{\text{۴ شی متمایز}} \xrightarrow{\text{جایگشت}} 4! \times \overset{\text{جایگشت داخل جعبه}}{2!} = 48$ ✓

پ) c و d هیچگاه کنار هم نباشند؟

(روش متمم) $\overset{\text{کل حالت‌ها}}{5!} - \overset{\text{حالاتی که c و d کنار هم هستند}}{4! \times 2!} = 120 - 48 = \overset{\text{حالاتی که c و d کنار هم نیستند}}{72}$ ✓

* ت) a و b کنار هم باشند و c و d کنار هم نباشند؟

a و b کنار هم باشند

$\underbrace{\underbrace{\boxed{a,b}, c, d, e}_{4! \times 2!}}_{48} = \underbrace{\underbrace{\boxed{a,b}\boxed{c,d}e}_{3! \times 2! \times 2!}}_{24} + x \rightarrow x = 24$ ✓

(a و b کنار هم اند و c و d کنار هم اند) یا (a و b کنار هم اند و c و d کنار هم نیستند)

مثال (EX): به چند طریق می‌توان ۳ کتاب ریاضی متمایز و ۴ کتاب ادبی متمایز را در قفسه‌ای چید به طوری که کتاب‌های هر درس کنار هم باشند؟

$\boxed{\text{۳ تا ریاضی}}\ \boxed{\text{۴ تا ادبی}} \xrightarrow{\text{جایگشت ۲ جعبه}} 2! \times 3! \times 4! = 288$ ✓

تست: با حروف کلمه DELAVARAN چند کلمه ۹ حرفی می‌توان نوشت به طوری که هر سه حرف A کنار هم باشند؟

۱) $7!$ ✓ ۲) $2 \times 7!$ ۳) $8!$ ۴) $\frac{9!}{3!}$

$\underbrace{\boxed{AAA}\ D E L V R N}_{\text{۷ شی متمایز}} \longrightarrow 7!$

تمرین (H.W): به چند طریق می‌توان ۵ دانش‌آموز را در یک ردیف شامل ۶ صندلی نشاند به طوری که

الف) همگی به صورت متوالی باشند؟

$\xrightarrow{\text{متوالی}} 2 \times 5! = 240$ ✓

ب) همگی به صورت متوالی باشند و دو نفر خاص (a, b) کنار هم قرار گیرند؟

$\overset{\text{متوالی}}{2} \times \underbrace{\boxed{a,b}\, c, d, e}_{4! \times 2!} = 96$ ✓

مثال: به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز و ۴ دانشجو را به صورت یک درمیان در یک صف قرار داد؟

$4! \times 3! = 144$ ✓

* اگر تعداد دانش‌آموزان برابر ۴ باشد، چه طور؟

شروع با مربع → $4! \times 4!$

یا

شروع با دایره → $4! \times 4!$

$\xrightarrow{+} 2 \times 4! \times 4!$ ✓

تست: به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز و ۴ دانشجو را به صورت یک درمیان در یک صف قرار داد به طوری که یک دانش‌آموز خاص و یک دانشجوی خاص همواره کنار هم باشند؟

a b

۱) ۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۷۲ ۴) ۱۴۴

$6 \times 3! \times 2! = 72$

تست ۱۴۰۳: با حروف کلمهٔ BARANA چند رمز شش حرفی می‌توان ساخت به طوری که سه حرف A به صورت یک درمیان باشند؟ (گزینه ۲)

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

۰,۲,۴,۶,۸ / ۱,۳,۵,۷,۹

سراسری ۱۴۰۱: چند عدد پنج رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت که ارقام آن یک درمیان زوج و فرد باشند؟

۱) ۱۸۴۰ ۲) ۱۹۲۰ ۳) ۲۱۶۰ ۴) ۲۴۰۰

غیرصفر

۴ حالت × ۵ × ۴ × ۴ × ۳ = ۹۶۰

۵ حالت × ۵ × ۴ × ۴ × ۳ = ۱۲۰۰

$\xrightarrow{+}$ ۲۱۶۰ ✓

سراسری ۱۴۰۱ خارج تجربی: ۴ کتاب متمایز با موضوع ریاضی و ۲ کتاب متمایز آمار را به چند طریق می‌توان در قفسه‌ای کنار هم قرار داد به طوری که موضوع دو کتاب مجاور هر کتاب (به جز کتاب اول و آخر) متفاوت باشد؟

۱) ۹۶ ۲) ۷۲ ۳) ۴۸ ۴) ۲۴

$R_1 R_2 A_1 A_2 R_3 R_4$

$4! \times 2! = 48$ ✓

مثال به چند روش می‌توان با افراد یک کلاس ۸ نفری،

الف) یک صف ۸ نفری تشکیل داد؟

جایگشت ۸ نفر : $8!$

ب) یک صف ۷ نفری تشکیل داد؟

$\underset{8\text{ حالت}}{?}\times\underset{7}{?}\times\underset{6}{?}\times\underset{5}{?}\times\underset{4}{?}\times\underset{3}{?}\times\underset{2}{?} = 8!$ ✓

نتیجه: $\boxed{\text{تعداد جایگشت‌های } (n-1) \text{ تایی } n \text{ شیء، با تعداد جایگشت‌های آن } n \text{ شیء برابر است}}$

مثال Ex پنج نفر به نام‌های a ، b ، c ، d و e قرار است در یک همایش سخنرانی کنند. به چند طریق ترتیب سخنرانی (جایگشت) این افراد ممکن است، هرگاه

الف) هیچ شرطی نباشد؟ $5! = 120$ ✓

ب) b بلافاصله بعد از a سخنرانی کند؟

جعبه بدون جایگشت

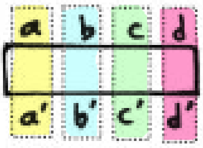
$\underbrace{\boxed{a,b}, c, d, e}_{\text{۴ شیء متمایز}} \rightarrow 4! = 24$ ✓

پ) بین a و b فقط یک نفر دیگر سخنرانی کند؟ (مهم)

$\underbrace{\boxed{a\ \underset{}{?}\ b}\ ?\ ?}_{\text{۳ شیء متمایز}}$ ؛ c یا d یا e

۳ شیء متمایز $\rightarrow 3! \times \underset{\text{جایگشت } b \text{ و } a}{2!} \times \underset{\text{حالت}}{3} = 36$

مثال Ex به چند طریق می‌توان ۸ نفر را که دو به دو برادرند، در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل نشاند به طوری که هر کس مقابل برادر خود بنشیند؟



جایگشت ۴ جعبه متمایز $\longrightarrow 4! \times \underbrace{2! \times 2! \times 2! \times 2!}_{\text{جایگشت درون هر جعبه}} = 4! \times (2!)^4 = 384$ ✓

تمرین H.W به چند طریق می‌توان ۲ دانشجو و ۶ دانش‌آموز را در یک ردیف نشاند به طوری که در دو طرف این ردیف، دانشجو بنشینند؟

جایگشت‌های با تکرار (جایگشت با اشیای تکراری)

Ex

⇐ چون جایگشت اشیای تکراری باهم، بی‌مورد است (حالت جدیدی ایجاد نمی‌کند)، با تقسیم کردن از کل جایگشت‌ها حذف می‌شود.

جایگشت‌های سه حرف x, x, y

$yxx,\ xyx,\ xxy$

$\cancel{yxx},\ \cancel{xxy},\ \cancel{xyx}$

$\frac{3!}{2!} = 3$

جایگشت‌های سه حرف x, y, z

$xyz,\ yxz,\ zxy$

$xzy,\ yzx,\ zyx$

$3! = 6$

که حذف جایگشت ۲ تا x با هم

مثال (Ex): با ارقام ۱، ۲، ۲، ۳، ۴ چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت؟

۱۲۳۲۴

۱۲۳۲۴

ابتدا همه اشیا را متمایز فرض کنید.

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

حذف جایگشت ۲ تا ۲ با هم

مثال (Ex): با ارقام ۱، ۲، ۲، ۲، ۳، ۳، ۳، ۴، ۴، ۵ چند عدد ده رقمی می‌توان نوشت؟

$$\frac{10!}{3! \times 3! \times 2!} = \frac{10 \times \cancel{9 \times 8} \times 7!}{\cancel{72}} = 50400$$

۳ تا ۲، ۳ تا ۳، ۲ تا ۴

مثال: با حروف کلمهٔ «ریاضی دانان»

الف) چند رمز ده حرفی می‌توان ساخت؟

$$\frac{10!}{3! \times 2! \times 2!}$$

۳ تا «الف»، ۲ تا «ی»، ۲ تا «ن»

ب) چند رمز ۹ حرفی می‌توان ساخت؟

همان (الف)

مثال (Ex): با حروف $a, a, b, a, c, c, d, d, d$ می‌خواهیم روی تعدادی از اجناس کد ۹ حرفی ثبت کنیم.

الف) چه تعداد از اجناس را می‌توانیم کدگذاری کنیم؟

$$\frac{9!}{3! \times 2! \times 3!} = 7! = 5040$$

ب) در چه تعداد از کدها، سه حرف d کنار هم اند؟

$\boxed{ddd}\ a, a, a, b, c, c$

$$\frac{7!}{3! \times 2!}$$

قضیهٔ جایگشت با تکرار

Ex

اگر n شی مفروض باشند به طوری که n_1 تای آن‌ها از نوع اول و یکسان، n_2 تای آن‌ها از نوع دوم و یکسان، ...، و n_k تای آن‌ها از نوع k اُم و یکسان باشند، آن‌گاه تعداد جایگشت‌های این n شی برابر است با

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!} = q \in \mathbb{N}$$

(توجه کنید: $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$)

نتیجه

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k \le n \Rightarrow n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k! \mid n!$$

مثلاً

$$2 + 3 + 5 \le 12 \rightarrow 2! \times 3! \times 5! \mid 12!$$

$$3! \times 7! \times 9! \nmid 18!$$

$$3 + 7 + 9 \not\le 18$$

تمرین (H.W): اگر $n \in \mathbb{N}$، نشان دهید $2^{3n} \times 3^n \mid (4n)!$

تست Ex: با ارقام ۰، ۰، ۱، ۲، ۲، ۲، ۳ و ۴ چند عدد هشت رقمی وجود دارد؟

۱) ۳۳۶۰
۲) ۴۷۴۰
۳) ۲۵۲۰ ✓
۴) ۲۱۰۰

غیرصفر | ← ۷ رقم →

$$\frac{\cancel{6}\text{حالت} \times 7!}{\cancel{3!} \times 2!} = \frac{7!}{2!} = \frac{5040}{2} = 2520 \checkmark$$

۲ تا ۳ — ۲ تا صفر

(گزینه ۳)

تست H.W: در سؤال بالا چند عدد هشت رقمی زوج وجود دارد؟

۱) ۱۲۰۰
۲) ۷۲۰
۳) ۱۹۲۰
۴) ۲۱۰۰

سراسری ۹۲ تجربی: تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ system به طوری که s ها کنار هم نباشند؟

۱) ۱۲۰
۲) ۲۴۰
۳) ۱۸۰
۴) ۳۶۰

کل حالات

$$\frac{6!}{2!} - 5! = 360 - 120 = 240 \checkmark$$

۲ تا s

$\boxed{ss}ytem$

تمرین H.W: با حروف a، a، b، b، c، c، c، e، e، e چند رمز ده حرفی می‌توان ساخت که حروف صدادار کنار هم باشند؟

$\boxed{a,a,e,e,e}, b, b, c, c, c$

۶ شی → $\frac{6!}{2! \times 3!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 600 \checkmark$

تمرین H.W: در چه تعداد از جایگشت‌های حروف کلمهٔ SOCIOLOGICAL.

الف) دو حرف A و G کنار هم‌اند؟

ب) همگی با عبارت GAS شروع می‌شوند؟

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2 b^1 + 3a^1 b^2 + b^3$$

a^3 → aaa

$a^2 b^1$ → aab, aba, baa → $\frac{3!}{2!} = 3$

تعداد جایگشت‌های جمله

تست: در بسط عبارت $(x+y+z)^7$، ضریب جملهٔ $x^2y^2z^3$ کدام است؟

۱) ۱۲۰
۲) ۲۱۰ ✓
۳) ۶۰
۴) ۷۲

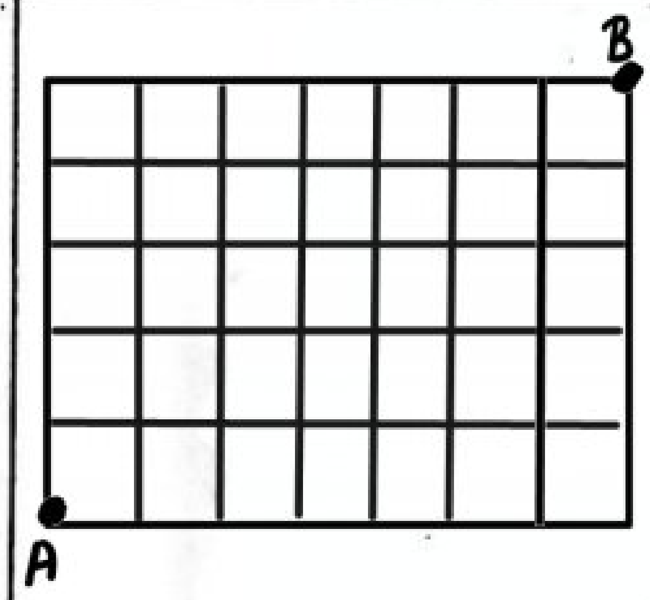
$$x^2y^2z^3 = xxyyzzz \xrightarrow{\text{جایگشت}} \frac{7!}{2! \times 2! \times 3!} = 210$$

تمرین H.W: ضریب جملهٔ x^2y^3z در بسط عبارت $(2x-y+z)^6$ کدام است؟

۱) ۱۲۰
۲) ۲۴۰
۳) −۱۲۰
۴) −۲۴۰

$$(2x)^2 \cdot (-y)^3 \cdot z = -4\, x^2y^3z$$

مثال در شکل مقابل به چند روش می‌توان با کمترین حرکت، از نقطهٔ A به نقطهٔ B رسید، به طوری که



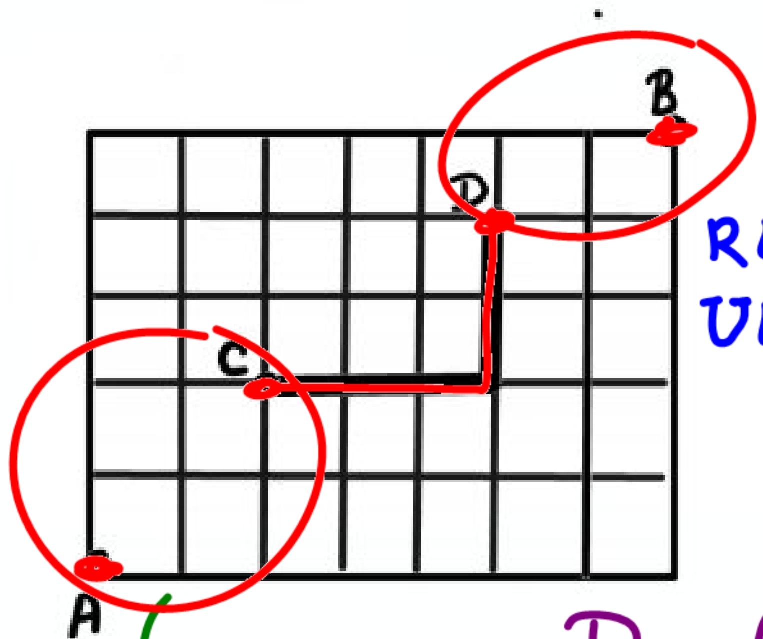
الف) هیچ شرطی نباشد؟

(R) ۷ تا راست
(U) ۵ تا بالا
۱۲ حرکت

روش۱ → RRRRRRUUUUUR
روش۲ → RUUURRRUURRR
روش۳ → RURURURURURR
⋮

جایگشت ۱۲ حرف → $\frac{12!}{7!\times 5!} = 792$ (R تا ۷، U تا ۵)

ب) از نقطهٔ C بگذریم؟



A به C (R تا ۲، U تا ۲) ۴ حرکت و C به B (R تا ۵، U تا ۳) ۸ حرکت

$\frac{4!}{2!\times 2!} \times \frac{8!}{5!\times 3!} = 336$ ✓

پ) از نقطهٔ D نگذریم؟

کل حالات − (A به D (۹ حرکت: R تا ۵، U تا ۴) و D به B (۳ حرکت: R تا ۲ و U یکی))

$\frac{9!}{5!\times 4!} \times \frac{3!}{2!}$

$= 792 - \underbrace{378}_{\text{از D بگذرد}} = 414$ ✓

ت) از نقطهٔ C و از نقطهٔ D بگذریم؟

A به C و C به D و D به B

$\frac{4!}{2!\times 2!} \times \frac{5!}{3!\times 2!} \times \frac{3!}{2!} = 180$ ✓

ث) از نقطهٔ C بگذریم و از نقطهٔ D نگذریم؟

$C \cap D' = C - D = C - (C \cap D)$

$336 - 180 = 156$ ✓

ج) از نقطهٔ C یا از نقطهٔ D بگذریم؟ (یا: $\cup$)

از C بگذریم + از D بگذریم − از C,D بگذریم

$336 + 378 - 180 = 534$ ✓

چ) نه از نقطهٔ C و نه از نقطهٔ D بگذریم؟ H.W

$\underbrace{C' \cap D'}_{(C\cup D)'} = S - (C \cup D)$

$= 792 - 534 = 258$ ✓

ح) از خط پررنگ بگذریم؟ H.W

A به C و C به D و D به B

$\frac{4!}{2!\times 2!} \times 1 \times \frac{3!}{2!} = 18$ ✓

تمرین ۲۰۷ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ mathematics ، عبارت mat یک بار دیده می‌شود؟

$\underbrace{\boxed{mat}\,hematics} - \underbrace{\boxed{mat}\,\boxed{mat}\,heics}$

مثال پنج نفر به نام‌های a ، b ، c ، d و e قرار است به ترتیب وارد یک سالن شوند. این عمل (جایگشت) به چند روش ممکن است هرگاه

الف) هیچ شرطی نباشد؟

$5! = 120$ ✓

ب) a بعد از b وارد شود؟ (نه لزوماً بلافاصله)

ورود به سالن → $\underbrace{\dots a \dots b \dots}$ قفلی بزن ☺

$\frac{5!}{2!} = 60$ حذف جایگشت a ، b

پ) a بعد از b و b بعد از c وارد شود؟

→ $\dots a \dots b \dots c \dots$

$\frac{5!}{3!} = 20$ ✓

ت) a بعد از b و c بعد از d وارد شود؟

$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$ ✓

نکته: تعداد جایگشت‌های n شئ متمایز، که ترتیب k تا از آنها معلوم باشد، برابر است با $\frac{n!}{k!}$

تست با حروف a,a,a,b,c,d,e چند کد ۷ حرفی می‌توان ساخت که حرف b بین دو حرف c و d ولی نه لزوماً مجاور با آن‌ها، قرار گیرد؟

$\dots d \dots b \dots c \dots$ قفلی

$\frac{7!}{3! \times 3!} \times 2!$

a تا ۳ ، قفلی

گروه بندی اشیاء (افراز)

مثال EX به چند طریق می‌توان ۹ نفر را در سه اتاق ۲، ۳ و ۴ نفری قرار داد؟

اتاق ۲ نفری	اتاق ۳ نفری	اتاق ۴ نفری
a, b	c, d, e	f, g, h, i

روش اول: جایگشت ۹ نفر → $\frac{9!}{2! \times 3! \times 4!} = 1260$ ✓

حذف جایگشت ۲ نفر در اتاق ۲ نفری
حذف جایگشت ۳ نفر در اتاق ۳ نفری
حذف جایگشت ۴ نفر در اتاق ۴ نفری

روش دوم: انتخاب ۲ نفر از ۹ نفر ، انتخاب ۳ نفر از ۷ نفر ، انتخاب ۴ نفر از ۴ نفر

$\binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{4} = 1260$ ✓

مثال EX: به چند طریق می‌توان ۴ نفر را به دو تیم دو نفری پینگ پنگ تقسیم کرد؟

$\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!} = 3$ ✓

حالت ۱) {a, b} : {c, d}
حالت ۲) {a, c} : {b, d}
حالت ۳) {a, d} : {b, c}
~~حالت ۴) {c, d} : {a, b}~~
~~حالت ۵) {b, d} : {a, c}~~
~~حالت ۶) {b, c} : {a, d}~~

توضیح: در گروه بندی اشیاء (افراز)، هرگاه گروه‌های بدون نام و با تعداد عضوهای برابر وجود داشته باشد، جواب را به فاکتوریل تعداد گروه‌های با تعداد عضوهای برابر تقسیم می‌کنیم.

مثال EX: به چند طریق می‌توان ۱۰ نفر را به دو گروه ۳ نفری و دو گروه ۲ نفری تقسیم کرد؟

$\frac{\binom{10}{3} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}}{2! \times 2!}$

مثال EX: به چند طریق می‌توان ۱۰ نفر را در دو اتاق ۳ نفری و دو اتاق ۲ نفری اسکان داد؟

اتاق ۱۰۱ | اتاق ۱۰۲ | اتاق ۲۰۱ | اتاق ۲۰۲

$\binom{10}{3}\times\binom{7}{3}\times\binom{4}{2}\times\binom{2}{2}$

تعداد افرازهای یک مجموعه

یادآوری: افراز (Partition) یک مجموعه، یعنی بخش کردن یک مجموعه به زیرمجموعه‌هایی که برسه شرط زیر را دارند.

۱) هرکدام از زیرمجموعه‌ها ناتهی باشند. ۲) اشتراک دو به دو آنها تهی است. (جدا از هم) ۳) اجتماع آنها، همان مجموعهٔ اولیه است.

مثال: مجموعهٔ $\{1,2,3,4,5,6\}$ را به چند طریق می‌توان

الف) به سه زیرمجموعهٔ ۲ عضوی افراز کرد؟ سراسری ۹۵

$\frac{\binom{6}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{2}{2}}{3!}=15$ ✓

ب) به دو زیرمجموعهٔ ۳ عضوی افراز کرد؟

$\frac{\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{2!}=10$ ✓

سراسری ۹۰ مجموعهٔ $A=\{a,b,\{a\},\{a,b\}\}$ را به چند طریق می‌توان به ۳ زیرمجموعه افراز کرد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴ عضو

$\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{2!}=6$ ✓

سراسری ۹۵ خ ۱۴۰۰ تعداد افرازهای مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ که شامل مجموعه‌های ۲ عضوی و ۳ عضوی باشند، کدام است؟ (گزینه ۱)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

سراسری ۹۳ خ یکی از افرازهای مجموعهٔ A به صورت $\{c\}$ ، $\{\{a,b\}\}$ ، $\{b\}$ ، $\{a\}$ است. تعداد افرازهای مجموعهٔ A که فاقد مجموعهٔ تک عضوی باشند؟

۴ عضوی

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

یا

$\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!}+\underbrace{\binom{4}{4}}_{1}=4$ ✓

سراسری ۹۳ تعداد افرازهای مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ که شامل فقط یک مجموعهٔ تک عضوی باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

یا

$\binom{5}{1}\binom{4}{4}+\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!}=20$ ✓

سراسری ۹۷ ۱۴۰۰ یک مجموعهٔ ۸ عضوی را به چند طریق می‌توان به دو مجموعهٔ ۳ عضوی و یک مجموعهٔ ۲ عضوی افراز کرد؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۲۸۰ ۴) ۳۲۰

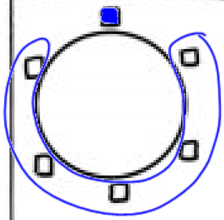
(گزینه ۳)

سراسری ۹۷ مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ را به چند طریق می‌توان به دو مجموعهٔ ۳ عضوی و یک مجموعهٔ تک عضوی افراز کرد به طوری که فاقد $\{a\}$ باشد؟

۱) ۴۵ ۲) ۵۰ ۳) ۵۶ ۴) ۶۰

غیر a

$\frac{\binom{6}{1}\times\binom{6}{3}\times\binom{3}{3}}{2!}=60$ ✓

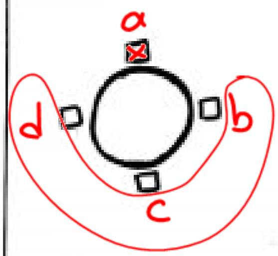


جای گشت "دایره‌ای" اشیا

⬅ چون دایره، نقطهٔ شروع (مبدأ) ندارد، بنابراین:

یک شی را به دلخواه، به عنوان مبدأ در نظر می‌گیریم (ثابت)

سپس جایگشت (خطی) اشیای باقی‌مانده را محاسبه می‌کنیم.

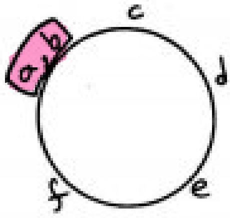


مثال: به چند طریق می‌توان ۴ نفر را دور یک میز گرد نشاند؟ $3! = 6$ ✓

قضیه: تعداد جایگشت‌های دایره‌ای n شی متمایز برابر است با: $(n-1)!$

مثال: به چند طریق می‌توان افراد a، b، c، d، e و f را دور یک میز نشاند به طوری که

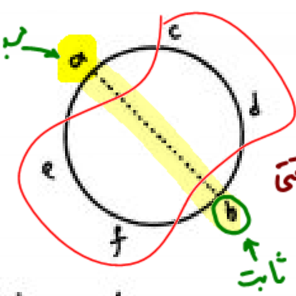
الف) a و b همواره کنار هم باشند؟



$\xrightarrow{\text{جایگشت دایره‌ای ۵ شی متمایز}} (5-1)! \times \underbrace{2!}_{\text{جایگشت درون جعبه}} = 48$ ✓

راه دوم: b حذف موقت $\xrightarrow{\text{جایگشت دایره‌ای ۵ نفر باقی‌مانده}} (5-1)! \times 2 = 48$ ✓

انتخاب جای b (سمت راست a یا سمت چپ a)



ب) a و b همواره روبه‌روی هم باشند؟ (دو سر قطر)

b حذف موقت $\xrightarrow{\text{جایگشت دایره‌ای ۵ نفر باقی‌مانده}} (5-1)! \times 1 = 24$ ✓

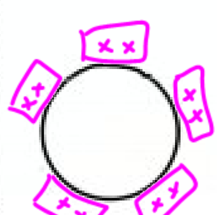
تنها انتخاب b (فقط روبه‌روی a)

تجربی ۱۴۰۰ خارج: به چند طریق ۳ بازیکن فوتبال، ۲ بازیکن بسکتبال و ۳ شناگر دور یک میز بنشینند به طوری که افراد هم‌تیمی کنار هم باشند؟

$\xrightarrow[\text{۳ جعبهٔ متمایز}]{\text{جایگشت دایره‌ای}} (3-1)! \times \underbrace{3! \times 2! \times 3!}_{\text{جایگشت درون هر جعبه}} = 144$ ✓

مثال: پنج زوج به چند طریق می‌توانند دور یک میز قرار گیرند به طوری که

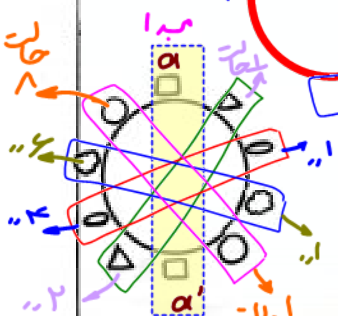
الف) هر زوج کنار هم باشند؟



$\xrightarrow[\text{۵ جعبهٔ متمایز}]{\text{جایگشت دایره‌ای}} (5-1)! \times (2!)^5 = 768$ ✓

ب) هر زوج روبه‌روی هم باشند؟

$\underbrace{4!}_{\text{جایگشت ۴ جعبه}} \times \underbrace{(2!)^4}_{\text{جایگشت درون جعبه}} = 384$ ✓



$8 \times 6 \times 4 \times 2 = 384$ ✓

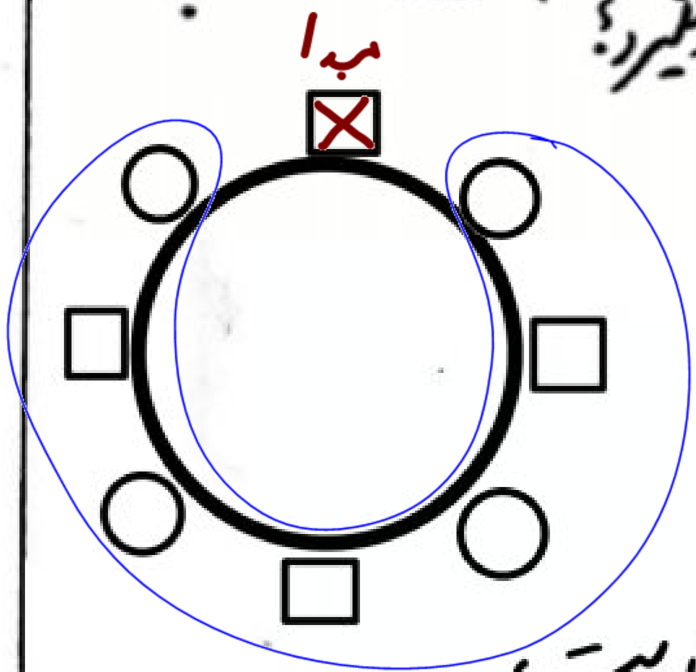
تمرین H.W: دور یک میز دایره‌ای شکل، ۵ صندلی با پنج رنگ متمایز قرار دارد. به چند طریق می‌توان

الف) ۵ نفر را دور این میز نشاند؟ (جایگشت خطی) ب) ۳ نفر را دور این میز نشاند؟

تجربی ۱۴۰۰ در یک جلسه آموزشی میزگردی شامل ۴ دانش آموز کلاس پایه یازدهم و ۴ دانش آموز کلاس پایه دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش آموزان در صندلی‌ها بنشینند به طوری که در کنار هر دانش آموز، دانش آموز هم پایه قرار نگیرد؟

یک در میان

مبدا



جایگشت یک در میان → $3! \times 4! = 144$

مثال تعداد جایگشت‌های دایره‌ای حروف a، b، b، b، c، c، c، c، d و d کدام است؟

$$\frac{(10-1)!}{3! \times 4! \times 2!}$$

b تا ۳ ، c تا ۴ ، d تا ۲

(گزینه ۳)

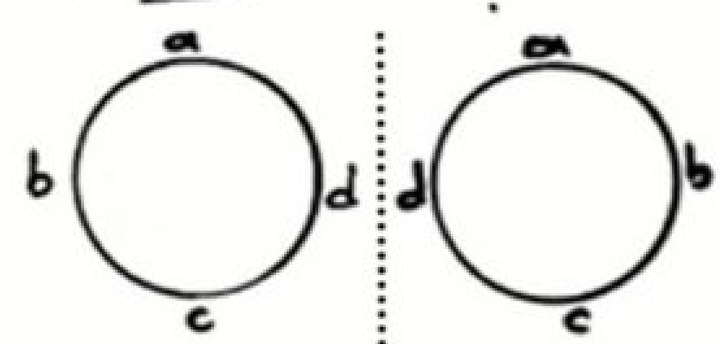
تست H.W شش وجه یک مکعب را به چند طریق می‌توان با اعداد ۱، ۲، ...، ۶ شماره گذاری کرد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۶۰

۳) ۳۰ ۴) ۱۵

مثال: با چهار مهره متمایز چند گردن بند مختلف می‌توان ساخت؟

$$\frac{(4-1)!}{2} = 3$$



← این دو حالت در یک میز "متفاوت" می‌باشند، زیرا دو نفر جایگشت داشته اند (b و d جابه جا شده اند) اما در گردن بند، تسبیح، ... این دو حالت "یکسان" اند زیرا یکی پشت و رو شده‌ی دیگری است.

نتیجه: تعداد گردن بندها، تسبیح‌ها، دسته کلیدها، ... با n شی متمایز برابر است با: $\frac{(n-1)!}{2}$

تعداد دور به طول n در گراف K_p $= \binom{p}{n} \times \frac{(n-1)!}{2}$

ترکیب : انتخاب بدون جایگشت (Combination)

← در سؤالی مطرح می‌شود که اشیاء را انتخاب می‌کنیم ولی ترتیب قرار گرفتن آنها مهم نیست به عبارت دیگر

مثال: به چند طریق می‌توان از بین افراد a ، b ، c و d دو نماینده انتخاب کرد؟

{a,b} , {a,c} , {a,d}
{b,c} , {b,d}
{c,d}

ترکیب r تایی n شی ← انتخاب r شی از n شی بدون در نظر گرفتن ترتیب آنها

قضیه: تعداد ترکیب‌های r تایی n شی متمایز برابر است با:

$$C(n,r)=C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\in\mathbb{N} \qquad : r\le n$$

مثال: با ده نقطه‌ی متمایز که بر محیط یک دایره داده شده اند، چند مثلث می‌توان ساخت؟

انتخاب ۳ نقطه از ۱۰ نقطه بدون در نظر گرفتن ترتیب → $\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!\,7!}=120$ ✓

مثال: از بین ۳ دانش‌آموز و ۵ دانشجو به چند طریق می‌توان یک گروه ۳ نفری تشکیل داد؟

کل افراد : ۸ نفر

انتخاب ۳ نفر از ۸ نفر بدون در نظر گرفتن ترتیب → $\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\,5!}=56$ ✓

مثال: به چند روش می‌توان ۴ حرف از حروف کلمه‌ی «دبیرستان» انتخاب کرد؟

ترتیب قرار گرفتن مد نظر نیست

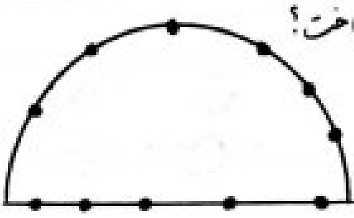
$\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!\,4!}=70$ ✓

چند فرمول (به خاطر بسپارید، بهتر است!)

$$\underset{\text{تهی}}{\binom{n}{0}}=\underset{\text{همه}}{\binom{n}{n}}=1$$

$$\binom{n}{1}=n \quad , \quad \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2\times1} \quad , \quad \binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1} \quad , \quad \binom{n}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1} \quad , \ldots$$

مثال: با ۱۱ نقطه، متمایز که فقط پنج تای آنها روی یک خط راست می باشند، چند مثلث می توان ساخت؟

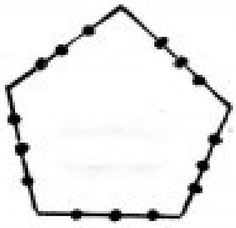


راه اول: ۳ نقطه از کمان یا ۱ نقطه از خط و ۲ نقطه از کمان یا ۲ نقطه از خط و ۱ نقطه از کمان

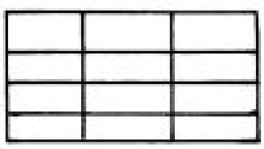
$$\binom{6}{3} + \binom{5}{1}\times\binom{6}{2} + \binom{5}{2}\times\binom{6}{1} = 155$$

راه دوم :

تمرین (H.W): با نقاط شکل مقابل چند مثلث وجود دارد؟ (جواب : ۴۵۰)



مثال: در شکل روبرو چند مستطیل وجود دارد؟



مثال : اگر $\binom{n}{11} = \binom{n}{10}$، آنگاه $\binom{n}{19}$ کدام است؟

نکته مهم: $\binom{n}{x} = \binom{n}{y} \Longleftrightarrow x+y=n$

نتیجه: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

سراسری (H.W): اگر $\binom{n}{8} = 2\binom{n}{7}$، آنگاه n کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

یادآوری: $n! = n(n-1)!$

(گزینه ۴)

حل $\dfrac{n!}{\underbrace{8!}_{8\times 7!}\times(n-8)!} = 2\times\dfrac{n!}{7!\times\underbrace{(n-7)!}_{(n-7)\cdot(n-8)!}} \longrightarrow \cdots$

مثال : در یک آزمون ۱۰ سؤالی به چند طریق می توان به ۶ سؤال پاسخ داد به طوری که از پنج سؤال اول، فقط به ۳ سؤال جواب داده شود!

سراسری سکه ای را آنقدر می اندازیم تا برای سومین بار "رو" بیاید. تعداد حالاتی که می توان در ۱۰ بار پرتاب یک سکه به این منظور رسید؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۶

مجموعه: فاقد ترتیب و تکرار

مثال: یک مجموعه ۷ عضوی دارای چند زیر مجموعه ۲ عضوی می‌باشد؟

نتیجه: تعداد زیر مجموعه‌های 2 عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با: $\binom{n}{2}$

مثال: در یک مهمانی هفت نفری، هر دو نفر یک بار با هم دست داده‌اند. تعداد کل دست دادن‌ها چقدر است؟

مثال: هفت خط متمایز در صفحه، حداکثر چند نقطه تقاطع دارند؟

$\binom{7}{2}=21$ ✓ $\xrightarrow[\text{۲ عضوی یک مجموعه ۷ عضوی}]{\text{تعداد کل زیر مجموعه‌های}}$ $\{d_1, d_2\}$, ... , $\{d_2, d_3\}$, $\{d_1, d_3\}$

$\{d_1,d_2\} \downarrow$ اشتراک: ۱ نقطه تقاطع — $\{d_2,d_3\} \downarrow$ ۱ نقطه تقاطع — $\{d_1,d_3\} \downarrow$ ۱ نقطه تقاطع

مثال: هفت شطرنج باز قرار است با هم دو به دو یک بار مسابقه بدهند. تعداد کل بازی‌ها چند تا است؟

تمرین (H.W): در یک مسابقه ورزشی ورزشکارانی از کشورهای a، b، c، d، e، f و g شرکت کرده‌اند. قرار است برای ارتباط بهتر ورزشکاران با هم تعدادی فرهنگ لغت دو زبانه به منظور آشنایی هر ورزشکار با سایر زبان‌ها تهیه شود. چند نوع فرهنگ لغت لازم است؟
(جواب: ۲۱)

مثال: مجموعه $S=\{1,2,3,\dots,30\}$ دارای چند زیر مجموعه ۲ عضوی مانند $A=\{a,b\}$ است به طوری که

الف) $2|a+b$ ب) $2|ab$ پ) $5|ab$

تمرین (H.W): مجموعه $S=\{1,2,\dots,30\}$ دارای چند زیر مجموعه ۳ عضوی مانند $\{a,b,c\}$ است به طوری که

الف) $3|a+b+c$ ب) $3|abc$

تمرین (H.W): نشان دهید تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه $\{1,2,\dots,n\}$، که هیچ دو عضو آن اعداد متوالی نیستند برابر است با $\binom{n-3+1}{3}$

تست: به چند طریق می‌توان از ۱۰ زوج ساکن در یک آپارتمان ۱۰ واحدی، یک شورای ۴ نفری تشکیل داد به طوری که از هر خانواده تنها زن یا شوهر عضو شود؟

××	××
××	××
××	××
××	××
××	××

۱) ۲۵۲۰ ۲) ۳۳۶۰
۳) ۱۸۲۰ ۴) ۲۱۶۰

* اگر قرار باشد فقط یک زوج در این شورای ۴ نفری عضو باشد، چه طور؟

* اگر قرار باشد حداقل یک زوج در این شورای ۴ نفری عضو باشد، چه طور؟

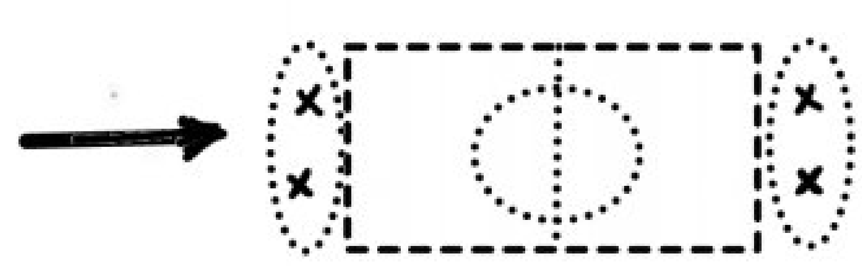
سراسری ۹۲: از هر یک از ۶ منطقهٔ کشوری، ۱۵ دانش آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۴ دانش آموز از بین آن‌ها که دو به دو غیرهم منطقه‌ای باشند، انتخاب کرد؟

A	B	C	D	E	F
۱۵ نفر	۱۵ نفر	۱۵ نفر	۱۵ نفر	۱۵ نفر	۱۵ نفر

۱) ۵۷۸۰ ۲) ۶۷۵۰۰
۳) ۷۵۸۰۰ ۴) ۷۶۵۰۰

سراسری ۹۲ خ: از هر یک از ۸ مدرسهٔ علاقه‌مند، ۶ نفر برای بازی تنیس ۴ نفری (۲ نفر در مقابل ۲ نفر) انتخاب شده‌اند. به چند طریق این بازی ممکن است انجام شود به طوری که دو نفر همیار هم از یک مدرسه باشند؟ (بازی بین مدارس مختلف برگزار می‌شود)

A	B	C	D	E	F	G	H
۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر



۱) ۷۲۰۰ ۲) ۶۳۰۰
۳) ۵۱۰۰ ۴) ۲۸۰۰

دنیا را بد ساخته‌اند
کسی را که دوست داری، تو را دوست ندارد
کسی که تو را دوست دارد، تو دوستش نداری
اما کسی که تو دوستش داری و او هم تو را دوست دارد
به رسم و آیین زندگی هرگز به هم نمی‌رسند
و این رنج بزرگی است
(دکتر شریعتی)

توجه: حداقل ۲ شی : ۲ شی یا بیشتر
حداکثر ۲ شی : ۲ شی یا کمتر
متمم یکدیگر نیستند (زیرا هردو در ۲ شی اشتراک دارند)

مثال: از بین ۳ زن و ۵ مرد به چند طریق می‌توان یک گروه چهارنفری تشکیل داد بطوری که

الف) ۲ مرد و ۲ زن انتخاب بشود؟

۲ مرد و ۲ زن

$$\binom{5}{2}\times\binom{3}{2} = 10\times 3 = 30$$

ب) حداقل یک زن انتخاب بشود؟ ← یک زن یا بیشتر

۱ مرد و ۳ زن یا ۲ مرد و ۲ زن یا ۳ مرد و ۱ زن

$$\underbrace{\binom{3}{1}}_{3}\times\underbrace{\binom{5}{3}}_{10} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{3}\times\underbrace{\binom{5}{2}}_{10} + \underbrace{\binom{3}{3}}_{1}\times\underbrace{\binom{5}{1}}_{5} = 65$$

پ) حداکثر یک مرد انتخاب بشود؟ ← یک مرد یا کمتر

۱ مرد و ۳ زن یا صفر مرد و ۴ زن

$$\underbrace{\binom{5}{1}}_{5}\times\underbrace{\binom{3}{3}}_{1} + \binom{5}{0}\times(\,?\,) = 5$$

تمرین: از ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخگویی انتخاب کرد، به شرط آنکه حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول، انتخاب بشود؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۲۴ ۴) ۳۵

۳ پرسش از ۵ تای (دوم) و ۵ پرسش از ۵ پرسش اول یا ۴ پرسش از ۵ پرسش (دوم) و ۴ پرسش از ۵ پرسش اول

$$\underbrace{\binom{5}{4}}_{5}\times\underbrace{\binom{5}{4}}_{5} + \underbrace{\binom{5}{5}}_{1}\times\underbrace{\binom{5}{3}}_{10} = 35$$

مثال (تجربی ۹۸): گل‌فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. چند دسته گل متفاوت می‌تواند بسازد؟

مثال: از بین ۱۲ نفر به چند طریق می‌توان گروه‌هایی با حداقل ۳ عضو تشکیل داد؟

یادآوری:

$$\underbrace{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}}_{\text{تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه } n \text{ عضوی}} = 2^n$$

تمرین (تجربی ۱۴۰۰) [illegible]: تعداد چندضلعی‌های محدبی که با ۸ نقطه متمایز واقع بر محیط یک دایره می‌توان ساخت کدام است؟ (جواب: ۲۱۹)

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های با تعداد عضوهای فرد یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های با تعداد زوج آن مجموعه برابر است.

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\dots = \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots = 2^{n-1}$$

مثال : از بین ۸ دانش آموز به چند طریق می‌توان یک گروه ۳ نفره انتخاب کرد به طوری که فرد مخصوصی اصلاً انتخاب نشود؟

مثال : از بین ۸ دانش آموز به چند طریق می‌توان یک گروه ۳ نفره انتخاب کرد به طوری که یک فرد مورد نظر در بین آنها باشد؟

نکته ۱ : تعداد ترکیب های r تایی n شی متمایز، که همگی شامل یک شی مخصوص اند برابر است با: $\boxed{\binom{n-1}{r-1}}$

نکته ۲ : تعداد ترکیب های r تایی n شی متمایز، که همگی فاقد یک شی مخصوص اند برابر است با: $\boxed{\binom{n-1}{r}}$

مثال : از بین افراد a ، b ، c ، d ، e ، f ، g و h به چند طریق می‌توان ۴ نفر انتخاب کرد به طوری که

الف) a و b حتماً انتخاب شوند؟

$\underbrace{a, b}_{\text{انتخاب شده اند}}, \underbrace{c, d, e, f, g, h}_{\text{انتخاب ۲ نفر دیگر از ۶ نفر باقی مانده}} \longrightarrow \binom{6}{2} = 15$ ✓

ب) c انتخاب نشود؟

$a, b, \underbrace{c}_{\text{حذف}}, d, e, f, g, h \xrightarrow{\text{انتخاب ۴ نفر از ۷ نفر باقی مانده}} \binom{7}{4} = 35$ ✓

ج) a و b انتخاب شوند و c انتخاب نشود؟

$\underbrace{a, b}_{\text{انتخاب شده اند}}, \underbrace{c}_{\text{حذف}}, \underbrace{d, e, f, g, h}_{\text{انتخاب ۲ نفر دیگر از ۵ نفر باقی مانده}} \longrightarrow \binom{5}{2} = 10$ ✓

مثال : از ۱۰ پرسش موجود به چند طریق می‌توان به ۸ سؤال جواب داد به طوری که پاسخ به ۳ سؤال اول اجباری باشد؟

سؤال ها $\rightarrow$ $\underbrace{1, 2, 3}_{\text{اجباری (ثابت)}}, \underbrace{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}$

مثال : مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ دارای چند زیر مجموعه‌ی ۴ عضوی است به طوری که

الف) فاقد ۱ باشد؟ ۱ حذف

ب) شامل ۲ باشد؟ ۲ هست

$\{\underbrace{2}_{\text{مصرف شده}}, \underbrace{?, ?, ?}\}$

$\binom{5}{3} = 10$ ✓ انتخاب ۳ عضو دیگر از ۵ عضو باقی مانده

ج) شامل ۲ و فاقد ۱ باشد؟ ۱ حذف ، ۲ هست

$\{\underbrace{2}_{\text{مصرف شده}}, \underbrace{?, ?, ?}\}$

مثال : از بین ۱۰ نفر که دو نفر آنها برادر هستند ، به چند طریق می‌توان یک گروه ۶ نفری تشکیل داد به طوری که

الف) هر دو برادر با هم در گروه باشند؟ | ب) هیچ کدام از برادرها نباشند؟ | پ) فقط یکی از دو برادر در گروه باشد؟ | ت) هر دو برادر با هم در گروه نباشند؟ (تجربی ۹۹)

مثال در اداره‌ای ۱۸ پرسنل، شامل ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند و ۳ کارشناس امور حقوقی مشغول به کارند. به چند طریق می‌توان یک جلسه ۵ نفره برگزار کرد به طوری

الف) رئیس و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

ب) یکی از معاونان و یک کارمند در جلسه باشند؟

پ) رئیس، یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس اداری باشند؟

مثال یک آشپز با استفاده از ۳ ادویه از بین ۱۰ ادویهٔ موجود، یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه

الف) محدودیتی نباشد؟

ب) دو نوع ادویه نباید با هم به کار روند؟

پ) سه نوع ادویه نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

ت) ادویه‌ها به دو دستهٔ ۵ تایی تقسیم می‌شوند، که ادویه‌های دستهٔ اول با ادویه‌های دستهٔ دوم سازگاری ندارند؟

تجربی ۱۴۰۱ ۷ کتاب در موضوعات مختلف که ریاضی، فیزیک و زیست هم جزء آنهاست، در اختیار داریم. به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را طوری انتخاب کرد که اگر ریاضی انتخاب شود، زیست نیز انتخاب شود و اگر فیزیک انتخاب شود، زیست انتخاب نشود؟

۱۰۶   ۱۱۴

۱۵۴   ۱۶۵

نتیجه مهم "قاعده پاسکال"

$$\boxed{\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}}$$

تست حاصل $\binom{13}{4}+\binom{12}{3}+\binom{12}{2}$ کدام است؟

۱) $\binom{14}{3}$
۲) $\binom{14}{4}$
۳) $\binom{15}{4}$
۴) $\binom{15}{3}$

تست H.W حاصل $\binom{21}{6}+2\binom{21}{5}+\binom{21}{4}$ کدام است؟

۱) $2\times\binom{22}{6}$
۲) $\binom{22}{6}$
۳) $2\times\binom{23}{6}$
۴) $\binom{23}{6}$

تست یک مجموعه ۱۵ عضوی دارای چند زیرمجموعه ۹ عضوی یا ۱۰ عضوی است؟

۱) $2\times\binom{15}{10}$ ۲) $\binom{16}{10}$
۳) $2\times\binom{16}{10}$ ۴) $\binom{16}{9}$

ترکیب با اشیای تکراری ←

تست : به چند طریق می‌توان ۳ حرف از حروف کلمه «گسسته» انتخاب کرد؟

۱) ۱۰   ۲) ۹
۳) ۸   ۴) ۷

تمرین H.W به چند طریق می‌توان ۴ حرف از حروف کلمه «دانشگاه» انتخاب کرد؟ (جواب: ۲۵)

د ا ن ش گ ه
حروف متمایز →
۱ , ۱ , ؟ , ؟ →

سراسری هر یک از حروف کلمه DELAVARAN بر روی ۹ گوی نوشته شده است. به چند طریق می‌توان ۳ گوی از این ۹ گوی انتخاب کرد؟

۱) ۳۵   ۲) ۴۲
۳) ۵۶   ۴) ۸۴

تبدیل : انتخاب همراه با جایگشت (Permutation)

در مسائلی مطرح می‌شود که اشیاء را انتخاب می‌کنیم ولی ترتیب قرار گرفتن آنها نیز مهم است. به عبارت دیگر

مثال : به چند طریق می‌توان از بین ۵ دانش‌آموز یک صف ۳ نفری تشکیل داد؟

مثال در یک شرکت سهامی، از بین ۶ نفر، به چند طریق می‌توان

الف) ۳ نماینده انتخاب کرد؟ ب) یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کرد؟

مثال در یک مسابقه ورزشی بین ۶ دانش‌آموز، به چند طریق می‌توان به رتبه‌های اول، دوم و سوم، مدال‌های طلا، نقره و برنز داد؟

مثال درون ظرفی یک سیب، یک پرتقال و یک انار قرار دارد. اگر از بین ۶ نفر، ۳ نفر مجاز باشند به طرف ظرف رفته و هرکدام یک میوه بردارند به چند طریق سه میوه توزیع می‌شود؟

مثال با حروف کلمه «دبیرستان» چند کلمه چهار حرفی می‌توان نوشت به طوری که

الف) هیچ شرطی نباشد.

....

ب) همگی با حرف «د» شروع شوند؟ ← | ? | ? | ? | د |

ثابت

....

پ) همگی شامل حرف «د» باشند؟ ← د ب ی ر س ت ا ن

....

ت) همگی شامل حروف «د» و «ر» و فاقد «ن» باشند؟ ← د ب ی ر س ت ا ن حذف

....

ث) همگی با «د» شروع شوند و به حرف نقطه‌دار ختم گردند؟ | نقطه‌دار | ? | ? | د |

ثابت ثابت

مثال: با حروف کلمهٔ "دانش پژوه" چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت به طوری که

الف) در چهار حرف اول آن از حروف کلمهٔ "دانش" استفاده شود؟

ب) در چهار حرف اول آن، کلمهٔ "دانش" دیده شود؟

تست: در یک ماشین حساب با ۲۰ کلید، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید متمایز با ترتیب مشخص فشار داده شوند. اگر فردی دستور خاص را نداند و بخواهد به تصادف این کار را انجام دهد، در صورتی که امتحان کردن هر سه کلید ۲۰ ثانیه زمان ببرد، این فرد حداکثر چند ساعت زمان برای اجرای دستور لازم دارد؟

۱) ۲:۲۶ ۲) ۳:۴۸
۳) ۳:۲۰ ۴) ۲:۴۸

مثال مهم: به چند طریق می‌توان ۳ دختر خردسال و ۵ پسر خردسال را در یک ردیف قرار داد، به طوری که

الف) محدودیتی نباشد؟

ب) در دو انتهای این ردیف، دختر باشد؟

پ) در دو انتهای این ردیف، افراد از یک جنس باشند؟

ت) هیچ دو دختری کنار هم نباشند؟

مثال: ۸ نفر به نام‌های a، b، c، d، e، f، g و h به چند طریق می‌توانند

الف) در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که بین a و b دقیقاً سه نفر دیگر باشد؟

ب) دور یک میز قرار گیرند، به طوری که بین a و b دقیقاً سه نفر دیگر باشد؟

پ) دور یک میز قرار گیرند، به طوری که هیچ یک از افراد a، b و c کنار هم نباشند؟

تست H.W: به چند طریق می‌توان از بین ۷ استاد ریاضی، یک میزگرد ۴ نفری تشکیل داد؟

(گزینه ۲)

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۱۰
۳) ۴۸۰ ۴) ۸۴۰

سراسری ۹۴ EX: با ارقام ۱، ۲، ۳، ...، ۹، به چند طریق می‌توان یک عدد پنج رقمی ساخت به طوری که دست کم دو رقم آن زوج باشد؟

۱) ۶۴۰۰ ۲) ۷۲۰۰
۳) ۸۴۰۰ ۴) ۹۶۰۰

سراسری EX ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را به چند طریق می‌توان به طور یک در میان در قفسه‌ای چید؟

- اگر یک در میان گفته نمی‌شد ← $\underbrace{\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}}_{\text{انتخاب کتاب‌ها}}\times\underbrace{7!}_{\text{جایگشت ۷ کتاب}}$

- اگر قرار باشد کتاب‌های هر سال پهلوی هم باشند ← $\underbrace{\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}}_{\text{انتخاب کتاب‌ها}}\times\underbrace{3!\times4!}_{\text{جایگشت درون جعبه‌ها}}\times\underbrace{2!}_{\text{جایگشت جعبه‌ها}}$

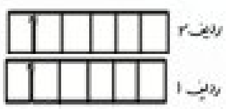
$\boxed{\text{۴ تا دوم}}\ \boxed{\text{۳ تا اول}}$ ۲ تا جعبه

- 〃 〃 〃 کتاب‌های سال اول کنار هم باشند ← $\underbrace{\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}}_{\text{انتخاب کتاب‌ها}}\times\underbrace{5!}_{\text{جایگشت ۵ شی متمایز}}\times\underbrace{3!}_{\text{جایگشت درون جعبه}}$

$\boxed{\text{۳ تا اول}}\times\times\times\times$ ۵ شی متمایز

تمرین در یک سالن، به چند طریق می‌توان ۷ نفر را روی ۱۲ صندلی یک ردیف قرار داد به طوری که هیچ دو صندلی خالی مجاوری وجود نداشته باشد؟

مثال در یک سالن دو ردیف صندلی ۶ تایی قرار دارد. به چند طریق می‌توان ۴ دانش‌آموز سال دهم و ۴ دانش‌آموز سال یازدهم را روی این صندلی‌ها نشاند، به طوری که دهمی‌ها در ردیف اول باشند؟ (یازدهمی‌ها به دلخواه می‌نشینند)



سراسری ۱۴۰۱ خ در یک مطب، ۵ صندلی در یک ردیف قرار دارد. ۷ بیمار همزمان وارد مطب می‌شوند. به چند طریق بیماران می‌توانند روی ۵ صندلی بنشینند، به طوری که دو نفر از آن‌ها نخواهند کنار هم بنشینند؟

۱) ۱۵۶۰ ۲) ۱۸۰۰
۳) ۲۰۴۰ ۴) ۲۲۸۰

توجه: هرگاه ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخابی مشخص باشد (در صورت سؤال گفته باشد)، آن‌گاه ...

تست چند عدد سه رقمی با شرط « رقم صدگان > رقم دهگان > رقم یکان » می‌توان نوشت؟

۱) ۸۴ ۲) ۹۰
۳) ۲۱۰ ۴) ۱۲۰

- اگر گفته می‌شد (رقم صدگان < رقم دهگان < رقم یکان)؟
- اگر گفته می‌شد (رقم صدگان ≥ رقم دهگان ≥ رقم یکان)؟

تبدیل با اشیای تکراری: راه حل ← شاخه‌بندی حالت‌ها جهت مشخص شدن وضعیت تکراری‌ها

تست: با حروف کلمهٔ «گسسته» چند کلمهٔ ۳ حرفی وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۳۰
۳) ۲۴ ۴) ۳۳

تمرین ۱۰.۷: با حروف کلمهٔ "دانشگاه" چند کلمهٔ ۴ حرفی وجود دارد؟ (جواب: ۴۸۰)

د ا ن ش گ ه
۶ حروف متمایز →

۱، ۱، ؟، ؟ →

مثال: با حروف کلمهٔ "زلزله" (ن) چند کلمهٔ ۳ حرفی می‌توان نوشت؟

با چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

ز، ز، ل، ل → $\frac{4!}{2!\,2!} = 6$

ه، ل، ز، ز → $\frac{4!}{2!} = 12$

ه، ز، ل، ل → " $= 12$

$\xrightarrow{+} 30$ ✓

تست: تعداد جایگشت‌های سه حرفی با حروف کلمهٔ SERESHT کدام است؟

۱) ۸۴ ۲) ۶۰
۳) ۷۲ ۴) ۵۶

تمرین ۱۰.۷: تعداد جایگشت‌های ۴ حرفی از حروف کلمهٔ SALAMAT که دو حرف آن A باشد، کدام است؟ (جواب: گزینه ۴)

۱) ۲۴ ۲) ۳۶
۳) ۵۶ ۴) ۷۲

تست با ارقام ۲، ۲، ۴، ۴، ۶، ۶ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

تست با ارقام ۱، ۲، ۲، ۳، ۳، ۳، ۳ چند عدد چهار رقمی وجود دارد؟

سه رقم ۳: ۳، ۳، ۳، ? $\xrightarrow{2!1}$ $\binom{2}{1}\times\frac{4!}{3!}=8$

دو رقم ۳:
- ۳، ۳، ۲، ۱ $\longrightarrow \frac{4!}{2!}=12$
- ۳، ۳، ۲، ۲ $\longrightarrow \frac{4!}{2!\times 2!}=6$

تک رقم ۳: ۳، ۲، ۲، ۱ $\longrightarrow \frac{4!}{2!}=12$

$\xrightarrow{+}$ ۳۸

تست با حروف کلمهٔ DELAVARAN چند کد سه حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۲۹
۳) ۲۶۰ ۴) ۳۷۲

تبدیل r تایی n شیء ← انتخاب r شیء از n شیء و جایگشت r شیء انتخاب شده

قضیه: تعداد تبدیل‌های r تایی n شیء متمایز برابر است با

$$P(n,r)=P_n^r=(n)_r=\frac{n!}{(n-r)!}\in\mathbb{N} \quad : r\le n$$

نتیجه: $\boxed{}$

مثال اگر $(n)_2-\binom{n}{2}=36$ باشد، آن‌گاه $\binom{n}{6}$ کدام است؟ ۱) ۵۶ ۲) ۸۴ ۳) ۹۲ ۴) ۱۰۵

توزیع اشیای یکسان در جعبه‌های متمایز

⇐ وقتی اشیاء یکسان اند، جایگشت آنها بی‌مورد است و مهم نیست که کدام شیء در کدام جعبه قرار می‌گیرد. اما چون جعبه‌ها متمایز اند، مهم است که در هر جعبه چند شیء قرار می‌گیرد.

مثال: به چند طریق می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر، به دلخواه توزیع کرد؟

$x \quad y \quad z$

$\circ\circ | \circ | \circ\circ$

$\circ\circ\circ || \circ\circ$

$\circ | \circ\circ\circ | \circ$

$\vdots$

جایگشت ۷ تا شکل هندسی $\longrightarrow \dfrac{7!}{2! \times 5!} = \binom{7}{2} = 21$ ✓

$5+(3-1)$ ، $3-1$

حذف جایگشت دو خط عمودی با هم

حذف جایگشت ۵ دایره یکسان

قضیه: تعداد روش‌های توزیع n شیء یکسان در k جعبهٔ متمایز، که ممکن است به برخی چیزی نرسد، برابر است با:

(توزیع به دلخواه) ، $(k-1)$ خط عمودی لازم است

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

اثبات:

k جعبه متمایز $\longrightarrow (k-1)$ خط عمودی $\xrightarrow{\text{به همراه } n \text{ شیء یکسان}} [n+(k-1)]$ شکل هندسی

$$\xrightarrow{\text{جایگشت}} \frac{[n+(k-1)]!}{(k-1)! \times n!} = \binom{n+(k-1)}{k-1}$$ ✓

حذف جایگشت $(k-1)$ خط عمودی با هم

حذف جایگشت n دایره با هم

مثال مهم (سراسری): معادلهٔ $x+y+z=5$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۳ جعبهٔ متمایز ، ۵ شیء یکسان ، حسابی

امکان صفر شدن جواب (خالی ماندن جعبه) هست.

معادله‌ای خطی با ضرایب واحد: خطی ← درجهٔ اول ، ضرایب واحد ← $+1$

توزیع ۵ شیء یکسان در ۳ جعبهٔ متمایز به دلخواه $\xrightarrow[k=3]{n=5} \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$ ✓

نتیجه: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $\underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}_{k \text{ جعبهٔ متمایز}} = \underbrace{n}_{n \text{ شیء یکسان}}$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$

توزیع به دلخواه ← حسابی

سراسری: تعداد چهارتایی مرتب (x_1, x_2, x_3, x_4) از اعداد صحیح نامنفی که در تساوی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ صدق نماید؟

جواب‌های ، $k=4$ ، $n=10$

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۱۴۴ ۴) ۲۸۶

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} = 286$$ ✓

تست: چند عدد طبیعی حداکثر چهار رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر ۹ باشد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۱۴۰ ۴) ۲۴۰

$\boxed{abcd}$

$a+b+c+d=9$

$$\xrightarrow[k=4]{n=9} \binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3} = 220$$

سراسری خ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3=7$ با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+\dots+x_k=2$ برابر است. k کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

$n=2$, $n=7$, $k=3$

$$\binom{2+k-1}{k-1}=\binom{7+3-1}{3-1} \Rightarrow \binom{\overbrace{k+1}^{9}}{\underbrace{k-1}_{7}}=\binom{9}{2} \rightarrow k=8$$

مثال معادله $\underset{\text{زوج}}{x_1}+\underset{\text{زوج}}{2x_2}+\underset{\text{زوج}}{2x_3}=\underset{\text{زوج}}{20}$ چند جواب صحیح غیرمنفی دارد؟ (x_1 باید زوج باشد)

$$\xrightarrow{x_1=2t} 2t+2x_2+2x_3=20 \xrightarrow{\div 2} t+x_2+x_3=10$$

$$\xrightarrow[n=10,\ k=3]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{10+3-1}{3-1}=\binom{12}{2}=66$$

مثال معادله $x_1+x_2+\dots+x_7=13$ چند جواب صحیح و نامنفی فرد دارد؟

$x_i=2t_i+1$

$$\Rightarrow (2t_1+1)+(2t_2+1)+\dots+(2t_7+1)=13 \rightarrow 2(t_1+t_2+\dots+t_7)=6$$

$$\xrightarrow{\div 2} t_1+t_2+\dots+t_7=3 \xrightarrow[k=7]{n=3} \binom{3+7-1}{7-1}=\binom{9}{6}=\binom{9}{3}=\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}=84$$

مثال: بسط عبارت $(a+b-c+d)^7$ چند جمله دارد؟ (سراسری ۹۹)

$$(a+b)^{3}=\underbrace{a^3.b^0}+?\,\underbrace{a^2.b^1}+?\,\underbrace{a^1.b^2}+\underbrace{a^0.b^3}$$

$$\xrightarrow{\text{هر جمله}} a^{x_1}.b^{x_2} \rightarrow x_1+x_2=3 \xrightarrow[n=3,\ k=2]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{3+2-1}{2-1}=\binom{4}{1}=4 \text{ جمله}$$

$$(a+b-c+d)^7 \xrightarrow{\text{هر جمله}} a^{x_1}.b^{x_2}.c^{x_3}.d^{x_4} \rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=7 \xrightarrow[k=4]{n=7} \binom{7+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}=120 \text{ جمله}$$

تمرین H.W دستگاه $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11 \end{cases}$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟ (جواب: ۱۴۷)

(بیان دیگر: معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$، چند جواب حسابی با شرط $x_1+x_2+x_3=5$ دارد؟)

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5 \xrightarrow[k=3]{n=5} \binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}=21 \\ \underbrace{x_1+x_2+x_3}_{\cancel{5}}+x_4+x_5=\cancel{11}\ 6 \rightarrow x_4+x_5=6 \xrightarrow[k=2]{n=6} \binom{6+2-1}{2-1}=\binom{7}{1}=7 \end{cases} \xrightarrow{\times}$$

تست معادله $(\underbrace{x_1+x_2}_{?}).(\underbrace{x_3+x_4+x_5}_{?})=21$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱) ۷۰۲ ۲) ۷۹۶ ۳) ۸۰۲ ۴) ۸۶۴

$$\begin{cases} x_1+x_2=1 \longrightarrow \binom{1+2-1}{2-1}=2 \\ x_3+x_4+x_5=21 \rightarrow \binom{21+3-1}{3-1}=\binom{23}{2}=253 \end{cases} \xrightarrow{\times} 506$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=21 \rightarrow \binom{21+2-1}{2-1}=22 \\ x_3+x_4+x_5=1 \rightarrow \binom{1+3-1}{3-1}=\binom{3}{2}=3 \end{cases} \xrightarrow{\times} 66$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=3 \longrightarrow \binom{3+2-1}{2-1}=4 \\ x_3+x_4+x_5=7 \rightarrow \binom{7+3-1}{3-1}=\binom{9}{2}=36 \end{cases} \xrightarrow{\times} 144$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=7 \longrightarrow \binom{7+2-1}{2-1}=8 \\ x_3+x_4+x_5=3 \rightarrow \binom{3+3-1}{3-1}=\binom{5}{2}=10 \end{cases} \xrightarrow{\times} 80$$

$$\xrightarrow{+} 796$$

EX
توزیع اشیای یکسان در جعبه‌های متمایز (به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند) (در هر جعبه حداقل یک شی باشد)

ابتدا در هر جعبه یک شی قرار دهیم. سپس توزیع اشیای یکسان باقی مانده به دلخواه انجام می‌شود.

سراسری (سراسری ۹۸) EX
به چند طریق می‌توان ۱۲ سکهٔ یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد به طوری که به هرکدام لااقل یک سکه برسد؟

$\to \binom{n-1}{k-1} = \binom{12-1}{3-1} = \binom{11}{2} = 55$

ابتدا یک سکه به هرکدام می‌دهیم (۳ سکه مصرف می‌شود). اکنون توزیع ۹ سکه یکسان باقی مانده بین ۳ نفر به دلخواه مورد نظر است:

$\begin{cases} n=9 \\ k=3 \end{cases} \to \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{9+3-1}{3-1} = \binom{11}{2} = 55$ ✓

نتیجه: تعداد روش‌های توزیع n شی یکسان در k جعبهٔ متمایز، به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند، (در هر جعبه حداقل یک شی باشد) EX
برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$

اثبات: ابتدا در هر جعبه، یک شی قرار می‌دهیم (k شی مصرف می‌شود)، که در این صورت $(n-k)$ شی باقی می‌ماند.
اکنون مسئله توزیع $(n-k)$ شی یکسان در k جعبهٔ متمایز مطرح است، که ممکن است از آنها به برخی چیزی نرسد، پس جواب عبارت است از:
$\binom{(n-\cancel{k})+(\cancel{k}-1)}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$

سراسری ۹۲
به چند طریق می‌توان ۹ کتاب یکسان ($n=9$) را در ۵ قفسهٔ متمایز ($k=5$) جای داد به طوری که در هر قفسه حداقل یکی از آنها قرار داده شود؟
$\binom{n-1}{k-1} = \binom{9-1}{5-1} = \binom{8}{4} = 70$

سراسری ۱۴۰۰: ۷ کره به چند طریق می‌توانند در ۵ لانهٔ متمایز قرار گیرند به طوری که هیچ لانه‌ای خالی نماند. (جواب: ۱۵)

تست
با پنج حرف a، b، c، d و e چند رمز ۱۰ حرفی می‌توان ساخت به طوری که در همگی آنها بر یک از این پنج حرف حداقل یک بار ظاهر شوند؟ (و به ترتیب حروف الفبا باشند)
۱) ۱۲۶ ۲) ۲۸۱ ۳) ۱۱۲ ۴) ۸۴

$x_a + x_b + x_c + x_d + x_e = 10$ ← تعداد aها
$\to \binom{n-1}{k-1} = \binom{10-1}{5-1} = \binom{9}{4}$

مثال EX
معادلهٔ $x+y+z=9$ چند جواب صحیح و مثبت (طبیعی) دارد؟
جعبه‌ای خالی نباشد (در هر جعبه حداقل یک شی باشد)

$\binom{n-1}{k-1} = \binom{9-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$ ✓

نتیجه: تعداد جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی) معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ برابر است با: $\binom{n-1}{k-1}$ EX

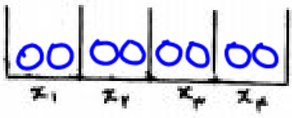
اثبات: ابتدا در هرکدام از متغیر (جعبه) های x_1، x_2، ....، x_k، یک شی قرار می‌دهیم (k شی مصرف می‌شود).
اکنون مسئله توزیع $n-k$ شی یکسان باقی‌مانده در k جعبهٔ متمایز مطرح است، که ممکن است از آن به برخی از جعبه‌ها چیزی نرسد، یعنی تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=n-k$، که برابر است با: $\binom{(n-k)+(k-1)}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$

سراسری ۱۴۰۰
تعداد جواب‌های طبیعی دستگاه معادلات $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=9 \\ x_4+x_5=7 \end{cases}$ کدام است؟
خ ۱) ۷۲ ۲) ۱۳۶ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۶۸ ✓

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=9 \xrightarrow[k=3]{n=9} \binom{n-1}{k-1} = \binom{9-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28 \\ x_4+x_5=7 \xrightarrow[k=2]{n=7} \binom{n-1}{k-1} = \binom{7-1}{2-1} = \binom{6}{1} = 6 \end{cases} \xrightarrow{\times} 168$

شرط های حداقلی (بزرگتر مساوی)

مثال Ex سراسری ۹۸: به چند روش می توان ۱۳ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد، به طوری که به هرکدام حداقل ۲ توپ برسد؟

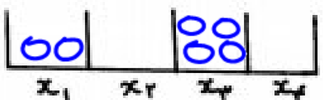


۸ توپ مصرف شده → $13-8=5$

توزیع ۵ توپ یکسان بین ۴ نفر به دلخواه ($n=5$, $k=4$)

$$\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{5+4-1}{4-1}=\binom{8}{3}=56 \checkmark$$

مثال Ex: معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ چند جواب صحیح و نامنفی با شرط های $x_1\geqslant 2$ و $x_3>3$ دارد؟



$x_1\geqslant 2 \longrightarrow$ در جعبهٔ x_1، حداقل ۲ شی باشد

$x_3>3 \rightarrow x_3\geqslant 4 \rightarrow$ در جعبهٔ x_3، حداقل ۴ شی باشد

۶ شی مصرف می شود $\rightarrow x'_1+x_2+x'_3+x_4=\underbrace{14-6}_{n=8} \longrightarrow \binom{8+4-1}{4-1}=\binom{11}{3}=165 \checkmark$

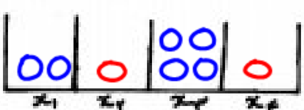
مثال Ex: معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ چند جواب صحیح و مثبت با شرط های $x_1\geqslant 2$ و $x_3>3$ دارد؟

جعبه ای خالی نباشد

همیشه اولویت با شرط بزرگتر مساوی است

ابتدا شرط های بزرگتر مساوی را اعمال می کنیم

اگر جعبه ای خالی ماند، یک شی به آن می دهیم

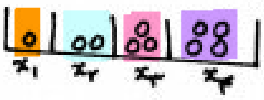


۸ شی مصرف می شود $\rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=\underbrace{14-8}_{n=6}$ جواب های حسابی $\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{6+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}=84 \checkmark$

مثال Ex: معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=17$ چند جواب صحیح و مثبت با شرط $x_i\geqslant i$ دارد؟ $(i=1,2,3,4)$

جعبه ای خالی نباشد

حل $\longrightarrow x_1\geqslant 1$, $x_2\geqslant 2$, $x_3\geqslant 3$, $x_4\geqslant 4 \longrightarrow$



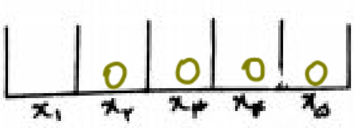
$\longrightarrow$ ۱۰ شی مصرف شده (۷ شی می ماند)

$\rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=7 \xrightarrow[k=4]{n=7} \binom{7+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}=120 \checkmark$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله جدید

مثال Ex: معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$ چند جواب صحیح و نامنفی با شرط $x_i>0$ دارد؟ $(2\leqslant i\leqslant 5)$

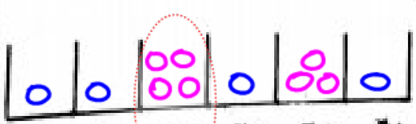
$\rightarrow x_i\geqslant 1 \longrightarrow (x_2\geqslant 1$, $x_3\geqslant 1$, $x_4\geqslant 1$, $x_5\geqslant 1)$



۴ شی مصرف شد $\longrightarrow \underbrace{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}_{k=5}=\underbrace{10-4}_{n=6} \longrightarrow \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{6+5-1}{5-1}=\binom{10}{4}=210 \checkmark$

مثال Ex: معادله $x_1+x_2+\dots+x_6=12$ چند جواب صحیح و مثبت (طبیعی) با شرط های $x_3=4$ و $x_5>2$ دارد؟

جعبه ای خالی نباشد



$x_3=4 \longrightarrow$ ۴ شی به x_3 می دهیم و آن را کنار می گذاریم

$x_5>2 \rightarrow x_5\geqslant 3 \rightarrow$ ۳ شی در x_5 قرار می دهیم

۱۱ شی مصرف شده $\rightarrow \underbrace{x_1+x_2+\cancel{x_3}+x_4+x_5+x_6}_{k=5}=\underbrace{12-11}_{n=1}$

جواب های صحیح و نامنفی $\longrightarrow \binom{1+5-1}{5-1}=\binom{5}{4}=5 \checkmark$

مثال (EX) به چند طریق می‌توان یک دسته گل شامل ۱۱ شاخه، از ۵ نوع گل مختلف انتخاب کرد به طوری که

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$$

$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 9$

الف) به دلخواه انتخاب کنیم؟ (اساسی)

$n=11,\ k=5$ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی

$$\binom{11+5-1}{5-1}=\binom{15}{4}$$

ب) از هر نوع حداقل یک شاخه انتخاب کنیم؟

جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی)

$$\binom{n-1}{k-1}=\binom{11-1}{5-1}=\binom{10}{4}=210$$

پ) از هر نوع گل حداقل دو شاخه انتخاب کنیم؟ (اساسی ۹۸)

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\cancel{11}\ 1$$

$$\xrightarrow[k=5]{n=1}\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{1+5-1}{5-1}=\binom{5}{4}=5$$

ت) از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم؟

$x_2\geq 2$ $x_5>3\to x_5\geq 4$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\cancel{11}\ 5$$

$$\xrightarrow[k=5]{n=5}\binom{5+5-1}{5-1}=\binom{9}{4}=126$$

ث) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم؟

$x_3=0$ کنار می‌رود $x_4\geq 5$

$$x_1+x_2+\cancel{x_3}+x_4+x_5=\cancel{11}\ 6$$

$$\xrightarrow[k=4]{n=6}\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{6+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}=84$$

ج) دقیقاً از ۲ نوع گل اصلاً انتخاب نکنیم؟

خاص ← مثلاً x_1، x_2 کنار بروند

$$x_3+x_4+x_5=11\xrightarrow[k=3]{n=11}\binom{n-1}{k-1}=\binom{11-1}{3-1}=\binom{10}{2}=45$$

جواب‌های صحیح و مثبت

چ) فقط از ۲ نوع گل انتخاب کنیم؟

تمرین (H.W) بسط عبارت $(a+b-c+d)^7$ دارای چند جمله است به طوری که

الف) توان a برابر ۲ باشد؟

ب) توان a حداقل ۲ باشد؟

$$x_1+x_2+x_3+x_4=7$$

الف) $x_1=2$

ب) $x_1\geq 2$

شرط‌های حداکثری ☹ ← روش متمم

سراسری خ ۹۹ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x+y+z+t=11$ به شرط آن که $x<5$ باشد، کدام است؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۲۷۰ ۴) ۲۸۰

کل جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $\xrightarrow[k=4]{n=11} \binom{11+4-1}{4-1}=\binom{14}{3}=364$

$x<5 \xrightarrow{\text{متمم}} x\geq 5 \xrightarrow{\text{۵ شی در جعبهٔ } x} x'+y+z+t=\cancel{11}\,6 \xrightarrow[n=6,\,k=4]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{6+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}=84$

جواب $=\underbrace{364}_{\text{کل}}-\underbrace{84}_{\text{متمم}}=280$ ✓

تست ۱۴۰۳ به چند طریق می‌توان ۱۱ سکهٔ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد به طوری که شخص معین A حداکثر ۴ سکه دریافت کند؟ (سکه‌زیبه ۴)

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۲۷۰ ۴) ۲۸۰

$A+B+C+D=11 \rightarrow$

$A\leq 4 \xrightarrow{\text{متمم}} A\geq 5 \rightarrow$

سراسری ۱۴۰۱ چند عدد طبیعی کوچکتر از ۶۰۰۰ با مجموع ارقام ۸ وجود دارد؟

۱) ۱۵۵ ۲) ۱۶۵ ۳) ۱۶۴ ۴) ۱۵۸

$\overline{abcd} \xrightarrow{\text{شرط مسأله}} a+b+c+d=8$

$\xrightarrow[k=4]{n=8} \binom{8+4-1}{4-1}=\binom{11}{3}=165$ (کل جواب‌های صحیح و نامنفی)

$a<6 \xrightarrow{\text{متمم}} a\geq 6 \xrightarrow{\text{۶ شی در جعبهٔ } a} a'+b+c+d=\cancel{8}\,2$

$\xrightarrow[n=2,\,k=4]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{2+4-1}{4-1}=\binom{5}{3}=10$

جواب $=165-10=155$ ✓

تست تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x+y+z+t=11$ با شرط‌های $x<5$ و $y>3$ کدام است؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۹۰

$y>3 \rightarrow y\geq 4 \xrightarrow{\text{۴ شی در جعبهٔ } y} \boxed{x+y+z+t=7}$ معادله جدید با شرط $x<5$

تعداد جواب صحیح و نامنفی معادله جدید $\xrightarrow[k=4]{n=7} \binom{7+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}=120$

$x<5 \xrightarrow{\text{متمم}} x\geq 5 \xrightarrow{\text{۵ شی در جعبهٔ } x} x+y+z+t=\cancel{7}\,2$

$\xrightarrow[n=2,\,k=4]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{2+4-1}{4-1}=\binom{5}{3}=10$

$\xrightarrow{-} 110$ ✓

نامعادله‌های خطی با ضرایب واحد

$x_1 + x_2 + \dots + x_k \le n$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $= \binom{n+k}{k}$

" " " و مثبت $= \binom{n}{k}$

مثال: نامعادله $x+y+z \le 8$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟ سراسری ۹۴ و ۹۷

$a \le b \xleftrightarrow[\text{تبدیل به معادله هم‌ارز}]{t \ge 0} a + t = b$

$x+y+z \le 8 \xleftrightarrow[t \ge 0]{\text{تبدیل به معادله هم‌ارز}} x+y+z+t = 8$

$\xrightarrow[n=8,\ k=4]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله}} \binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = 165$

مثال: نامعادله $x+y+z<9$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

$\to x+y+z \le 8$

جعبه ا زخالی نباشد

$\overset{0}{x} + \overset{0}{y} + \overset{0}{z} \le \cancel{8}\ 5 \longrightarrow x+y+z \le 5 \xrightarrow[\text{تبدیل به معادله هم‌ارز}]{t \ge 0} x+y+z+t=5$

$\xrightarrow[n=5,\ k=4]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله}} \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = 56$

مثال: نامعادله $x_1+x_2+x_3+x_4 \le 10$ با شرط‌های $x_1 \ge 2$ و $x_3 \ge 3$:

۲ شی در جعبه x_1 ، $x_3 \ge 3$ ، ۳ شی در جعبه x_3

الف) چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۵ شی مصرف شده

$x_1+x_2+x_3+x_4 \le \cancel{10}\ 5 \xrightarrow[n=5,\ k=4]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{n+k}{k} = \binom{5+4}{4} = \binom{9}{4} = 126$

ب) چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ جعبه ا زخالی نباشد

" "

$\overset{00}{x_1} + \overset{0}{x_2} + \overset{000}{x_3} + \overset{0}{x_4} \le \cancel{5}\ 2$ " " $\xrightarrow{n=3,\ k=4} \binom{n+k}{k} = \binom{3+4}{4} = \binom{7}{4} = 35$

مثال: نامعادله $4 \le x_1+x_2+x_3 \le 10$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

$x_1+x_2+x_3 \le 10 \xrightarrow[t \ge 0]{\text{تبدیل به معادله هم‌ارز}} x_1+x_2+x_3+t=10 \xrightarrow[k=4]{n=10} \binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} = 286$

$x_1+x_2+x_3 \le 3 \xrightarrow[t \ge 0]{\text{تبدیل به معادله هم‌ارز}} x_1+x_2+x_3+t=3 \xrightarrow[k=4]{n=3} \binom{3+4-1}{4-1} = \binom{6}{3} = 20$

$\to 266$

تمرین H.W: نامعادله $100 < \underbrace{(x_1+x_2+x_3)^3}_{\text{ریشه سوم}} < 250$ چند جواب طبیعی دارد؟ (جواب: ۱۶)

$4,\dots < x_1+x_2+x_3 < 6,\dots$

$\to 5 \le x_1+x_2+x_3 \le 6 \longrightarrow ???$

معادله‌های غیرخطی / معادله‌های با ضرایب غیرواحد

← مجهولی که ضریب یا توان غیر ۱ دارد ، با مقادیرش کنار می‌رود.

مثال Ex معادله $x_1+x_2+\boxed{10x_3}=20$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

یا

$x_3=0 \rightarrow x_1+x_2=20 \xrightarrow{n=20,k=2} \binom{20+2-1}{2-1}=\binom{21}{1}=21$

$x_3=1 \rightarrow x_1+x_2=10 \xrightarrow{n=10,k=2} \binom{10+2-1}{2-1}=\binom{11}{1}=11$

$x_3=2 \rightarrow x_1+x_2=0 \xrightarrow{n=0,k=2} \binom{0+2-1}{2-1}=\binom{1}{1}=1$

$\xrightarrow{+} 33$ ✓

تست معادله $\boxed{x_1^4}+x_2+x_3+x_4=6$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱) ۲۱ ۲) ۳۵ ۳) ۴۹ ✓ ۴) ۵۶

یا

$x_1=0 \longrightarrow x_2+x_3+x_4=6 \xrightarrow{n=6,k=3} \binom{6+3-1}{3-1}=\binom{8}{2}=28$

$x_1=1 \longrightarrow x_2+x_3+x_4=5 \xrightarrow{n=5,k=3} \binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}=21$

$x_1=2 \longrightarrow x_2+x_3+x_4=-10$ ✗

$\xrightarrow{+} 49$

سراسری ۱۴۰۰ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3=\frac{10}{x_4}$ کدام است؟

x_4 ← شمارنده طبیعی ۱۰

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۸۱ ۴) ۹۶

$x_4=1 \longrightarrow x_1+x_2+x_3=10 \xrightarrow{n=10,k=3} \binom{10+3-1}{3-1}=\binom{12}{2}=66$

$x_4=2 \longrightarrow x_1+x_2+x_3=5 \xrightarrow{n=5,k=3} \binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}=21$

$x_4=5 \longrightarrow x_1+x_2+x_3=2 \longrightarrow \binom{2+3-1}{3-1}=\binom{4}{2}=6$

$x_4=10 \longrightarrow x_1+x_2+x_3=1 \longrightarrow$ - - - - $=3$

$\xrightarrow{+} 96$

سراسری ۱۴۰۱ Ex معادله $x_1+\sqrt{x_2}+x_3+x_4=4$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱) ۳۵ ۲) ۲۰ ۳) ۳۱ ۴) ۱۸

x_2 : مربع کامل

$x_2=0 \longrightarrow x_1+x_3+x_4=4 \xrightarrow{n=4,k=3} \binom{4+3-1}{3-1}=\binom{6}{2}=15$

$x_2=1 \longrightarrow x_1+x_3+x_4=3 \xrightarrow{n=3,k=3} \binom{3+3-1}{3-1}=\binom{5}{2}=10$

$x_2=4 \longrightarrow x_1+x_3+x_4=2 \xrightarrow{n=2,k=3} \binom{2+3-1}{3-1}=\binom{4}{2}=6$

$x_2=9 \longrightarrow x_1+x_3+x_4=1 \xrightarrow{n=1,k=3} \binom{1+3-1}{3-1}=\binom{3}{2}=3$

$x_2=16 \longrightarrow x_1+x_3+x_4=0 \xrightarrow{n=0,k=3} \binom{0+3-1}{3-1}=\binom{2}{2}=1$

$\xrightarrow{+} 35$ ✓

تمرین H.W معادله $\frac{10}{x_3}=x_1+x_2+x_3$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟ (جواب: ۱۴)

تمرین H.W معادله $(x_1+x_2)^3+x_3+x_4=20$ چند جواب طبیعی دارد؟ (جواب: ۱۱)

$x_1=x_2=1 \rightarrow$

تست معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+\frac{3}{x_4}=14$ با شرایط $x_1>1$ ، $x_2>2$ و $x_3>3$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱

$x_1\geq 2$ ← ۲ شی در x_1 ، $x_2\geq 3$ ← ۳ شی در x_2 ، $x_3\geq 4$ ← ۴ شی در x_3

۹ شی مصرف شده $\longrightarrow x_1+x_2+x_3+\frac{3}{x_4}=\underbrace{14-9}_{5}$

شمارنده طبیعی ۳

$x_4=1 \longrightarrow x_1+x_2+x_3=2 \xrightarrow[n=2,\ k=3]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{2+3-1}{3-1}=\binom{4}{2}=6$

یا

$x_4=3 \longrightarrow x_1+x_2+x_3=4 \xrightarrow[n=4,\ k=3]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{4+3-1}{3-1}=\binom{6}{2}=15$

$\xrightarrow{+} 21$ ✓

تست تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $(\underbrace{x_1^2+x_2+x_3}_{5})(\underbrace{\frac{6}{y_1}+y_2+y_3}_{7})^2=\underbrace{245}_{5\times 7^2}$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۶ ۳) ۸۴ ۴) ۹۰

$x_1^2+x_2+x_3=5 \longrightarrow$

$x_1=1 \longrightarrow x_2+x_3=4 \xrightarrow[n=4,\ k=2]{\text{تعداد جواب‌های طبیعی}} \binom{n-1}{k-1}=\binom{4-1}{2-1}=3$

$x_1=2 \longrightarrow x_2+x_3=1 \xrightarrow{\text{〃 〃}}$? ✗

$\frac{6}{y_1}+y_2+y_3=7 \longrightarrow$ (شمارنده طبیعی ۶)

$y_1=1 \longrightarrow y_2+y_3=1 \longrightarrow$ ✗

یا $y_1=2 \longrightarrow y_2+y_3=4 \xrightarrow[n=4,\ k=2]{\text{〃 〃}} \binom{4-1}{2-1}=\binom{3}{1}=3$

یا $y_1=3 \longrightarrow y_2+y_3=5 \xrightarrow[n=5,\ k=2]{\text{〃 〃}} \binom{5-1}{2-1}=\binom{4}{1}=4$

یا $y_1=6 \longrightarrow y_2+y_3=6 \xrightarrow[n=6,\ k=2]{\text{〃 〃}} \binom{6-1}{2-1}=\binom{5}{1}=5$

$\xrightarrow{+} 12$

$3\times 12=36$ جواب ✓

تست معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=5$ چند جواب صحیح و نامنفی با شرط $x_1\geq x_2$ دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

مقداردهی

$x_2=0 \longrightarrow x_1+x_3=5 \xrightarrow[n=5,\ k=2]{x_1\geq 0} \binom{5+2-1}{2-1}=\binom{6}{1}=6$

یا $x_2=1 \longrightarrow x_1+x_3=\cancel{4}\ 3 \xrightarrow[n=3]{x_1\geq 1} \binom{3+2-1}{2-1}=\binom{4}{1}=4$

یا $x_2=2 \longrightarrow x_1+x_3=\cancel{3}\ 1 \xrightarrow[n=1]{x_1\geq 2} \binom{1+2-1}{2-1}=\binom{2}{1}=2$

$\xrightarrow{+} 12$ ✓

تست H.W به چند طریق می‌توان ۵ خودکار یکسان و ۴ مداد یکسان را بین ۳ نفر به دلخواه توزیع کرد؟

۱) ۲۸۰ ۲) ۳۱۵ ۳) ۲۴۵ ۴) ۳۴۰

$x_1+x_2+x_3=5 \longrightarrow$

$x_1+x_2+x_3=4 \longrightarrow$

$\xrightarrow{\times}$

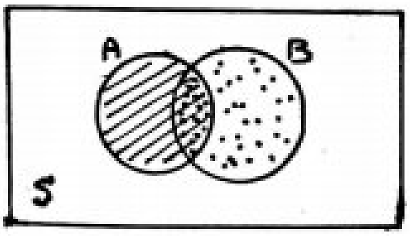
تست H.W در چند جایگشت از حروف کلمهٔ VISITING بین هر دو حرف I حداقل دو حرف قرار دارد؟

x_1 تا حرف ... I ... x_2 تا حرف ... I ... x_3 تا حرف ... I ... x_4 تا حرف

جایگشت ۵ حرف غیر I

$x_1+x_2+x_3+x_4=\cancel{5}\ 1 \xrightarrow[n=1,\ k=4]{x_2\geq 2,\ x_3\geq 2} \binom{1+4-1}{4-1}=\binom{4}{3}=4\times 5!=480$

اصل شمول و عدم شمول



EX
① اگر در مجموعهٔ A و B زیرمجموعه‌های مجموعهٔ متناهی S باشند، آن‌گاه

تعداد اعضا

$$\underbrace{|A\cup B|}_{\text{A یا B یا هردو (حداقل یکی)}} = \underbrace{|A|+|B|}_{\text{شمول}} - \underbrace{|A\cap B|}_{\text{عدم شمول}}$$

EX
نتیجه: تعداد عضوهای از مجموعهٔ S، که نه در A و نه در B قرار دارند، عبارت است از:

دمورگان

$$\underbrace{|A'\cap B'|}_{\text{نه در A و نه در B}} = |(A\cup B)'| = |\overline{A\cup B}| = |S|-|A\cup B|$$
$$= |S|-(|A|+|B|-|A\cap B|)$$

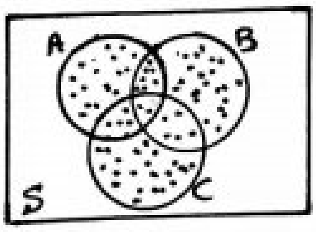
EX
مثال: در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۸ نفر عضو تیم والیبال مدرسه‌اند. اگر ۹ نفر در هر دو تیم فعالیت کنند، چند نفر عضو هیچ کدام از این دو تیم نیستند؟

S F V $F\cap V$

$$|F'\cap V'| = |\overline{F\cup V}| = |S|-|F\cup V| = |S|-(|F|+|V|-|F\cap V|)$$
$$= ۳۰-(۱۵+۱۸-۹)$$
$$= ۶$$

نه فوتبال و نه والیبال

EX
② اگر سه مجموعهٔ A، B و C زیرمجموعه‌های مجموعهٔ متناهی S باشند، آن‌گاه



$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|$$
$$-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|$$
$$+|A\cap B\cap C|$$

نتیجه: تعداد عضوهای از مجموعهٔ S، که در هیچ یک از مجموعه‌های A، B و C قرار ندارند، عبارت است از:

$$|A'\cap B'\cap C'| = |(A\cup B\cup C)'| = |\overline{A\cup B\cup C}| = |S|-|A\cup B\cup C| = |S|- \dots$$

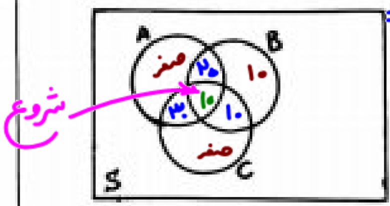
EX
مثال: از ۱۰۰ نفر دانش‌آموزان یک دبیرستان، ۳۵ نفر در رشتهٔ فوتبال، ۴۵ نفر در رشتهٔ والیبال و ۵۰ نفر در رشتهٔ بسکتبال فعالیت می‌کنند. اگر ۱۰ نفر در هر سه رشته فعالیت کنند، ۱۵ نفر فوتبال و والیبال، ۱۲ نفر فوتبال و بسکتبال و ۱۸ نفر والیبال و بسکتبال بازی کنند، چند نفر عضو هیچ رشته‌ای از این سه ورزش نیستند؟

$$|F'\cap V'\cap B'| = |\overline{F\cup V\cup B}| = |S|-|F\cup V\cup B|$$
$$= |S|-(|F|+|V|+|B|-|F\cap V|-|F\cap B|-|V\cap B|+|F\cap V\cap B|)$$
$$= ۱۰۰-(۳۵+۴۵+۵۰-۱۵-۱۲-۱۸+۱۰)$$
$$= ۵$$

مثال EX در یک دبیرستان از بین ۱۰۰ دانش‌آموز، ۶۰ نفر مجله‌ی A، ۵۰ نفر مجله‌ی B، ۵۰ نفر مجله‌ی C، ۳۰ نفر مجله‌ی A و B، ۲۰ نفر مجله‌ی B و C، ۴۰ نفر مجله‌ی A و C و ۱۰ نفر هر سه مجله‌ی A و B و C را می‌خوانند. مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی که

الف) هیچ مجله‌ای نمی‌خوانند؟

$$|A'\cap B'\cap C'|=|S|-|A\cup B\cup C|$$
$$=|S|-(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|)$$
$$=100-(60+50+50-30-20-40+10)=20$$



ب) دقیقاً ۲ مجله می‌خوانند؟

فقط A و B یا فقط A و C یا فقط B و C

$$\underbrace{}_{20}+\underbrace{}_{30}+\underbrace{}_{10}=60$$

پ) حداقل ۲ مجله می‌خوانند؟

$60+10=70$ ✓

ت) فقط یک مجله می‌خوانند؟

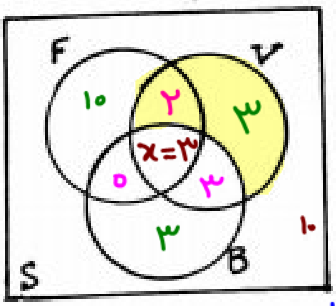
$100-(10+10+10+20+30)=20$ ✓ ← جواب الف

فقط A یا فقط B یا فقط C

$0+10+0=10$ ✓

مثال EX در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر عضو تیم بسکتبال‌اند. اگر ۱۰ نفر، عضو هیچ یک از این سه تیم نباشند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی کنند، مطلوب است تعداد افرادی که

$$|F'\cap V'\cap B'|=10 \rightarrow \underbrace{|S|}_{34}-|F\cup V\cup B|=10$$



الف) در هر سه رشته فعالیت می‌کنند.

$$\rightarrow |F\cup V\cup B|=24$$
$$\rightarrow |F|+|V|+|B|-|F\cap V|-|V\cap B|-|F\cap B|+|F\cap V\cap B|=24$$
$$\rightarrow 15+11+9-5-6-3+x=24 \rightarrow \boxed{x=3}$$

ب) فقط فوتبال بازی می‌کنند. ← ۱۰

ب) والیبال بازی می‌کنند و بسکتبال بازی نمی‌کنند.

$$|V\cap B'|=|V-B|$$
$$=|V|-|V\cap B|=11-6=5$$ ✓

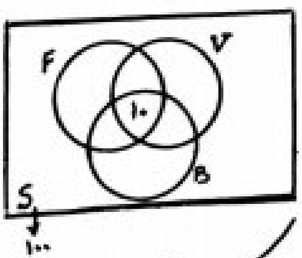
ت) فقط در یک رشته فعالیت دارند.

فقط فوتبال یا فقط والیبال یا فقط بسکتبال

$10+3+3=16$ ✓

تمرین از ۱۰۰ نفر دانش‌آموزان یک دبیرستان، ۳۵ نفر در رشته فوتبال، ۴۵ نفر در رشته والیبال و ۵۰ نفر در رشته بسکتبال فعالیت می‌کنند. اگر ۱۰ نفر در هر سه رشته فعالیت کنند و ۱۵ نفر در هیچ کدام از این سه رشته ورزشی عضویت نداشته باشند، چند نفر دقیقاً در دو رشته فعالیت می‌کنند؟

(جواب: ۲۵)



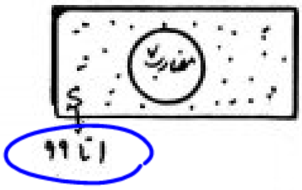
آنجا که جسمی مشتاقی برای اندکی اشک می‌ریزد
نگاهی از جنس ترکمنی می‌اندازد

(دکتر شریعتی)

تعداد مضرب‌های مثبت عدد طبیعی a بین ۱ تا n $= \left[\frac{n}{a}\right]$

مثال (Ex): بین اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰ (۱ تا ۹۹)، چند عدد وجود دارد که

الف) مضرب ۷ نباشند؟



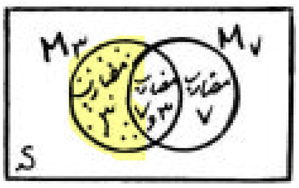
تعداد مضرب‌های ۷ بین ۱ تا ۹۹

$$\text{جواب} = \underbrace{99}_{\text{کل}} - \underbrace{\left[\frac{99}{7}\right]}_{14} = 85$$

ب) بر ۲ یا بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

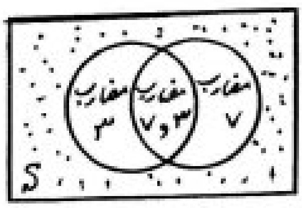
$$|M_2 \cup M_3| = |M_2| + |M_3| - |M_2 \cap M_3|$$
$$= \left[\frac{99}{2}\right] + \left[\frac{99}{3}\right] - \left[\frac{99}{\underbrace{[2,3]}_{6}}\right]$$
$$= 49 + 33 - 16$$
$$= 66$$

پ) بر ۳ بخش‌پذیر باشد و بر ۷ بخش‌پذیر نباشد؟



$$|M_3 \cap M_7'| = |M_3 - M_7| = |M_3| - |M_3 \cap M_7|$$
$$= \left[\frac{99}{3}\right] - \left[\frac{99}{\underbrace{[3,7]}_{21}}\right]$$
$$= 33 - 4 = 29$$

ت) نه بر ۳ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۷ بخش‌پذیر باشد؟



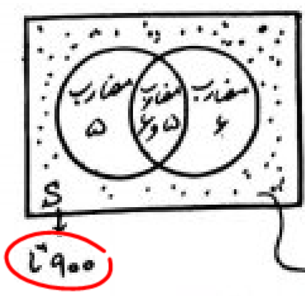
$$|M_3' \cap M_7'| = |S| - |M_3 \cup M_7|$$
$$= |S| - (|M_3| + |M_7| - |M_3 \cap M_7|)$$
$$= 99 - \left(\underbrace{\left[\frac{99}{3}\right]}_{33} + \underbrace{\left[\frac{99}{7}\right]}_{14} - \underbrace{\left[\frac{99}{21}\right]}_{4}\right) = 56$$

ث) نه مضرب ۴ و نه مضرب ۶ باشد؟

$$|M_4' \cap M_6'| = |\overline{M_4 \cup M_6}| = |S| - |M_4 \cup M_6|$$
$$= |S| - (|M_4| + |M_6| - |M_4 \cap M_6|)$$
$$= 99 - \left(\left[\frac{99}{4}\right] + \left[\frac{99}{6}\right] - \left[\frac{99}{\underbrace{[4,6]}_{12}}\right]\right)$$
$$= 99 - (24 + 16 - 8) = 67$$

مثال (Ex): چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که نه بر ۵ تقسیم‌پذیرند و نه بر ۶؟

تعداد اعداد سه‌رقمی $= 999 - 99 = 900$



تعداد مضرب‌های سه‌رقمی ۵ $= \left[\frac{999}{5}\right] - \left[\frac{99}{5}\right] = 180$

۶ « « « « $= \left[\frac{999}{6}\right] - \left[\frac{99}{6}\right] = 150$

۶,۵ « « « « $= \left[\frac{999}{5 \times 6}\right] - \left[\frac{99}{5 \times 6}\right] = 30$

$([5,6] = 5 \times 6)$

$$\text{جواب} = \underbrace{900}_{\text{کل}} - (180 + 150 - 30) = 600$$

$$|M_5' \cap M_6'| = |S| - (|M_5| + |M_6| - |M_5 \cap M_6|)$$

۳۰۰ تا

تست تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از ۳۰۱ که نه مضرب ۴، نه مضرب ۵ و نه مضرب ۶ است، کدام است؟

(چند عدد طبیعی مانند n، $1 \le n \le 300$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵ و ۶ بخش پذیر نباشد)

۱) ۷۰ ۲) ۸۰ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۶۰

$[4,6]=12 \qquad [4,5,6]=60$

$$|M_4' \cap M_5' \cap M_6'| = |S| - |M_4 \cup M_5 \cup M_6|$$

$$= |S| - (|M_4|+|M_5|+|M_6| - |M_4\cap M_5| - |M_5 \cap M_6| - |M_4 \cap M_6| + |M_4 \cap M_5 \cap M_6|)$$

$$= 300 - (\underbrace{[\tfrac{300}{4}]}_{75} + \underbrace{[\tfrac{300}{5}]}_{60} + \underbrace{[\tfrac{300}{6}]}_{50} - \underbrace{[\tfrac{300}{20}]}_{15} - \underbrace{[\tfrac{300}{30}]}_{10} - \underbrace{[\tfrac{300}{12}]}_{25} + \underbrace{[\tfrac{300}{60}]}_{5}) = 160 \checkmark$$

گزینه ۳

تمرین ۹۰ برابر ۱۴۰۰

تعداد اعداد دورقمی که نسبت به ۱۰۵ اول اند، کدام است؟

نه مضرب ۳، نه مضرب ۵ و نه مضرب ۷

۱) ۳۹ ۲) ۴۰ ۳) ۴۱ ۴) ۴۲

$105 \overset{\text{تجزیه}}{=} 3\times5\times7$

تعداد اعداد دورقمی (طبیعی) $= 99-9=90$

$$\begin{cases} \text{تعداد اعداد دورقمی مضرب ۳} = [\tfrac{99}{3}] - [\tfrac{9}{3}] = 30 \\ \text{۵ " " " "} = [\tfrac{99}{5}] - [\tfrac{9}{5}] = 18 \\ \text{۷ " " " "} = [\tfrac{99}{7}] - [\tfrac{9}{7}] = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{تعداد اعداد دورقمی مضرب ۳ و ۵} = [\tfrac{99}{3\times5}] - [\tfrac{9}{3\times5}] = 6 \\ \text{۳ و ۷ " " " "} = [\tfrac{99}{3\times7}] - [\tfrac{9}{3\times7}] = 4 \\ \text{۵ و ۷ " " " "} = [\tfrac{99}{5\times7}] - [\tfrac{9}{5\times7}] = 2 \end{cases}$$

$$\text{جواب} = |M_3' \cap M_5' \cap M_7'| = |\overline{M_3 \cup M_5 \cup M_7}| = |S| - |M_3 \cup M_5 \cup M_7|$$

$$= |S| - (|M_3|+|M_5|+|M_7| - |M_3\cap M_5| - |M_5\cap M_7| - |M_3\cap M_7| + |M_3\cap M_5\cap M_7|)$$

$$= 90 - (30 + 18 + 13 - 6 - 4 - 2 + 0)$$

$$= 41 \checkmark$$

گزینه ۳

تمرین ۱۴۰۰ چند عدد طبیعی نابیشتر از ۳۰۰ وجود دارد که نسبت به ۶۰ اول اند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۶۰

$60 = 2^2\times3\times5$

نه مضرب ۲، نه مضرب ۳ و نه مضرب ۵

۳۰۰ تا

تست چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که مضرب ۲ و ۳ باشد و مضرب ۷ نباشد؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۱۲۹ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۳۱

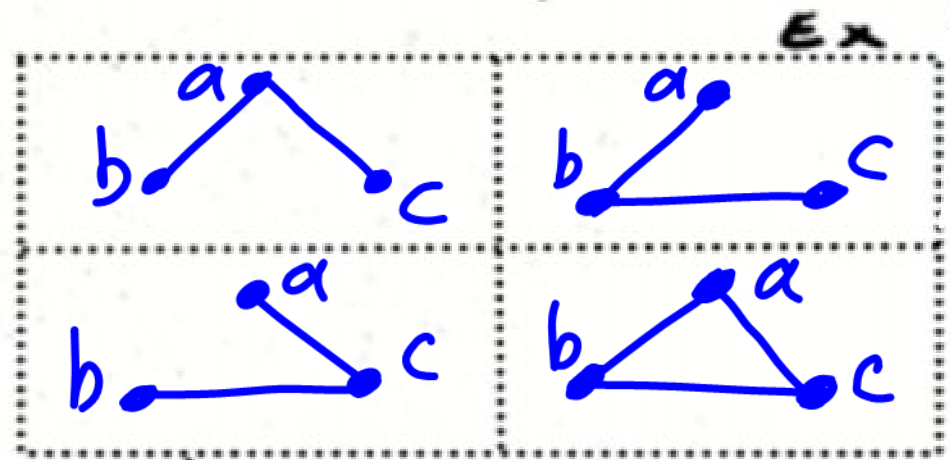
تعداد $= 999-99=900$

$$|(M_2 \cap M_3) \cap M_7'| = |(M_2\cap M_3) - M_7| = |M_2 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3 \cap M_7|$$

$$= \underbrace{([\tfrac{999}{6}] - [\tfrac{99}{6}])}_{150} - \underbrace{([\tfrac{999}{42}] - [\tfrac{99}{42}])}_{21} = 131 \checkmark$$

تعداد گرافهای ساده از مرتبهٔ p ؟ → $2^{\binom{p}{2}}$

مثال (Ex) با مجموعهٔ رأس های $\{a,b,c\}$ ($p=3$) چند گراف ساده می‌توان ساخت بطوری که فاقد رأس تنها باشد؟



A_a : مجموعهٔ گراف‌های ساده‌ای که در آنها رأس a تنهاست

A_b : " " " " b "

A_c : " " " " c "

رأس a تنها نباشد ، رأس b تنها نباشد و رأس c تنها نباشد

جواب $= |A'_a \cap A'_b \cap A'_c| = |S| - |A_a \cup A_b \cup A_c|$

$= |S| - (|A_a| + |A_b| + |A_c| - |A_a \cap A_b| - |A_b \cap A_c| - |A_a \cap A_c| + |A_a \cap A_b \cap A_c|)$

$$= \underbrace{2^{\binom{3}{2}}}_{\text{کل گراف‌های ساده با ۳ رأس}} - \Big(\underbrace{2^{\binom{2}{2}}}_{\text{گراف‌های ساده با ۲ رأس (رأس a تنها)}} + \underbrace{2^{\binom{2}{2}}}_{\text{(b تنها)}} + \underbrace{2^{\binom{2}{2}}}_{\text{(c تنها)}} - \underbrace{2^{\binom{1}{2}=0}}_{\text{گراف‌های ساده با یک رأس (a و b تنها)}} - \underbrace{2^{\binom{1}{2}}}_{\text{(c و b تنها)}} - \underbrace{2^{\binom{1}{2}}}_{\text{(c و a تنها)}} + \underbrace{1}_{\text{هر سه رأس تنها (گراف تهی)}} \Big) = 4$$

تمرین (H.W) با ۶ رأس متمایز $v_1, v_2, \dots, v_6$ چند گراف ساده می‌توان ساخت بطوری که دقیقاً ۳ رأس تنها باشد؟

(جواب : ۸۰)

$$\underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{انتخاب ۳ رأس تنها}} \times \underbrace{\quad}_{9}$$

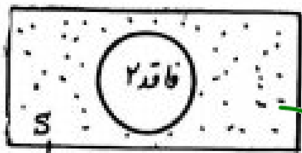
مثال Ex با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد (رمز) چهار رقمی وجود دارد که در همگی آنها رقم ۲ حداقل یک بار ظاهر شود؟

یک بار ۲، دو بار ۲، ....

هیچ بار $\xleftrightarrow{\text{متمم}}$ حداقل یک بار

کل اعداد چهار رقمی با ارقام داده شده → $\underset{\text{۴ حالت}}{\underline{?}} \times \underset{\text{۴}}{\underline{?}} \times \underset{\text{۴}}{\underline{?}} \times \underset{\text{۴}}{\underline{?}} = 4^4$

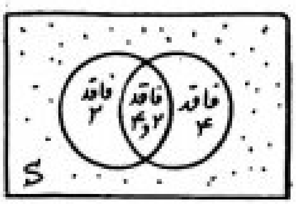
حداقل یک بار ۲ $\xrightarrow{\text{متمم}}$ هیچ بار ۲ (فاقد ۲) → $\underset{\text{۳ حالت}}{\underline{?}} \times \underset{\text{۳}}{\underline{?}} \times \underset{\text{۳}}{\underline{?}} \times \underset{\text{۳}}{\underline{?}} = 3^4$



کل اعداد چهار رقمی با ارقام داده شده

$$\text{جواب} = \underbrace{4^4}_{\text{کل}} - \underbrace{3^4}_{\text{متمم}} = 256 - 81 = 175 \checkmark$$

تمرین Ex با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد (رمز) چهار رقمی وجود دارد که در همگی آنها هر یک از رقم‌های ۲ و ۴ حداقل یک بار ظاهر شود؟



A: اعداد چهار رقمی با ارقام داده شده که فاقد ۲ می‌باشند → $\underset{\text{۳ حالت}}{\underline{?}} \times \underset{\text{۳}}{\underline{?}} \times \underset{\text{۳}}{\underline{?}} \times \underset{\text{۳}}{\underline{?}} = 3^4$

B: اعداد چهار رقمی با ارقام داده شده که فاقد ۴ می‌باشند → $- \ - \ - \ - = 3^4$

$A\cap B$: اعداد چهار رقمی با ارقام داده شده که فاقد ۲ و ۴ می‌باشند → $\underset{\text{۲ حالت}}{\underline{?}} \times \underset{\text{۲}}{\underline{?}} \times \underset{\text{۲}}{\underline{?}} \times \underset{\text{۲}}{\underline{?}} = 2^4$

فاقد ۲ نه — و — فاقد ۴ نه

$$\text{جواب} = |A' \cap B'| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A\cup B| = |S| - (|A| + |B| - |A\cap B|)$$
$$= 4^4 - (3^4 + 3^4 - 2^4) = 110$$

حداقل یک بار ۲ ظاهر شود — و — حداقل یک بار ۴ ظاهر شود

تمرین ۹۸ خ چند عدد سه رقمی وجود دارد که در آنها هر یک از رقم‌های ۳ و ۶ حداقل یک بار ظاهر شوند؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۲ ۳) ۴۸ ۴) ۵۶

غیرصفر: $\underset{\text{۹ حالت}}{\underline{?}} \times \underset{\text{۱۰}}{\underline{?}} \times \underset{\text{۱۰}}{\underline{?}} = 9\times 10^2$

فاقد ۳، فاقد ۶

$$\text{جواب} = \underbrace{9\times 10^2}_{\text{کل}} - \left(8\times 9^2 + 8\times 9^2 - \underbrace{7\times 8^2}_{\text{فاقد ۳ و ۶}}\right) = 52 \checkmark$$

مثال Ex در یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹، که حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می‌شود و امتحان کردن هر رمز آن ۵ ثانیه طول می‌کشد، حداکثر چند دقیقه لازم است تا قفل باز شود؟

$\underset{\text{۱۰ حالت}}{\underline{?}} \times \underset{\text{۱۰}}{\underline{?}} \times \underset{\text{۱۰}}{\underline{?}} \times \underset{\text{۱۰}}{\underline{?}} = 10^4$

$$\text{کل رمزهای مطلوب} = 10^4 - \left(\underbrace{9^4}_{\text{فاقد ۷}} + \underbrace{9^4}_{\text{فاقد ۸}} - \underbrace{8^4}_{\text{فاقد ۷ و ۸}}\right) = 974 \xrightarrow{\times 5} 4870 \text{ ثانیه}$$

$$\xrightarrow{\div 60} 81/..$$

مثال: Ex با ارقام ۰، [redacted] و ۳ چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت که در همگی آنها هر یک از ارقام ۰، ۱ و ۲ حداقل یک بار ظاهر شود؟

غیرصفر

?	?	?	?	

$3\times4\times4\times4\times4$ حالت → کل اعداد پنج رقمی با ارقام داده شده $= 3\times4^4$

$$\text{جواب} = \underbrace{3\times4^4}_{\text{کل}} - \Big[\big(\underbrace{3^5}_{\text{فاقد صفر}}+\underbrace{2\times3^4}_{\text{فاقد ۱}}+\underbrace{2\times3^4}_{\text{فاقد ۲}}\big)-\big(\underbrace{2^5}_{\text{فاقد ۰و۱}}+\underbrace{2^5}_{\text{فاقد ۰و۲}}+\underbrace{1\times2^4}_{\text{فاقد ۱و۲}}\big)+\underbrace{1}_{\text{فاقد ۰و۱و۲}}\Big] = 280$$

مثال: Ex برای باز کردن یک قفل رمزی ۵ رقمی، که هر یک از ارقام ۲، ۳ و ۷ حداقل یک بار در آن به کار رفته‌اند، اگر امتحان کردن هر رمز، ۶ ثانیه طول بکشد، حداکثر چند دقیقه زمان لازم است؟

$$\underbrace{10^5}_{\text{کل}} - \big(\underbrace{9^5}_{\text{فاقد ۲}}+\underbrace{9^5}_{\text{فاقد ۳}}+\underbrace{9^5}_{\text{فاقد ۷}}-\underbrace{8^5}_{\text{فاقد ۲و۳}}-\underbrace{8^5}_{\text{فاقد ۲و۷}}-\underbrace{8^5}_{\text{فاقد ۳و۷}}+\underbrace{7^5}_{\text{فاقد ۲،۳و۷}}\big) = 4350$$

$\xrightarrow{\times 6}$ $\xrightarrow{\div 60}$ ۴۳۵

تمرین (۸۰-۸۳) با ارقام متمایز ۱، ۲، ...، ۶ چند عدد شش رقمی می‌توان نوشت که در آن‌ها رقم ۲ و ۳ کنار هم یا رقم ۲ و ۱ کنار هم باشند؟ (گزینه ۴)

۱) ۲۲٤
۲) ۲۸٦
۳) ۳۲۴
۴) ۳۳۶

ارزن‌ها چهار گروه‌اند،

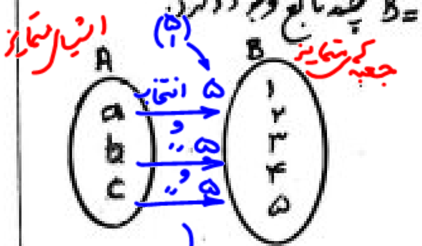
گروه اول: کسانی که تا وقتی که هستند هستند و وقتی که نیستند نیستند.
گروه دوم: کسانی که تا وقتی که هستند نیستند و وقتی که نیستند هم نیستند.
گروه سوم: کسانی که تا وقتی که هستند هستند و وقتی که نیستند باز هستند.
گروه چهارم: کسانی که تا وقتی که هستند نیستند و وقتی که نیستند هستند.

دکتر شریعتی

توزیع اشیای متمایز در جعبه های متمایز (یافتن تعداد توابع)

چون اشیاء متمایزند، یک شی نمی تواند به طور همزمان در بیش از یک جعبه قرار گیرد. بنابراین بحث تعداد توابع از مجموعهٔ اشیای متمایز به مجموعهٔ جعبه های متمایز مطرح می شود.

مثال (Ex): از مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به مجموعهٔ $B=\{1,2,3,4,5\}$ چند تابع وجود دارد؟



تعداد توابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B $= |B|^{|A|}$

$\times$: $5\times5\times5=5^3=125$

$f_1=\{(a,1),(b,2),(c,3)\}$

$f_2=\{(a,1),(b,1),(c,4)\}$

⋮

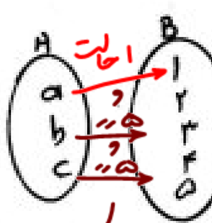
مثال (Ex): از مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به مجموعهٔ $B=\{1,2,3,4,5\}$ چند تابع وجود دارد به طوری که

الف) شامل $(a,1)$ باشد؟

$f(a)=1$

↓

a به 1 فلش بزند



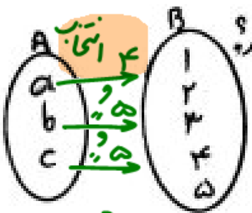
$\times$: $1\times5\times5=25$ ✓

ب) فاقد $(a,1)$ باشد؟

$f(a)\neq1$

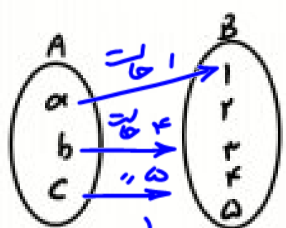
↓

a به 1 فلش نمی زند



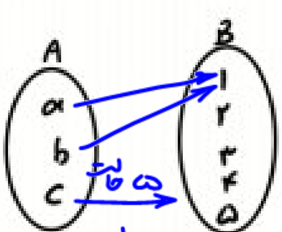
$\times$: $4\times5\times5=100$ ✓

پ) شامل $(a,1)$ و فاقد $(b,2)$ باشد؟



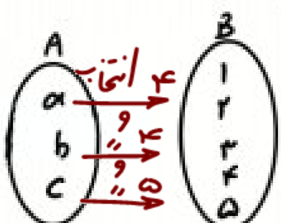
$\times$: $1\times4\times5=20$ ✓

ت) شامل $(a,1)$ و $(b,1)$ باشد؟



5 ✓

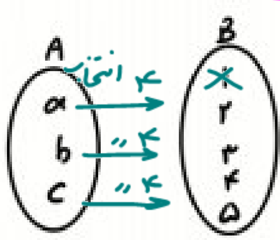
ث) فاقد $(a,1)$, $(b,1)$ باشد؟



$\times$: $4\times4\times5=80$ ✓

ج) حداقل یک $x\in A$ وجود داشته باشد که $f(x)=1$ باشد؟

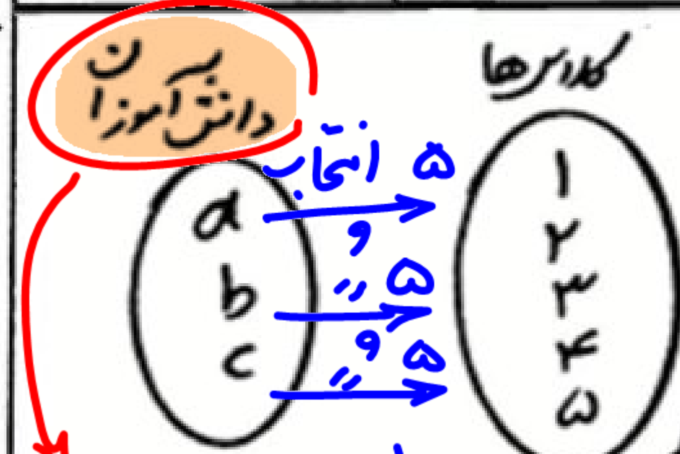
حداقل یک فلش به 1 زده شود



$\underbrace{5^3}_{\text{کل توابع}} - 4^3 = 125-64=61$ ✓

مثال (Ex): به چند طریق می‌توان ۳ دانش آموز را در ۵ کلاس مختلف به دلخواه جای داد؟

۳ شی متمایز — ۵ جعبه متمایز



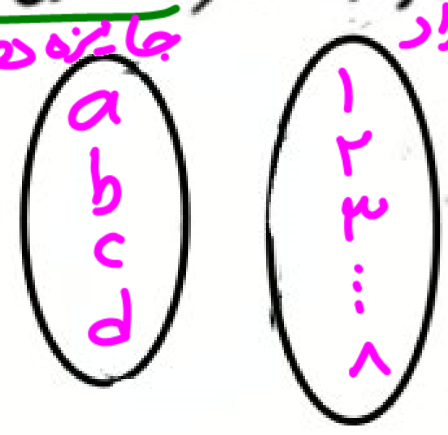
× $5^3 = 125$ ✓

یک دانش آموز همزمان وارد دو کلاس نمی‌شود

نتیجه: تعداد روش‌های توزیع n شی متمایز در k جعبه متمایز (بدون هیچ محدودیتی) برابر است با k^n
«یعنی تعداد توابع از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه k عضوی»

از اشیاء — به جعبه‌ها

مثال (Ex): ۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله یک جایزه به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را ببرد)

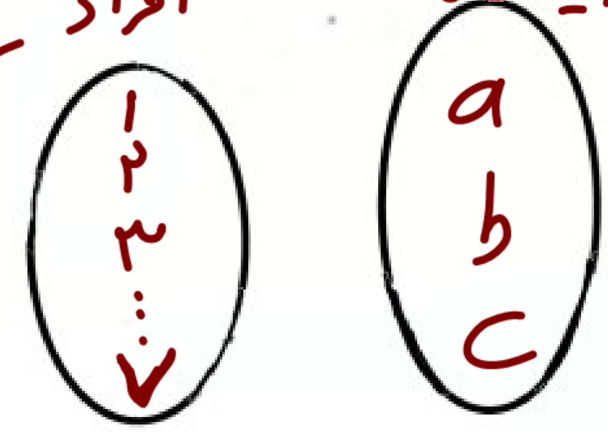


تعداد توابع → $8^4 = 4096$ ✓

یک جایزه همزمان به دو نفر داده نمی‌شود

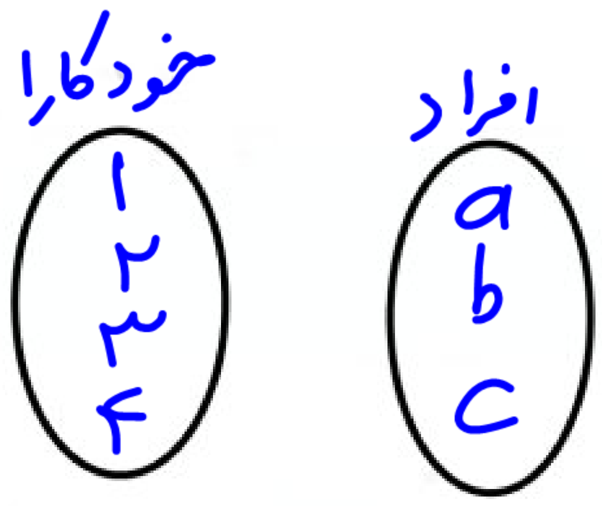
تمرین (H.W): یک خودروی وَن با ۷ مسافر، در مسیر حرکت خود، در ۳ ایستگاه توقف می‌کند. تعداد روش‌های پیاده شدن این ۷ مسافر کدام است؟

(جواب: ۲۱۸۷)



یک نفر همزمان در دو ایستگاه پیاده نمی‌شود

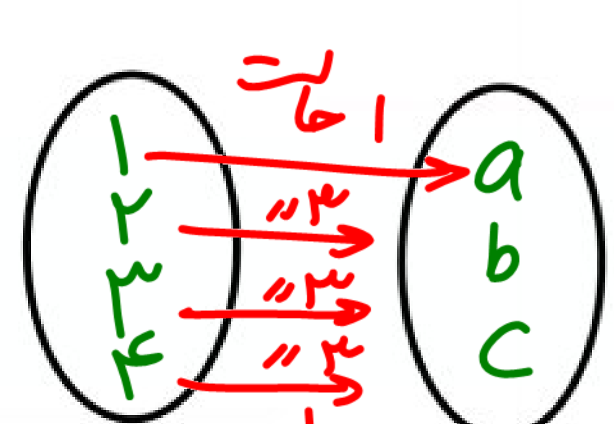
مثال: به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر به دلخواه توزیع کرد؟



تعداد توابع → $3^4 = 81$ ✓

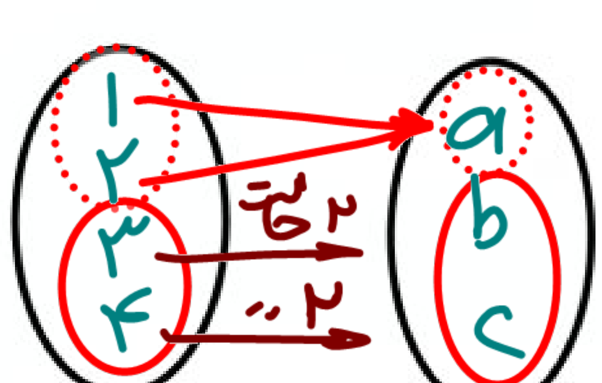
یک خودکار همزمان به دو نفر داده نمی‌شود

* اگر قرار باشد خودکار شماره ۱، به فرد a برسد، چطور؟



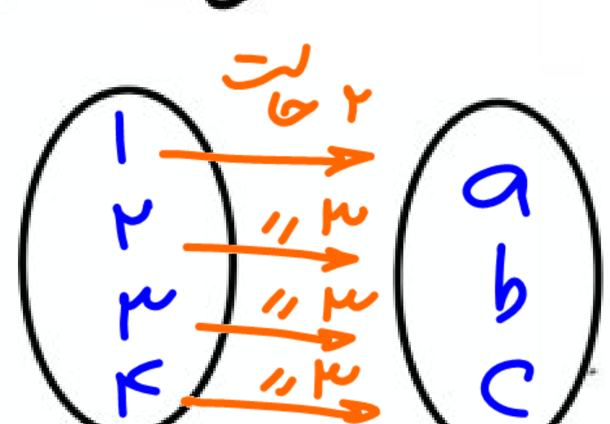
× $1\times3\times3\times3 = 27$ ✓

* اگر قرار باشد فقط خودکارهای شماره ۱ و ۲، به فرد a برسد، چطور؟



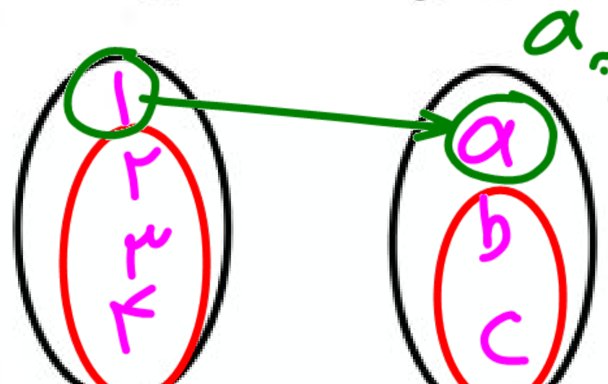
$2\times2 = 4$ ✓

* اگر قرار باشد خودکار شماره ۱، به شخص a نرسد، چطور؟



× $2\times3^3 = 54$ ✓

* اگر قرار باشد فقط یک خودکار به شخص a برسد، چطور؟



انتخاب خودکار متعلق به a

$2^3 \times \binom{4}{1} = 32$ ✓

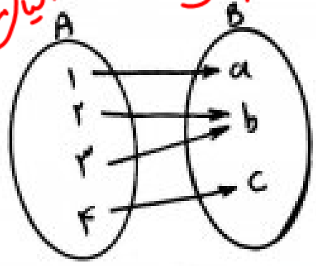
تعداد توابع از ۳ عضوی به ۲ عضوی

* اگر قرار باشد حداقل یک خودکار به شخص a برسد، چطور؟ H.W

محاسبه تعداد توابع پوشا

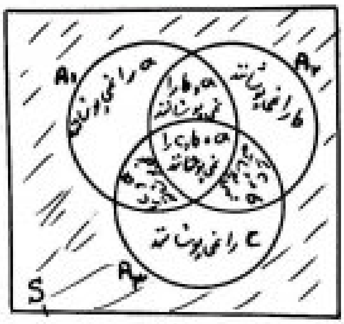
جعبه‌ای خالی نباشد (در هر جعبه حداقل یک شی باشد)

تعریف: تابع $f: A \to B$ پوشا است اگر و تنها اگر $R_f = B$
(یعنی به هر عضو B، حداقل یک فلش وارد شود)



مثال (Ex): از مجموعه $A=\{1,2,3,4\}$ به مجموعه $B=\{a,b,c\}$ چند تابع پوشا وجود دارد؟

به هر عضو B حداقل یک فلش وارد شود $\xrightarrow{\text{متمم}}$ هیچ فلش



A_1: مجموعه توابعی از A به B که a را نمی‌پوشانند (به a فلش نمی‌زنند) $\xrightarrow[\text{به مجموعه ۲ عضوی}]{\text{تعداد توابع از مجموعه ۴ عضوی}}$ $|A_1| = (3-1)^4$ — عضو a حذف شده

A_2: مجموعه توابعی از A به B که b را نمی‌پوشانند (به b فلش نمی‌زنند) $\xrightarrow{\text{" "}}$ $|A_2| = (3-1)^4$ — عضو b حذف شده

A_3: مجموعه توابعی از A به B که c را نمی‌پوشانند (به c فلش نمی‌زنند) $\xrightarrow{\text{" "}}$ $|A_3| = (3-1)^4$ — عضو c حذف شده

a پوشیده نشود نه — b پوشیده نشود نه — c پوشیده نشود نه

$$\underbrace{|A_1' \cap A_2' \cap A_3'|}_{\text{تعداد توابع پوشا}} = |(A_1 \cup A_2 \cup A_3)'| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= |S| - \left[(|A_1|+|A_2|+|A_3|) - |A_1\cap A_2| - |A_1\cap A_3| - |A_2\cap A_3| + |A_1\cap A_2\cap A_3|\right]$$

یک عضو پوشیده نشود — دو عضو پوشیده نشود — سه عضو پوشیده نشود

$$= \underbrace{3^4}_{\text{کل توابع از A به B}} - \underbrace{\left[3\times(3-1)^4 - 3\times(3-2)^4 + (\underbrace{3-3}_{0})^4\right]}_{\text{اجتماع توابع ناپوشا}} = 36$$

فرمول تعداد توابع پوشا (از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه m عضوی) $n \geq m$

$$\boxed{\overset{\text{کل توابع}}{m^n} - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \dots \pm \binom{m}{m}(\underbrace{m-m}_{0})^n}$$

علامت‌ها یک در میان عوض می‌شود

مثال (Ex): تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی کدام است؟

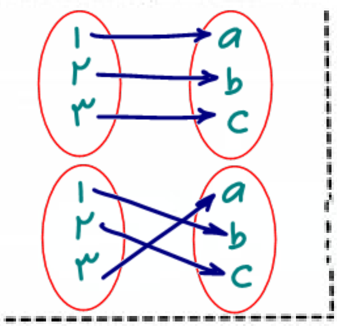
$$\overset{\text{کل توابع}}{3^5} - \binom{3}{1}(3-1)^5 + \binom{3}{2}(3-2)^5 - \binom{3}{3}(\underbrace{3-3}_{0})^5 = 150$$

دو حالت خاص مهم:

تعداد توابع پوشا از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی $= 3^n - 3\times 2^n + 3$

" " " " " " " " " ۲ عضوی $= 2^n - 2$

$$\underset{\text{کل توابع}}{3^n} - \underbrace{\binom{3}{1}}_{3}(\underbrace{3-1}_{2})^n + \underbrace{\binom{3}{2}}_{3}(\underbrace{3-2}_{1})^n = 3^n - 3\times 2^n + 3$$



سراسری ۹۸ Ex تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ ۶ عضوی به یک مجموعهٔ ۳ عضوی کدام است؟

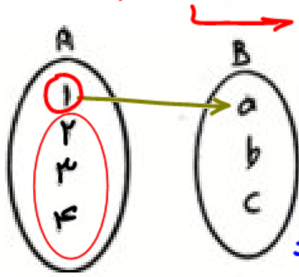
۱) ۳۶۰ ۲) ۴۵۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۵۴۰

$$3^6 - 3\times 2^6 + 3 = 540 \checkmark$$

حالت خاص تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با $n!$ ← که همگی یک به یک نیز هستند

مثال: از مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ به خودش چند تابع پوشا وجود دارد؟ ۶ عضوی به ۶ عضوی

$$\longrightarrow 6! = 720 \checkmark$$



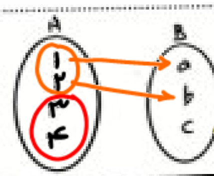
تست از مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4\}$ به مجموعهٔ $B=\{a,b,c\}$ چند تابع پوشا شامل $(1,a)$ (یا با شرط $f(1)=a$) وجود دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶

توابع پوشا در این تست: توابع پوشایی که دیگر به a فلش نمی‌زنند ۳ عضوی به ۲ عضوی $\longrightarrow 2^3 - 2 = 6$

یا توابع پوشایی که باز هم به a فلش می‌زنند ۳ عضوی به ۳ عضوی $\longrightarrow 3! = 6$

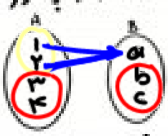
$\xrightarrow{+} 12$



* اگر گفته شود شامل $(1,a)$ و $(2,b)$ چطور؟ ۵ تا

۱ حالت → ۲ عضوی به یک عضوی c

یا یکی از فلش‌های ۳ و ۴ به c و فلش دیگر به a یا b → $\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}=4$



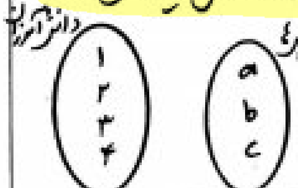
* اگر گفته شود شامل $(1,a)$، $(2,a)$ چطور؟

۲ عضوی به ۲ عضوی $\longrightarrow 2! = 2 \checkmark$

تست H.W از مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,5\}$ به مجموعهٔ $B=\{a,b,c\}$ چند تابع پوشا و فاقد $(1,a)$ وجود دارد؟ (گزینهٔ ۲)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۱۴۰

مثال: Ex به چند طریق می‌توان ۴ دانش‌آموز را در ۳ کلاس مختلف جای داد به طوری که در هر کلاس حداقل یک دانش‌آموز باشد؟ تابع پوشا



تعداد توابع پوشا از ۴ عضوی به ۳ عضوی $\longrightarrow 3^4 - 3\times 2^4 + 3 = 36 \checkmark$

نتیجه: تعداد روش‌های توزیع n شیء متمایز در k جعبهٔ متمایز، به طوری در هر جعبه حداقل یک شیء باشد، با تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ k عضوی برابر است.

مثال: Ex ۹۹ تجربی به چند طریق می‌توان ۵ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به طوری که به هر نفر حداقل یک خودکار برسد؟ توابع پوشا

$$\longrightarrow 3^5 - 3\times 2^5 + 3 = 150 \checkmark$$

مثال: Ex به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی مختلف را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

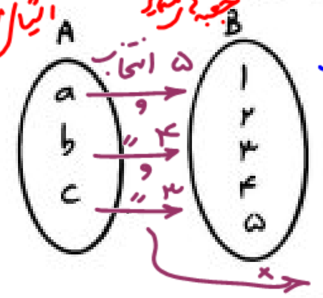
$$3^6 - 3\times 2^6 + 3 = 540 \checkmark$$

محاسبهٔ تعداد توابع یک به یک

در هر جعبه حداکثر یک شی باشد

مثال Ex : از مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به مجموعهٔ $B=\{1,2,3,4,5\}$ چند تابع یک به یک وجود دارد؟

اشیاء متمایز — جعبه‌ی متمایز



$5\times4\times3=60$

$$\text{جواب}=5\times4\times3=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1}=\frac{5!}{2!}=\frac{5!}{(5-3)!}$$

$$=P(5,3)=(5)_3$$

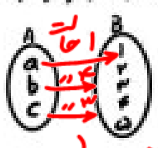
$|B|$, $|A|$

نتیجه Ex : تعداد توابع یک به یک از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ k عضوی برابر است با :

$$P(k,n)=(k)_n=\frac{k!}{(k-n)!}\qquad (n\le k)$$

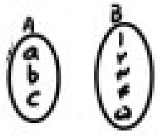
تمرین H.W : از مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به مجموعهٔ $B=\{1,2,3,4,5\}$ چند تابع یک به یک وجود دارد که

الف) شامل $(a,1)$ باشد؟ (جواب : ۱۲)

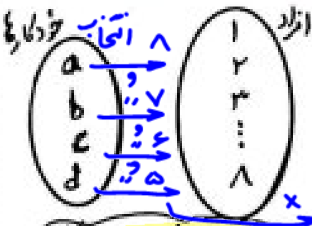


$1\times4\times3=12$ ✓

ب) فاقد $(a,1)$ باشد؟ (جواب : ۴۸)



مثال Ex : به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به طوری که به هر نفر حداکثر یک خودکار برسد؟



$8\times7\times6\times5=1680$ ✓

تعداد توابع یک به یک $P(8,4)=(8)_4=\frac{8!}{4!}=1680$ ✓ توابع یک به یک

نتیجه : تعداد روش‌های توزیع n شی متمایز در k جعبهٔ متمایز به طوری که در هر جعبه حداکثر یک شی قرار گیرد با تعداد توابع یک به یک از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ k عضوی یعنی $P(k,n)$ برابر است.

مثال Ex : به چند روش می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ دانش آموز توزیع کرد به طوری که به هر دانش آموز حداکثر یک کتاب برسد؟

تعداد توابع یک به یک $P(8,5)=(8)_5=\frac{8!}{(8-5)!}=\frac{8!}{3!}$ ✓

سرلیس : ۶ مهرهٔ متمایز را به چند طریق می‌توان درون ۱۰ جعبهٔ متمایز قرار داد به طوری که در هر جعبه حداکثر یک مهره قرار گیرد؟

تعداد توابع یک به یک $P(10,6)=(10)_6=\frac{10!}{4!}=151200$ ✓

مثال : به چند طریق می‌توان ۱۰ نامهٔ مختلف را در ۱۰ پاکت متفاوت قرار داد، به طوری که در هر پاکت فقط یک نامه قرار گیرد؟

تعداد توابع یک به یک (که همگی پوشا نیز هستند)

$$P(10,10)=(10)_{10}=\frac{10!}{(10-10)!}=10!\quad ✓$$

$0!=1$

مربع های لاتین

یک جدول مربعی n×n، که سطرها و ستون های آن با اعداد طبیعی ۱ تا n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد.

مثال:

۱	۲
۲	۱

یک مربع لاتین ۲×۲

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

دو مربع لاتین ۳×۳

۱	۳	۵	۴	۲
۵	۴	۲	۱	۳
۲	۱	۳	۵	۴
۳	۵	۴	۲	۱
۴	۲	۱	۳	۵

یک مربع لاتین ۵×۵

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

دو مربع لاتین ۴×۴

تذکر: در یک مربع لاتین می‌توان درایه‌ها را با n عدد متمایز دلخواه یا n حرف یا نماد پر کرد. اما در کتاب درسی فقط از اعداد ۱ تا n استفاده شده است.

a	b	c
b	c	a
c	a	b

تست در مربع لاتین مقابل، برای x چند عدد وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

۱	۲	
	۱	x

تست به ازای چند مقدار a، مربع مقابل می‌تواند مربع لاتین باشد؟

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

۱	۳	۴	۲
۲	۱		
۳		۱	
۴		a	۱

تست برای پر کردن مربع لاتین زیر، چند روش وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

	۳	

تست برای مربع لاتین زیر، چند حالت وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

۱	۴		
	۲	۳	
			۲

(تمرین ۴)

تست ۱۴۰۳ — به ازای چند مقدار x ، جدول مقابل یک مربع لاتین ۵×۵ است؟

		x		۵
	۳		۱	
		۲		

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

سراسری ۱۴۰۰ — مربع لاتین زیر را در نظر بگیرید. زوج مرتب (a,b) کدام است؟

	a	۳		
	۳	۱	۴	
	۲	۵	۱	۳
	۱	۴	۲	
b				

۱) (۵,۳) ۲) (۱,۴)
۳) (۲,۱) ۴) (۴,۱)

سراسری ۱۴۰۰ خ — مربع لاتین زیر را در نظر بگیرید. زوج مرتب (a,b) کدام است؟

		۳		
b	۳	۱	۴	
	۲	۵	۱	۳
	۱	۴	۲	
				a

۱) (۴,۵) ۲) (۴,۲)
۳) (۱,۵) ۴) (۱,۲)

تعداد مربع های لاتین

◀ مربع لاتین ۱×۱ فقط یکی ← $\boxed{۱}$

◀ مربع لاتین ۲×۲ دوتا ←

۱	۲
۲	۱

۲	۱
۱	۲

◀ مربع لاتین ۳×۳

۱۲ تا

مربع لاتین چرخشی

در یک مربع لاتین $n\times n$، سطر اول با اعداد $n,\dots,۲,۱$ پر شده است. اگر مطابق شکل زیر با شروع از سطر اول، هر سطر را یک واحد به راست منتقل کنیم و عدد خارج شده از مربع را در اولین خانهٔ آن سطر قرار دهیم، سطر بعدی حاصل می‌شود و اگر این کار را برای تمام سطرها انجام دهیم، مربع لاتین چرخشی به دست می‌آید.

$$\begin{array}{|cccccc|}
\hline
1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\
n & 1 & 2 & 3\ \dots & n-2 & n-1 \\
n-1 & n & 1 & 2\ \dots & n-3 & n-2 \\
\vdots & & & & & \\
3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\
2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\
\hline
\end{array}$$

* در هر سطر بعد از n عدد ۱ است (و بعد ۲، ۳ و ...)
* در هر ستون بعد از ۱ عدد n است (و بعد $n-1$ و $n-2$ و ...)

مثال

① مربع لاتین چرخشی ۳×۳

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

② مربع لاتین چرخشی ۴×۴

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

تست اگر A یک مربع لاتین چرخشی ۹×۹ با سطر اول $۱,۲,\dots,۹$ باشد، آن‌گاه درایهٔ a_{64} کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷
۳) ۸ ۴) ۹

$A=$

۱	۲	۳	...	۸	۹

تست به چند طریق می‌توان مربع لاتین چرخشی زیر را تکمیل کرد؟

۱	۲		
	۱	۲	
		۱	

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

تست ۱۴۰۰ در یک مربع لاتین چرخشی $A=[a_{ij}]_{10\times 10}$ با سطر اول $۱,۲,\dots,۱۰$، حاصل $a_{84}-a_{72}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۴ ۴) ۹

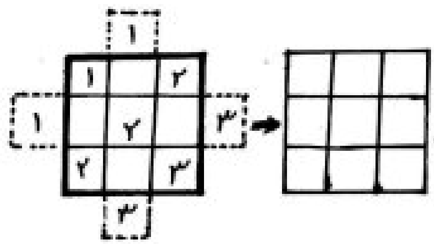
(گزینه ۲)

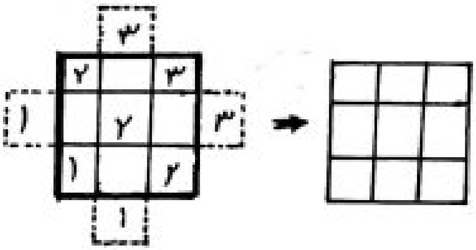
یک روش ساخت برای مربع‌های لاتین ۳×۳ ، ۵×۵ ، ... (مرتبهٔ فرد)

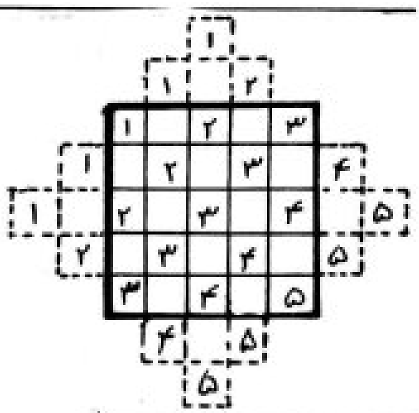
① از هر چهار طرف ، خانه‌هایی به جدول اضافه می‌کنیم تا به تعداد مرتبهٔ جدول ، ردیف‌هایی موازی با قطر اصلی ایجاد شود.

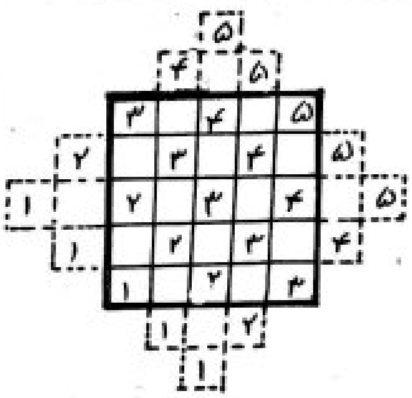
② در ردیف‌های موازی با قطر اصلی ، هر ردیف را با عددی یکسان (از اعداد ۱ تا n) پُر می‌کنیم (مثلاً ردیف اول با عدد ۱ ، ردیف دوم با عدد ۲ ، ...) یا تمام ردیف‌های موازی با قطر اصلی را با اعداد ۱ تا n پُر می‌کنیم (مثلاً ردیف اول با اعداد ۱ تا n ، ردیف دوم به همین ترتیب و...) .

③ اعداد خارج مربع اصلی را در سطر یا ستون مربوط به خود ، به درایهٔ خالی متقابل با فاصلهٔ n خانه دورتر منتقل می‌کنیم.







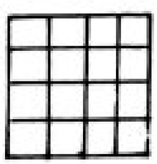


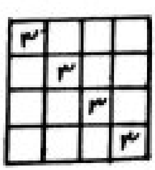
یک روش ساخت مربع لاتین ۴×۴ (اختیاری)

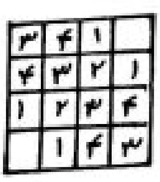
① یکی از اعداد ۱ تا ۴ را روی قطر اصلی قرار می‌دهیم.

② سطرها و ستون‌هایی را می‌یابیم که بتوانیم اعداد ۱ تا ۴ را به صورت صعودی یا نزولی در آن‌ها بنویسیم.

③ درایه‌های خالی مانده را با عدد مناسب به شرط تکراری نبودن با سایر درایه‌های سطر و ستون مربوطه ، پُر می‌کنیم.







نکات مهم مربع لاتین

① Ex با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین، بازهم یک مربع لاتین حاصل خواهد شد.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

$R_1 \leftrightarrow R_2$ →

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

$C_1 \leftrightarrow C_4$ →

۳	۱	۴	۲
۱	۳	۲	۴
۲	۴	۱	۳
۴	۲	۳	۱

Ex توجیه نکته ۱: با تعویض جای دو سطر (دو ستون)، باز هم هرکدام از اعداد ۱ تا n در هر سطر و در هر ستون یک بار دیده می‌شوند.

② Ex در هر مربع لاتین، با اعمال یک جایگشت بر روی اعداد ۱، ۲، ...، n یک مربع لاتین جدید حاصل می‌شود.

Ex توجیه نکته ۲: زیرا در غیر این صورت در سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود خواهد داشت که این موضوع با توجه به خواص جایگشت ایجاب می‌کند که در سطر یا ستونی از مربع اول نیز عضو تکراری وجود داشته باشد و این با مربع لاتین بودن آن در تناقض است.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۲ → ۳
۳ → ۲
۱ → ۱

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

۱ → ۳
۲ → ۲
۳ → ۴
۴ → ۱

تست مربع لاتین B، از اعمال یک جایگشت بر روی مربع لاتین A حاصل شده است. دوتایی (a,b) کدام است؟

۱) (۴,۳) ۲) (۲,۳)
۳) (۲,۴) ۴) (۳,۴)

A =

۳			a
۴	۳	۲	۱
۱		۳	
۲		۴	

B =

۱	۲	۴	
۲		۳	
b	۳		۲
	۴		۱

تست در یک مربع لاتین چرخشی ۶×۶ با سطر اول ۱، ۲، ...، ۶ جایگشت مقابل را اعمال می‌کنیم. ستون سوم با a شروع و به b ختم می‌شود. دوتایی (a,b) کدام است؟

۱ → ۱
۲ → ۴
۳ → ۶
۴ → ۲
۵ → ۳
۶ → ۵

۱) (۳,۴) ۲) (۳,۲)
۳) (۲,۶) ۴) (۶,۲)

کاربرد مربع های لاتین ← در مسائل برنامه ریزی

مثال (EX): سه سخنران به نام های m_1، m_2 و m_3 قرار است در یک روز در سه جلسه ۱۰-۸، ۱۲-۱۰ و ۱۶-۱۴ در سه سالن A، B و C سخنرانی کنند. هر سالن سه جلسه سخنرانی دارد و هر سخنران در هر یک از سالن ها فقط یک بار سخنرانی می کند. به کمک مربع لاتین برای این مسأله برنامه ریزی کنید.

جلسه \ سالن	A	B	C
۱۰-۸			
۱۲-۱۰			
۱۶-۱۴			

توجه:
① هیچ سخنرانی در یک جلسه در دو سالن حضور ندارد ←
② " " در یک سالن دو بار سخنرانی نکرده است ←
③ هر سخنران در هر یک از جلسه ها سخنرانی کرده است ←
④ " " در تمام سالن ها سخنرانی کرده است ←

سراسری ۹۸ خ: در یک روز هفته برای ۳ مدرس در ۳ کلاس متمایز در ۳ جلسه متوالی به چند طریق می توان برنامه تدریس تعیین کرد؟

۱) ۶ ۲) ۹
۳) ۱۲ ۴) ۱۸

	c_1	c_2	c_3
S_1	T_1		
S_2			
S_3			

* اگر قرار باشد مدرس T_1، در جلسه اول، در کلاس c_1 تدریس کند، چطور؟

مثال (EX): قرار است شش مدرس T_1، T_2، ...، T_6، در شش جلسه متوالی، در شش کلاس c_1، c_2، ...، c_6 به گونه ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه ریزی کنید.

تمرین (H.W): پنج کارگر در پنج روز هفته با پنج دستگاه مختلف در یک کارگاه به گونه ای کار می کنند که هر کارگر در هر روز با هر دستگاه فقط یک بار کار می کند و هر دستگاه در هفته فقط توسط یک کارگر به کار گرفته می شود. برای این منظور به دو روش برنامه ریزی کنید.

دو مربع لاتین متعامد

اگر A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار گرفتن درایه‌های نظیر به نظیر این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود، که هر خانهٔ آن شامل یک عدد دو رقمی است، که تمام رقم‌های سمت چپ (دهگان) مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست (یکان) مربوط به مربع B (و یا برعکس) است.

در این صورت دو مربع لاتین A و B را **متعامد** می‌گوییم، هرگاه هیچ یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند.

مثال :

A =

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

B =

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

⇒ AB =

۱۱	۲۳	۳۲
۳۳	۱۲	۲۱
۲۲	۳۱	۱۳

⇒ A, B متعامدند

A =

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

B =

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

⇒ AB =

⇒

A =

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

B =

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

⇒ AB =

⇒

تذکر: برای تشخیص متعامد بودن یا نبودن دو مربع لاتین، به این صورت است که هر دو درایه در یکی از مربع‌ها که اعداد یکسان دارند، درایه‌های نظیر آنها در مربع دیگر باید اعداد متمایز باشند.
پس برای اثبات متعامد نبودن دو مربع لاتین، کافی است در یکی از دو مربع، دو درایهٔ یکسان پیدا کنیم به طوری که در درایه‌های نظیر به این دو درایه در مربع دیگر نیز درایه‌های یکسان (نه لزوماً مساوی با دو درایهٔ یکسان مربع اول) وجود داشته باشد.

نکات مهم مربع های لاتین متعامد

① برای $n = 1, 2, 6$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود ندارد. به عبارت دیگر
EX

اگر $n \neq 1, 2, 6$ ، دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارد.

② اگر جای دو سطر (دو ستون) در یک مربع لاتین تعویض شود، مربع لاتین حاصل ممکن است با مربع لاتین اولیه متعامد باشد یا نباشد.
EX

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} A'_1=\begin{bmatrix}2&3&1\\3&1&2\\1&2&3\end{bmatrix} \Rightarrow AA'_1=\begin{bmatrix}12&23&31\\33&11&22\\21&32&13\end{bmatrix} \Rightarrow$$

A و A'_1 متعامدند

$$A \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} A'_2=\begin{bmatrix}1&3&2\\3&2&1\\2&1&3\end{bmatrix} \Rightarrow AA'_2=\begin{bmatrix}11&23&32\\33&12&21\\22&31&13\end{bmatrix} \Rightarrow$$

A و A'_2 متعامدند

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\\3&4&1&2\\2&3&4&1\end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} B'=\begin{bmatrix}4&1&2&3\\1&2&3&4\\3&4&1&2\\2&3&4&1\end{bmatrix} \Rightarrow BB'=\begin{bmatrix}\ &\ &\ &\ \\ \ &\ &\ &\ \\ \ &\ &11&\ \\ \ &\ &\ &11\end{bmatrix} \Rightarrow$$

B' ، B نامتعامدند

نتیجه : همان طور که در مثال های بالا دیده می شود :

در مربع لاتین 3×3 ، اگر جای دو سطر (دو ستون) تعویض شود، مربع لاتین حاصل با مربع لاتین اولیه متعامد است.

تذکر : یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ ، آن است که ابتدا یک مربع لاتین 3×3 دلخواه در نظر می گیریم و سپس با تعویض جای دو سطر (دو ستون) آن ، مربع لاتین متعامد با آن به دست می آید.
EX

مثال : دو مربع لاتین متعامد مرتبهٔ ۳ مشخص کنید.
EX

تذکر ۲ متناظر با هر مربع لاتین مرتبهٔ ۳، همواره ۶ مربع لاتین متعامد با آن وجود دارد:

۳ بار با جابه‌جایی دو به دو سطرها

۳ بار با جابه‌جایی دو به دو ستون‌ها

سراسری ۹۸ تعداد مربع‌های لاتین متعامد با مربع لاتین

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

کدام است؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۶

تذکر ۳ Ex

در مربع لاتین ۳×۳، اگر جای دو سطر (دو ستون) تعویض شوند، مربع لاتین حاصل با مربع لاتین اولیه متعامد است. اما اگر بیش از یک بار جابه‌جایی دو سطر (دو ستون) اعمال شود، مربع لاتین نهایی با مربع لاتین اولیه متعامد نیست.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} A'=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} A''=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow AA''=\begin{bmatrix} 12 & & \\ & 12 & \\ & & \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ A و A'' متعامد نیستند

* توجه کنید که دو مربع لاتین A' و A'' متعامدند! یعنی هر مربع لاتین مرتبهٔ ۳، تنها با مربع لاتین حاصل از یک مرحله اعمال تعویض جای دو سطر (دو ستون) خود، متعامد است.

از چهرهٔ افروخته گل را بشکن

افروخته شمع مرو تو دگر به چمن

گل را تو دگر خجل مکن ای مه من

بشکن به جهان ای مه من قدر سمن

۳) اگر دو مربع لاتین هم‌مرتبه، متعامد باشند، با اعمال جایگشت روی درایه‌های هر کدام باز هم متعامدند.

به عبارت دیگر: اعمال جایگشت روی درایه‌های مربع‌های لاتین متعامد، تأثیری در متعامد بودن آن‌ها ندارد.

مثال:

A =

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

B =

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

$\Rightarrow$ AB =

۲۳	۳۱	۱۲
۳۲	۱۳	۲۱
۱۱	۲۲	۳۳

$\Rightarrow$ A و B متعامدند

۱ ⟵ ۱
۲ ⟵ ۳
۳ ⟵ ۲

(۱ → ۱، ۲ → ۳، ۳ → ۲)

A' =

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

B' =

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

$\Rightarrow$ A'B' =

۳۲	۲۱	۱۳
۲۳	۱۲	۳۱
۱۱	۳۳	۲۲

$\Rightarrow$ A' و B' متعامدند

نکته ۱ (EX): اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتینی که از اعمال جایگشت بر روی درایه‌های یکی از آن‌ها به دست می‌آید، با مربع لاتین دیگر متعامد است.

◀ در مثال بالا داریم:

AB' =

۲۲	۳۱	۱۳
۳۳	۱۲	۲۱
۱۱	۲۳	۳۲

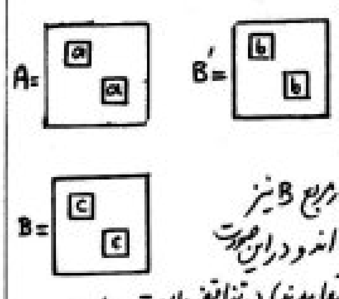
$\Rightarrow$ A و B' متعامدند

A'B =

۳۳	۲۱	۱۲
۲۲	۱۳	۳۱
۱۱	۳۲	۲۳

$\Rightarrow$ A' و B متعامدند

اثبات نکته ۱ (EX): فرض می‌کنیم A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B' مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد. نشان می‌دهیم A و B' نیز متعامدند. برای این منظور از برهان خلف کمک می‌گیریم:



فرض می‌کنیم A و B' متعامد نباشند. لذا دو جایگاه در مربع A وجود دارد که اعداد یکسانی (مثلاً a) در آنها قرار دارد و در جایگاه‌های نظیر آنها در مربع B' نیز دو درایهٔ یکسان (مثلاً b) قرار دارند. حال با توجه به مفهوم جایگشت، در همین دو جایگاه در مربع B نیز باید دو درایهٔ یکسان (مثلاً c) باشد، که در B' با اعمال جایگشت به درایهٔ b تبدیل شده‌اند و در این صورت دو مربع A و B نیز متعامد نخواهند بود (چرا؟) و این موضوع با فرض مسئله (که A و B متعامدند) در تناقض است. پس A و B' نمی‌توانند متعامد نباشند.

نکته ۲ (EX): مربع لاتین حاصل از اعمال جایگشت روی درایه‌های یک مربع لاتین، با مربع لاتین اولیه متعامد نیست.

◀ در مثال بالا داریم:

AA' =

۲۳		
		۲۳

$\Rightarrow$ A و A' نامتعامدند

BB' =

۳۲		
	۳۲	

$\Rightarrow$ B و B' نامتعامدند

توجیه نکته ۲ (EX): اگر در مربع لاتین A، یک جایگشت مثلاً به صورت $1 \longrightarrow x$ صورت گیرد، آن‌گاه در مربع A'، متناظر با تمام ۱های A، عدد x وجود دارد و این بدان معناست که عدد دورقمی 1x بیش از یک بار در مربع AA' دیده می‌شود و لذا A و A' متعامد نیستند.

تست — مربع لاتین A با مربع لاتین

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

متعامد است. کدام یک از مربع های لاتین زیر با مربع لاتین A متعامد می باشد؟

۱)

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

۲)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۳)

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۴)

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

تست — دو مربع لاتین متقابل متعامدند. مربع لاتین A با کدام مربع لاتین زیر متعامد است؟

۱)

۱	۲	۳	۴
	۴		۲
	۱	۴	
۴		۲	۱

۲)

۴		۲	
۱		۳	
	۱		۳
	۴		۲

۳)

۲		۳	
	۱		۴
۳		۱	
	۲		۴

۴)

۴		۳	۲
	۲		۱
۲		۱	
	۴	۲	

(گزینه ۴)

A =

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

B =

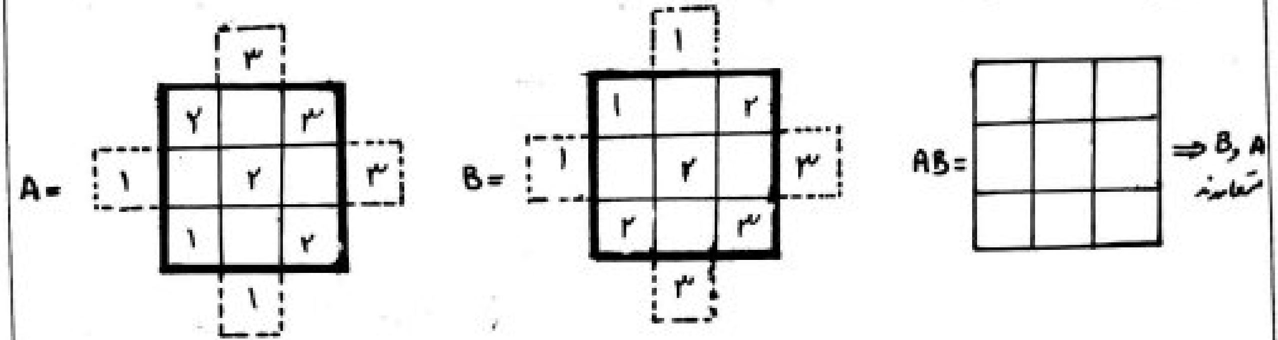
۳	۴	۱	۲
۱			
			۳

AB =

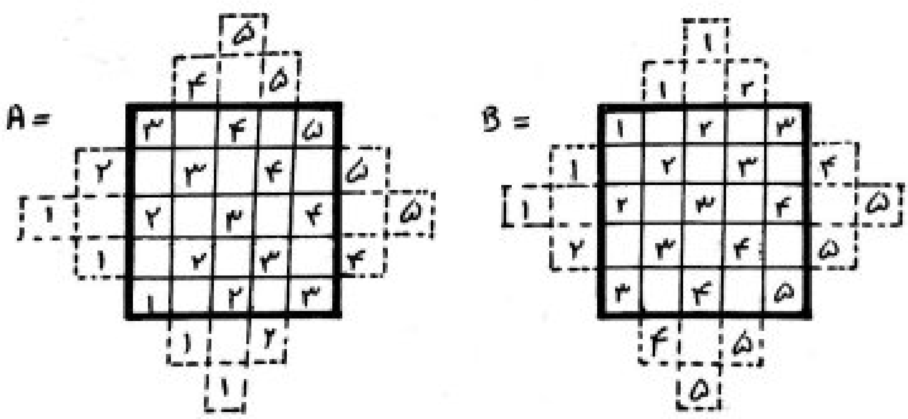
یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ فرد

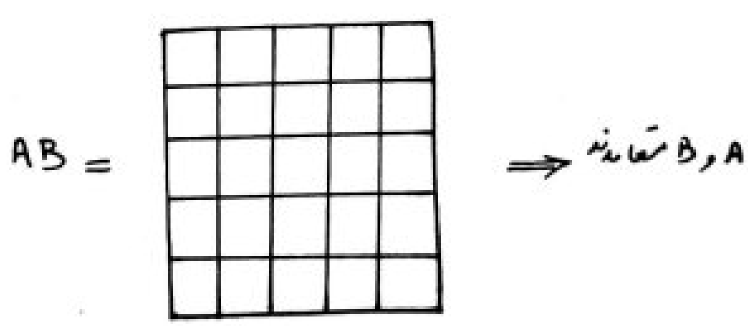
(همانند روشی که برای ساختن مربع لاتین مرتبهٔ فرد گفته شد)

مثال ۱: ساختن دو مربع لاتین متعامد ۳×۳



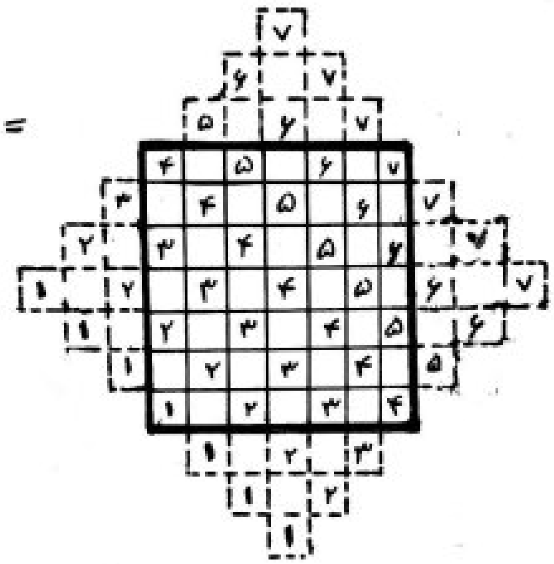
مثال ۲: ساختن دو مربع لاتین متعامد ۵×۵



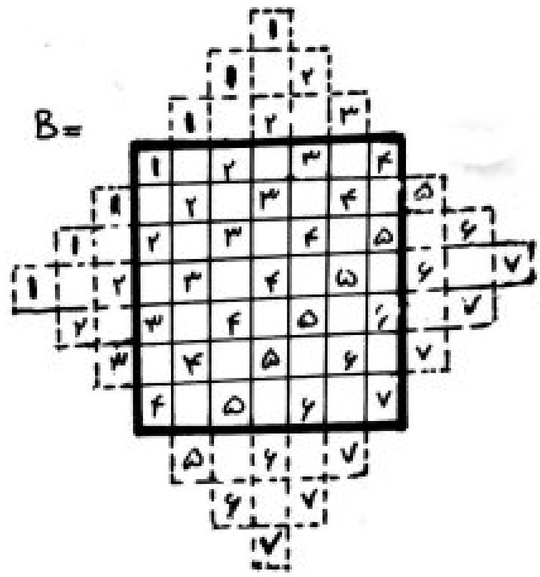


مثال ۳: ساختن دو مربع لاتین متعامد ۷×۷

A =



B =



AB =

۴۱	۱۵	۵۲	۲۶	۶۳	۳۷	۷۴
۷۵	۴۲	۱۶	۵۳	۲۷	۶۴	۳۱
۳۲	۷۶	۴۳	۱۷	۵۴	۲۱	۶۵
۶۶	۳۳	۷۷	۴۴	۱۱	۵۵	۲۲
۲۳	۶۷	۳۴	۷۱	۴۵	۱۲	۵۶
۵۷	۲۴	۶۱	۳۵	۷۲	۴۶	۱۳
۱۴	۵۱	۲۵	۶۲	۳۶	۷۳	۴۷

این نیز بگذرد

کاربرد مربع های لاتین متعامد در مسائل برنامه ریزی

مسأله ۱: در یک کارخانه قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخ ریسی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند بطوری که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و هر الیاف در هر نوع ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. برای این مسأله برنامه ریزی کنید.

حل :

مرحله ۱ : یک مربع لاتین ۵×۵ ، که سطرهای آن روزهای هفته و ستون های آن کارگرها و درایه‌های آن شماره هرکدام از ماشین‌ها می‌باشد، در نظر می‌گیریم. یعنی هر کارگر در هر روز با یک ماشین و در طول هفته با هر ماشین دقیقاً یک بار کار کرده است.

A =

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱	۴	۲	۵	۳
یکشنبه	۴	۲	۵	۳	۱
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۵	۳	۱	۴	۲
چهارشنبه	۳	۱	۴	۲	۵

مرحله ۲ : یک مربع لاتین ۵×۵ ، همانند مرحله ۱ در نظر می‌گیریم ، که درایه‌های آن شماره هرکدام از الیاف مورد استفاده می‌باشد. یعنی هر کارگر در هر روز با یک نوع الیاف و در طول هفته با هر نوع الیاف دقیقاً یکبار کار کرده است.

B =

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۳	۱	۴	۲	۵
یکشنبه	۵	۳	۱	۴	۲
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۴	۲	۵	۳	۱
چهارشنبه	۱	۴	۲	۵	۳

مرحله ۳ : با کنار هم قرار دادن این دو مربع ، یک مربع جدید حاصل می‌شود که مسأله فوق را برنامه ریزی کرده است.
مثلاً کارگر شماره ۴ در روز دوشنبه با ماشین شماره ۱ ، الیاف ۱ کار کرده است.

AB =

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
یکشنبه	۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
دوشنبه	۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
سه‌شنبه	۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
چهارشنبه	۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

توجه: متعامد بودن این دو مربع لاتین ، تضمین می‌کند که هر الیاف در هر نوع ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شده است.
(زیرا هیچ عدد دو رقمی تکراری وجود ندارد)

مسئله ۲ : سه برادر (تقریباً هم سایز) در خانه سه کت و سه پیراهن دارند و می‌خواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر کت و هر پیراهن را دقیقاً یک بار استفاده کند و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار پوشیده شود. چگونگی انجام این کار را مشخص کنید.

△ به چند روش می‌توان برنامه ریزی کرد؟

A =

	B_1	B_2	B_3
شنبه			
یکشنبه			
دوشنبه			

کت‌ها

B =

	B_1	B_2	B_3
شنبه			
یکشنبه			
دوشنبه			

پیراهن‌ها

$\Rightarrow$ AB =

	B_1	B_2	B_3
شنبه			
یکشنبه			
دوشنبه			

△ با فرض معلوم بودن مربع لاتین مربوط به کت‌ها
برای پیراهن‌ها به چند طریق می‌توان برنامه ریزی کرد؟

مسئله ۳ (H.W): در یک مسابقه اتومبیل رانی قرار است ۷ راننده در هفت روز هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند به طوری که هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند و هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود (هر راننده با هر ماشین فقط یک روز و هر راننده هر روز فقط در یک مسیر رانندگی می‌کند). برای این موضوع برنامه ریزی کنید.

A =

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
شنبه							
یکشنبه							
دوشنبه							
سه‌شنبه							
چهارشنبه							
پنج‌شنبه							
جمعه							

ماشین‌ها

B =

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
شنبه							
یکشنبه							
دوشنبه							
سه‌شنبه							
چهارشنبه							
پنج‌شنبه							
جمعه							

مسیرها

AB =

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
شنبه							
یکشنبه							
دوشنبه							
سه‌شنبه							
چهارشنبه							
پنج‌شنبه							
جمعه							

تست شش سخنران قرار است در شش روز هفته در شش همایش مختلف در مورد شش موضوع مختلف سخنرانی کنند بطوری که هر سخنران در هر روز در یک همایش و در مورد یک موضوع سخنرانی نماید و هر موضوع در هر همایش یک بار مطرح می شود (هر سخنران در هر همایش فقط یک روز و هر سخنران هر روز فقط در مورد یک موضوع سخنرانی می کند). این مسئله به چند روش قابل برنامه ریزی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱۲ ۴) هیچ

سراسری ۹۹ در یک مسابقه، سه راننده در سه روز متوالی هفته با سه نوع اتومبیل ۱، ۲، ۳ در سه مسیر A، B، C شرکت می کنند. هر کدام از راننده‌ها فقط یک مسیر و یک اتومبیل را در روز انتخاب می کنند و برنامه‌ریزی اتومبیل‌ها به صورت مربع لاتین زیر است. به چند طریق برنامه ریزی مسیر را می توان انجام داد، به شرطی آن که نفر اول در روز اول، مسیر A را انتخاب نکند؟

	D_1	D_2	D_3
شنبه	۲	۳	۱
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۱	۲	۳

(اتومبیل‌ها)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

	D_1	D_2	D_3
شنبه			
یکشنبه			
دوشنبه			

	D_1	D_2	D_3
شنبه			
یکشنبه			
دوشنبه			

	D_1	D_2	D_3
شنبه			
یکشنبه			
دوشنبه			

	D_1	D_2	D_3
شنبه			
یکشنبه			
دوشنبه			

	D_1	D_2	D_3
شنبه			
یکشنبه			
دوشنبه			

	D_1	D_2	D_3
شنبه			
یکشنبه			
دوشنبه			

اصل لانه کبوتری

اگر تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه‌ها باشد و همهٔ کبوترها درون لانه‌ها قرار گیرند، آن‌گاه لانه‌ای با حداقل دو کبوتر (بیش از یک کبوتر) وجود دارد.

مثلاً

در یک کلاس ۸ نفری، حداقل دو نفر در یک روز هفته متولد شده‌اند. زیرا اگر ۸ نفر را به عنوان ۸ کبوتر و ۷ روز هفته را به عنوان ۷ لانه در نظر بگیریم، از آن جایی که تعداد کبوترها از تعداد لانه‌ها بیشتر است، پس طبق اصل لانه کبوتری، حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۲ نفر در یک روز هفته متولد شده‌اند.

تذکر: در حل مسائل مربوط به اصل لانه کبوتری، پس از تشخیص کبوترها و لانه‌ها، می‌توان تعداد کبوترها را به تعداد لانه‌ها تقسیم کرد و به عدد خارج قسمت یک واحد اضافه نمود.
در این صورت حداقل تعداد کبوترهایی که (با اطمینان) در یک لانه وجود دارند، به دست می‌آید.

در مثال بالا:

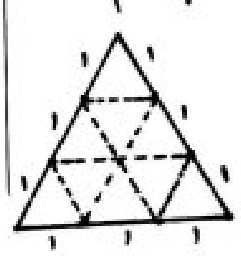
$$\begin{array}{r|l} ۸ & ۷ \\ -۷ & ۱ \\ \hline ۱ & \end{array} \longrightarrow ۱+۱=۲ \longrightarrow$$

حداقل ۲ نفر وجود دارند که در یک روز هفته متولد شده‌اند.

مثال (Ex): نشان دهید اگر ضلع‌های یک مثلث را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ‌آمیزی کنیم، حداقل ۲ ضلع مثلث هم‌رنگ می‌شوند.

تمرین (Ex / H.W): نشان دهید در یک خانوادهٔ ۵ نفری، دست کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

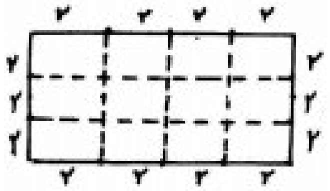
مثال (Ex): در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ واحد، ۱۰ نقطه به تصادف داخل مثلث انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌ای کمتر از یک واحد دارند.



مثال (Ex): ثابت کنید در بین ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر با روز تولد یکسان وجود دارد.

مثال (Ex): ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموع آنها عددی زوج باشد.

مثال (Ex): درون یک مستطیل 6×8 واحد، ۱۳ نقطه به دلخواه انتخاب می‌شود. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌ای کمتر از $2\sqrt{2}$ دارند.

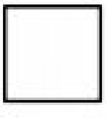


حل: مستطیل داده شده را به ۱۲ مربع 2×2 تقسیم می‌کنیم.

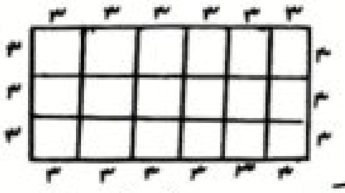
۱۳ نقطه $\longrightarrow$ ۱۳ کبوتر
۱۲ مربع $\longrightarrow$ ۱۲ لانه

$\xrightarrow[\text{اصل لانه کبوتری}]{13 > 12}$ حداقل ۲ نقطه در یک مربع قرار می‌گیرند.

پس



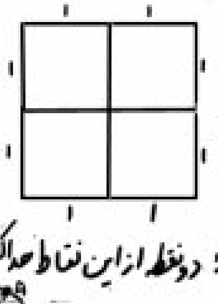
سراسری ۹۸ درون یک مستطیل 18×9، حداقل چند نقطه اختیار شود، تا مطمئن باشیم لااقل فاصلهٔ ۲ نقطه از این نقاط انتخابی، کمتر از $3\sqrt{2}$ باشد؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۸
۳) ۱۹ ۴) ۲۰

تست (H.W) درون یک مربع به ضلع ۲، حداقل چند نقطه انتخاب شود، تا مطمئن باشیم لااقل ۳ نقطه از آن‌ها مثلثی به مساحت حداکثر $\frac{1}{2}$ تشکیل می‌دهند؟

(گزینه ۲)



۱) ۵ ۲) ۹
۳) ۱۱ ۴) ۱۷

تست (H.W) حداقل چند نقطه روی محیط دایره‌ای به شعاع واحد انتخاب شود تا دست کم فاصلهٔ دو نقطه از این نقاط حداکثر برابر ۱ باشد؟

(گزینه ۱)

۱) ۶ ۲) ۷
۳) ۹ ۴) ۱۰

مثال: (Ex) نشان دهید هر زیرمجموعهٔ ۴۳ عضوی از مجموعهٔ {۱, ۲, ... , ۸۴} دارای حداقل ۲ عضو با مجموع ۸۵ است.

تست: در یک زیرمجموعهٔ n عضوی از اعداد طبیعی یک رقمی، حداقل دو عضو وجود دارد که مجموع آنها برابر ۱۰ است. کمترین مقدار n کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۴
۳) ۵　　۴) ۶

سراسری ۹۲ خ: هر زیرمجموعهٔ n عضوی از A = {۱, ۲, ۳, ..., ۲۳}، به طور یقین حداقل دو عضو دارد که مجموع آن دو عضو ۲۴ می‌باشد. حداقل n کدام است؟

۱) ۹　　۲) ۱۰
۳) ۱۲　　۴) ۱۳

سراسری ۹۴ خ (H.W): مجموعهٔ S، اعداد طبیعی فرد و مضرب ۳، شروع از ۳ و ختم به ۶۳ است. یک زیرمجموعهٔ حداقل چند عضوی از S انتخاب شود که مطمئن باشیم شامل دو عضو با مجموع ۶۶ می‌باشد؟ (گزینه ۳)

۱) ۵　　۲) ۶
۳) ۷　　۴) ۸

سراسری ۹۳ خ: در کیسه‌ای ۹۰ گوی یکسان قرار دارد که بر یک از اعداد دو رقمی بر روی آنها نوشته شده است. حداقل چند گوی از کیسه خارج کنیم تا مطمئن باشیم جمع دو عدد از دو گوی خارج شده برابر ۱۱۰ می‌باشد؟

۱) ۴۵　　۲) ۴۶
۳) ۴۷　　۴) ۴۸

مثال: (Ex) نشان دهید هر زیرمجموعهٔ ۱۴ عضوی از مجموعهٔ {۱, ۵, ۹, ۱۳, ..., ۸۱, ۸۵} دارای حداقل ۲ عضو با مجموع ۹۰ است.

سراسری ۹۸: از مجموعهٔ اعداد {۷۱, ۶۸, ۶۵, ..., ۱۱, ۸, ۵} که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده است، یک زیرمجموعهٔ حداقل چند عضوی انتخاب شود تا مطمئن باشیم لااقل دو عدد در این زیرمجموعه موجود است که جمع آنها ۸۲ باشد؟

۱) ۱۱　　۲) ۱۲
۳) ۱۳　　۴) ۱۴

تست از مجموعهٔ اعداد $\{1, 2, \ldots, 20\}$ یک زیرمجموعه با دست کم چند عضو انتخاب کنیم تا تفاضل حداقل دو عضو متعلق به آن برابر ۷ باشد؟

۱) ۸ ۲) ۱۴
۳) ۱۵ ۴) ۱۱

تمرین H.W فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ ۷ عضوی از مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, 21\}$ است. ثابت کنید حداقل دو زیرمجموعهٔ متمایز از S، با مجموع اعضای برابر وجود دارد.

تست از مجموعهٔ اعداد $\{1, 2, 3, \ldots, 35\}$ حداقل چند عضو حذف کنیم تا در بین اعداد باقی مانده، مجموع هیچ دو عددی برابر ۳۵ نشود؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲
۳) ۱۳ ۴) ۱۴

سراسری ۱۴۰۱ حداقل چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, 7\}$ انتخاب شود تا مطمئن شویم دو زیرمجموعه با اشتراک تهی در آن وجود دارد؟

۱) ۶۵ ۲) ۶۴
۳) ۴۵ ۴) ۴۶

تست در یک زیرمجموعهٔ n عضوی از مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ حداقل ۳ عضو با مجموع ۱۵ وجود دارد. کمترین مقدار n کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸
۳) ۶ ۴) ۵

تست در یک کلاس با ۲۴ دانش آموز، ۷ تیم ورزشی ۸ نفری تشکیل شده است. یک دانش آموز با عضویت در حداقل چند تیم ورزشی در این کلاس یافت می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۵

مثال Ex: نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبهٔ $p \geq 2$ ، حداقل ۲ رأس هم درجه وجود دارد.

حل:

حالت ۱: گراف رأس ایزوله (تنها) ندارد. در این صورت درجه‌ی رأس‌ها از ۱ تا $p-1$ (تا $(p-1)$) است.

پس

p رأس $\rightarrow$ p کبوتر
$(p-1)$ عدد برای درجه $\rightarrow$ $(p-1)$ لانه

$\xrightarrow{\text{اصل لانه کبوتری}}$ حداقل ۲ رأس دارای یک درجه‌اند.

حالت ۲: اگر یک رأس تنها وجود داشته باشد، در این صورت درجه‌ی رأس‌ها از ۰ تا $p-2$ (تا $(p-1)$) است.

p رأس $\rightarrow$ p کبوتر
$(p-1)$ عدد برای درجه $\rightarrow$ $(p-1)$ لانه

$\xrightarrow{\text{اصل لانه کبوتری}}$ حداقل ۲ رأس دارای یک درجه‌اند.

نتیجه Ex: در هر کلاس با n دانش آموز $(n \geq 2)$ ، حداقل ۲ دانش آموز وجود دارد که تعداد دوستان آنها در آن کلاس، با هم برابر است.

توضیح: رابطهٔ دوستی بین افراد یک گراف ساده است. پس یک گراف ساده با n رأس وجود دارد، که هر رأس آن یک دانش آموز و یال‌ها، دوستی بین آنها را نشان می‌دهد. یعنی درجهٔ هر رأس، تعداد دوستان دانش آموزِ متناظر با آن رأس را در کلاس نشان می‌دهد. از طرفی می‌دانیم در گراف ساده، حداقل ۲ رأسِ هم درجه وجود دارد. پس حداقل ۲ دانش آموز با تعداد دوستانِ برابر، در آن کلاس، یافت می‌شود.

مثال Ex: نشان دهید در بین هر ۵ عدد صحیح دلخواه، حداقل دو عدد وجود دارد که در تقسیم بر ۴، باقی ماندهٔ یکسان دارند (یا حداقل ۲ عدد وجود دارد که به پیمانهٔ ۴ هم‌نهشت اند یا حداقل ۲ عدد وجود دارد که تفاضل آنها بر ۴ بخش‌پذیر است)

نتیجه: در بین $n+1$ عدد صحیح دلخواه (یا بیشتر) حداقل ۲ عدد با باقی ماندهٔ یکسان در تقسیم بر عدد طبیعی n وجود دارد. (یا حداقل ۲ عدد وجود دارد که به پیمانهٔ n هم‌نهشت اند یا تفاضل آنها بر n بخش‌پذیر است.)

مثال EX: پنج نقطه در صفحهٔ مختصات وجود دارد که مختصات صحیح دارند. ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از آنها، مختصات نقطهٔ وسطشان صحیح است.

سراسری ۹۲ H.W: حداقل چند زوج مرتب به صورت (a,b) با مختص‌های اعداد صحیح و مثبت انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم در ۲ زوج انتخابی، جمع مختص‌های اول و جمع مختص‌های دوم، اعداد زوج هستند؟ (گزینه ۳)

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

تست: حداقل چند عدد طبیعی (که بجز ۳، ۲ و ۵ بر هیچ عدد اول دیگری بخش‌پذیر نیستند) انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حاصل‌ضرب دو عدد از این اعداد، مربع کامل است؟

۱) ۵ ۲) ۶
۳) ۹ ۴) ۱۰

مثال EX: در یک دبیرستان با ۵۰۵ دانش‌آموز، نشان دهید حداقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

سراسری خارج ۱۴۰۱: در یک کلاس ۶۵ نفری، بیشترین مقدار n، به گونه‌ای که مطمئن باشیم حداقل n نفر دارای ماه تولد یکسان هستند، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶
۳) ۷ ۴) ۸

سراسری ۹۳ و ۹۰: مجموعهٔ S دارای ۵۰ عضو از اعداد طبیعی است. در تقسیم عضوهای S بر عدد ۱۲، حداقل چند عضو، باقی‌ماندهٔ یکسانی دارند؟

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

تست H.W: درون کیسه‌ای ۱۰۰ مهره با رنگ‌های سفید، سیاه، قرمز، آبی، سبز و زرد وجود دارد. حداقل چند مهره هم‌رنگ در این کیسه وجود دارد؟ (گزینه ۳)

۱) ۱۵ ۲) ۱۶
۳) ۱۷ ۴) ۱۸

تعمیم اصل لانه کبوتری

اگر $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر ($kn+r$، که $1 \le r < n$) در n لانه قرار بگیرند، آن‌گاه لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گیرد. Ex

مثال: Ex در یک کلاس، حداقل چند نفر لازم است که اطمینان داشته باشیم حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولدیکسان دارند؟

حل: اگر ۱۲ ماه را به عنوان $n = 12$ لانه در نظر بگیریم، طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، $k+1=7$ و در نتیجه $k=6$ است. پس حداقل تعداد کبوترها (دانش آموزان) برابر است با

$$kn+1 = 6 \times 12 + 1 = 73$$

مثال: Ex در یک سالن ورزشی حداقل چند تماشاگر لازم است تا اطمینان داشته باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟

مثال Ex در یک زیرمجموعهٔ m عضوی از اعداد صحیح، دست کم ۵ عضو وجود دارد، که در تقسیم بر عدد ۱۵ باقی‌ماندهٔ یکسان دارند. حداقل m را بیابید

مثال: Ex در یک دبیرستان دست کم چند دانش آموز وجود داشته باشد تا مطمئن باشیم دست کم ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم فامیلشان غیرتکراری و شبیه هم است؟

مثال Ex در یک دبیرستان حداقل چند دانش آموز وجود داشته باشد تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر آنها ماه و روز هفتهٔ تولدشان یکی است؟

سراسری H.W کمترین تعداد افرادی که حداقل دو نفر آنها در یک ماه از سال و در یک روز هفته متولد شده‌اند کدام است؟

(گزینهٔ ۲)

۱) ۷۵ ۲) ۸۵

۳) ۷۸ ۴) ۸۸

تست در یک سالن امتحان دست کم چند دانش آموز لازم است تا حداقل ۳ نفر آن‌ها در آزمون تستی ۳ گزینه‌ای با ۷ سؤال دارای پاسخ برگ یکسان باشند؟ (فرض کنید پاسخ به تمام سؤال‌ها الزامی است)

۱) ۲۱۸۸ ۲) ۲۸۸۴

۳) ۳۲۶۴ ۴) ۴۳۷۵

سراسری ۹۵ یک تاس همگن را حداقل چند بار پرتاب کنیم تا به طور یقین سه بار یا بیشتر، نتیجه یکسان داشته باشیم؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳

۳) ۱۸ ۴) ۱۹

سراسری ۶۵ کبوتر در حداکثر چند لانه قرار گیرند تا حداقل یک لانه با بیش از دو کبوتر وجود داشته باشد؟

۱) ۳۱ ۲) ۳۲

۳) ۳۳ ۴) ۳۴

مثال Ex ۵۳ شاخه گل را در حداکثر چند گلدان قرار دهیم تا مطمئن باشیم حداقل یک گلدان با دست کم ۵ شاخه گل وجود دارد؟

سراسری ۱۴۰۳ در یک کلاس ۴۲ نفری، ۷ نفر نامزد انتخاب مشاوره با امور مدرسه اند. انتخاب شونده باید رأی بیشتر از سایرین داشته باشد. حداقل رأی انتخاب شونده کدام است؟ (گزینه ۳)

۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸

تست در یک فروشگاه لباس، شلوارها در ۵ رنگ مختلف، ۶ سایز متفاوت و ۳ نوع پارچه متمایز موجودند. حداقل چند شلوار انتخاب کنیم تا دست کم ۳ شلوار با رنگ، سایز و پارچه یکسان داشته باشیم؟

۱) ۴۲ ۲) ۲۹

۳) ۱۸۰ ۴) ۱۸۱

عشق در لحظه پدید می‌آید.

و دوست داشتن در امتداد زمان

و این اساسی ترین تفاوت میان عشق و دوست داشتن است.

(دکتر حسابی)

سراسری ۸۹ حداقل چند عدد از مجموعه‌ی {۲، ۳، ۴، ...، ۳۰} انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم لااقل دو عدد آن‌ها مقسوم‌علیه مشترک غیر ۱ دارند؟

۱) ۹ ۲) ۱۰
۳) ۱۱ ۴) ۱۲

سراسری ۹۳
ت۱۴۰۰ (خ۹۹)
هر یک از اعداد ۱ تا ۳۰ را بر روی ۳۰ گوی یکسان نوشته در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. حداقل چند گوی بیرون آوریم تا به طور یقین دست کم دو عدد با مقسوم‌علیه مشترک بزرگتر از ۱ داشته باشیم؟ (تمرینه ۳)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱
۳) ۱۲ ۴) ۱۳

تست کیسه‌ای شامل ۴ مهره‌ی قرمز، ۵ مهره‌ی سیاه و ۷ مهره‌ی سفید است. حداقل چند مهره خارج کنیم تا حتماً یکی از مهره‌ها سفید باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹
۳) ۱۰ ۴) ۱۱

تست کیسه‌ای شامل ۴ مهره‌ی سیاه، ۳ مهره‌ی سفید، ۲ مهره‌ی سبز و ۳ مهره‌ی قرمز است. حداقل چند مهره از کیسه خارج کنیم تا مطمئن شویم دست کم سه رنگ متمایز خارج شده است؟

۱) ۶ ۲) ۷
۳) ۸ ۴) ۱۱

سراسری ۹۰ خ
۲۹۲
در جعبه‌ای ۳ گوی قرمز، ۵ گوی سفید، ۷ گوی آبی و ۹ گوی زرد موجود است. حداقل چند گوی خارج کنیم تا مطمئن باشیم دست کم ۶ گوی همرنگ خارج شده است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸
۳) ۱۹ ۴) ۲۰

سراسری ۹۵ خ در کیسه‌ای ۵ گوی سفید، ۴ گوی قرمز و ۳ گوی سبز وجود دارد. حداقل چند گوی از کیسه خارج کنیم تا مطمئن باشیم بیش از ۳ گوی سفید یا بیش از ۲ گوی قرمز خارج شده است؟

۱) ۸ ۲) ۹
۳) ۱۰ ۴) ۱۱

سراسری ۹۶ در کیسه‌ای ۷ مهره‌ی سفید، ۵ مهره‌ی سیاه و ۳ مهره‌ی سبز موجود است. دست کم چند مهره از کیسه بیرون آوریم تا مطمئن باشیم لااقل ۳ مهره‌ی سفید یا ۳ مهره‌ی سیاه یا ۲ مهره‌ی سبز بیرون آمده است؟

۱) ۶ ۲) ۷
۳) ۸ ۴) ۹

سراسری ۹۹ در جعبه‌ای ۷ کتاب ادبی، ۲ کتاب هنر و ۱۰ کتاب ریاضی موجود است. حداقل چند کتاب از این جعبه برداریم تا مطمئن باشیم حداقل ۴ کتاب هم موضوع است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹
۳) ۸ ۴) ۷

پدیدهٔ تصادفی

هر آزمایشی که نتیجهٔ آن از قبل مشخص نباشد. مانند پرتاب یک سکه، پرتاب تاس و...

فضای نمونه (S)

مجموعهٔ تمام نتایج ممکن از انجام یک پدیدهٔ تصادفی را می‌گوییم.

مثال: فضای نمونهٔ پرتاب یک تاس عبارت است از $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

مثال: فضای نمونهٔ پرتاب دو سکه باهم (دو بار پرتاب یک سکه) عبارت است از

تعمیم مثال فوق:

پرتاب یک سکه: فضای نمونه $\rightarrow S_1=\{پ, ر\} \rightarrow$ ۲ حالت

دو سکه باهم (دو بار پرتاب یک سکه) « « « $\rightarrow S_1 \times S_1 \rightarrow 2\times 2=2^2$ حالت

(سه بار « « «) سه « « « $\rightarrow S_1\times S_1\times S_1 \rightarrow 2\times2\times2=2^3$ حالت

پرتاب n سکه باهم (n بار پرتاب یک سکه) $\rightarrow 2^n$

نتیجه: اگر S فضای نمونهٔ یک بار انجام یک پدیدهٔ تصادفی باشد، فضای نمونهٔ n بار تکرار آن عبارت است از:

$$S^n = S\times S\times \dots \times S$$

پس اگر آزمایشی در یک بار انجام، x نتیجه داشته باشد، در n بار تکرار آن، x^n نتیجه دارد.

مثال: فضای نمونهٔ هر یک از پدیده‌های زیر را بیابید.

الف) ۵ بار پرتاب یک سکه $\leftarrow$

ب) پرتاب ۳ تاس باهم $\leftarrow$

ت) پرتاب ۳ سکه و ۲ تاس باهم $\leftarrow$

پرتاب n سکهٔ متمایز باهم (پرتاب n بار یک سکه)	$\rightarrow 2^n$
یک خانواده n فرزندی	$\rightarrow 2^n$
پرتاب n تاس متمایز باهم (پرتاب n بار یک تاس)	$\rightarrow 6^n$

مثال: یک رانندهٔ تاکسی خطی در ایستگاه حداکثر ۴ مسافر سوار می‌کند، اما خالی حرکت نمی‌کند. فضای نمونهٔ یک بار رفت و برگشت این پدیده چند عضو دارد؟

مثال کیسه‌ای شامل n مهره (متمایز) است. دو مهره به تصادف از کیسه بیرون می‌آوریم. در مورد تعداد عضوهای فضای نمونه‌ی این آزمایش بحث کنید.

چگونگی انتخاب مهره‌ها:

- همزمان، باهم، یکجا (ترتیب ندارد) ← $|S| = \binom{n}{2}$
- یکی در پی، یکی یکی، متوالی (ترتیب دارد):
  - بدون جایگذاری (تکرار ندارد) ← $|S| = \underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{بار اول}} \times \underbrace{\binom{n-1}{1}}_{\text{بار دوم}}$
  - با جایگذاری (امکان تکرار است) ← $|S| = \underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{بار اول}} \times \underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{بار دوم}}$

(اگر چگونگی انتخاب مهره‌ها در مسئله ذکر نشده باشد، همزمان فرض کنید)

شاید نتوان بگذشته بازگشت و دیگر آغاز زیبا ساخت

ولی می‌شود هم اکنون آغاز کرد و دیگر پایانی زیبا ساخت

(اختیاری)

فضای نمونه:

- گسسته: مجموعه‌ای شمارش‌پذیر است. (شمارا) (قابل شمارش)
  - متناهی ← تعداد اعضای مجموعه معلوم است.
  - نامتناهی شمارش‌پذیر ← تعداد اعضای مجموعه معلوم نیست، ولی قابل شمارش است. مانند $\mathbb{N}$
- پیوسته: مجموعه‌ای شمارش‌ناپذیر است. (ناشمارا) (غیرقابل شمارش)
  - نقاط روی یک پاره‌خط (بازه‌های حقیقی)
  - " " صفحه (دوبعدی)
  - " فضا (سه‌بعدی)

پیشامد

زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه است. به عبارت دیگر

مثال: در پرتاب دو تاس باهم، پیشامد آن که "مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۸ باشد" را مشخص کنید.

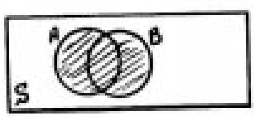
پیشامد حتمی ← فضای نمونه (S) : همواره رخ می‌دهد ← مثال: در پرتاب یک تاس، یکی از اعداد ۱ تا ۶ ظاهر می‌شود.

پیشامد نشدنی (غیرممکن) ← ϕ : هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد ← مثال: در پرتاب یک تاس، عدد ۷ ظاهر می‌شود.

اعمال روی پیشامدها

① اجتماع دو پیشامد

(A یا B یا هردو)

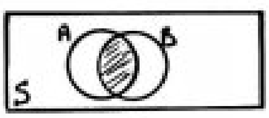


اجتماع دو پیشامد زمانی رخ می‌دهد که

حداقل یکی از دو پیشامد اتفاق بیفتند.

② اشتراک دو پیشامد (رخ داد توأم یا هم‌زمان)

(A و B)

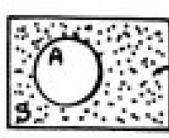


اشتراک دو پیشامد زمانی رخ می‌دهد که

هر دو پیشامد باهم اتفاق بیفتند.

حداقل یکی	↔	$\cup$	↔	یا
هردو باهم	↔	$\cap$	↔	و

③ متمم یک پیشامد

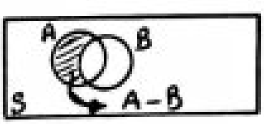


A' یا $\bar{A}$ یا A^c

زمانی رخ می‌دهد که

خود آن پیشامد اتفاق نیفتد.

④ تفاضل دو پیشامد



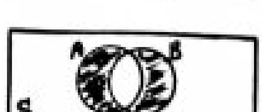
$A-B = A\cap B'$

فقط A — A رخ بدهد و B رخ ندهد

زمانی رخ می‌دهد که

فقط اولی اتفاق بیفتد.

• فقط یکی از دو پیشامد ← $\underbrace{(A-B)}_{\text{فقط } A} \underbrace{\cup}_{\text{یا}} \underbrace{(B-A)}_{\text{فقط } B}$



مثال: فرض کنید A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه S می‌باشند. به کمک جبر مجموعه‌ای هر یک از موارد زیر را نشان دهید.

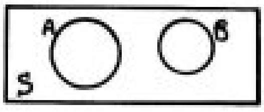
الف) A و B رخ بدهند و C رخ ندهد ←

ب) فقط A اتفاق بیفتد ←

پ) حداقل یکی از این سه پیشامد رخ بدهد ←

ت) فقط یکی رخ بدهد ←

ث) حداکثر یکی رخ بدهد ← (فقط یکی یا هیچ‌کدام)

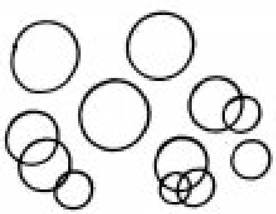


دو پیشامد ناسازگار (مجزا یا جدا از هم)

(A و B ناسازگارند $\Leftrightarrow A\cap B=\Phi$)

دو پیشامد را ناسازگار می‌گوییم اگر و تنها اگر هر دو باهم اتفاق نیفتند.
رخ دادن توأم نشدنی باشند — مجزا یا جدا

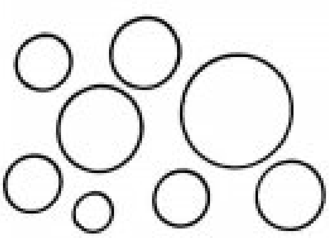
مثلاً در آزمایش پرتاب یک تاس دو پیشامد $\begin{cases} A: \text{عدد زوج ظاهر شده است} \\ B: \text{عدد فرد ظاهر شده است}\end{cases}$ ناسازگارند.



n پیشامد ناسازگار

رخ دادن توأم همگی آنها غیرممکن است، به عبارت دیگر

$$A_1\cap A_2\cap \dots \cap A_n=\Phi \quad \text{یا} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i=\Phi$$



* n پیشامد دو به دو ناسازگار *

رخ دادن توأم هر دو تای آنها غیرممکن است، به عبارت دیگر

$$\forall i\neq j:\quad A_i\cap A_j=\Phi$$

نتیجه: n پیشامد ناسازگار $\Leftarrow$ n پیشامد دو به دو ناسازگار ($\not\Rightarrow$)

$P(A)$: احتمال وقوع پیشامد A

احتمال (Probability)

که عددی است حقیقی متعلق به بازه [۰,۱] که به یک پیشامد نسبت داده می‌شود و بیانگر میزان اطمینان از وقوع آن پیشامد است.

اصول احتمال (اصول کولموگروف)

اصل ۱ : احتمال رخ دادن پیشامد حتمی برابر ۱ است ← $P(S)=1$ ← ٪۱۰۰

* اصل ۲ :

• تعمیم اصل ۲ : اگر n پیشامد A_1 ، A_2 ، ... ، A_n دو به دو ناسازگار باشند، آنگاه

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

فضای نمونه:

هم شانس : شانس (احتمال) رخ دادن تمام اعضا باهم برابر است. مانند سکه سالم (شیر و خط)، تاس سالم (حکمی)، مهره های یکسان، ....

غیر هم شانس : هم شانس نیست. یعنی احتمال رخ دادن یک عضو بیشتر یا کمتر از عضو دیگر است. مانند تاسی که دو وجه آن ۶ است!

* محاسبه احتمال در فضاهای نمونه‌ای گسسته و هم شانس (احتمال ساده یا کلاسیک)

اگر S یک فضای نمونه‌ای گسسته و هم شانس و A پیشامدی از آن فضا باشد، آنگاه،

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \text{ یا } \frac{|A|}{|S|}$$

سراسری با کدام احتمال رقم سمت راست پلاک اولین اتومبیلی که از بزرگراه خارج می‌شود از ۴ بیشتر نیست یا مضرب ۳ می‌باشد؟
(رقم صفر در پلاک اتومبیل بکار نمی‌رود)

سراسری ۹۳ در پرتاب دو تاس سالم باهم، با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده عددی اول است؟

$|S| = 6^2 = 36$

$|A| = 15 \rightarrow P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ ✓

مجموع ۲ → $(1,1)$

مجموع ۳ → $(1,2),(2,1)$

مجموع ۵ → $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$

مجموع ۷ → $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$

مجموع ۱۱ → $(5,6),(6,5)$

سراسری در پرتاب دو تاس سالم باهم، با کدام احتمال مجموع دو عدد ۵ است؟

سراسری ۱۴۰۱ خارج دو تاس همگن را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یک عدد مضرب ۳ و مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ است؟

سراسری ۹۳ تجربی دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ است؟

تست در پرتاب دو تاس سالم باهم، با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده کمتر از ۱۰ است؟

تست ۱۴۰۰ دو تاس سالم را باهم می‌اندازیم. احتمال این که حاصل ضرب دو عدد ظاهر شده، مضرب ۶ است؟

(جواب: $\frac{5}{12}$)

تست در پرتاب دو تاس قرمز و آبی، با کدام احتمال عدد تاس قرمز عدد تاس آبی را عاد می‌کند؟

تست در پرتاب دو تاس قرمز و آبی، با کدام احتمال عدد تاس قرمز از عدد تاس آبی کوچکتر است؟

مثال در پرتاب سه تاس سالم باهم، با کدام احتمال دو عدد از سه عدد ظاهر شده، یکسان اند؟

مثال در پرتاب سه تاس همگن باهم، چه قدر احتمال دارد مجموع سه عدد ظاهر شده فرد باشد؟

مثال در پرتاب سه تاس سالم باهم، با کدام احتمال مجموع سه تاس برابر ۱۵ است؟

مثال در پرتاب سه تاس قرمز، آبی و سفید، با کدام احتمال عدد تاس قرمز از عدد ظاهر شده توسط دو تاس آبی و سفید بزرگتر است؟

مثال در پرتاب سه تاس قرمز، آبی و سفید، با کدام احتمال عدد تاس سفید با مجموع اعداد ظاهر شده توسط تاس های قرمز و آبی برابر است؟

انخ ۱۴۰۰ خ در یک بازی ۱۶ نفره به هر نفر یکی از شماره های ۳، ۴، ۵، ...، ۱۸ را تخصیص می دهیم. سه تاس را پرتاب می کنیم و اعداد رو شده را با یکدیگر جمع می کنیم. شخصی که آن شماره را داشته باشد، انتخاب می شود. احتمال این که شخص شماره ۱۰ انتخاب شود کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{9}$

۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{7}$

سراسری ۴ لامپ از ۱۰ لامپ موجود سوخته است. اگر سه لامپ به تصادف انتخاب شود، با کدام احتمال هر سه سالم اند؟

* با کدام احتمال فقط یکی سالم است؟

* با کدام احتمال حداقل دو لامپ سالم است؟

سراسری در ظرفی شش مهره با شماره های ۶ ,۵ ,۴ ,۳ ,۲ ,۱ ریخته شده اند. دو مهره با هم بیرون می آوریم. با کدام احتمال شماره های این دو مهره اعداد متوالی اند؟

سراسری در ظرفی ۵ مهره به شماره های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ ریخته ایم. دو مهره با هم از ظرف خارج می کنیم. احتمال آن که مجموع شماره ها بزرگتر از ۵ باشد کدام است؟

حل

$|S| = \binom{5}{2} = 10$

$|A| = 6 \longrightarrow P(A) = 0/6$

$\{5,1\}, \{5,2\}, \{5,3\}, \{5,4\}$

$\{4,2\}, \{4,3\}$

سراسری شش گوی یکسان به شماره های ۱ تا ۶ در یک ظرف قرار دارند. به تصادف دو گوی از آنها برمی داریم. با کدام احتمال جمع اعداد روی این دو گوی کمتر از ۵ است؟ (جواب: $\frac{4}{15}$)

سراسری پنج مهره به شماره های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ در ظرفی ریخته ایم. سه مهره به تصادف و با هم از ظرف بیرون می آوریم. احتمال آن که مجموع سه عدد خارج شده زوج باشد چقدر است؟

سراسری اعداد ۰، ۱، ۲، ...، ۹ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف دو کارت از بین آن ها بیرون می آوریم. با کدام احتمال مجموع عدد این دو کارت برابر ۱۱ است؟

ریاضی دو رأس از یک شش ضلعی به تصادف انتخاب می شود. با کدام احتمال این دو رأس مجاور نیستند؟ (جواب: ۰/۶)

سراسری اعداد ۱ تا ۶ را بر روی ۶ کارت یکسان نوشته اند. اگر به تصادف دو کارت از بین آنها بیرون آوریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو کارت زوج است؟

$|S| = \binom{6}{2} = 15$

$|A| = \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{هر دو زوج}} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{هر دو فرد}} = 6 \rightarrow P(A) = \frac{6}{15} = 0/4$

یا

مثال: درون کیسه ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه وجود دارد. ۲ مهره به تصادف بطور ؟؟؟ بیرون می آوریم. با کدام احتمال

چگونگی انتخاب مهره‌ها	هم‌زمان (یکجا، باهم) $|S| = \binom{8}{2} = 28$	یکی یکی بدون جای‌گذاری $|S| = \binom{8}{1}\binom{7}{1} = 56$	یکی یکی با جای‌گذاری $|S| = \binom{8}{1}\binom{8}{1} = 64$
الف) هر دو مهره سفید است؟	$\frac{\binom{3}{2}}{28}$	دومی سفید و اولی سفید $\frac{\binom{3}{1}\times\binom{2}{1}}{56}$	دومی سفید و اولی سفید $\frac{\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}}{64}$
ب) هر دو مهره سیاه است؟	$\frac{\binom{5}{2}}{28}$	دومی سیاه و اولی سیاه $\frac{\binom{5}{1}\times\binom{4}{1}}{56}$	دومی سیاه و اولی سیاه $\frac{\binom{5}{1}\times\binom{5}{1}}{64}$
پ) هر دو مهره همرنگ است؟	(الف) + (ب) سراسری ۹۲	(الف) + (ب) سراسری ۹۱ تجربی	(الف) + (ب)
ت) هر دو مهره ناهمرنگ است؟	یکی سیاه و یکی سفید $\frac{\binom{3}{1}\times\binom{5}{1}}{28}$ (سراسری ۹۴ تجربی)	دومی سفید و اولی سیاه یا دومی سیاه و اولی سفید $\frac{\binom{3}{1}\times\binom{5}{1}+\binom{5}{1}\times\binom{3}{1}}{56}$	$\frac{\binom{3}{1}\times\binom{5}{1}+\binom{5}{1}\times\binom{3}{1}}{64}$
ث) حداقل یکی سفید است؟ یکی سفید یا هر دو سفید	(الف) + (ت)	(الف) + (ت)	(الف) + (ت)
ج) حداکثر یکی سفید است؟ یکی سفید یا هر دو سیاه	(ب) + (ت)	(ب) + (ت)	(ب) + (ت)

سراسری کیسه ای شامل ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. مهره ای به تصادف بیرون آورده و پس از مشاهده رنگ آن به کیسه بر می‌گردانیم. سپس مهره دیگری بیرون می آوریم. احتمال این که فقط یک بار مهره سفید مشاهده شده باشد چقدر است؟

سراسری خارج تجربی در آزمایشگاه ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شود. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آنها (بدون جایگذاری) انتخاب می‌شود. با کدام احتمال اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

سراسری — از بین ۴ داوطلب رشته تجربی و ۶ داوطلب رشته ریاضی، ۴ نفر به تصادف انتخاب می‌شوند. با کدام احتمال ۲ نفر آنان رشته ریاضی می‌باشند؟

$|S| = \binom{10}{4} = 210$ (کل افراد ← $10 = \underset{\text{ریاضی}}{6} + \underset{\text{تجربی}}{4}$)

$|A| = \underset{\text{دو نفر ریاضی}}{\binom{6}{2}} \times \underset{\text{دو نفر تجربی}}{\binom{4}{2}} = 90 \longrightarrow P(A) = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$ ✓

سراسری ۹۱ H.W — از ۴ دانش‌آموز سال اول و ۵ دانش‌آموز سال دوم ۶ نفر برای شرکت در یک اردو به تصادف انتخاب شده‌اند. احتمال آن که ۲ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند کدام است؟

(جواب: $\frac{5}{14}$)

سراسری ۹۳ تجربی — در ظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یک مهره آبی خارج می‌شود؟

سراسری تجربی H.W — در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می‌شود که بر روی ۳ موش آزمایش انجام شده است. اگر ۲ موش از بین آنها به تصادف انتخاب شود، با کدام احتمال لااقل بر روی یکی از آن دو آزمایش انجام شده است؟

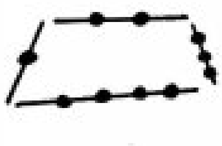
(جواب: $\frac{5}{7}$)

سراسری ۹۴ خ تجربی — در جعبه‌ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید خارج شده است؟

سراسری تجربی H.W — از بین زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه $\{1,2,3,4,5,6\}$ یکی به تصادف انتخاب می‌شود. احتمال این که شامل ۱ و فاقد ۲ باشد؟

(جواب: $\frac{4}{15}$)

سراسری — از ۱۰ نقطه‌ی شکل مقابل ۴ نقطه به تصادف انتخاب می‌شود. احتمال آن که با چهار نقطه انتخاب شده بتوان یک چهارضلعی ساخت به طوری که روی هر خط فقط یک رأس چهارضلعی قرار داشته باشد کدام است؟



سراسری H.W — از هر چهار گروه آزمایشی به ترتیب ۳، ۴، ۲، ۱ نفر داوطلب شرکت در آزمون هستند. اگر به تصادف ۴ نفر از بین آنها معرفی شوند، با کدام احتمال از هر گروه یک نفر معرفی شده است؟

(جواب: [illegible])

سراسری ۹۵ تجربی H.W — در جعبه‌ای ۴ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال فقط یکی از مهره‌ها سفید است؟

(جواب: $\frac{10}{21}$)

مثال ۳ دانش آموز و ۵ دانشجو به طور تصادفی در یک ردیف قرار می‌گیرند. با کدام احتمال

الف) دانش آموزان کنار هم می‌باشند؟

$\underbrace{\boxed{\text{۳ دانش آموز}}\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times}_{\text{۶ شیء متمایز}}$

$\rightarrow P(\text{الف}) = \dfrac{6! \times 3!}{8!} = \dfrac{3}{28}$ ✓

ب) دانش آموزان کنار هم و دانشجویان نیز کنار هم می‌باشند؟ (۹۹ تجربی)

$\underbrace{\boxed{\text{۳ دانش آموز}}\ \boxed{\text{۵ دانشجو}}}_{\text{۲ شیء متمایز}}$

$\longrightarrow P(\text{ب}) = \dfrac{2! \times 3! \times 5!}{8!} = \dfrac{1}{28}$ ✓

پ) دو انتهای صف دانشجو می‌باشد؟

دانشجو $\boxed{\text{۶ نفر}}$ دانشجو

انتخاب ۲ دانشجو برای دو سر — جایگشت دو سر

$\rightarrow P(\text{پ}) = \dfrac{\binom{5}{2} \times 2! \times 6!}{8!} = \dfrac{5}{14}$ ✓

ت) هیچ دو دانش آموزی کنار هم ننشینند؟

دانشجو

$\_\ \square\ \_\ \square\ \_\ \square\ \_\ \square\ \_\ \square\ \_$

انتخاب ۳ خانه برای ۳ دانش آموز

$\rightarrow P(\text{ت}) = \dfrac{\binom{6}{3} \times 3! \times 5!}{8!} = \dfrac{5}{14}$ ✓

سراسری تجربی حروف کلمه‌ی ATAXIA را به طور تصادفی کنار هم قرار دهیم. با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گیرند؟

سراسری ۹۶ تجربی در جعبه‌ای ۵ مهره به شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی یکی یکی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟

سراسری ۹۴ ۱۴۰۰ هر یک از اعداد ۱، ۲، ... و ۶ بر روی شش گوی یکسان نوشته شده است. به طور تصادف، متوالی هر یک گوی از جعبه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج می‌شوند؟

(جواب: ۰/۱)

سراسری هر یک از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را در یکی از ۶ خانه‌ی هم ردیف به تصادف قرار دهیم. با کدام احتمال این ارقام در خانه‌های متوالی و دو رقم زوج کنار هم قرار گیرند؟

سراسری رئیس، منشی و ۴ کارمند دور یک میز می‌نشینند. با کدام احتمال منشی مقابل رئیس قرار می‌گیرد؟

حل

$|S| = \underbrace{(6-1)!}_{\text{جایگشت دایره‌ای ۶ نفر}} = 5!$

$|A| = (5-1)! = 4! \rightarrow P(A) = \dfrac{4!}{5!} = \dfrac{1}{5}$

سراسری: برای هر یک از چند کارت یکی از اعداد سه رقمی حاصل از جایگشت ترکیبات مجموعه اعداد {۷, ۶, ۵, ۴, ۲} را نوشته، به تصادف یک کارت از بین آنها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال دو رقم از اعداد این کارت، حاضر فردی باشند؟

مثال: با ارقام ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ یک عدد چهار رقمی به تصادف ساخته می‌شود. احتمال این که این عدد بزرگتر از ۴۰۰۰ باشد کدام است؟

الف) تکرار مجاز است.

حالات ممکن $\rightarrow$ $\underset{\text{۵ حالت}}{\overset{\text{غیرصفر}}{?}} \times \underset{\text{۶}}{?} \times \underset{\text{۶}}{?} \times \underset{\text{۶}}{?} = 5\times 6^3 = 1080$

حالات مطلوب $\rightarrow$ $\underset{\text{۴ حالت}}{?} \times \underset{\text{۶}}{?} \times \underset{\text{۶}}{?} \times \underset{\text{۶}}{?} = 4\times 6^3 - \underset{\text{خود ۴۰۰۰}}{1} = 863 \rightarrow P(\text{الف}) = \frac{863}{1080}$

ب) تکرار مجاز نیست. (جواب: ۸/۰)

H.W

سراسری: اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم قرار گرفتن ارقام متمایز ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ و ۵ به وجود آید، احتمال این که این عدد زوج باشد؟

سراسری تجربی H.W: اگر یک عدد طبیعی چهار رقمی کمتر از ۵۰۰۰ به طور تصادفی با ارقام متمایز ۹، ۷، ۵، ۳ و ۱ به وجود آید، احتمال آن که مضرب ۵ باشد کدام است؟ (جواب: $\frac{1}{4}$)

سراسری خ: از بین اعداد طبیعی سه رقمی، به تصادف یک عدد برداشته‌ایم. با کدام احتمال لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر می‌گردد؟

سراسری ۹۶ تجربی: در کیسه‌ای ۵ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج شده متفاوت است؟

کل مهره‌ها $= 5+4+3 = 12 \rightarrow n(S) = \binom{12}{3} = 220$

$\rightarrow P(\text{سه رنگ متفاوت}) = \frac{\binom{5}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}}{220} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$ ✓

سراسری ۹۶ خ تجربی H.W: با کدام احتمال فقط دو مهره هم‌رنگ می‌باشند؟ (جواب: $\frac{29}{44}$)

سراسری H.W — سه نفر اسامی خود را روی سه کارت می‌نویسند و کارت‌ها را درون کیسه‌ای می‌اندازند. سپس هر کدام به ترتیب و به تصادف یک کارت برمی‌دارند. با کدام احتمال هیچ کدام اسم خود را بیرون نمی‌آورد؟ (جواب: $\frac{۱}{۳}$)

سراسری ۹۶ — شش عدد توپ (یکسان)، تصادفی در ۳ جعبهٔ متمایز انداخته شده‌اند. با کدام احتمال هیچ جعبه‌ای بدون توپ نمی‌ماند؟

سراسری ۹۶ خ — ۵ مهرهٔ یکسان به تصادف در ۳ جعبهٔ متمایز ریخته شده‌اند. با کدام احتمال لااقل در یکی از جعبه‌ها درست ۲ مهره جای گرفته است؟

x_1	x_2	x_3	
۲	۰	۳	
۲	۱	۲	●
۲	۲	۱	▲
۲	۳	۰	
۰	۲	۳	
۱	۲	۲	■
۲	۲	۱	▲
۳	۲	۰	
۰	۳	۲	
۱	۲	۲	■
۲	۱	۲	●
۳	۰	۲	

تست H.W — ۵ توپ متمایز به تصادف درون سه جعبهٔ متمایز ریخته‌اند. با کدام احتمال هیچ جعبه‌ای بدون توپ نیست؟

(جواب: $\frac{۵۰}{۸۱}$)

سراسری ۹۷ — ظرف A شامل ۵ مهره با شماره‌های یک رقمی فرد و ظرف B دارای ۴ مهره با شماره‌های یک رقمی زوج غیر صفر است. از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال حاصل‌ضرب آنها از ۱۰ بیشتر است؟

سراسری ۹۷ خ H.W — ظرف A شامل ۸ مهره از اعداد ۱ تا ۸ و ظرف B شامل ۵ مهره از اعداد ۱ تا ۵ است. از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع آن‌ها از ۸ بیشتر است؟

(جواب: $\frac{۳}{۸}$)

سراسری ۱۴۰۰ خ روی هر کارت یکی از اعداد ۱ تا ۱۲ را نوشته و سپس در یک کیسه قرار می‌دهیم. به دلخواه یک کارت از کیسه بیرون می‌آوریم. اگر عدد زوج باشد، یک عدد دیگر از کیسه بیرون می‌آوریم و در سمت راست عدد اول قرار می‌دهیم. اگر عدد فرد باشد، یک تاس پرتاب کرده و عدد رو شده را در سمت راست عدد اول قرار می‌دهیم. پس از اعداد ساخته شده، در همهٔ حالت‌های ممکن، مجموعهٔ A را تشکیل می‌دهیم. یک عدد از مجموعهٔ A انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال، عدد انتخابی بر ۴ بخش‌پذیر است؟

۱) $\frac{9}{34}$ ۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{9}{40}$ ۴) $\frac{2}{9}$

سراسری ۱۴۰۰ هر یک از اعداد ۱ تا ۲۱ را روی یک کارت می‌نویسیم و در یک کیسه قرار می‌دهیم. سپس دو کارت به تصادف و به ترتیب از کیسه خارج کرده و کنار یکدیگر قرار می‌دهیم تا عددی جدید حاصل شود. اعداد تشکیل شده از همهٔ حالت‌های ممکن را در مجموعهٔ A قرار می‌دهیم. یک عدد از مجموعهٔ A انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عدد انتخابی بر ۶ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۸۴}$ ۲) $\frac{۶۵}{۴۱۷}$

۳) $\frac{۱۱}{۷۰}$ ۴) $\frac{۶۷}{۴۱۷}$

تجربی ۱۴۰۰

با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم که در هر عضو آن، رقم تکراری به کار نرفته است. یک عضو از مجموعهٔ فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عضو انتخاب شده بر ۴ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

تجربی ۱۴۰۰ خ

همان سؤال .... احتمال این که عضو انتخاب شده بر ۳ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

احتمال غیرهم شانس

⇦

مثال: در پرتاب یک سکه‌ی ناسالم، اگر احتمال آمدن "رو" نصف احتمال آمدن "پشت" باشد، احتمال هر یک از حالت‌های "رو" و "پشت" را محاسبه کنید.

پرسش اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $P(1)=2P(2)=3P(3)=4P(4)$، آنگاه $P(1)$ ؟

مثال: سه نفر به نام‌های a، b و c با هم مسابقه می‌دهند. شانس پیروزی a دو برابر b و شانس پیروزی c نصف b است. با کدام احتمال b یا c می‌برند؟

حل

فرض مسئله $\begin{cases} P(a)=2P(b) \\ P(c)=\frac{1}{2}P(b) \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{if } P(b)=x}$ $P(a)=2x\ ,\ P(c)=\frac{x}{2}$

از طرفی $P(a)+P(b)+P(c)=1 \rightarrow 2x+x+\frac{x}{2}=1 \rightarrow x=\frac{2}{7}$

جواب $=P(b \overset{\text{یا}}{\cup} c) \overset{\text{اصل ۳}}{=} P(b)+P(c)=\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$ ✓

ناسازگار (فقط یکی برنده)

تست یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر وجه آن متناسب با عدد روی همان وجه است. در یک بار پرتاب این تاس احتمال آنکه عددی زوج ظاهر شود کدام است؟

پرسش یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج، ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در یک پرتاب، احتمال وقوع عددی بزرگتر از ۳ کدام است؟

حل می‌دانیم $\underbrace{P(1)}_{x}+\underbrace{P(2)}_{3x}+\underbrace{P(3)}_{x}+\underbrace{P(4)}_{3x}+\underbrace{P(5)}_{x}+\underbrace{P(6)}_{3x}=1 \rightarrow x=\frac{1}{12}$

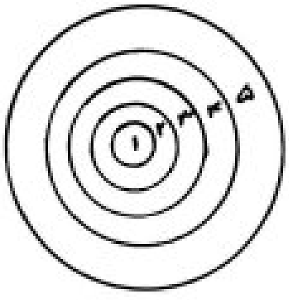
جواب $=P(\text{تاس}>3)=\underbrace{P(4)}_{3x}+\underbrace{P(5)}_{x}+\underbrace{P(6)}_{3x}=\frac{3}{12}+\frac{1}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$ ✓

مثال در یک تجربه‌ی تصادفی، $S=\{x,y,z\}$ فضای نمونه است و $P(x)$، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل می‌دهند. مطلوب است $P(\{x,z\})$ ؟

سراسری ۱۴۰۱ در یک تجربهٔ تصادفی، $S=\{x,y,z\}$ یک فضای نمونه است. اگر $p(x)$، $p(y)$ و $p(z)$ یک دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت کمتر از واحد تشکیل دهند و واسطهٔ هندسی آن $\frac{1}{5}$ باشد، کمترین مقدار احتمال یک پیشامد ساده در S، چقدر است؟

۱) $\frac{2-\sqrt{2}}{5}$ ۲) $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$
۳) $\frac{2-\sqrt{3}}{10}$ ۴) $\frac{2-\sqrt{2}}{10}$

مثال: در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره‌ای شکل، با پنج ناحیهٔ مجزا، اگر احتمال اصابت به ناحیهٔ اول برابر x و احتمال اصابت به ناحیهٔ k اُم برابر $x(2k-1)$ فرض شود، چقدر احتمال دارد دارت به ناحیه اول یا چهارم برخورد کند؟



مثال: اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $\frac{3}{5} = p(\{b,c\}) = 2p(a)$ و $p(\{a,b\})=\frac{1}{3}$، آن‌گاه $p(\{b,d\})$ چقدر است؟

سراسری ۱۴۰۱ خ مجموعهٔ $S=\{x,y,z,t,w\}$ فضای نمونهٔ یک آزمایش تصادفی و $A=\{x,y\}$، $B=\{x,y,z,t\}$ و $C=\{x,y,w\}$ سه پیشامد از S هستند. اگر $P(A)=\frac{1}{7}$ و $P(B)=\frac{3}{5}$ باشد، مقدار $p(C)$ کدام است؟

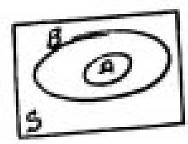
۱) $\frac{26}{35}$ ۲) $\frac{12}{35}$
۳) $\frac{19}{35}$ ۴) $\frac{11}{35}$

قضیه‌های احتمال

قضیه ۱: احتمال رخ دادن پیشامد تهی برابر صفر است. $P(\phi)=0$

نتیجه: $P(\underbrace{A\cap B}_{\phi})=0 \iff$ A و B دو پیشامد ناسازگارند

قضیه ۲: برای دو پیشامد دلخواه A و B داریم $A\subseteq B \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} P(A)\leq P(B)$



نتیجه ۱: اگر A پیشامدی دلخواه از فضای نمونه S باشد، آنگاه $0\leq P(A)\leq 1$

زیرا $\xrightarrow{\text{تعریف پیشامد}} A\subseteq S \xrightarrow{\text{ق۲}} P(A)\leq \underbrace{P(S)}_{1}$

یعنی احتمال متعلق به بازه حقیقی $[0,1]$ است

نتیجه ۲: اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشند، آنگاه

الف) $P(A)\leq P(A\cup B)$ ، $P(B)\leq P(A\cup B)$
زیرا $A\subseteq(A\cup B)$

ب) $P(A\cap B)\leq P(A)$ ، $P(A\cap B)\leq P(B)$
زیرا $(A\cap B)\subseteq A$

پ) $P(A-B)\leq P(A)$ ، $P(B-A)\leq P(B)$
زیرا $(A-B)\subseteq A$

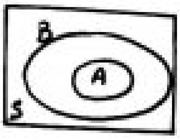
ت) $P(A\cap B)\leq P(A\cup B)$

قضیه ۳: (قضیه تفاضل) اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشند، آنگاه

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

به همین ترتیب $\rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$

نتیجه ۱: {



نتیجه ۲: محاسبه احتمال رخ دادن فقط یکی از دو پیشامد A و B

قضیه ۴ (قضیه اجتماع در حالت کلی) اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشند، آنگاه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

و برای سه پیشامد داریم

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

نتیجه: اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشند، آنگاه

$$P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)$$

و برای n پیشامد دلخواه $A_1, A_2, \dots, A_n$ داریم

$$P(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)\leq P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)$$

قضیه ۵ (قضیه متمم) اگر A پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشد، آنگاه

$$P(A')=\underbrace{1}_{P(S)}-P(A)$$

سراسری ۹۵: کیسه‌ای شامل ۳ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره‌ی سبز است. ۳ مهره به تصادف و هم‌زمان از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال حداکثر ۲ مهره از مهره‌های خارج شده هم‌رنگ است؟

حل

کل مهره‌ها $= 12 \rightarrow |S| = \binom{12}{3} = 220$

$$P(\text{حداکثر ۲ مهره هم‌رنگ}) \overset{\text{متمم}}{=} 1 - P(\text{هر سه مهره هم‌رنگ}) = 1 - \frac{\overset{\text{هر سه سفید}}{\binom{3}{3}} + \overset{\text{یا هر سه سیاه}}{\binom{4}{3}} + \overset{\text{یا هر سه سبز}}{\binom{5}{3}}}{220} = \frac{41}{44}$$ ✓

سراسری: برای انجام مسابقه‌ای ۴ نفر از گروه ریاضی و ۶ نفر از گروه تجربی داوطلب شده‌اند. اگر به طور تصادف ۴ نفر از بین آنان انتخاب شوند، با کدام احتمال تعداد افراد انتخابی در این دو گروه متفاوت است؟

سراسری: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونه‌ی S باشند، کدام رابطه بین احتمال پیشامدها درست است؟

۱) $P(A)+P(B)+P(A'\cup B')=1$ ۲) $P(A).P(B)+P(A'\cup B')=1$

۳) $P(A)+P(B)+P(A'\cap B')=1$ ۴) $P(A).P(B)+P(A'\cap B')=1$

حل

A و B ناسازگارند $\xrightarrow{\text{اصل ۳}} P(A\cup B) = P(A)+P(B)$

$\xrightarrow{\text{متمم}} 1 - P((A\cup B)') = P(A)+P(B)$

$\xrightarrow{\text{دمورگان}} 1 - P(A'\cap B') = P(A)+P(B) \rightarrow$ گزینه ۳ ✓

تست: در پرتاب دو تاس سالم با هم، چقدر احتمال دارد مجموع دو تاس بزرگ‌تر از ۴ و غیر مساوی باشند؟

سراسری: شش مهره با شماره‌های ۱، ۲، ...، ۶ در ظرفی قرار دارد. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم و به جای آن‌ها دو مهره‌ی دیگر خارج می‌کنیم. احتمال خارج شدن شماره‌ی ۳ کدام است؟

سراسری ۹۹ خ تجربی ۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو نفر مورد نظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{9}{10}$

سراسری احتمال قبولی در درس فیزیک ۵۵٪ و احتمال قبولی در درس شیمی ۰/۶ است. اگر احتمال قبولی در حداقل یکی از دو درس ۰/۷۵ باشد، احتمال قبولی در هر دو درس چقدر است؟

حل $P($قبولی در فیزیک $\cup$ قبولی در شیمی$) = P($قبولی در فیزیک$) + P($قبولی در شیمی$) - P($قبولی در فیزیک $\cap$ قبولی در شیمی$)$

$0/75 = 0/55 + 0/6 - x \rightarrow x = 0/4$

سراسری کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر می‌باشند. کارمندی به تصادف انتخاب می‌شود. احتمال این که مرد یا لیسانس باشد چقدر است؟

	لیسانس	دیپلم
زن	۵	۱۵
مرد	۲۰	۱۰

کل کارمندان $= 50 \rightarrow |S| = \binom{50}{1} = 50$

$P($مرد $\cup$ لیسانس$) = P($مرد$) + P($لیسانس$) - P($مرد $\cap$ لیسانس$)$

یا و

=

سراسری (۹۵ خ و ۹۹) از مجموعهٔ اعداد $\{100, 101, 102, ..., 600\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌شود. با کدام احتمال این عدد مضرب ۴ یا مضرب ۹ است؟

لااقل بر یکی از اعداد ۴ یا ۹ بخش‌پذیر است

M_4 M_9

$|S| = \binom{501}{1} = 501 \leftarrow 600 - 99 = 501 =$ تعداد اعضای مجموعه

$= 501$

$$\begin{cases} \text{تعداد مضارب ۴} = \left[\frac{600}{4}\right] - \left[\frac{99}{4}\right] = 126 \\ \text{تعداد مضارب ۹} = \left[\frac{600}{9}\right] - \left[\frac{99}{9}\right] = 55 \\ \text{تعداد مضارب ۴ و ۹} = \left[\frac{600}{4\times 9}\right] - \left[\frac{99}{4\times 9}\right] = 14 \end{cases}$$

◄ با کدام احتمال مضرب ۴ است و مضرب ۹ نیست؟

◄ با کدام احتمال نه مضرب ۴ و نه مضرب ۹ است؟

◄ با کدام احتمال مضرب ۴ است ولی به ۹ بخش‌پذیر نیست یا مضرب ۴ نیست ولی به ۹ بخش‌پذیر است؟

بیان مهم: (فقط مضرب یکی از اعداد ۴ یا ۹ است) یا (مضرب ۴ یا ۹ است ولی مضرب ۳۶ نیست)

تست اگر $P(A-B)=\frac{2}{17}$ و $P(B-A)=\frac{10}{17}$ و $P(B)=3P(A)$، آنگاه $P(A\cup B)$ کدام است؟

حل

$$\left.\begin{cases} P(A-B)=\frac{2}{17} \rightarrow P(A)-P(A\cap B)=\frac{2}{17} \\ P(B-A)=\frac{10}{17} \rightarrow \underbrace{P(B)}_{3P(A)}-P(A\cap B)=\frac{10}{17}\end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2P(A)=\frac{8}{17} \rightarrow P(A)=\frac{4}{17}$$

$$\text{جواب} = P(A\cup B) = \underbrace{P(A)}_{\frac{4}{17}} + \underbrace{P(B)-P(A\cap B)}_{\frac{10}{17}} = \frac{14}{17} \checkmark$$

تست اگر $P(A)+P(B)=1{,}8$، حداکثر $P(A'\cap B')$ کدام است؟

سراسری خ H.W در یک هتل ۷۲ مسافر وجود دارد که ۲۳ نفر آنان تاجرند و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. اگر ۸ نفر از تاجرین برای اولین بار سفر کرده باشند با کدام احتمال فرد انتخابی از بین مسافرین این هتل، نه تاجر است و نه برای اولین بار سفر کرده است؟

(جواب: $\frac{5}{8}$)

سراسری ۹۲ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند بطوریکه $P(A)=\%6$، $P(B)=\%7$ و $P(A\cap B')=\%2$ باشد، آنگاه $P(A'\cap B)$ کدام است؟

سراسری ۹۵ خ از کیسه‌ای که محتوی آن ۵ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و ۳ مهره‌ی قرمز است، به تصادف ۳ مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال بین مهره‌های خارج شده، مهره‌ی سفید نیست یا مهره‌ی سیاه نیست؟

احتمال شرطی (کاهش فضای نمونه)

در برخی مسایل اعلام می‌شود پیشامدی مانند B رخ داده است $(B \neq \phi)$ و از ما می‌خواهند احتمال رخ دادن پیشامد دیگری مانند A را با توجه به این که B رخ داده است، محاسبه کنیم (احتمال رخ دادن A به تنهایی مورد نظر نیست)، که در این صورت می‌گوییم "احتمال رخ دادن A به شرط رخ داد B" و می‌نویسیم $P(A|B)$.

به شرط

مثال: در پرتاب یک تاس سالم،

الف) احتمال اینکه عددی زوج ظاهر شود چقدر است؟

ب) اگر بدانیم تاس عددی بزرگتر از ۳ آمده است، با کدام احتمال عدد زوج ظاهر می‌شود؟

نتیجه:

تمرین: یک تاس همگن را انداختیم. برآمد حاصل مضرب ۳ نیست. احتمال آن که شماره‌ی ظاهر شده ۲ باشد کدام است؟

مثال: جعبه‌ای شامل ۵ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی سیاه و ۳ مهره‌ی قرمز است. مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم. اگر سیاه نباشد، با کدام احتمال قرمز است؟

مثال: جعبه‌ای شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه است. به طور متوالی و بدون جای‌گذاری، دو مهره به تصادف بیرون می‌آوریم. اگر اولین مهره سفید باشد، با کدام احتمال دومین مهره نیز سفید است؟

مثال: در پرتاب دو تاس سالم، اگر تاس اول بزرگ‌تر از ۴ آمده باشد، با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده ۸ است؟

تست در پرتاب دو تاس سالم باهم اگر حداقل یکی از تاس‌ها ۵ باشد، با کدام احتمال دو تاس دو عدد متوالی را نشان می‌دهند؟

تست در پرتاب دو تاس سالم باهم هر دو تاس کوچکتر از ۵ ظاهر شده است. احتمال آن که مجموع دو تاس برابر ۴ باشد، کدام است؟

حل

$S_{\text{جدید}} : \left(\overset{\text{تاس ۱}}{\begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases}} , \overset{\text{تاس ۲}}{\begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases}} \right)$

۴ حالت × ۴ حالت $= \underset{\text{حالت ممکن}}{16}$

حالات مطلوب $\rightarrow \{(1,3),(2,2),(3,1)\} \rightarrow$ احتمال $= \frac{3}{16}$ ✓

تست H.W در پرتاب ۴ تاس سالم باهم، اگر چهار عدد متوالی ظاهر شده باشد، با کدام احتمال یکی از تاس‌ها ۲ است؟
(جواب: $\frac{1}{4}$)

سراسری ۹۰ دو تاس همگن را انداخته‌ایم. اگر حاصل جمع شماره‌های رو شده کمتر از ۶ باشد، احتمال آن که شماره‌ی یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد کدام است؟

تست یک تاس سالم را سه بار متوالی پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع سه عدد ظاهر شده ۱۵ باشد، با کدام احتمال هر سه عدد مساوی‌اند؟

تست در پرتاب دو تاس قرمز و آبی، عدد تاس قرمز بزرگتر از آبی ظاهر شده، احتمال آن که مجموع دو تاس ۶ باشد کدام است؟

حل

کل حالات پرتاب دو تاس $= 6^2 = 36 \xrightarrow{\text{۶ حالت دو تاس مساوی‌اند}}$ ۳۰ حالت نامساوی‌اند

قرمز > آبی : ۱۵ حالت

آبی > قرمز : ۱۵ حالت

حالات مطلوب $= \{ \overset{\text{قرمز ، آبی}}{(5,1)} , \overset{\text{قرمز ، آبی}}{(4,2)} \} \rightarrow$ احتمال $= \frac{2}{15}$ ✓ (فضای نمونه‌ای جدید)

سراسری خارج H.W خانواده‌ای دارای چهار فرزند است. اگر بدانیم دو فرزند اول آن‌ها پسر است، احتمال آن که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشد، کدام است؟

(جواب: $\frac{1}{4}$)

سراسری در پرتاب دو تاس سالم با هم، می‌دانیم جمع دو عدد رو شده کمتر از ۱۰ است. با کدام احتمال هر دو عدد فردند؟

سراسری تجربی خارج ۱۴۰۳: در پرتاب دو تاس سالم با هم، می‌دانیم جمع دو عدد رو شده بزرگ‌تر از ۵ است. با کدام احتمال هر دو عدد مساوی‌اند؟

(جواب: $\frac{4}{13}$)

سراسری ۹۲ پنج مهره سفید با شماره‌های ۱ تا ۵ و پنج مهره سیاه با شماره‌های ۱ تا ۵ و یکسان در ظرفی قرار می‌دهیم. به تصادف دو مهره از بین آنها بیرون می‌آوریم. اگر مجموع شماره‌های هر دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال هر دو هم‌رنگ‌اند؟

سراسری ۱۴۰۳: دو کارت به تصادف از بین ۹ کارت یکسان به شماره‌های ۱ تا ۹ برمی‌داریم. اگر مجموع اعداد روی این دو کارت زوج باشد، با کدام احتمال هر دو عدد فردند؟

(جواب: $\frac{5}{8}$)

سراسری ۹۹ تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این که لااقل یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد کدام است؟

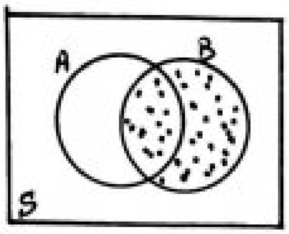
۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{3}{4}$

سراسری ۹۹ خارج ۱۴۰۳: احتمال این که لااقل یکی از تاس‌های رو شده ۳ باشد کدام است؟

(جواب: $\frac{23}{54}$)

فرمول احتمال شرطی ←



$P(A|B) = ?$

B: رخ داده است $(B \neq \varnothing)$

سراسری ۹۶ یک فضای نمونه متشکل از ۵ برآمد a,b,c,d,e است. اگر $P(a)=\frac{1}{4}$ و $P(\{a,b,c\})=\frac{3}{4}$ باشد، آن‌گاه $P(\{b,c,e\}|\{a,b,c\})$ کدام است؟

سراسری ۹۸ تجربی احتمال موفقیت فردی در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال لااقل در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

سراسری ۹۹ A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه S هستند. اگر $P(A)=0/4$، $P(B|A)=0/25$ و $P(B)=0/3$ باشند، آن‌گاه $P(B|A')$ کدام است؟

سراسری خارج ۹۸ — H.W امیر و بهروز هرکدام به ترتیب با احتمال ۰/۶ و ۰/۳ در یک مسابقه علمی شرکت می‌کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز برابر ۰/۵ است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز کدام است؟

(جواب: $\frac{9}{14}$)

سراسری ۹۳ — H.W اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند به طوری که $P(A)=0/2$، $P(B)=0/22$، $P(B|A)=0/7$، آن‌گاه $P(B'|A')$ کدام است؟

(جواب: ۰/۹)

سراسری ۱۴۰۱ خ: فرض کنید علی و حسن دو کماندار باشند که با احتمال‌های $۰/۶$ و $۰/۴$ به هدف می‌زنند. اگر هر کدام یک بار تیراندازی کنند و بدانیم حداقل یک تیر به هدف اصابت کرده است، با کدام احتمال علی به هدف زده است؟

۱) $\frac{۱۵}{۱۹}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$

۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱۷}{۲۵}$

چند تذکر مهم

تذکر ۱ (اختیاری): هر احتمالی، یک احتمال شرطی محسوب می‌شود. به عبارت دیگر

$$P(A) = P(A|S)$$

که در حقیقت پیشامد S را ... (بقیهٔ یادداشت ناخوانا)

تذکر ۲:

$P(A|B) = P(B|A) = ۰ \iff$ A و B دو پیشامد ناسازگارند.

تذکر ۳ (اختیاری): فرمول احتمال شرطی در اصول احتمال صدق می‌کند. به عبارت دیگر

اصل ۱: $P(S|C) = 1 \qquad C \neq \phi$

اصل ۲: A و B ناسازگارند $\iff P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$

تذکر ۴ (اختیاری): فرمول احتمال شرطی در قضیه‌های احتمال صدق می‌کند. به عبارت دیگر

الف) $P(\phi|C) = ۰$

ب) $A \subseteq B \Rightarrow P(A|C) \leq P(B|C)$

پ) $P(A - B|C) = P(A|C) - P(A \cap B|C)$

ت) $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$

ث) $P(A'|C) = 1 - P(A|C)$

بر درختی می‌نشینم سیب‌های بسیار

در میان هر سیب دانه‌ها محدود است

در دل هر دانه سیب‌ها نامحدود

چیست این راز عجیب دانه با سیصد سیب!

قضیهٔ ضرب احتمال‌ها (محاسبه احتمال رخ داد توأم دو پیشامد)

اگر A و B دو پیشامد (ناتهی) با احتمال‌های مثبت از فضای نمونهٔ S باشند، آنگاه:

اثبات:

$$\begin{cases} P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(B).P(A|B) \\ P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A).P(B|A) \end{cases}$$

مثال: برحسب تجربهٔ گذشته می‌دانیم احتمال این که رتبهٔ اول سال آخر رشتهٔ ریاضی دبیرستانی در کنکور قبول شود ۹۵٪ است. با توجه به سوابق تحصیلی یک دانش‌آموز، احتمال این که او در سال آخر رشتهٔ ریاضی دبیرستان رتبهٔ اول شود ۰/۹ است. احتمال این که این دانش‌آموز هم رتبهٔ اول شود و هم در کنکور قبول شود چقدر است؟

مثال: احتمال زنده ماندن در یک عمل پیوند عضو برابر ۵۰٪ است. اگر بیماری پس از عمل زنده باشد، احتمال این که بدن او در طول یک ماه پیوند را قبول نکند و بمیرد ۰/۲ است. احتمال زنده ماندن یک بیمار پیوندی پس از این دو مرحله چقدر است؟

حل:

$$P(\text{زنده ماندن در عمل} \cap \text{زنده ماندن پس از یک ماه}) = P(\text{زنده ماندن در عمل}).P(\text{زنده ماندن پس از یک ماه} \mid \text{زنده ماندن در عمل}) = \%50 \times (1 - 0/2) = 0/4$$

سراسری: در پرتاب یک تاس سالم اگر عددی بزرگتر از ۳ بیاید، مجاز به پرتاب تاس دوم هستیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده کمتر از ۸ است؟

حل:

$$P(\text{تاس اول} > 3 \cap \text{مجموع دو تاس} < 8) = P(\text{تاس اول} > 3).P(\text{مجموع دو تاس} < 8 \mid \text{تاس اول} > 3)$$

$$= \frac{3}{6} \times \frac{6}{18}$$

$$= \frac{1}{6} \checkmark$$

تاس اول، تاس دوم: $(\{4, 5, 6\} \;,\; ?)$

۳ حالت × ۶ حالت = ۱۸ حالت ممکن

مطلوب: $\{(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(6,1)\}$ حالت مطلوب

مثال: امیر و بابک عضو تیم ۱۴ نفره والیبال اند و قد هیچ دو نفری در تیم برابر نیست. اگر امیر از بابک بلندتر باشد، با کدام احتمال

الف) امیر بلندقدترین عضو تیم است؟

حل:

$$P(\text{امیر بلندقدترین است} \mid \text{امیر از بابک بلندتر است}) = \frac{P(\text{امیر از بابک بلندتر است} \cap \text{امیر بلندقدترین است})}{P(\text{امیر از بابک بلندتر است})}$$

$$= \frac{P(\text{امیر بلندقدترین است}).P(\text{امیر از بابک بلندتر است} \mid \text{امیر بلندقدترین است})}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{14} \times 1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{7}$$

ب) امیر از نظر بلندی قد نفر یازدهم تیم است؟

$$P(\text{امیر از نظر قد نفر یازدهم است} \mid \text{امیر از بابک بلندتر است}) = \frac{P(\text{امیر از بابک بلندتر است} \cap \text{امیر از نظر قد نفر یازدهم است})}{P(\text{امیر از بابک بلندتر است})}$$

$$= \frac{P(\text{امیر از نظر قد نفر یازدهم است}) \cdot P(\text{امیر از بابک بلندتر است} \mid \text{امیر از نظر قد نفر یازدهم است})}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{14} \times \frac{\quad}{\quad}}{\frac{1}{2}}$$

سراسری ۱۴۰۱: در یک کیسه ۱۶ گوی به شماره‌های ۱ تا ۱۶ وجود دارد. دو گوی به طور متوالی و بدون جای‌گذاری به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم شمارهٔ گوی دوم از شمارهٔ گوی اول کمتر است، با کدام احتمال شمارهٔ گوی اول ۱۶ است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{12}$

۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{4}$

قضیهٔ ضرب احتمال‌ها برای سه پیشامد

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cap B)$$

رخ دادن توأم سه پیشامد = اول رخ بدهد . دومی رخ بدهد به شرط رخ داد اولی . سومی رخ بدهد به شرط رخ داد اولی و دومی

مثال: جعبه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. سه مهره به طور متوالی و بدون جای‌گذاری به تصادف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال

۴ سفید
۶ سیاه

الف) هر سه مهره سفیداند؟

$$\text{جواب} = P(\text{اولی سفید} \cap \text{دومی سفید} \cap \text{سومی سفید}) = P(\text{اولی سفید}) \cdot P(\text{دومی سفید} \mid \text{اولی سفید}) \cdot P(\text{سومی سفید} \mid \text{اولی و دومی سفید})$$

$$= \frac{\quad}{\quad} \times \frac{\quad}{\quad} \times \frac{\quad}{\quad} =$$

ب) سه مهره به طوری که در میان رنگ متفاوت دارند؟
H.W

مثال: یک بازیکن بسکتبال اگر روحیهٔ خوبی داشته باشد، با احتمال ۹۰ درصد و اگر روحیهٔ خوبی نداشته باشد، با احتمال ۶۰ درصد پرتاب خود را وارد سبد می‌کند. هر پرتابی را که وارد سبد کند، برای پرتاب بعدی روحیهٔ خوبی دارد، در غیر این صورت روحیهٔ خوبی ندارد. فرض کنید در ابتدای بازی روحیهٔ خوبی دارد. احتمال این که از سه پرتاب متوالی دقیقاً دو پرتاب آخر را وارد سبد کند چقدر است؟

احتمال کل

در برخی مسایل محاسبه‌ی احتمال مطلوب به تنهایی ممکن نیست و به آنچه که در مراحل قبل رخ داده است بستگی دارد. در این نوع مسایل فضای نمونه به پیشامدهایی افراز شده است که احتمال مطلوب را باید در هر یک از این افرازها به طور جداگانه محاسبه نمود و با هم جمع کرد. عدد حاصل **احتمال کل** نامیده می‌شود.

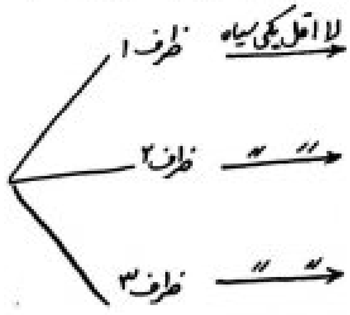
تمرین دو ظرف همانند، اولی دارای ۶ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و دومی دارای ۶ مهره‌ی سفید و ۸ مهره‌ی سیاه است. با چشم بسته یکی از این دو ظرف را اختیار کرده و مهره‌ای از آن بیرون می‌آوریم. احتمال این که مهره سفید باشد کدام است؟

ظرف ۲	ظرف ۱
۶ سفید	۶ سفید
۸ سیاه	۴ سیاه

مثال: دو ظرف با محتویات زیر موجود است. یک تاس سالم را می‌اندازیم. اگر ۱ یا ۶ بیاید ظرف اول و در غیر این صورت ظرف دوم را انتخاب می‌کنیم و سپس مهره‌ای از ظرف انتخابی خارج می‌کنیم. احتمال سفید بودن این مهره کدام است؟

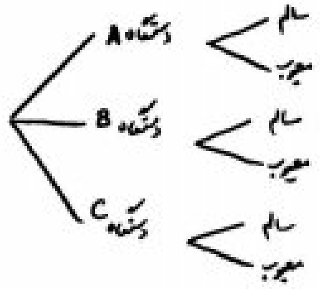
	سفید	سیاه
ظرف ۱	۳	۴
ظرف ۲	۵	۲

سراسری ۹۹ سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهره‌ی سفید، در دومی ۹ مهره‌ی سیاه و در سومی ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه قرار دارند. به تصادف از یک ظرف، ۲ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟

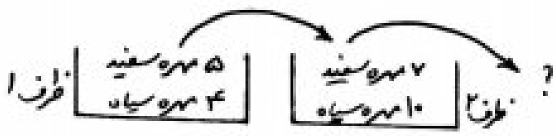


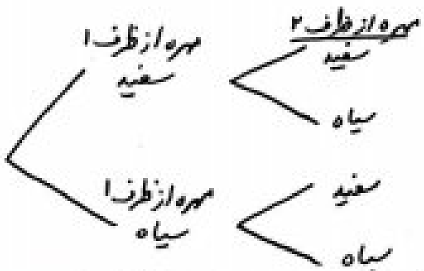
سراسری ۹۴ تجربی در جعبه‌ی اول ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و در جعبه‌ی دوم ۳ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟

سراسری خ) در کارخانه‌ای سه دستگاه A، B و C به ترتیب ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد محصولات را تولید می‌کنند و می‌دانیم محصولات این سه دستگاه به ترتیب ۱۰، ۱۰ و ۲۰ درصد معیوب اند. محصولی که به تصادف از این کارخانه انتخاب می‌شود، با کدام احتمال سالم است؟

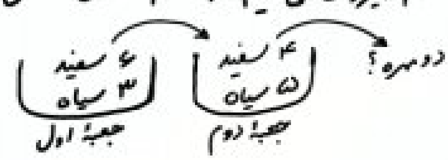


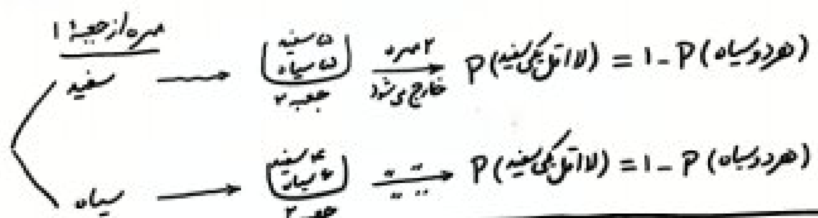
سراسری) دو ظرف داریم. در اولی ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در دومی ۷ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه است. از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف دوم قرار می‌دهیم. آنگاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟



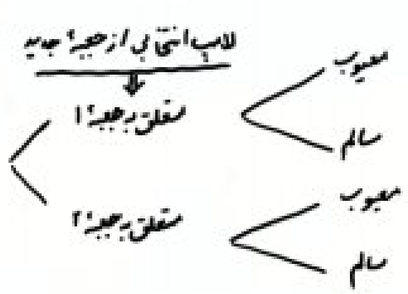


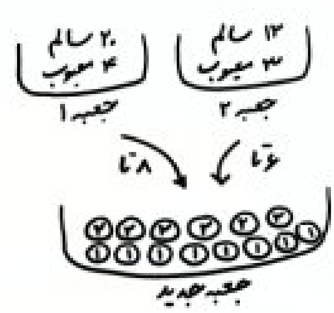
سراسری خ ۹۹) در جعبه اول ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه دوم ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارد. از جعبه اول یک مهره به دلخواه خارج می‌کنیم و در جعبه دوم می‌اندازیم. سپس دو مهره از جعبه دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سفید است؟



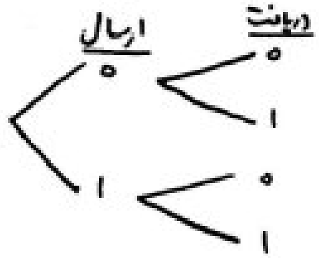


سراسری ۸۹ و ۹۸) در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لامپ یکسان موجود است. در جعبه اول ۴ و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب اند. از اولی ۸ و از دومی ۶ لامپ به تصادف برداشته و در جعبه جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب است؟

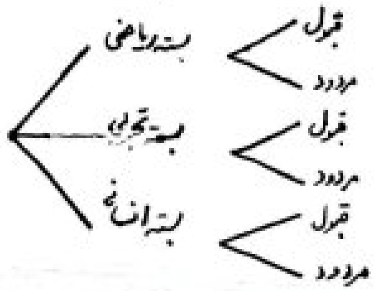




مثال: در یک دستگاه مخابره کننده نقطه ۰ و ۱ با احتمال‌های به ترتیب ۷۰٪ و ۳۰٪ ارسال می‌شوند. چون خطا وجود دارد، احتمال آن که صفر ارسال شده همان صفر دریافت گردد برابر ۰/۹ و احتمال آن که یک ارسال شده همان یک دریافت گردد برابر ۰/۸ است. با کدام احتمال در گیرنده صفر دریافت می‌شود؟



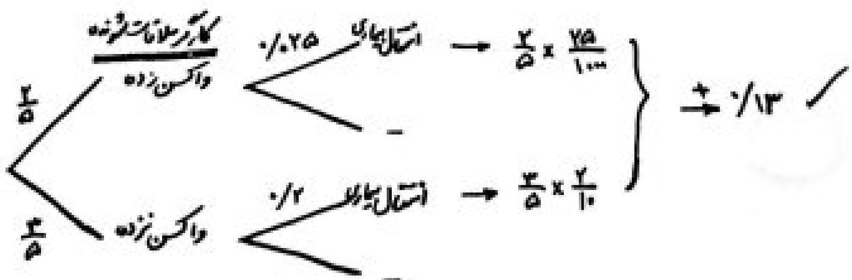
سراسری ۹۸ خارج تجربی: بهروز جهت شرکت در یک مسابقه، از بین پرسش‌های ۵ بسته ریاضی، ۷ بسته تجربی و ۶ بسته علوم انسانی، به تصادف یک بسته اختیار کرده است. احتمال برنده شدن در هر بسته این دروس به ترتیب ۰/۷، ۰/۸ و ۰/۹ است. با کدام احتمال بهروز برنده می‌شود؟



سراسری ۹۳ تجربی خارج ۱۴۰۰: ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده سفید است؟

(جواب: $\frac{25}{63}$)

سراسری تجربی: احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. $\frac{2}{5}$ کارگران یک کارگاه، واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟

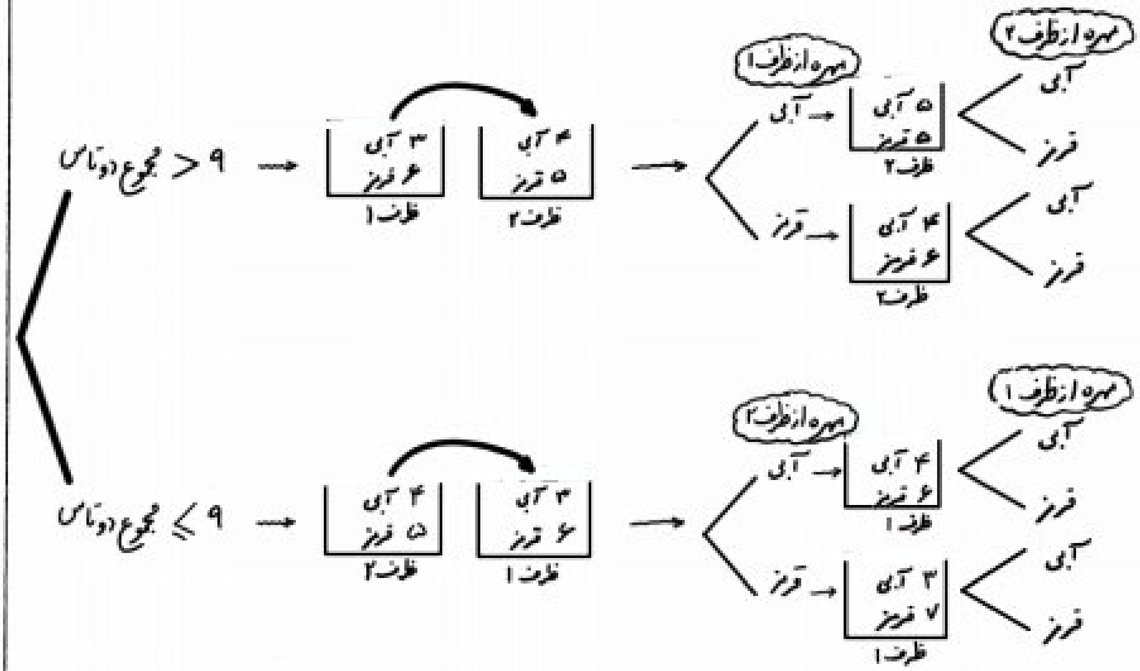


سراسری ۹۰ تجربی خارج ۱۴۰۲: در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آنها دفترچه سلامت دارد؟ (جواب ۰/۶۶۹)

سراسری ۱۴۰۰ در ظرف اول ۳ مهره آبی و ۶ مهرهٔ قرمز و در ظرف دوم ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز قرار دارد. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده از ۹ بیشتر باشد، به تصادف از ظرف اول یک مهره خارج کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهرهٔ بیشتر انتخاب می‌کنیم. احتمال این که مهره قرمز باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵۷}{۲۷۰}$ ۲) $\frac{۱۶۵}{۲۷۰}$

۳) $\frac{۱۷۳}{۲۷۰}$ ۴) $\frac{۱۸۰}{۲۷۰}$



سراسری ۱۴۰۰ خ
H.W

در ظرف اول ۳ مهره آبی و ۶ مهره قرمز و در ظرف دوم ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز قرار دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده ۷ یا ۱۰ باشد، به تصادف یک مهره از ظرف اول خارج کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهرهٔ بیشتر انتخاب می‌کنیم. احتمال این که این مهره آبی باشد کدام است؟

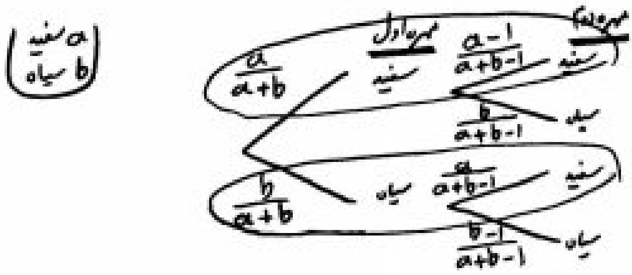
۱) $\frac{۷}{۱۸}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳۰}$

۳) $\frac{۱۹}{۳۰}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۸}$

(گزینه ۲)

مسأله پولیا

کیسه‌ای شامل a مهرهٔ سفید و b مهرهٔ سیاه است. مهره‌ای به تصادف از کیسه بیرون می‌آوریم و بدون مشاهده‌ی رنگ آن کنار می‌گذاریم. سپس مهرهٔ دیگری از کیسه بیرون می‌آوریم. احتمال سفید بودن مهرهٔ دوم چقدر است؟



$$P(\text{دومی سفید}) = \frac{a}{a+b} \times \frac{a-1}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \times \frac{a}{a+b-1} = \frac{a(a-1)+ab}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{a(a-1+b)}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{a}{a+b} = P(\text{اولی سفید})$$

?!!

نتیجه:

سراسری ۶۲ و ۹۳ خ ۹۶ خ — کیسه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. سه مهره به تصادف و هم‌زمان از کیسه، بدون رؤیت خارج شده است. از چهار مهره باقی‌مانده یک مهره خارج می‌کنیم. احتمال سفید بودن مهرهٔ آخری چقدر است؟

سراسری ۹۳ تجربی — در جعبه‌ای ۶ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سیاه وجود دارد. دو مهره متوالیاً و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهرهٔ خارج شده سفید است؟

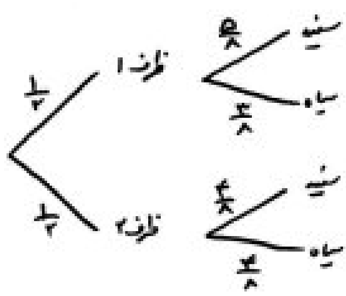
سراسری ۹۸ تجربی — در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رؤیت خارج می‌کنیم. سپس از بین بقیهٔ مهره‌ها، ۲ مهره هم‌زمان برمی‌داریم. با کدام احتمال هر دو مهرهٔ اخیر سفید است؟

تمرین ۴.۳ — کیسه‌ای شامل a مهره‌ی سفید و b مهره‌ی سیاه است. مهره‌ای به تصادف از کیسه خارج می‌نماییم و به جای آن، n مهره هم‌رنگ با آن در کیسه قرار می‌دهیم. سپس مهره‌ای از کیسه به طور تصادفی بیرون می‌آوریم.
احتمال سفید بودن این مهره چقدر است؟ (جواب: $\frac{a}{a+b}$)

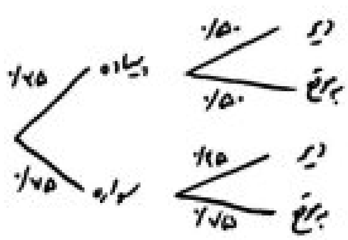
قاعدهٔ بیز

در برخی مسایل همانند مسایل احتمال کل، فضای نمونه به پیشامدهایی افراز شده است، ولی نتیجهٔ آزمایش مشخص می‌باشد و با توجه به اینکه نتیجهٔ آزمایش مشخص می‌باشد، احتمال رخ دادن یکی از افرازها مورد نظر است. یعنی مطلوب مسئله یک احتمال شرطی است. که برای یافتن آن نمودار درختی مسئله را رسم می‌کنیم. با توجه به شرط داده شده (نتیجهٔ آزمایش که مشخص است)، حالت‌های ممکن را روی نمودار درختی مشخص می‌کنیم و سپس به محاسبهٔ احتمال مطلوب می‌پردازیم. این روش قاعدهٔ بیز نامیده می‌شود.

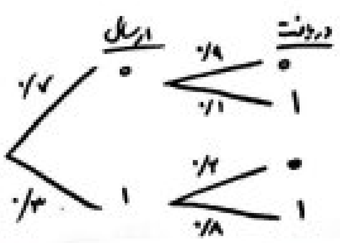
مثال: دو ظرف مشابه داریم اولی شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و دومی شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه است. با چشم بسته از یکی از ظرف‌ها مهره‌ای خارج می‌کنیم. اگر این مهره سفید باشد، با کدام احتمال از ظرف اول خارج شده است؟



تمرین ۱۰-۷: دانش‌آموزی در ۲۵ درصد موارد پیاده و در ۷۵ درصد موارد سواره به مدرسه می‌رود. اگر پیاده برود در ۵۰ درصد مواقع و اگر سواره برود در ۲۵ درصد مواقع دیر می‌رسد. اگر روزی دیر رسیده باشد، با کدام احتمال پیاده رفته است؟ (جواب: ۰/۴)

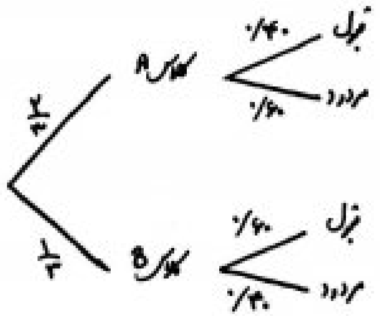


مثال: در یک دستگاه مخابره کنندهٔ فقط ۰ و ۱ با احتمال‌های به‌ترتیب ۰/۷ و ۰/۳ ارسال می‌شوند. چون خطا وجود دارد، احتمال آن که صفر ارسال شده همان صفر دریافت گردد برابر ۰/۹ و احتمال آن که یک ارسال شده همان یک دریافت گردد برابر ۰/۸ است. اگر در گیرنده صفر دریافت کرده باشیم، با کدام احتمال صفر نیز ارسال شده است؟



سراسری ۹۸ در یک آزمون از دو کلاس A و B، ۴۰ درصد دانش‌آموزان کلاس A و ۶۰ درصد دانش‌آموزان کلاس B قبول شده‌اند. اگر تعداد دانش‌آموزان کلاس A دو برابر کلاس B باشد و فردی به تصادف از بین قبول‌شدگان انتخاب شود، تقریباً با کدام احتمال، این فرد از کلاس A است؟

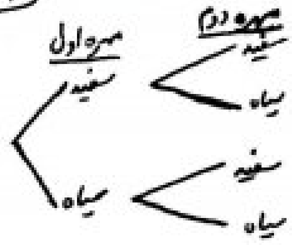
۱) ٪۴۳ ۲) ٪۵۷
۳) ٪۶۱ ۴) ٪۶۳



مثال مهم کیسه‌ای شامل ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. دو مهره پی‌درپی و بدون جایگذاری خارج می‌نماییم.

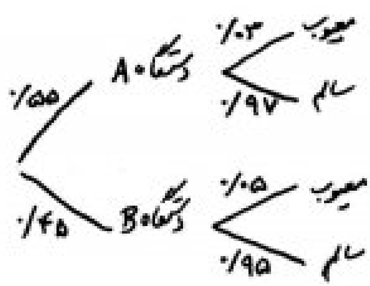
۶ سفید
۴ سیاه

الف) با کدام احتمال مهره دوم سفید است؟ (سراسری ۹۹)



ب) اگر مهره دوم سفید باشد، با کدام احتمال مهره اول نیز سفید است؟

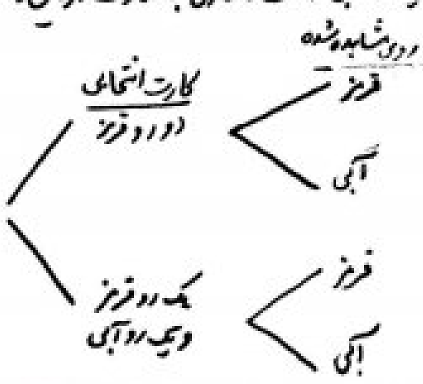
سراسری ۹۴ در یک شرکت تولیدی، ۵۵ درصد کالا محصول دستگاه A با احتمال ۳ درصد معیوب و ۴۵ درصد آن محصول دستگاه B با احتمال ۵ درصد معیوب است. اگر یک کالا را به طور تصادفی انتخاب کنیم و بدانیم که معیوب است، با کدام احتمال این کالا محصول دستگاه A است؟



$$P(A \mid \text{معیوب}) = \frac{0/55 \times 0/03}{0/55 \times 0/03 + 0/45 \times 0/05} \checkmark$$

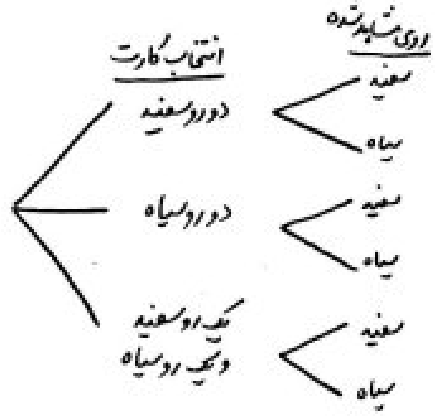
مثال: دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو قرمز و یک رو آبی است. کارتی به تصادف از این دسته برمی‌داریم و یک روی آن را می‌بینیم.

الف) احتمال این که آن رو قرمز باشد چقدر است؟



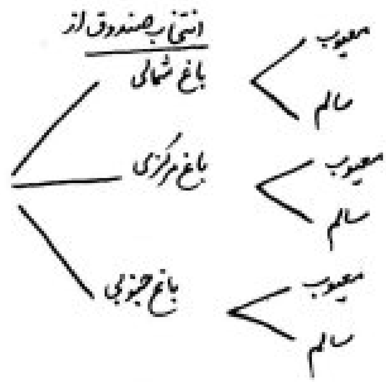
ب) اگر روی مشاهده شده قرمز باشد، با کدام احتمال روی دیگر کارت نیز قرمز است؟

مثال فرض کنید سه کارت داریم. اولی دو رو سفید، دومی دو رو سیاه و سومی یک رو سفید و یک رو سیاه است. کارتی به تصادف انتخاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم یک روی آن سفید است. احتمال این هر دو روی آن سفید باشد چقدر است؟



تمرین H.W

سه صندوق سیب یکسان از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم و به ترتیب ۱۰، ۵ و ۲۰ درصد معیوب اند. از یکی از صندوق‌ها یک سیب به تصادف بر می‌داریم.



الف) احتمال معیوب بودن سیب انتخابی کدام است؟

(جواب: $\frac{۷}{۶۰}$)

ب) اگر سیب انتخابی معیوب باشد، با کدام احتمال متعلق به باغ مرکزی است؟

(جواب: $\frac{۱}{۷}$)

مثال یک شرکت بیمه، مشتریان خود را به دو گروه "پرخطر" با احتمال ۴٪ تصادف در سال و "کم خطر" با احتمال ۲٪ تصادف در سال، تقسیم کرده است. فرض کنیم ۳۰ درصد مشتریان این شرکت، "پرخطر" می‌باشند. اگر فردی به تصادف از مشتریان این شرکت، که می‌دانیم در یک سال تصادف داشته است، انتخاب کنیم، احتمال این‌که در گروه پرخطر باشد، چقدر است؟

پیشامدهای مستقل

دو پیشامد را مستقل می‌گوییم هرگاه رخ دادن یکی در رخ دادن دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر نتیجه‌ی این دو پیشامد ربطی به هم ندارند. به عنوان مثال فرض کنید دو تاس سالم را با هم می‌اندازیم. واضح است که نتیجه‌ی تاس اول در نتیجه‌ی تاس دوم تأثیری ندارد و برعکس. به عبارت دیگر مستقل‌اند و مثلاً می‌توان گفت

بنابراین

دو پیشامد A و B از یک فضای نمونه مستقل‌اند اگر و تنها اگر

مثال: در پرتاب یک تاس سالم و یک سکه سالم

الف) اگر بدانیم تاس عدد ۶ آمده است، با کدام احتمال سکه "رو" می‌آید؟

ب) اگر بدانیم سکه "رو" آمده است، با کدام احتمال تاس عدد ۶ می‌آید؟

مثال یک سکه سالم را صد بار انداخته‌ایم، هر صد بار "رو" آمده است. احتمال آن که در پرتاب صد و یکم "رو" بیاید کدام است؟

* **نتیجه مهم**

$P(A\cap B)=P(A).P(B) \Longleftrightarrow$ دو پیشامد A و B مستقل‌اند

اثبات

مثال: در پرتاب یک تاس سالم و یک سکه سالم، احتمال آن که سکه "رو" و تاس ۶ بیاید کدام است؟

$P($سکه "رو" $\cap$ تاس ۶$) \stackrel{\text{مستقل}}{=} P($سکه "رو"$).P($تاس ۶$) =$

مثال در پرتاب دو تاس سالم با کدام احتمال هیچ کدام از اعداد ظاهر شده مضرب ۳ نیست؟

مثال در کارخانه‌ای دو دستگاه مستقل از هم کار می‌کنند. احتمال آن که هر یک از این دو دستگاه کار کند ۰/۴ است. احتمال آن که هر دو کار کنند کدام است؟

H.W

(جواب: ۰/۱۶)

مثال: دو نفر به نام های A و B با احتمال های قبولی به ترتیب ۰/۷ و ۰/۸ در یک آزمون شرکت می کنند.

الف) احتمال آن که هر دو قبول شوند چقدر است؟

تجربی سراسری ۹۶ ب) احتمال آن که حداقل یکی قبول شود چقدر است؟

نتیجه:

سراسری ۹۸ خ تجربی: احتمال موفقیت فردی در یک آزمون مستقل، ۲ برابر احتمال موفقیت دوست وی است. احتمال موفقیت لااقل یکی از آن دو، $\frac{7}{9}$ است. احتمال موفقیت این فرد کدام است؟

تست: احتمال این که x یک مسأله ریاضی را حل کند $\frac{2}{3}$ و احتمال این که y همین مسأله را حل کند $\frac{3}{4}$ است. این مسأله را به هر دوی دهند تا حل کنند. احتمال این که این مسأله حل شود چقدر است؟

حل

$$P(x\cup y)\overset{\text{مستقل}}{=}P(x)+P(y)-P(x).P(y)=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{11}{12}$$

سراسری ۹۶ دو سکه و یک تاس را باهم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه "رو" یا تاس ۶ ظاهر می شود؟

سراسری ۹۶ خ یک سکه و دو تاس را باهم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال جمع عدد دو تاس بیشتر از ۴ یا سکه "رو" ظاهر شده است؟

سراسری برای رسیدن به مرحله نهایی مسابقات ورزشی لازم است تیم های شرکت کننده در دو دوره مسابقات مقدماتی شرکت نمایند. تیمی که در هر دو دوره بازنده شود به مرحله نهایی راه نمی یابد. اگر احتمال پیروزی در هر بازی برای تیمی ۰/۴ باشد، احتمال حضور این تیم در مرحله نهایی کدام است؟

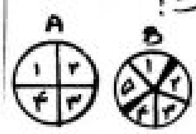
سراسری ۹۳ در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. به تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال چهار مهره خارج شده همرنگ اند؟

سراسری ۹۷ خ دو سکه و یک تاس را باهم پرتاب می کنیم. احتمال این که لااقل یکی از پیشامدهای سکه یک رو یا عدد تاس زوج باشد کدام است؟

(جواب: $\frac{11}{16}$)

سراسری خ: در ظرفی ۴ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۱ مهره سبز موجود است. در ظرف دیگر ۶ مهره سفید و ۲ مهره سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال رنگ این دو مهره متفاوت است؟

سراسری: صفحه هر یک از دو عقربه‌ی A و B را به ترتیب به ۴ قطاع و ۵ قطاع مساوی با شماره‌های $\{1,2,3,4\}$ و $\{1,2,3,4,5\}$ تقسیم می‌کنیم. عقربه‌های هر دو صفحه را می‌چرخانیم. احتمال این‌که هر دو عقربه روی ناحیه‌ی اعداد مساوی هم قرار بگیرند کدام است؟



حل: $P(A\text{ روی }1 \cap B\text{ روی }1) + P(A\text{ روی }2 \cap B\text{ روی }2) + P(A\text{ روی }3 \cap B\text{ روی }3) + P(A\text{ روی }4 \cap B\text{ روی }4)$

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$$

قسمت H.W: روی تاسی ارقام ۱، ۲، ۲، ۳، ۳، ۳ نوشته شده است. در پرتاب ۲ بار این تاس، احتمال این‌که مجموع دو عدد رو شده برابر ۴ شود کدام است؟

(جواب: $\frac{5}{18}$)

سراسری ۹۹ خ: در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A\cap B)=0/2$ و $P(A\cup B)=0/6$، با فرض $P(B')>P(B)$ احتمال وقوع پیشامد B کدام است؟

۱) ۰/۲

۲) ۰/۳

۳) ۰/۴

۴) ۰/۲۵

قسمت H.W: برای دو پیشامد مستقل A و B از فضای نمونه‌ای S، اگر $P(A-B)=\frac{1}{3}$ و $P(B-A)=\frac{1}{6}$، آن‌گاه بیشترین مقدار $P(A\cup B)$ کدام است؟ (گزینه ۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{6}$

تذکر

$P(A\cap B) \neq P(A).P(B) \iff$ A و B دو پیشامد وابسته اند ~~ناسازگار~~ نامستقل

مثال: در آزمایش پرتاب دو تاس سالم باهم دو پیشامد
A : تاس اول عدد ۴ است.
B : مجموع دو تاس برابر n است.
را در نظر می گیریم.
نشان دهید برای $n=7$ این دو پیشامد مستقل اند و برای $n=6$ وابسته اند.

حل:

$n(S)=6^2=36$

$A=\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\} \to P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

7 برای $B=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} \to P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$A\cap B=\{(4,3)\} \to P(A\cap B)=\frac{1}{36}=P(A).P(B) \to$ مستقل ✓

6 برای $B=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} \to P(B)=\frac{5}{36}$

$A\cap B=\{(4,2)\} \to P(A\cap B)=\frac{1}{36}\neq P(A).P(B) \to$ وابسته ✓

سراسری اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند و $P(A).P(B)+P(A'\cup B')=1$ باشد، آن گاه A و B نسبت به هم چگونه اند؟

۱) ناسازگار ۲) مستقل
۳) سازگار ۴) وابسته

تست H.W سکه ای همگن را سه بار متوالی می اندازیم. اگر A پیشامد رخ دادن "رو" در دو پرتاب اول، B پیشامد رخ دادن "پشت" در پرتاب سوم و C پیشامد رخ دادن دقیقاً" دو پشت در سه پرتاب باشد، آن گاه دو پیشامد A و B نسبت به هم .... و دو پیشامد B و C نسبت به هم .... هستند.

(گزینه ۲)

۱) مستقل، مستقل ۲) مستقل، وابسته ۳) وابسته، مستقل ۴) وابسته، وابسته

تذکر ۱ متمم گیری استقلال پیشامدها را حفظ می‌کند. به عبارت دیگر

> **قضیه:** اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونهٔ S باشند، آن‌گاه
>
> الف) A' و B نیز مستقل‌اند.
>
> ب) A و B' نیز مستقل‌اند.
>
> پ) A' و B' نیز مستقل‌اند.
>
> (این قضیه قابل تعمیم است)

مثال: دو نفر تیرانداز به نام‌های A و B با احتمال‌های به ترتیب $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ هدفی را می‌زنند. اگر هر کدام فقط یک بار تیراندازی کنند، با کدام احتمال

الف) فقط A به هدف می‌زند؟

ب) فقط یکی به هدف می‌زند؟

پ) هیچ کدام به هدف نمی‌زنند؟

مثال (سراسری ۹۸) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $\overline{P(A\cap B)}=\frac{5}{6}$ و $P(A\cap B')=\frac{1}{12}$، آن‌گاه $P(A\cup B')$ چقدر است؟

مقایسه

دو پیشامد ناسازگار	دو پیشامد مستقل
با هم رخ نمی‌دهند $\leftrightarrow A\cap B=\varnothing$	می‌توانند با هم رخ بدهند $\leftrightarrow A\cap B\neq\varnothing$
$P(A\cap B)=0$	$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ ← اشتراک تبدیل به ضرب
اجتماع تبدیل به جمع $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$
رخ دادن یکی، رخ ندادن دیگری را سبب می‌شود	رخ دادن یکی در رخ دادن دیگری تأثیری ندارد.

تذکر ۲ اگر دو پیشامد مستقل و ناسازگار باشند، آن‌گاه حداقل یکی نشدنی است.

اثبات:

A و B دو پیشامد ناسازگارند $\rightarrow P(A\cap B)=0$

A و B دو پیشامد مستقل‌اند $\rightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$$\left.\begin{matrix} P(A\cap B)=0 \\ P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ناسازگار و مستقل}} P(A)\cdot P(B)=0 \rightarrow \underbrace{P(A)=0}_{\text{A نشدنی}} \text{ یا } \underbrace{P(B)=0}_{\text{B نشدنی}}$$

نتیجه مهم: اگر دو پیشامد با احتمال‌های مثبت، ناسازگار باشند، آن‌گاه مستقل نیستند و اگر مستقل باشند، آن‌گاه ناسازگار نیستند. (این دو مفهوم ربطی به هم ندارند!!)

تذکر ۳ اگر n پیشامد A_1، A_2، ...، A_n مستقل باشند، آنگاه

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n)$$

توجه کنید اگر تساوی بالا برقرار باشد، نمی‌توان گفت n پیشامد مستقل داریم (دو شرط طی نیست). در حالت کلی:

* n پیشامد مستقل اند اگر و تنها اگر احتمال اشتراک هر تعداد از آنها با حاصل ضرب احتمال آنها برابر شود.

سوال سه تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد رو شده مضرب ۳ نیستند؟

حل
$P($ تاس اول مضرب ۳ نباشد $\cap$ تاس دوم ... $\cap$ ... تاس سوم ... $) \overset{\text{مستقل}}{=} \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{8}{27}$ ✓

مثال: در یک کلاس ۱۰ نفری با کدام احتمال

الف) همگی در روز شنبه متولد شده‌اند؟

حل
$P($ اولی شنبه $\cap$ دومی شنبه $\cap \dots \cap$ دهمی شنبه $) \overset{\text{مستقل}}{=} \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \dots \times \frac{1}{7} = (\frac{1}{7})^{10}$ ✓

ب) همگی در یک روز هفته متولد شده‌اند؟

$P($ همگی شنبه $) \overset{!}{+} P($ همگی یکشنبه $) \overset{!}{+} \dots \overset{!}{+} P($ همگی جمعه $) = (\frac{1}{7})^{10} + (\frac{1}{7})^{10} + \dots + (\frac{1}{7})^{10} = 7 \times (\frac{1}{7})^{10} = (\frac{1}{7})^9$ ✓

سوال H.W اگر به طور تصادفی سه نفر از جامعه‌ای انتخاب شوند، با کدام احتمال فقط ماه تاریخ تولد برای هر سه یکسان است؟ (جواب: $(\frac{1}{12})^2$)

تست سه نفر به نام‌های A، B و C با احتمال‌های قبولی به ترتیب ۵۰، ۶۰ و ۷۰ درصد در کنکور شرکت می‌کنند. با کدام احتمال حداقل یکی قبول می‌شود؟

سراسری ۹۶ H.W سه نفر مشغول رمزگشایی یک پیام هستند. احتمال موفقیت آنها به ترتیب $\frac{2}{3}$، $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}$ است. با کدام احتمال لااقل یکی موفق می‌شود؟ (جواب: $\frac{23}{24}$)

تست (سراسری ۹۹) در پرتاب سه تاس سالم احتمال آن که حداقل یک بار شش ظاهر شود، کدام است؟

حل
$P($ حداقل یک بار ۶ $) \overset{\text{متمم}}{=} 1 - P($ هیچ بار ۶ $) = 1 - (\underset{\text{تاس اول غیر ۶}}{\frac{5}{6}} \times \underset{\text{تاس دوم غیر ۶}}{\frac{5}{6}} \times \underset{\text{تاس سوم غیر ۶}}{\frac{5}{6}}) = \frac{91}{216}$ ✓

تست: یک سکه را چند مرتبه پرتاب کنیم تا احتمال آمدن دست کم یک بار "ر" بیش از ۹۹ درصد باشد؟

۱) حداقل ۵ مرتبه
۲) حداقل ۷ مرتبه
۳) حداکثر ۵ مرتبه
۴) حداکثر ۷ مرتبه

سراسری ۹۰ انسانی: در یک ظرف ۵ گوی قرمز با شماره‌های ۱ تا ۵ و چهار گوی آبی با شماره‌های ۱ تا ۴ قرار دارند. به طور تصادف یک گوی از هر رنگ خارج می‌کنیم. با کدام احتمال لااقل شماره‌ی یکی از آنها ۲ است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۳۵ ۴) ۰/۴ ✓

حل

$P($ لااقل شماره‌ی یکی ۲ $) \overset{\text{متمم}}{=} 1 - P($ هیچ کدام ۲ $)$

$= 1 - P($ آبی غیر ۲ $\cap$ قرمز غیر ۲ $) \overset{\text{مستقل}}{=} 1 - \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = 0/4$ ✓

سراسری: احتمال آن که شخصی جواب پنج سؤال تست دوگزینه‌ای را به تصادف صحیح انتخاب کند چند برابر احتمال انتخاب به تصادف جواب صحیح پنج تست چهارگزینه‌ای است؟

تست دوگزینه‌ای $\xrightarrow{\text{احتمال جواب صحیح}} \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{چون مستقل‌اند}]{\text{پنج سؤال}} \left(\frac{1}{2}\right)^5$

تست چهارگزینه‌ای $\xrightarrow{\text{〃}} \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{〃}} \left(\frac{1}{4}\right)^5$

$\xrightarrow{\text{نسبت}} 2^5 = 32$ ✓

مثال: احتمال این که روز تولد سه نفر

الف) در روزهای مختلف هفته باشند، چقدر است؟ (متمایز ۲)

ب) همگی شبیه هم باشند چقدر است؟

ب) فقط دو نفر شبیه هم باشند چقدر است؟

ج) حداقل دو نفر شبیه هم باشند چقدر است؟

درس من چیز است
مثل یک بسته نبر
مثل خواب صبح
وقتی چشم بسته‌ام کدام می‌خواهم برسم تا زودتر
برسم تا بسکوم که آرامی است که دامنم می‌خواهد...

فرمول مهم

احتمال دوجمله‌ای (فرمول برنولی)

(آزمون برنولی : هر آزمایشی که دو نتیجه داشته باشد (موفقیت و شکست))

سه ویژگی دارد:
- تکرار n بار یک آزمایش دو حالته (آزمون برنولی) است (تعداد تکرارها مشخص است)
- دقیقاً x بار موفقیت است (و در نتیجه n-x بار شکست)
- معلوم نیست که موفقیت‌ها در کدام دفعات است و باید x موفقیت از n تکرار انتخاب شود.

مثال: یک تاس سالم را ۵ بار می‌اندازیم.

الف) احتمال این که (فقط) در بار اول، سوم و چهارم ۶ ظاهر شود چقدر است؟

ب) احتمال اینکه دقیقاً سه بار ۶ ظاهر شود چقدر است؟

مثال: تیراندازی با احتمال ۰/۸ هدفی را می‌زند. اگر ۱۰ بار شلیک کند، با کدام احتمال ۷ بار به هدف می‌زند؟

سراسری: احتمال موفقیت در یک عمل جراحی $\frac{4}{5}$ است. اگر این عمل بر روی ۵ نفر صورت گیرد، با کدام احتمال جراحی ۴ نفر موفقیت آمیز است؟

سراسری تجربی: از نوعی بذر ۸۰ درصد آنها جوانه می‌زنند. اگر سه بذر از این نوع کاشته شود، با کدام احتمال لااقل دو بذر جوانه می‌زند؟

$$\binom{3}{2}(0/8)^2(0/2)^1 + \binom{3}{3}(0/8)^3 = 0/896 \checkmark$$

سراسری: در ۱۰ بار پرتاب یک تاس سالم، با کدام احتمال ۶ بار، عددی بزرگتر از ۳ ظاهر می‌شود؟

سراسری: در یک خانواده ۵ فرزندی با کدام احتمال حداکثر ۴ دختر وجود دارد؟

سراسری: در پرتاب ۴ سکه سالم با هم، احتمال این که فقط ۳ سکه رو یا فقط ۳ سکه پشت بیاید چقدر است؟

مثال: در یک آزمون با ۱۰ سؤال پنج گزینه‌ای، دانش‌آموزی به تمام سؤال‌ها به طور تصادفی پاسخ می‌دهد. احتمال این که

الف) تمام سؤال‌ها را صحیح جواب داده باشد چقدر است؟

ب) فقط به پنج سؤال اول پاسخ صحیح داده باشد، چقدر است؟

پ) نیمی از سؤال‌ها را پاسخ صحیح بدهد، چقدر است؟

سراسری در $2n$ بار پرتاب یک سکه سالم، احتمال مساوی بودن تعداد "رو"ها و "پشت"ها با افزایش n چه تغییری می‌کند؟

۱) افزایش می‌یابد.

۲) کاهش می‌یابد.

۳) متناوباً تغییر می‌کند.

۴) تغییری نمی‌کند.

تمرین ۳۰۰ : در پرتاب چهار سکه‌ی سالم، اگر احتمال آمدن حداقل ۲ بار روی سکه را $P(A)$ و احتمال آمدن حداقل ۲ بار پشت سکه را $P(B)$ در نظر بگیریم، آن‌گاه $P(A \cap B')$ چقدر است؟

(جواب: $\frac{5}{16}$)

سراسری سکه‌ای سالم را پرتاب می‌کنیم، اگر "رو" بیاید تاس را می‌ریزیم و اگر "پشت" بیاید، ۳ سکه‌ی دیگر را با هم می‌اندازیم. احتمال این که دقیقاً یک سکه "رو" ظاهر شود کدام است؟

تمرین ۳۰۰ در یک خانواده ۴ فرزندی مطلوب است:

الف) احتمال این که فرزند اول و آخر دختر باشد.

ب) دو فرزند این خانواده دختر باشد؟

تمرین ۳۰۰ ۸۰ درصد افراد یک شهر باسوادند. اگر ۵ نفر از این شهر انتخاب کنیم، با کدام احتمال

الف) هر ۵ نفر بی‌سوادند؟

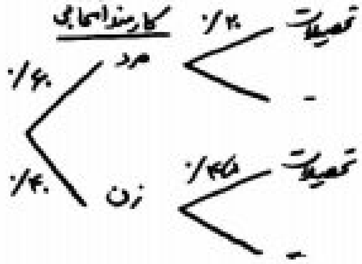
ب) فقط یکی بی‌سواد است؟

سراسری ۹۴ تجربی

در پرتاب یک سکه، اگر «رو» بیاید یک تیرانداز مجاز است ۵ تیر رها کند و اگر «پشت» بیاید، ۳ تیر رها می‌کند. می‌دانیم احتمال اصابت هر تیر رها شده $\frac{3}{5}$ است. با کدام احتمال فقط یک تیر اصابت می‌کند؟

سراسری ۹۳ خ تجربی

شصت درصد کارکنان سازمانی مرد و چهل درصد آنان زن هستند. می‌دانیم که ۲۰ درصد مردان و ۴۵ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر به تصادف ۲ نفر از بین آنها انتخاب شود، با کدام احتمال ۲ نفر آنها تحصیلات دانشگاهی دارند؟

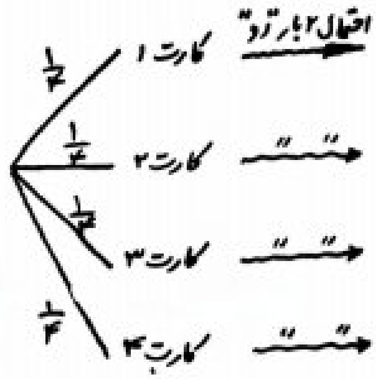


سراسری ۹۵ تجربی ۱۴۰۳

آزمایشی فقط دو نتیجه شکست و پیروزی دارد. احتمال پیروزی در هر بار $\frac{3}{4}$ است. در تکرار ۶ بار این آزمایش مستقل، احتمال ۴ پیروزی چند برابر احتمال ۳ پیروزی است؟

(جواب: $\frac{9}{4}$)

مثال: از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴ کارتی به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار «رو» بیاید، با کدام احتمال کارت شماره‌ی ۳ انتخاب شده است؟



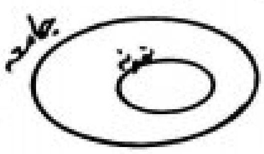
◀ **آمار**: مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

◀ **علم آمار**: مجموعهٔ روش‌هایی است شامل:

(۱) جمع‌آوری اعداد و ارقام → (۲) سازمان‌دهی و نمایش → (۳) تحلیل و تفسیر داده‌ها → (۴) نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب

واحد آماری: به هر یک از افراد یا اشیایی گویند که داده‌های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گردآوری می‌شود.

جامعه (جامعه آماری): مجموعهٔ کل واحدهای آماری را می‌گویند.



* به تعداد عضوهای جامعه، اندازه (حجم) جامعه می‌گوییم.

نمونه (نمونهٔ آماری): زیرمجموعه‌ای از جامعهٔ آماری است. (به دلیل زیاد بودن اندازهٔ جامعه و برای صرفه‌جویی در وقت و هزینه، زیرمجموعه‌ای از جامعه را در نظر گیریم)

* به تعداد عضوهای نمونه، اندازه (حجم) نمونه می‌گوییم.

اندازهٔ جامعه ≥ اندازهٔ نمونه

متغیر: هر ویژگی از اشیاء یا افراد، که در اعضای جامعه یکسان نیست و معمولاً از عضوی به عضو دیگر تغییر می‌کند را متغیر می‌گوییم.

* عدد یا عبارتی که به ویژگی یک عضو (متغیر) نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر (مشاهده) نامیده می‌شود.

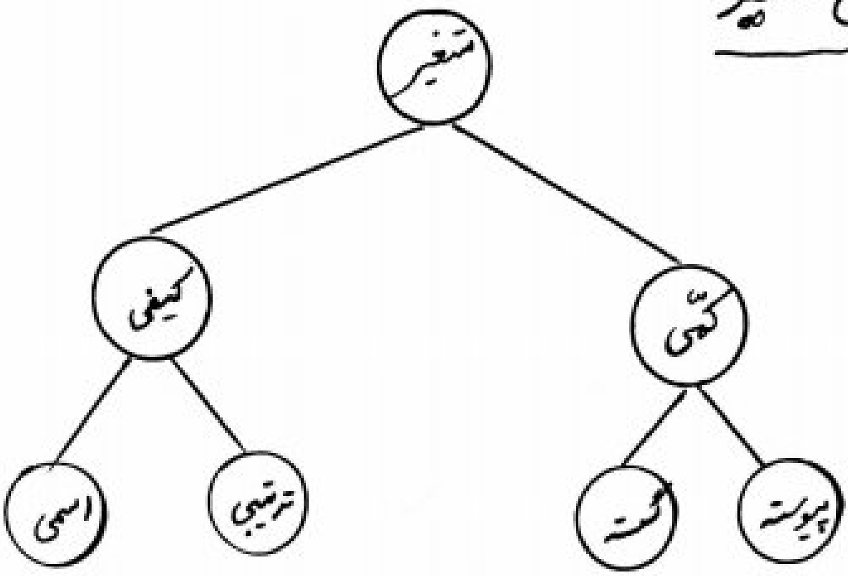
◀ **مثال**: ① برای بررسی کیفیت مرکبات استان مازندران، بخشی از مرکبات شهرستان بابل را مورد مطالعه قرار داده‌ایم و با عبارت‌های درجهٔ یک، درجهٔ دو و درجهٔ سه طبقه‌بندی نموده‌ایم.

② برای بررسی درصد بیکاری افراد ساکن در استان کردستان، از چند شهر این استان افرادی را مورد پرسش قرار دادیم و درصد بیکاری در این استان ۲۵ به دست آمده است.

سرشماری: تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم. مزیت: اندازهٔ نمونه = اندازهٔ جامعه

معایب: ۱. وقت‌گیر بودن ۲. پرهزینه ۳. در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه ۴. از بین رفتن اعضای جامعه

انواع متغیر



مثال :

قد افراد کلاس (وزن) ←	دمای هوای اتاق در ساعات مختلف ←
تعداد دانش آموزان کلاس ←	سطح تحصیلات افراد جامعه ←
وضعیت تأهل افراد استخدامی ←	نژاد انسان های کره زمین ←
روزهای هفته ←	شماره پلاک اتومبیل ها در شهر تهران ←
نمره درس آمار و احتمال ←	مراحل پرورش ماهی ←
گروه خونی افراد ←	شدت بارندگی در فصل بهار امسال ←

آمار توصیفی: محاسبه پارامترها (ویژگی های) جامعه مورد مطالعه ، با استفاده از سرشماری است که پس از گردآوری داده های کل جامعه ، با ارائه روش هایی برای سازماندهی و توصیف داده ها ، از طریق جدول های فراوانی ، نمودارها ، پارامترهای مرکزی و پارامترهای پراکندگی ، به مطالعه جامعه می پردازد.

فراوانی

* **فراوانی یک داده** (فراوانی مطلق): تعداد دفعات مشاهدهٔ یک داده را می‌گوییم نماد f ⟵ فراوانی دادهٔ iاُم f_i

مثال: ۳ ,۱ ,۵ ,۴ ,۲ ,۲ ,۳ ,۲ ,۱ ,۶ $\xrightarrow{\text{فراوانی دادهٔ ۲}}$ $f = ۳$

* **فراوانی نسبی یک داده** $\xrightarrow{\text{برابر است با}}$ $\boxed{\dfrac{\text{فراوانی داده}}{\text{تعداد کل داده‌ها}}}$

پس اگر تعداد کل داده‌های آماری برابر با n باشد (یعنی $n = f_1 + f_2 + \dots$) آنگاه

$$\text{فراوانی نسبی دادهٔ iاُم} = \frac{f_i}{n}$$

در مثال بالا فراوانی نسبی دادهٔ ۲ برابر است با $\frac{۳}{۱۰}$ (زیرا تعداد کل داده‌ها $n = ۱۰$ است)

* **درصد فراوانی نسبی یک داده** $\xrightarrow{\text{برابر است با}}$ $\boxed{۱۰۰ \times \text{فراوانی نسبی داده}}$

در مثال بالا درصد فراوانی نسبی دادهٔ ۲ برابر است با $\frac{۳}{۱۰} \times ۱۰۰ = ۳۰$ درصد

* **جدول فراوانی** ⟵ برای تنظیم و طبقه‌بندی داده‌ها

برای هر نوع متغیری می‌توان تشکیل داد

داده	فراوانی	فراوانی نسبی	درصد فراوانی نسبی
x_1	f_1	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{f_1}{n} \times ۱۰۰$
⋮	⋮	⋮	⋮
مجموع	n	۱	٪۱۰۰

مثال: فرض کنید از ۳۰۰ دانش‌آموز یک دبیرستان، در مورد رشتهٔ ورزشی انتخابی آنها در زنگ تربیت بدنی پرسش به عمل آمده است.

رشتهٔ ورزشی	فراوانی	فراوانی نسبی	درصد فراوانی نسبی
والیبال	۸۰	$\frac{۸۰}{۳۰۰}$	$\frac{۸۰}{۳۰۰} \times ۱۰۰ = ٪۲۶{,}۶$
فوتبال	۹۰	$\frac{۹۰}{۳۰۰}$	$\frac{۹۰}{۳۰۰} \times ۱۰۰ = ٪۳۰$
بسکتبال	۶۵	$\frac{۶۵}{۳۰۰}$	$\frac{۶۵}{۳۰۰} \times ۱۰۰ = ٪۲۱{,}۷$
تنیس روی میز	۶۵	$\frac{۶۵}{۳۰۰}$	$\frac{۶۵}{۳۰۰} \times ۱۰۰ = ٪۲۱{,}۷$
مجموع	۳۰۰	۱	۱۰۰

دسته‌بندی داده‌ها ⟵ زمانی که داده‌های جمع‌آوری شده زیاد و پراکنده اند!!

- به طور کلی عضوهای هر دسته، از نظر ویژگی مورد بررسی به یکدیگر شباهت دارند.
- در اکثر مواقع در مورد داده‌های مربوط به متغیر کمّی پیوسته، نیاز به دسته‌بندی داریم.

مرحله ۱: "دامنهٔ تغییرات (Range)"، یعنی اختلاف بزرگ‌ترین داده و کوچک‌ترین داده را می‌یابیم.

$\boxed{R = x_{max} - x_{min}}$ (دامنهٔ تغییرات را با R نشان می‌دهیم)

مرحله ۲: با فرض این که تعداد دسته‌ها برابر k باشد، آن‌گاه طول هر دسته را (که با c نشان می‌دهیم) به صورت $c = \frac{R}{k}$ می‌یابیم.

مرحله ۳: از کوچک‌ترین داده شروع می‌کنیم و c تا c جلو می‌رویم و دسته‌ها را می‌نویسیم. در ساختن دسته‌ها، ابتدای تمام دسته‌ها را بسته و انتهای آن‌ها را باز در نظر می‌گیریم، به جز دستهٔ آخر که هر دو را بسته در نظر می‌گیریم.

مثال: فرض کنید قد بیست دانش‌آموز یک کلاس را اندازه‌گیری کرده‌ایم و نتایج زیر به دست آمده است:

۱۷۲، ۱۷۱، ۱۶۲، $\underset{min}{۱۴۷}$، ۱۴۸، ۱۵۵، ۱۵۹، ۱۶۷، ۱۶۳، ۱۶۲،

۱۵۲، ۱۷۱، ۱۷۰، $\underset{max}{۱۷۹}$، ۱۷۵، ۱۶۴، ۱۵۹، ۱۵۸، ۱۵۱، ۱۴۹

اگر بخواهیم داده‌ها را در ۴ دسته تقسیم کنیم، داریم:

$R = max - min = ۱۷۹ - ۱۴۷ = ۳۰ \xrightarrow{k=۴} c = \frac{۳۲}{۴} = ۸$

پس داریم:

دسته‌ها	فراوانی	فراوانی نسبی	درصد فراوانی نسبی
[۱۴۷ , ۱۵۵)	۵	$\frac{۵}{۲۰}$	٪۲۵
[۱۵۵ , ۱۶۳)	۶	$\frac{۶}{۲۰}$	٪۳۰
[۱۶۳ , ۱۷۱)	۴	$\frac{۴}{۲۰}$	٪۲۰
[۱۷۱ , ۱۷۹]	۵	$\frac{۵}{۲۰}$	٪۲۵
مجموع	۲۰	۱	۱۰۰

* عدد پایین هر دسته را کران پایین و عدد بالای هر دسته را کران بالا می‌گوییم.

$[\underset{\text{کران پایین}}{a} , \underset{\text{کران بالا}}{b}) \xrightarrow{\text{طول}} c = b - a$

* مرکز (نشان یا نمایندهٔ) دسته: میانگین کران‌های بالا و پایین هر دسته را می‌گویند. (چون داده‌های هر دسته، با هم شباهت دارند، مرکز دسته نمایندهٔ تمام داده‌های آن دسته است.)

* مرکز دسته لزوماً در بین داده‌ها نیست.

دستهٔ iام: $[a , b) \xrightarrow{\text{مرکز دسته}} x_i = \frac{a+b}{۲}$

نتیجه: اگر x_i مرکز دستهٔ iام و c طول هر دسته باشد، آن‌گاه:

$a = \text{کران پایین دستهٔ iام} = x_i - \frac{c}{۲}$ و $b = \text{کران بالای دستهٔ iام} = x_i + \frac{c}{۲}$

سراسری ۹۰ ۸۰ داده آماری در ۷ طبقه دسته بندی شده اند. اگر ۲۰ داده جدید به این جدول اضافه شود، فراوانی نسبی دسته وسط تغییر نمی کند. نسبت افزایش داده های دسته مذکور به فراوانی مطلق قبلی آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

سراسری در دسته بندی ۱۲۰ داده آماری در ۹ طبقه، دسته اول به صورت [۲۲,۲۵) می باشد. می دانیم ۴۵ درصد داده ها کمتر از ۳۴ و فراوانی نسبی دسته وسط ۰/۲ است. تعداد داده های کمتر از ۳۷ کدام است؟

۱) ۶۷ ۲) ۷۶
۳) ۷۸ ۴) ۸۴

تجربی ۱۴۰۳ تعدادی داده آماری را در ۱۲ طبقه دسته بندی کرده ایم. کران پایین دسته دوم ۷ و مرکز دسته هشتم ۳۳ است. مرکز دسته آخر کدام است؟ (گزینه ۱)

۱) ۴۹ ۲) ۴۷
۳) ۵۳ ۴) ۵۱

تجربی ۱۴۰۳ با توجه به جدول مقابل حاصل $x-y+z-t$ کدام است؟ (گزینه ۲)

۱) ۱۰٫۴ ۲) ۱۹٫۶
۳) ۱۳٫۲ ۴) ۱۱٫۶

دسته ها	فراوانی	فراوانی نسبی	درصد فراوانی نسبی
[۳,۶)	x	t	
[۶,۹)	y		۴۰
[۹,۱۲]	۵		z
مجموع	۲۵		

نمودارها ـــــ برای نمایش و توصیف بهتر داده‌ها

الف) نمودار میله‌ای مناسب برای نمایش متغیرهای کمّی گسسته و متغیرهای کیفی

◁ خود داده‌ها یا شمارهٔ آنها روی محور افقی

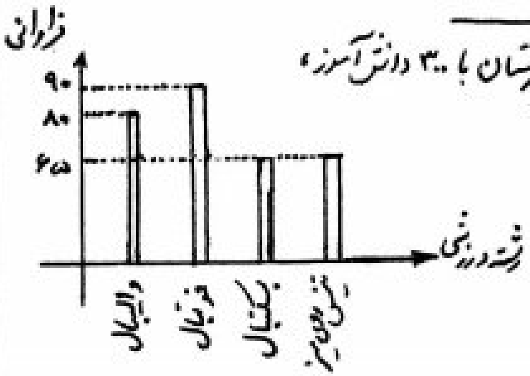
◁ فراوانی داده‌ها یا فراوانی نسبی داده‌ها روی محور عمودی (در برخی موارد می‌توان درصد فراوانی نسبی را قرار داد)

◁ ارتفاع هر میله، متناسب با فراوانی (فراوانی نسبی) هر داده

◁ میله‌ها تک بُعدی فرض می‌شوند.

◁ ترتیب میله‌ها مهم نیست.

مثال : در مثال مربوط به رشته‌های ورزشی دانش آموزان یک دبیرستان با ۳۰۰ دانش آموز، نمودار میله‌ای به صورت مقابل است :

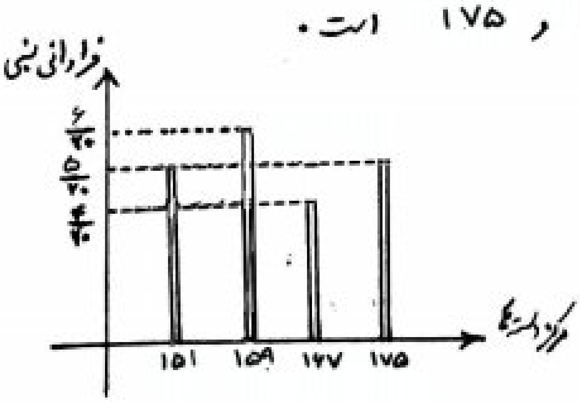


تذکر: برای رسم نمودار میله‌ای مربوط به داده‌های کمّی پیوسته از مرکز هر دسته به عنوان نمایندهٔ داده‌های آن دسته، روی محور افقی استفاده می‌کنیم.

مثال: برای رسم نمودار میله‌ای مثال مربوط به اندازه‌گیری قد بیست دانش آموز یک کلاس داریم:

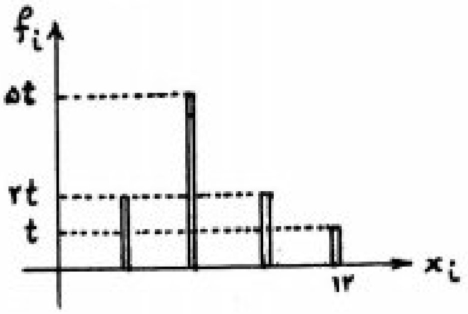
$$[147 , 155) \xrightarrow{\text{مرکز دستهٔ اول}} \frac{147+155}{2} = 151$$

بههمین ترتیب مرکز سه دستهٔ دیگر، ۱۵۹ ، ۱۶۷ و ۱۷۵ است.



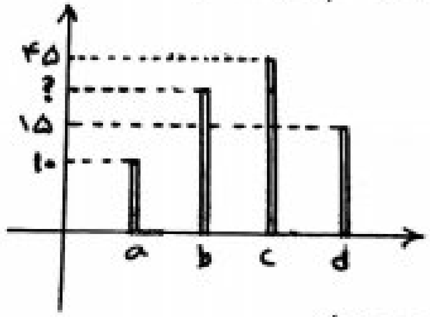
← توجه : روی محور عمودی، فراوانی، فراوانی نسبی یا درصد فراوانی نسبی داده قرار می‌گیرد.

تست) در نمودار میله‌ای مقابل روی محور افقی، از مرکز هر دسته استفاده شده است. اگر طول دسته‌ها یکسان باشد، درصد فراوانی نسبی دستهٔ [۶ , ۱۰) کدام است؟



۱) ۱۰ ۲) ۲۰
۳) ۳۰ ۴) ۴۰

تست H.W) نمودار میله‌ای ۷۰ داده آماری به صورت مقابل است. اگر محور قائم، درصد فراوانی نسبی باشد، آن‌گاه فراوانی مطلق دادهٔ b کدام است؟ (گزینه ۲)



۱) ۲۰ ۲) ۲۱
۳) ۳۰ ۴) ۳۱

پ) نمودار دایره‌ای مناسب برای نمایش متغیرهای کمّی گسسته و متغیرهای کیفی

◁ از تقسیم یک دایره به قطاع‌هایی به نسبت فراوانی هر داده به دست می‌آید.

◁ اگر α_i زاویهٔ مرکزی قطاع مربوط به دادهٔ iاُم با فراوانی f_i باشد، آن‌گاه

$$\frac{\alpha_i}{360^\circ} = \frac{f_i}{n} \Rightarrow \alpha_i = \frac{f_i}{n} \times 360^\circ$$ (n تعداد کل داده‌هاست)

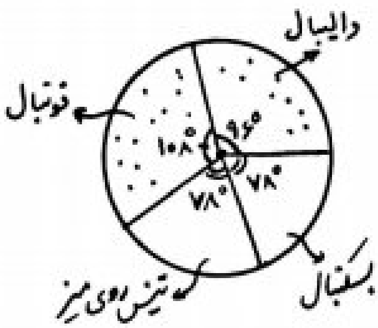
◁ در نمودار دایره‌ای، اندازه شعاع دایره مهم نیست.

◁ ترتیب قرارگرفتن قطاع‌ها اهمیتی ندارد.

◁ در کتاب درسی آمار و احتمال برای رسم نمودار دایره‌ای، ابتدا دایره را به ۱۰ قطاع مساوی (زاویهٔ مرکزی هر قطاع ۳۶°) تقسیم می‌کند و لذا هر قطاع، ۱۰ درصد دایره است. سپس با توجه به فراوانی نسبی هر داده، مشخص می‌کند که تعداد قطاع‌های مربوط به هر داده، از ۱۰ قسمت مذکور چقدر است. در این روش اگر m تعداد قطاع‌های مربوط به دادهٔ iاُم با فراوانی f_i از ۱۰ قسمت مذکور باشد، آن‌گاه

$$\frac{f_i}{n} = \frac{m}{10} \Rightarrow m = \frac{f_i}{n} \times 10$$ (n تعداد کل داده‌هاست)

مثال: در مثال مربوط به رشته‌های ورزشی دانش آموزان یک دبیرستان با ۳۰۰ دانش آموز، نمودار دایره‌ای به صورت زیر است:



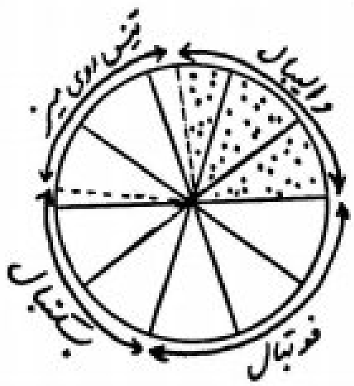
$$\alpha_V = \frac{۸۰}{۳۰۰} \times ۳۶۰^\circ = ۹۶^\circ$$

$$\alpha_F = \frac{۹۰}{۳۰۰} \times ۳۶۰^\circ = ۱۰۸^\circ$$

$$\alpha_B = \frac{۶۵}{۳۰۰} \times ۳۶۰^\circ = ۷۸^\circ$$

$$\alpha_T = \frac{۶۵}{۳۰۰} \times ۳۶۰^\circ = ۷۸^\circ$$

مطابق با روش کتاب درسی آمار و احتمال، نمودار دایره ای به صورت زیر است:



$$m_V = \frac{۸۰}{۳۰۰} \times ۱۰ = \frac{۸}{۳} = ۲\frac{۲}{۳}$$

$$m_F = \frac{۹۰}{۳۰۰} \times ۱۰ = ۳$$

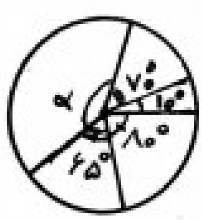
$$m_B = \frac{۶۵}{۳۰۰} \times ۱۰ = \frac{۱۳}{۶} = ۲\frac{۱}{۶}$$

$$m_T = \frac{۶۵}{۳۰۰} \times ۱۰ = \frac{۱۳}{۶} = ۲\frac{۱}{۶}$$

سراسری ۹۴ خارج تجربی

افراد یک جامعه به ۵ گروه سنی تقسیم شده اند، که نمودار دایره ای آنها با زاویهٔ مرکزی برحسب درجه رسم شده است. گروه سنی با زاویهٔ مرکزی α شامل چند درصد این جامعه است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۱٫۵ ۳) ۳۶ ۴) ۳۷٫۵



سراسری ۹۱ خارج H.W

در جدول زیر، مرکز دسته با درصد فراوانی نسبی داده شده است. در نمودار دایره‌ای، زاویهٔ مربوط به بازهٔ $[۲۵,۲۸)$ چند درجه است؟

مرکز دسته	۱۷٫۵	۲۰٫۵	۲۳٫۵	۲۶٫۵	۲۹٫۵
درصد فراوانی نسبی	۱۷	۲۰٫۵	۲۲	x	۱۸

۱) ۷۲ ۲) ۸۱ ۳) ۸۴ ۴) ۹۰

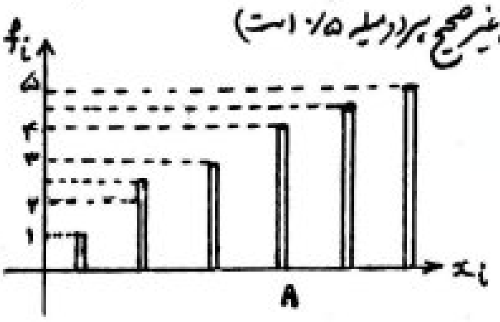
گزینه ۲

تست: در نمودار دایره‌ای ۳۰ دادهٔ آماری دسته بندی شده، دستهٔ اول ۲ قطاع از ۱۰ قسمت مساوی را به خود اختصاص داده است. چند داده به داده‌های دستهٔ اول اضافه کنیم تا ۲٫۵ قطاع از ۱۰ قسمت دایره را شامل شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سراسری ۹۰ تجربی — در مقایسه سطح زیر کشت غلات در شش استان، نمودار میله‌ای مقابل رسم شده است. در نمودار دایره‌ای، زاویهٔ مرکزی متناظر استان A چند درجه است؟ (قسمت غیرصحیح هر دو میله ۰/۵ است)

۱) ۶۴ ۲) ۷۲ ۳) ۸۰ ۴) ۹۶



حل:

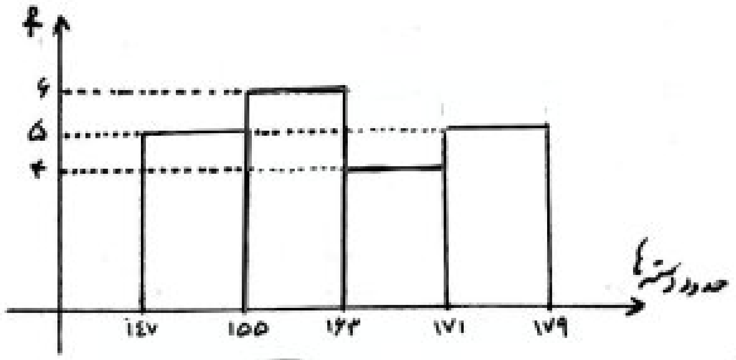
$$n = 1 + 2/5 + 3 + 4 + 4/5 + 5 = 20$$

$$\rightarrow \alpha_A = \frac{f_A}{n} \times 360^\circ = \frac{4}{20} \times 360^\circ = 72^\circ$$ ✓

پ) نمودار بافت‌نگاشت (هیستوگرام) مناسب برای نمایش متغیرهای کمّی پیوسته

- حدود دسته‌ها یا بازه‌های پیوسته روی محور افقی
- فراوانی یا فراوانی نسبی یا درصد فراوانی نسبی هر دسته روی محور عمودی
- برای هر دسته یک مستطیل نمایش داده می‌شود که معمولاً ضلعی از مستطیل که روی محور افقی قرار می‌گیرد، برابر با طول دسته (C) و ضلع دیگر آن برابر با فراوانی (فراوانی نسبی) دسته (f_i یا $\frac{f_i}{n}$) است.

مثال: برای رسم نمودار بافت‌نگاشت مثال مربوط به اندازه‌گیری قد بیست دانش‌آموز یک کلاس داریم:



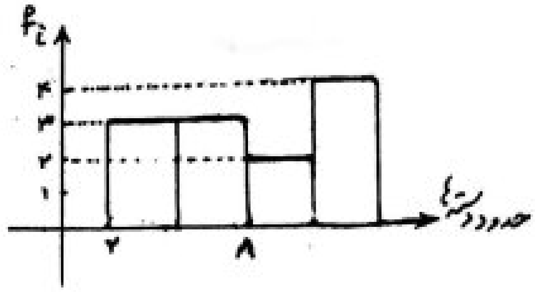
نکته: اگر طول دسته‌ها برابر با C و تعداد کل داده‌ها n باشد، آن‌گاه مجموع مساحت تمام مستطیل‌ها در نمودار بافت‌نگاشت (مساحت زیر نمودار) برابر است با nC.

اثبات:

$$\underbrace{f_1 \times C}_{\text{مساحت مستطیل متناظر با دسته اول}} + \underbrace{f_2 \times C}_{\text{مساحت مستطیل متناظر با دسته دوم}} + \dots = (\underbrace{f_1 + f_2 + \dots}_{n}) \times C = nC$$

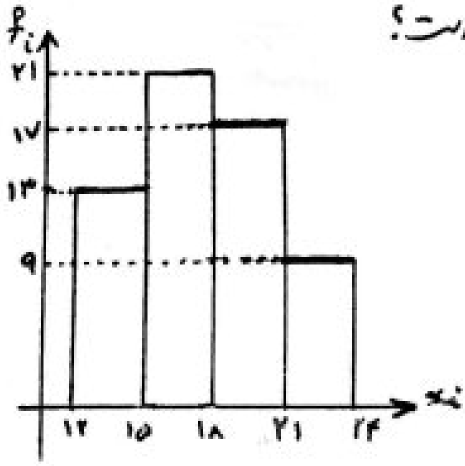
تست تعدادی دادهٔ آماری را در ۴ دسته قرار داده‌ایم. اگر نمودار بافت نگاشت مربوط به این ۴ دسته، به صورت مقابل باشد، در نمودار دایره‌ای این داده‌ها، زاویهٔ مرکزی قطاع دستهٔ چهارم چند درجه است؟

۱) ۶۰ ۲) ۸۱
۳) ۱۲۰ ۴) ۱۶۲



سراسری ۹۵ تجربی از داده‌های آماری با نمودار بافت نگاشت زیر، سه دادهٔ ۱۴، ۱۶ و ۱۶ حذف شده است در نمودار دایره‌ای داده‌های جدید، بزرگ‌ترین زاویهٔ مرکزی نظیر دسته‌ها، چند درجه است؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۵
۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵



تست H.W با اندازه‌گیری وزن دانش‌آموزان یک کلاس مشاهده‌های زیر حاصل شده است. اگر این داده‌ها را در ۵ طبقه دسته‌بندی کنیم و طول تمام دسته‌ها یکسان باشد، مساحت مستطیل دستهٔ ماقبل آخر در نمودار بافت نگاشت کدام است؟ (محور عمودی، فراوانی نسبی می‌باشد)

۵۰ , ۵۲ , ۵۴ , ۵۷ , ۵۹ , ۶۲ , ۶۳ , ۶۳ , ۶۵ , ۶۶
۷۱ , ۷۴ , ۷۵ , ۷۵ , ۷۸ , ۸۰ , ۸۱ , ۸۴ , ۸۴ , ۸۵

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۸
۳) ۰/۷ ۴) ۱/۴

(گزینه ۴)

نشسته‌ام به درگاه میکده، درِ چشم به راه کسی که آن
تو از کدام راه می‌رسی؟!

(سایه . ۱.۵)

ت) نمودار چندبر فراوانی ← مناسب برای نمایش متغیرهای کمّی پیوسته

◁ مرکز دسته‌ها روی محور افقی و فراوانی هر دسته روی محور عمودی در نظر گرفته می‌شود.

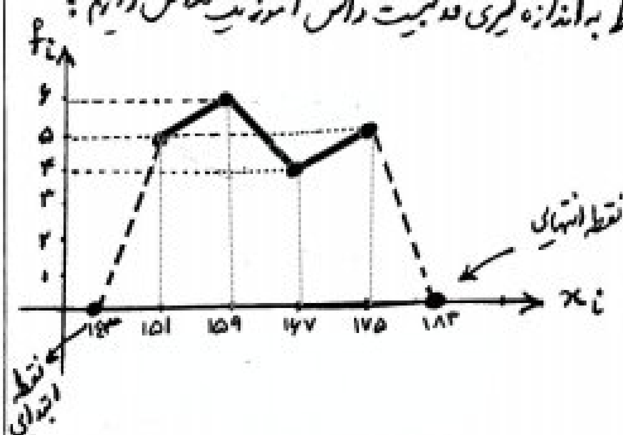
◁ نقاطی را در نظر می‌گیریم که طول آنها مرکز دسته و عرض آنها فراوانی همان دسته می‌باشد.

◁ از مرکز دستهٔ اول به اندازهٔ طول هر دسته (C)، به عقب می‌رویم و نقطهٔ ابتدایی را روی محور افقی (با فراوانی صفر) و از مرکز دستهٔ آخر نیز به اندازهٔ C، به جلو رفته و نقطهٔ انتهایی را روی محور افقی (با فراوانی صفر) می‌یابیم. سپس نقطهٔ ابتدایی و نقاط مشخص شده در مرحلهٔ قبل و نقطهٔ انتهایی را با پاره‌خط‌ها به هم وصل می‌کنیم.

* در واقع، نمودار چندبر فراوانی، همان نمودار بافت‌نگاشت است، که وسط عرض بالای تمام مستطیل‌ها با نقاط ابتدا و انتهایی (که در بالا مشخص کردیم)، به طور متوالی به صورت خط شکسته به هم وصل شده‌اند.

* مساحت زیر نمودار چندبر فراوانی با مساحت زیر نمودار بافت‌نگاشت (مجموع مساحت‌های مستطیل‌ها) برابر است. ($S = n.C$)

مثال: برای رسم نمودار چندبر فراوانی مثال مربوط به اندازه‌گیری قد بیست دانش‌آموز یک کلاس داریم:



* توجه کنید مختصات هر نقطه به صورت زیر است:

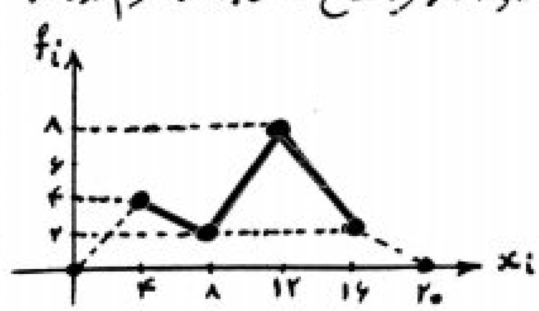
$(x_i \,,\, f_i)$

مرکز دسته — فراوانی دسته

تست در نمودار چندبر فراوانی مقابل، پس از حذف داده‌های ۱۳ و ۱۷، زاویهٔ مرکزی قطاع متناظر با دستهٔ سوم در نمودار دایره‌ای چند درجه است؟

۱) ۲۴   ۲) ۴۸

۳) ۹۶   ۴) ۱۲۰



معیارهای گرایش به مرکز ⟵ میانگین، میانه، مُد

الف) میانگین : برابر است با حاصل تقسیم مجموع داده‌ها بر تعداد آن‌ها نماد ⟵ $\bar{x}$
(آن را متوسط داده‌ها نیز گویند)

داده‌ها : $x_1 , x_2 , \dots , x_n \xrightarrow{\text{میانگین}} \bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

بنابراین : $\boxed{x_1 + x_2 + \dots + x_n = n\bar{x}}$

* توجه : $x_{min} < \bar{x} < x_{max}$

تست میانگین پنج داده آماری برابر ۱۷ است. اگر دو عدد ۱۰ و ۱۷ را به این داده‌ها اضافه کنیم، میانگین هفت داده جدید کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵٫۲
۳) ۱۶ ۴) ۱۷٫۲

* میانگین موزون (وزن دار) داده‌ها

هرگاه داده‌های $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ دارای وزن (ضریب یا تکرار) های $w_1 , w_2 , \dots , w_n$ باشند، آن‌گاه برای محاسبه میانگین داریم :

$$\bar{x}_w = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

هر داده در وزن (ضریب یا تکرار) خودش ضرب می‌شود و نتایج با هم جمع می‌گردد. سپس عدد حاصل را بر مجموع وزن‌ها (ضریب‌ها یا تکرارها) تقسیم می‌کنیم.

تست درصدهای یک دانش‌آموز در یک آزمون در دروس عمومی به صورت جدول زیر است. اگر میانگین درصدهای این دانش‌آموز برابر ۳۰ باشد، درصد درس زبان انگلیسی کدام است؟

درس	زبان انگلیسی	دین و زندگی	عربی	ادبیات
درصد	?	۴۰	۲۰	۳۰
ضریب	۲	۳	۲	۴

۱) ۲۰ ۲) ۲۵
۳) ۳۰ ۴) ۳۵

تذکر ۱: هرگاه جدول فراوانی داشته باشیم، برای محاسبهٔ میانگین همانند میانگین موزون عمل می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots}{f_1 + f_2 + \cdots}$$

تذکر ۲: هرگاه جدول فراوانی نسبی داشته باشیم، برای محاسبهٔ میانگین داریم:

$$\bar{x} = \frac{f_1}{n} \times x_1 + \frac{f_2}{n} \times x_2 + \cdots$$

تذکر ۳: هرگاه داده‌ها به صورت دسته‌بندی شده باشند، برای محاسبهٔ میانگین، از مرکز هر دسته به عنوان نمایندهٔ آن دسته استفاده می‌کنیم.

تست: داده‌های آماری در ۴ دسته با فراوانی نسبی، در جدول زیر آمده‌اند. میانگین این داده‌ها کدام است؟

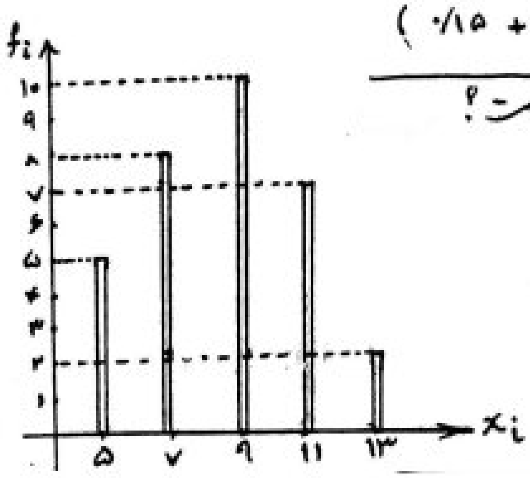
۱) ۱۶٫۴ ۲) ۱۸٫۴
۳) ۱۶٫۸ ۴) ۱۸٫۸

حدود دسته	[10-14)	[14,18)	[18,22)	[22,26]
فراوانی نسبی	0/15	0/3	0/25	a

مرکز دسته اول، مرکز دسته دوم، مرکز دسته سوم، مرکز دسته چهارم

$$\bar{x} = 0/15 \times 12 + 0/3 \times 16 + 0/25 \times 20 + \underset{a}{0/3} \times 24 = 18/8 \checkmark$$

$$(0/15 + 0/3 + 0/25 + a = 1 \rightarrow a = 0/3)$$



سراسری ۹۵ خارج (سراسری ۹۹) با توجه به نمودار میله‌ای مقابل، میانگین داده‌ها کدام است؟

۱) ۸٫۴۲ ۲) ۸٫۵۶
۳) ۸٫۶۵ ۴) ۸٫۷۵

سراسری ۹۹ خارج تفاضل میانه و میانگین...؟

تذکر ۴: مجموع تفاضل تمام داده‌ها از میانگین، همواره صفر است. یعنی

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \cdots + (x_n - \bar{x}) = \underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}_{n\bar{x}} - n\bar{x} = 0$$

تست: اگر اختلاف از میانگین داده‌های آماری به ترتیب ۲، ۳، ۴-، ۲٫۵، ۰، ۱- و ۲a باشند، آنگاه a کدام است؟

۱) ۱٫۲۵ ۲) ۱٫۲۵-
۳) ۲٫۵ ۴) ۲٫۵-

سراسری خارج در یک مطالعهٔ آماری، ۸۳ داده جمع‌آوری شده است. اگر توان دوم انحراف از میانگین داده‌ها برابر ۱ یا صفر باشد، حداقل چند داده با میانگین این داده‌ها برابر هستند؟

۱) صفر ۲) ۴۲
۳) ۴۳ ۴) ۱

تذکر ۵ (ویژگی خطی میانگین): هرگاه تمام داده‌ها را a برابر کنیم، سپس هر یک از داده‌ها را با عدد ثابت b جمع نماییم، میانگین داده‌های جدید نیز a برابر میانگین قبلی به اضافهٔ b می‌باشد. یعنی

داده‌ها: $x_1, x_2, \dots \xrightarrow{\text{میانگین}} \bar{x}$

داده‌های جدید: $ax_1+b, ax_2+b, \dots \xrightarrow{\text{میانگین}} a\bar{x}+b$

خلاصه: $\overline{ax+b} = a\bar{x}+b$

تست اگر میانگین داده‌های آماری $(3x_n+2), \dots, (3x_2+2), (3x_1+2)$ برابر ۲۶ باشد، آنگاه میانگین داده‌های $(2x_n-3), \dots, (2x_2-3), (2x_1-3)$ کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۱۳
۳) ۴۹ ۴) ۸۱

تذکر ۶ (محاسبهٔ سریع میانگین): در مواقعی که داده‌های آماری، اعداد بزرگ می‌باشند، می‌توان از همهٔ داده‌ها عددی مانند k (که تا حد ممکن وسط داده‌ها می‌باشد) کم کرد و میانگین داده‌های جدید را محاسبه نمود. سپس به میانگین به دست آمده، k را می‌افزاییم.

سراسری ۹۲ تمام داده‌های مقابل را سه برابر کرده، سپس ۴۰ واحد از آنها کم می‌کنیم، میانگین داده‌های جدید کدام است؟

$\boxed{80, 81, 85, 92, 94, 96, 97, 100, 100, 103, 104, 108}$

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۴۵
۳) ۲۵۰ ۴) ۲۵۵

سراسری ۹۱ خارج تجربی میانگین ۵۰ دادهٔ دسته‌بندی شدهٔ زیر با روش سریع کدام است؟ (گزینه ۲)

x_i	۱۱۰	۱۱۶	۱۲۲	۱۲۸	۱۳۴
f_i	۵	۸	۱۵	۱۲	۱۰

۱) ۱۲۳٫۶۲ ۲) ۱۲۳٫۶۸
۳) ۱۲۴٫۰۲ ۴) ۱۲۴٫۰۶

سراسری ۹۸ نمرات ریاضی ۴۰ دانش‌آموز یک کلاس در جدول زیر آمده است. میانگین وزنی نمرات کدام است؟

x	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۷	۱۸
f	۵	۸	۷	۱۰	۶	۴

۱) ۱۴٫۲
۲) ۱۴٫۲۵
۳) ۱۴٫۴ ۴) ۱۴٫۷۵

پ) میانه ← عددی است که تعداد داده‌های بزرگ‌تر از آن با تعداد داده‌های کوچک‌تر از آن برابر می‌باشد. به عبارت دیگر

عددِ وسط مجموعه‌ای از داده‌ها، که به صورت صعودی (از کوچک به بزرگ) مرتب شده‌اند، میانهٔ داده‌ها نامیده می‌شود و با نماد Q_2 نشان داده می‌شود.

* روش به دست آوردن میانهٔ داده‌ها:

داده‌ها، به صورت صعودی (از کوچک به بزرگ) مرتب شوند ⇐
- اگر تعداد داده‌ها فرد است ← میانه = عدد وسط
- اگر تعداد داده‌ها زوج است ← میانه = میانگین دو عدد وسط

▷ اگر تعداد داده‌ها n باشد،

- درحالتی که n عددی فرد است، میانه، دادهٔ $(\frac{n+1}{2})$ اُم است.
- درحالتی که n عددی زوج است، میانه، میانگین دو دادهٔ $(\frac{n}{2})$ اُم و $(\frac{n}{2}+1)$ اُم است.

مثال میانهٔ داده‌های زیر را بیابید.

الف) ۹، ۲۳، ۲۱، ۱۷، ۱۴، ۲۱، ۱۱ ← مرتب

ب) ۱۰، ۲۰، ۲۳، ۱۸، ۱۷، ۱۲ ← مرتب

▷ همان طور که مشاهده می‌شود، درحالتی که تعداد داده‌ها فرد است، میانه در بین داده‌هاست و درحالتی که تعداد داده‌ها زوج است، میانه لزوماً در بین داده‌ها نیست!

▷ میانه، نسبت به اندازهٔ داده‌های آماری (بزرگی یا کوچکی داده‌ها) بی‌تأثیر است.

▷ اگر فراوانی داده‌ها به یک نسبت کم یا زیاد شود، (مثلاً نصف یا دو برابر شوند)، میانه تغییر نمی‌کند.

▷ ویژگی خطی میانه: اگر تمام داده‌ها را در عدد ثابت a ضرب کنیم و سپس هرکدام را با مقدار ثابت b جمع نماییم، میانهٔ داده‌ها نیز در عدد a ضرب شده و با مقدار b جمع می‌شود.

سراسری ۹۷ خ / تجربی — اگر میانگین ۹ داده ۱۸ ، ۱۶ ، ۱۱ ، ۱۴ ، ۱۰ ، ۷ ، a ، ۹ ، ۲۰ برابر ۱۳ باشد، میانه آنها کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱
۳) ۱۲ ۴) ۱۴

سراسری ۹۰ خ — در ۸۰ دادهٔ آماری دسته‌بندی شده، فراوانی نسبی دستهٔ اول ۱۱۲۵/٪ می‌باشد. اگر ۱۰ دادهٔ بزرگ‌تر از میانه به آنها اضافه شود، فراوانی نسبی جدید در دستهٔ اول کدام است؟

۱) ۱۰۲/٪
۲) ۰/۱
:

سراسری ۹۸ خ / ۱۴۰۰ — نمرات آماری ۵۰ دانش‌آموز یک کلاس در جدول مقابل آمده است. اختلاف میانگین وزنی نمرات از میانهٔ آنها کدام است؟ (گزینه ۲)

x	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۶	۱۸
f	۶	۹	۱۰	۱۲	۸	۵

۱) ۲۸/٪ ۲) ۳۲/٪
۳) ۰۶/٪ ۴) ۳۸/٪

چارک‌ها ⇐ پس از مرتب کردن داده به صورت صعودی،

داده‌ها را به چهار قسمت مساوی تقسیم‌بندی می‌کنند:

◁ میانهٔ کل داده‌ها را مشخص می‌کنیم، که همان چارک دوم است (Q_2).

◁ میانهٔ داده‌های کمتر از میانهٔ اصلی، چارک اول نامیده می‌شود (Q_1).

◁ میانهٔ داده‌های بیشتر از میانهٔ اصلی، چارک سوم نامیده می‌شود (Q_3).

٪۲۵ Q_1 ٪۲۵ Q_2 ٪۲۵ Q_3 ٪۲۵

Q_2 ← میانه

مثال داده‌های ۴۲ ، ۷ ، ۱۱ ، ۳۲ ، ۲۵ ، ۱۹٫۵ ، ۱۴ ، ۲۱٫۵ ، ۲۵ ، ۱۰٫۵ را در نظر می‌گیریم. برای یافتن چارک‌ها، ابتدا این داده‌ها را به طور صعودی مرتب می‌کنیم:

۷ ، ۱۰٫۵ ، ۱۱ ، ۱۴ ، ۱۹٫۵ ، ۲۱٫۵ ، ۲۵ ، ۲۵ ، ۳۲ ، ۴۲

$Q_1 = ۱۱$ میانگین $Q_2 = ۲۰٫۵$ $Q_3 = ۲۵$

تست ۱۴۰۳ — اگر چارک اول مجموعه‌ای از داده‌ها، میانگین داده‌های ۲۰ اُم و ۲۱ اُم باشد و چارک دوم در بین داده‌ها موجود باشد، چارک سوم کدام است؟ (گزینه ۲)

۱) دادهٔ ۶۱ اُم ۲) میانگین داده‌های ۶۱ اُم و ۶۲ اُم
۳) دادهٔ ۶۲ اُم ۴) میانگین داده‌های ۶۲ اُم و ۶۳ اُم

سراسری ۹۹ نرخ بیکاری یک کشور در ۱۰ سال گذشته به صورت زیر است. مقدار $\frac{Q_1+Q_3-2Q_2}{Q_3-Q_1}$ کدام است؟

۱) $-0/225$ ۲) $-0/125$ ۳) $0/175$ ۴) $0/275$

۱۱٫۵ ، ۱۲٫۸ ، ۱۳٫۵ ، ۱۱٫۲ ، ۱۲٫۳ ، ۱۰٫۲ ، ۱۱٫۹ ، ۱۰٫۶ ، ۳۰٫۲ ، ۱۲٫۷

توجه: اختلاف چارک اول و سوم داده‌ها را «دامنهٔ میان چارکی» می‌گوییم و با نماد IQR نشان می‌دهیم.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

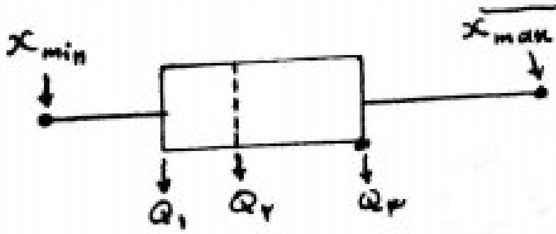
توجه ۲: اگر داده‌ها به صورت دسته‌بندی باشند، برای یافتن چارک‌ها، از مرکز دسته‌ها استفاده می‌شود.

تست با توجه به جدول فراوانی مقابل، دامنهٔ میان چارکی این داده‌ها کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

حدود دسته	[۴,۸)	[۸,۱۲)	[۱۲,۱۶]
فراوانی	۵	۶	۴

نمودار جعبه‌ای



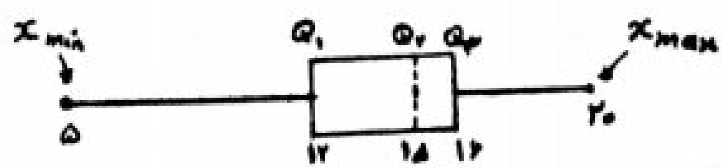
بر اساس پنج مقدار رسم می‌شود:

۱. کوچکترین داده ۲. چارک اول ۳. چارک دوم (میانه)
۴. چارک سوم ۵. بزرگترین داده

* محل قرار گرفتن میانه در جعبه، لزوماً وسط جعبه نیست و بستگی به داده‌های آماری دارد.

مثال: رسم نمودار جعبه‌ای برای داده‌های: ۱۳, ۱۶, ۱۲, ۱۶, ۱۵, ۱۴, ۱۵, ۲۰, ۱۰, ۱۸, ۵

مرتب $\rightarrow$ $5,\ 10,\ \underbrace{12}_{Q_1},\ 13,\ 14,\ \underbrace{15}_{Q_2},\ 15,\ 16,\ \underbrace{16}_{Q_3},\ 18,\ 20$



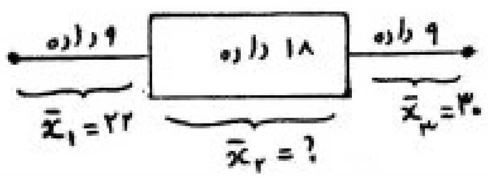
تست دامنهٔ تغییرات داده‌های زیر با دامنهٔ تغییرات داده‌های داخل و روی جعبه در نمودار جعبه‌ای چند واحد اختلاف دارند؟

۶۰، ۵۵، ۴۵، ۴۷، ۲۷، ۴۲، ۳۰، ۲۲، ۲۵، ۴، ۱، ۱۹، ۲۱، ۸، ۲۲

۱) ۴۵ ۲) ۴۶
۳) ۴۷ ۴) ۴۸

سراسری ۹۰ در نمودار جعبه‌ای ۳۶ دادهٔ آماری، میانگین داده‌های دو طرف جعبه، به طور جداگانه، به ترتیب ۲۲ و ۳۰ می‌باشد. اگر میانگین تمام داده‌ها ۲۷٫۵ باشد، میانگین داده‌های داخل و روی جعبه کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۸٫۵
۳) ۲۹ ۴) ۲۹٫۵

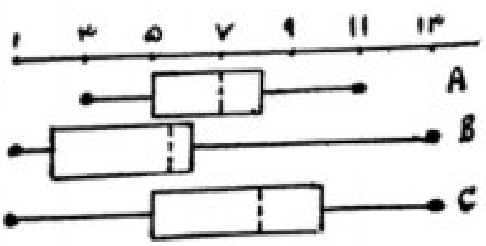


تست نمودار زیر، پرداخت حقوق کارمندان در سه شرکت A، B و C (بر حسب میلیون تومان) می‌باشد.

الف) پرداخت حقوق در کدام شرکت بهتر است؟

ب) وضعیت پرداخت حقوق در کدام شرکت به هم نزدیک است؟

پ) در کدام شرکت اختلاف طبقاتی بیشتر است؟



پاسخ به سه سؤال فوق به صورت سه‌تایی مرتب (الف، ب، پ) کدام است؟

۱) (C، B، A) ۲) (B، A، C)
۳) (C، A، B) ۴) (A، B، C)

تجربی ۱۴۰۱ خ چارک دوم تعدادی دادهٔ آماری برابر ۳ است. قرینهٔ میانگین داده‌های کوچک‌تر از میانه، ۶ واحد کوچک‌تر از میانگین داده‌های بزرگ‌تر از میانه است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین داده‌ها کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴٫۵
۳) ۳ ۴) ۱٫۵

پ) مُد (نما) ⟵ داده‌ای که بیشترین فراوانی را دارد.

◁ اگر دو داده، بیشترین فراوانی را داشته باشند، آن‌گاه این داده‌ها، دو مُد دارند.

◁ اگر همه داده‌ها فراوانی یکسانی داشته باشند، آن‌گاه این داده‌ها، مُد ندارند.

◁ هر تغییری روی داده‌ها اعمال شود، همان تغییر روی مُد نیز رخ می‌دهد.

مثال: مُد داده‌های زیر را تعیین کنید.

الف) ۸،۶،۸،۸،۹،۱،۸،۷،۲ ⟵ مُد ۸

ب) ۳،۲،۳،۳،۵،۱،۴،۴،۴،۳ ⟵ مُد ۴،۳

ج) ۴،۴،۳،۳،۲،۲،۱،۱ ⟵ مُد ندارد

تست اگر داده‌های ۲،۸،۹،۶،۸،۲،۵،۶ فاقد مُد باشند، آن‌گاه در نمودار جعبه ای این داده‌ها، میانگین داده‌های درون جعبه کدام است؟

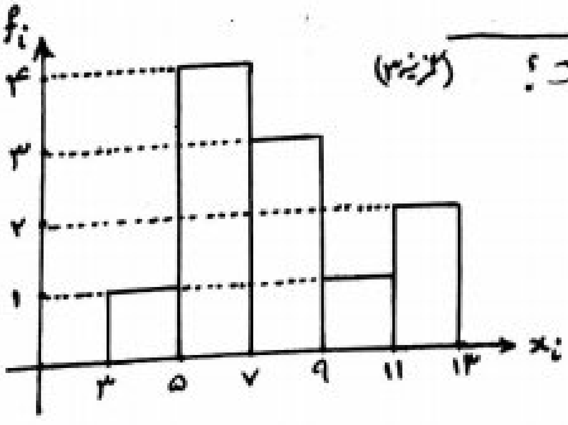
۱) ۵٫۵ ۲) ۵٫۲۵

۳) ۶ ۴) ۷

سراسری ۹۴ خ در مجموعهٔ اعداد $\{x,6,65,77,50,62,70,63\}$، به ازای کدام مقدار x، شاخص‌های میانگین، مُد و میانه باهم برابرند؟

۱) ۶۴ ۲) ۶۵

۳) ۶۶ ۴) تهی



تست با توجه به نمودار بافت نگاشت مقابل، کدام نتیجه‌گیری درست است؟ (گزینه ۴)

۱) میانگین > مُد > میانه ۲) مُد > میانگین > میانه

۳) میانه > میانگین > مُد ۴) میانه > میانگین = مُد

دادهٔ دورافتاده ــــ تفاوت بسیار زیادی با سایر داده‌ها دارد و میانگین را تحت تأثیر قرار می‌دهد. اما روی میانه و مد تأثیری ندارد و یا تأثیر کمی دارد.

مثال:

الف) ۹ , ۱۲ , ۱۳ , ۱۵ , ۱۵ , ۵۰ ⟵ $\bar{x} = \frac{9+12+13+15+15+50}{6} = 19$

میانه $Q_2 = 14$ — دادهٔ دورافتاده

ب) ۹ , ۱۲ , ۱۳ , ۱۵ , ۱۵ ⟵ $\bar{x} = \frac{9+12+13+15+15}{5} = 12.8$

میانه $Q_2 = 13$

همان طور که ملاحظه می‌شود، با حذف دادهٔ دورافتاده، بیشترین تغییر روی میانگین رخ می‌دهد. میانه کمترین تغییر را دارد و مُد در هر دو گروه از داده‌ها ثابت است (عدد ۱۵).

نتیجه: برای انتخاب معیار بهتر، هرگاه دادهٔ دورافتاده وجود داشته باشد، به کار بردن میانه نسبت به میانگین ارجح‌تر است.

تست درصد تورم در سال گذشته به طور ماه به ماه به صورت

۱۸ , ۴۰ , ۱۷ , ۱۳ , ۱۱٫۸ , ۹ , ۹٫۵ , ۱۲ , ۱۰ , ۱۰ , ۹ , ۸

اعلام شده است. برای بررسی آماری کدام شاخص پیشنهاد می‌شود؟

۱) مُد ۲) فراوانی

۳) میانه ۴) میانگین

تست ۱۴۰۳ یک شرکت بیمه برای تعیین حق بیمه شخص ثالث در سال آینده، خسارت‌های پرداخت شده در سال جاری را مد نظر بررسی قرار داده است. میانگین خسارت‌های پرداخت شده ۸۵ میلیون ریال، میانه آنها برابر با ۴۲٫۴ میلیون ریال و مد آنها ۹۰ میلیون ریال است. این شرکت کدام شاخص را برای تعیین حق بیمه در سال آینده در نظر بگیرد تا ضرر نکند؟

(ترنیم)

۱) مُد ۲) فراوانی

۳) میانه ۴) میانگین

معیارهای پراکندگی: ۱. دامنهٔ تغییرات ۲. واریانس ۳. انحراف معیار ۴. ضریب تغییرات

چرا معیارهای پراکندگی مورد نیاز است؟ به مثال زیر که میزان درآمد سه نفر را در سه جامعهٔ مختلف نشان می‌دهد، توجه کنید:

	جامعهٔ A	جامعهٔ B	جامعهٔ C
درآمد نفر اول	۳	۲/۵	۷
" " دوم	۳	۳	۱/۵
" " سوم	۳	۳/۵	۰/۵
میانگین	۳	۳	۳

در هر سه جامعه، میانگین درآمد سه نفر یکسان است. میانه در دو جامعهٔ A و B با میانگین برابر است و در جامعهٔ C برابر با عدد ۱/۵ است. هر سه جامعه فاقد مُد می‌باشند. بنابراین با معیارهای گرایش به مرکز نمی‌توان قضاوت درستی در مورد سه جامعهٔ مذکور داشت.

۱. دامنهٔ تغییرات

اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار داده را می‌گوییم.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

- اگر همهٔ داده‌ها با هم برابر باشند، دامنهٔ تغییرات برابر صفر می‌شود و برعکس.
- اگر به تمام داده‌ها، یک عدد ثابت مانند b اضافه یا کم گردد، دامنهٔ تغییرات عوض نمی‌شود.
- اگر تمام داده‌ها، در عدد ثابت مانند a ضرب شوند، دامنهٔ تغییرات نیز در $|a|$ ضرب می‌شود.
- دامنهٔ تغییرات یک معیار سریع برای تعیین میزان پراکندگی داده‌هاست. به عبارت دیگر

هرچه دامنهٔ تغییرات داده‌ها زیاد باشد، پراکندگی داده‌ها زیاد است.

- دامنهٔ تغییرات فقط بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده را در نظر می‌گیرد، پس لزوماً معیار مناسبی برای پراکندگی داده‌ها نیست!!

تست دامنهٔ تغییرات داده‌های $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ برابر ۱۷ است. دامنهٔ تغییرات داده‌های $6a_i - 10$ به ازای $1 \le i \le 10$ کدام است؟

۱) ۹۲ ۲) ۱۱۲- ۳) ۱۱۲ ۴) ۱۰۲

۲. **واریانس** ← میانگین مجذور مقادیر اختلاف از میانگین داده‌ها را می‌گوییم. نماد ← σ^2

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

◁ ویژگی مهم واریانس آن است که پراکندگی داده‌ها را با در نظر گرفتن تمام داده‌ها، مورد بررسی قرار می‌دهد.

◁ بررسی پراکندگی داده‌ها زمانی معنی پیدا می‌کند که هر یک از داده‌ها نسبت به یک مرکز مقایسه شوند.
(و بهترین معیار برای مرکز داده‌ها، همان میانگین داده‌ها است)

◁ برای یافتن واریانس داده‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مرحله ۱: محاسبه میانگین کل داده‌ها   مرحله ۲: محاسبه اختلاف از میانگین برای هر داده
یعنی فاصله (تفاضل) هر داده از میانگین را می‌یابیم.

مرحله ۳: محاسبه «مربع» مقادیر به دست آمده از مرحله ۲
توجه کنید که می‌دانیم مجموع اختلاف از میانگین داده‌ها، همواره صفر است
و برای حل این مشکل، از توان دوم مقادیر اختلاف از میانگین کمک می‌گیریم

مرحله ۴: محاسبه میانگین مقادیر به دست آمده از مرحله ۳
(یعنی مجموع مربع‌های اختلاف از میانگین تمام داده‌ها را می‌یابیم و جواب را بر تعداد داده‌ها تقسیم می‌کنیم)

مثال: واریانس داده‌های ۱۲، ۸، ۱۶، ۲۰، ۱۴، ۸ را بیابید.

$$\xrightarrow{\text{مرحله ۱}} \bar{x} = \frac{12+8+16+20+14+8}{6} = 13 \xrightarrow{\text{مرحله ۲}} \begin{cases} 12-13=-1 \ , \ 8-13=-5 \\ 16-13=3 \ , \ 20-13=7 \\ 14-13=1 \ , \ 8-13=-5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مرحله ۳}} \begin{cases} (-1)^2=1 \ , \ (-5)^2=25 \\ 3^2=9 \ , \ 7^2=49 \\ 1^2=1 \ , \ (-5)^2=25 \end{cases} \xrightarrow{\text{مرحله ۴}} \sigma^2 = \frac{1+25+9+49+1+25}{6} = 18/33$$

سراسری ۱۴۰۱ میانگین شش دادهٔ آماری عددی طبیعی است و توان دوم انحراف از میانگین این داده‌ها، به صورت $9, a^2, 0, 9, b^2, 1$ است. اگر واریانس این داده‌ها برابر ۴ باشد، مقدار ab کدام است؟ $(a, b \in \mathbb{Z})$

۱) -4 ۲) 4
۳) 2 ۴) -2

تست در نمودار جعبه‌ای داده‌های ۹، ۱۸، ۱۹، ۱۸، ۱۲، ۱۵، ۱۵، ۱۵، ۱۱، ۱۵ واریانس داده‌های داخل و روی جعبه کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴٫۲۵
۳) ۳٫۲۵ ۴) ۳٫۷۵

حل

مرتب ⟵ ۹ ، ۱۱ ، ۱۲ ، ۱۵ ، (۱۵) ، ۱۵ ، ۱۸ ، ۱۸ ، ۱۹

$Q_1 = \frac{۱۱+۱۲}{۲} = ۱۱٫۵$ Q_2 $Q_3 = \frac{۱۸+۱۸}{۲} = ۱۸$

واضح است که داده‌های داخل و روی جعبه عبارت‌اند از: ۱۲، ۱۵، ۱۵، ۱۵، ۱۸، ۱۸

و برای محاسبهٔ واریانس این داده‌ها داریم:

$$\bar{x} = \frac{۱۲+۱۵+۱۵+۱۵+۱۸+۱۸}{۶} = ۱۵٫۵$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(۱۲-۱۵٫۵)^2 + ۳(۱۵-۱۵٫۵)^2 + ۲(۱۸-۱۵٫۵)^2}{۶} = ۴٫۲۵ \checkmark$$

تست ۸ دادهٔ آماری با میانگین ۱۵ و واریانس ۴ مفروض‌اند. اگر دو دادهٔ ۱۲ و ۱۸ به این داده‌ها افزوده شود در این صورت واریانس ۱۰ دادهٔ حاصل چه تغییری می‌کند؟

۱) یک واحد کم می‌شود. ۲) تغییری نمی‌کند. ۳) یک واحد زیاد می‌شود. ۴) دو واحد زیاد می‌شود.

حل

$$\begin{cases} \bar{x} = ۱۵ \xrightarrow{n=۸} x_1 + x_2 + \dots + x_8 = ۸ \times ۱۵ = ۱۲۰ \\ \sigma^2 = ۴ \rightarrow \frac{(x_1-۱۵)^2 + (x_2-۱۵)^2 + \dots + (x_8-۱۵)^2}{۸} = ۴ \end{cases}$$

$$\rightarrow (x_1-۱۵)^2 + (x_2-۱۵)^2 + \dots + (x_8-۱۵)^2 = ۳۲$$

از طرفی چون $۱۵ = \frac{۱۲+۱۸}{۲}$، پس با افزودن این دو دادهٔ جدید، میانگین ده دادهٔ حاصل نیز ۱۵ است. پس

$$\sigma^2_{\text{جدید}} = \frac{\overbrace{(x_1-۱۵)^2 + (x_2-۱۵)^2 + \dots + (x_8-۱۵)^2}^{۳۲} + (۱۲-۱۵)^2 + (۱۸-۱۵)^2}{۱۰} = \frac{۳۲+۹+۹}{۱۰} = ۵$$

پس واریانس ۱۰ دادهٔ حاصل، یک واحد افزایش می‌یابد.

نکته ۱: گاهی اوقات در مسأله، به جای داده‌ها، مجموع مربعات آنها به همراه میانگین یا مجموع داده‌ها و تعداد داده‌ها، مشخص است. در این صورت برای محاسبه‌ی واریانس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

فرمول دوم واریانس

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

اثبات

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \dots + (x_n-\bar{x})^2}{n}$$

$$\overset{\text{اتحاد}}{=} \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - 2\bar{x}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + n\bar{x}^2}{n}$$

$$\overset{\text{تفکیک}}{=} \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - 2\bar{x}\Big(\underbrace{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}_{\bar{x}}\Big) + \bar{x}^2$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

سراسری ۹۲ میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۲ و واریانس آنها ۵ است. میانگین مساحت مربع‌ها کدام است؟

۱) ۱۲۴ ۲) ۱۳۴
۳) ۱۴۹ ۴) ۱۶۹

تست H.W اگر مجموع ۱۰ داده‌ی آماری ۴۰ و مجموع مربعات آنها ۲۰۰ باشد، واریانس این داده‌ها کدام است؟

(گزینه ۲)

۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۱۶ ۴) ۲۰

نکته ۲: اگر تمام داده‌ها با عدد ثابتی مانند b جمع شوند، واریانس آنها تغییری نمی‌کند.
اگر تمام داده‌ها در عدد ثابتی مانند a ضرب شوند، واریانس آنها، در مجذور آن عدد ثابت یعنی در a^2، ضرب می‌شود.

تست واریانس داده‌های $a+5, a+3, a+1, a-1$ چند برابر واریانس داده‌های $a+9, a+6, a+3, a, a-3$ است؟

۱) $\frac{3}{16}$ ۲) $\frac{5}{18}$
۳) $\frac{7}{20}$ ۴) $\frac{8}{21}$

راه‌تستی: واریانس n داده، که تشکیل یک تصاعد عددی (حسابی) با قدرنسبت d می‌دهند، برابر است با

$$\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12} d^2$$

در تست بالا:

تصاعد حسابی در گروه اول داده‌ها: ۴ داده با قدرنسبت ۲ $\rightarrow \sigma_1^2 = \frac{4^2-1}{12}(2)^2 = 5$

" " " دوم " : ۵ داده با قدرنسبت ۳ $\rightarrow \sigma_2^2 = \frac{5^2-1}{12}(3)^2 = 18$

$\xrightarrow{\text{نسبت}} \frac{5}{18}$ ✓

◀ ریاضیات نشان می‌دهد که در طول یک سال
" اندکی بهتر یا بدتر بودن "
چگونه موفقیت یا شکست شما را رقم می‌زند.

$$\begin{cases} (1+0/01)^{365} = 37/8 \\ (1-0/01)^{365} = 0/03 \end{cases}$$

پس برای موفقیت کمی بیشتر تلاش کنیم. ☺

◁ نتیجه:

نکته ۳: اگر تمام داده‌ها با هم مساوی باشد، واریانس آنها صفر است و برعکس.

سراسری ۹۱ واریانس ۱۱ دادهٔ آماری صفر است. اگر داده‌های ۲۴ ، ۱۶ و ۲۶ به آن‌ها اضافه شود، میانگین داده‌ها تغییری نمی‌کند. واریانس ۱۴ دادهٔ حاصل کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲
۳) ۱ ۴) صفر

نکته ۴: اگر داده‌های آماری دارای وزن یا فراوانی باشند، آن‌گاه واریانس آنها عبارت است از:

$$\sigma^2=\frac{f_1(x_1-\bar{x})^2+f_2(x_2-\bar{x})^2+\dots+f_n(x_n-\bar{x})^2}{f_1+f_2+\dots+f_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}\cdot$$

* در حالت داده‌های موزون، به جای f از W و به جای $\bar{x}$ از $\bar{x}_w$ استفاده می‌شود.

سراسری ۹۴ اگر میانگین داده‌های دسته‌بندی شده، برابر ۱۶ باشد، با تعیین فراوانی دستهٔ چهارم، مقدار واریانس کدام است؟

نمایندهٔ دسته	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی	۵	۷	۱۰	α	۳

۱) ۴٫۸۵ ۲) ۴٫۹۲
۳) ۵٫۵۵ ۴) ۵٫۷۴

حل: از آن‌جایی که $\bar{x}=16$، پس اگر ۱۶ واحد از نمایندهٔ هر دسته کم کنیم، میانگین نیز ۱۶ واحد کم می‌شود و میانگین داده‌های جدید (یعنی اعداد ۴، ۲، ۰، ۲-، ۴-) برابر صفر می‌گردد (راه سریع)، داریم:

$$\frac{5\times(-4)+7\times(-2)+10(0)+\alpha\times(2)+3(4)}{5+7+10+\alpha+3}=0 \Rightarrow -22+2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=11$$

اکنون برای محاسبهٔ واریانس داریم:

$$\sigma^2=\frac{5(12-16)^2+7(14-16)^2+10(16-16)^2+11(18-16)^2+3(20-16)^2}{5+7+10+11+3}$$

$$=\frac{5\times(-4)^2+7(-2)^2+10\times(0)+11(2)^2+3(4)^2}{36}=\frac{200}{36}=5{,}55 \checkmark$$

سراسری ۹۷ خ تجربی

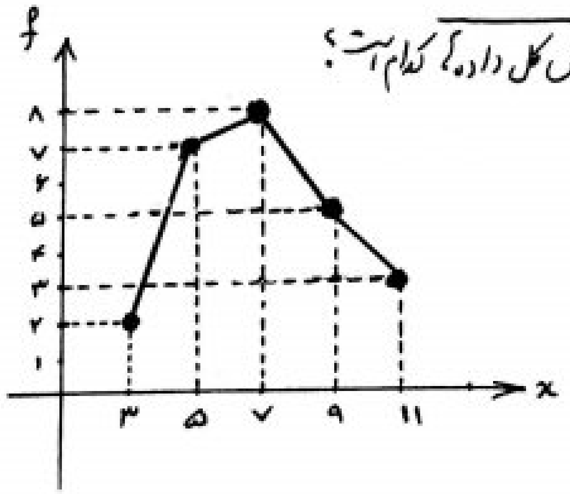
در داده‌های آماری با جدول فراوانی زیر، مقدار واریانس با روش سریع کدام است؟

x	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱	۲۳
f	۶	۸	۷	۱۰	۹

۱) ۳٫۲۶ ۲) ۳٫۸۲

۳) ۷٫۳۲ ۴) ۷٫۶۴

سراسری ۹۵



با توجه به نمودار چندبر فراوانی مقابل، واریانس کل داده‌ها کدام است؟

۱) ۴٫۵ ۲) ۴٫۸

۳) ۴٫۹۲ ۴) ۵٫۱۲

حل: واضح است که جدول فراوانی داده‌ها به صورت زیر است:

x	۳	۵	۷	۹	۱۱
f	۲	۷	۸	۵	۳

اکنون برای محاسبهٔ واریانس داریم:

سراسری ۱۴۰۰

در جدول فراوانی داده‌های زیر، مقدار میانه برابر ۱۳٫۵ و اختلاف چارک اول و سوم ۱۷ است. به هر یک از داده‌های جدول، ۴۰ واحد اضافه می‌کنیم. واریانس جدول جدید کدام است؟

۱) ۷۱ ۲) ۷۱٫۵

۳) ۷۲ ۴) ۷۲٫۵

داده	۱۱	۱۲	۱۳	۱٤	۲۸	۳۱	a
فراوانی	۳	۲	۶	۳	۲	۵	۱

سراسری ۱۴۰۰ خ

H.W

جدول فراوانی داده‌های زیر مفروض اند. اگر مقدار میانه برابر ۱۳ باشد، واریانس داده‌ها کدام است؟

۱) ۵۴٫۸۶ ۲) ۵۵٫۰۳

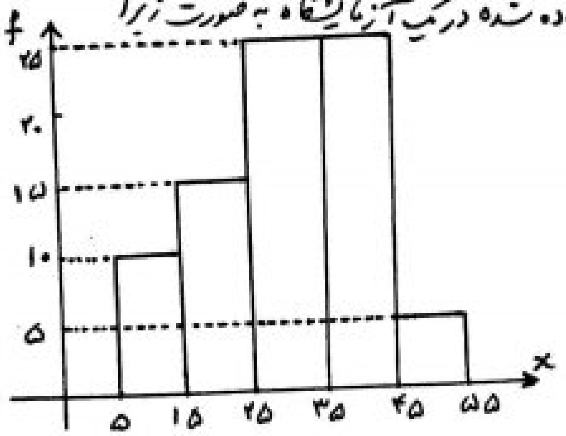
۳) ۵۵٫۳۶ ٤) ۵۵٫۶۳

داده	۸	۱۲	۱۳	۱۴	۲۶	۲۷	۲۸	a
فراوانی	۳	۲	۶	۳	۱	۱	۵	۱

(گزینه ۳)

نکته ۵: برای محاسبه واریانس داده‌های دسته‌بندی شده، در جدول فراوانی، از مرکز دسته‌ها استفاده می‌کنیم.

سراسری ۹۷ انسانی نمودار بافت‌نگاشت مربوط به طول ۸۰ گیاه پرورش داده شده در یک آزمایشگاه به صورت زیر است. واریانس طول این ۸۰ گیاه کدام است؟



۱) ۹۰ ۲) ۱۰۰
۳) ۱۲۰ ۴) ۱۲۵

حل: جدول فراوانی داده‌ها، با توجه به مرکز هر دسته، عبارت است از:

x_i	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
f_i	۱۰	۱۵	۲۵	۲۵	۵

اکنون برای محاسبه واریانس این داده‌ها داریم:

نکته ۶: برای محاسبه واریانس از روی فراوانی نسبی داده‌ها، داریم:

$$\sigma^2=\frac{f_1}{n}(x_1-\bar{x})^2+\frac{f_2}{n}(x_2-\bar{x})^2+\dots+\frac{f_n}{n}(x_n-\bar{x})^2$$

سراسری ۹۳ جدول روبه‌رو فراوانی نسبی داده‌های دسته‌بندی شده است. با تعیین α، مقدار واریانس کدام است؟

مرکز دسته	۸	۱۲	۱۶	۲۰
فراوانی نسبی	۰/۱	۰/۲۵	۰/۲	α

۱) ۱۶/۵ ۲) ۱۶/۸
۳) ۱۷/۲ ۴) ۱۷/۶

حل:

می‌دانیم $۰/۱+۰/۲۵+۰/۲+\alpha=۱ \rightarrow \alpha=۰/۴۵$

$\bar{x}=۰/۱\times۸+۰/۲۵\times۱۲+۰/۲\times۱۶+۰/۴۵\times۲۰=۱۶$

$\sigma^2=۰/۱\times(۸-۱۶)^2+۰/۲۵\times(۱۲-۱۶)^2+۰/۲\times(۱۶-۱۶)^2+۰/۴۵\times(۲۰-۱۶)^2=۱۷/۶$

۳. انحراف معیار ← جذر واریانس را می‌گویند نماد ← σ

(توجه کنید که چون واریانس به صورت واحد مربع بیان می‌شود، پس با جذر گرفتن از آن به عددی می‌رسیم که برحسب واحد داده‌ها باشد و نه مجذور آنها)

بنابراین انحراف معیار برای n داده $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر است با:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}$$

(سایر نکات واریانس به همین ترتیب، با جذر گرفتن، برای انحراف معیار برقرارند)

نتیجه ۱: در نکات مربوط به واریانس دیدیم که

- اگر مقداری ثابت به همهٔ داده‌ها اضافه شود، واریانس آنها تغییری نمی‌کند، پس انحراف معیار هم تغییر نمی‌کند.
- اگر مقدار ثابت مانند a در تمام داده‌ها ضرب شود، واریانس آنها در a^2 و انحراف معیار آنها در $|a|$ ضرب می‌شود.

نتیجه ۲: اگر انحراف معیار مجموعهٔ داده‌ها، عددی کوچک باشد، به این معناست که پراکندگی داده‌ها حول میانگین آنها کم و در نتیجه داده‌ها به هم نزدیک‌ترند (جامعه یک دست می‌باشد و یا به عبارتی عادلانه‌تر است). اما اگر انحراف معیار مجموعهٔ داده‌ها، عددی بزرگ باشد، بدین معناست که پراکندگی داده حول میانگین آنها زیاد و در نتیجه داده‌ها از هم دور می‌باشند (وجود اختلاف طبقاتی زیاد در جامعه!!)

تست اگر انحراف معیار داده‌های $-\frac{1}{5}x_1+2, -\frac{1}{5}x_2+2, \dots, -\frac{1}{5}x_8+2$ برابر ۱٫۴ باشد، آنگاه انحراف معیار داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_8$ کدام است؟

۱) ۰٫۷ ۲) ۲٫۸

۳) ۴٫۲ ۴) ۷

سراسری ۹۷ در جدول فراوانی داده‌های آماری زیر، انحراف معیار با روشی سریع، کدام است؟

x	۲۷	۲۹	۳۱	۳۳	۳۵
f	۷	۱۰	۱۳	۱۱	۹

۱) ۲٫۶　۲) ۲٫۷
۳) ۲٫۸　۴) ۲٫۹

حل: ابتدا عدد ۳۱ (که در وسط داده‌ها قرار دارد) را از همه داده‌ها کم می‌کنیم. داریم:

x - ۳۱	-۴	-۲	۰	۲	۴
f	۷	۱۰	۱۳	۱۱	۹

$$\rightarrow \bar{x} = \frac{۷\times(-۴) + ۱۰\times(-۲) + ۰ + ۱۱\times ۲ + ۹\times ۴}{۷ + ۱۰ + ۱۳ + ۱۱ + ۹}$$

$$\rightarrow \bar{x} = ۰/۲$$

$$\Rightarrow \sigma^2 =$$

سراسری ۹۶ یک جامعه با اندازه ۱۲ و واریانس ۱۲٫۶ با جامعه دیگری با اندازه ۲۴ و واریانس ۷٫۲ تشکیل جامعه‌ای جدید می‌دهند. اگر میانگین این دو جامعه یکسان باشد، انحراف معیار جامعه جدید کدام است؟

۱) ۲٫۹　۲) ۳
۳) ۳٫۱　۴) ۳٫۲

«نکته مهم»

اگر دو جامعه میانگین یکسان داشته باشند، درصورتی که اندازه اولی n_1 و واریانس آن σ_1^2 و اندازه دومی n_2 و واریانس آن σ_2^2 باشد، آن‌گاه واریانس جامعه حاصل از ترکیب آنها برابر است با:

$$\frac{n_1 \times \sigma_1^2 + n_2 \times \sigma_2^2}{n_1 + n_2}$$

(این نکته قابل تعمیم است)

تجربی ۱۴۰۱ ۹ داده آماری را در نظر بگیرید. اختلاف هشت داده آماری از میانگین برابر ۱+ یا ۱- و اختلاف یک داده از میانگین برابر صفر است. انحراف معیار این داده‌ها کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$　۲) $2\sqrt{2}$
۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　۴) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

تجربی ۱۴۰۱ خ انحراف معیار شش داده آماری ۲ و اختلاف آنها از میانگین برابر $a, ۰, -۱, b, -۱, ۳$ است. اگر $a > ۰$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۳　۲) ۲
۳) -۳　۴) -۲

سراسری ۹۷ خ — شش دادهٔ آماری با میانگین ۱۲ و واریانس ۶ با ۹ دادهٔ دیگر با میانگین ۱۴ و واریانس ۴ ترکیب شده‌اند. انحراف معیار گروه جدید کدام است؟

۱) ۲٫۲ ۲) ۲٫۳

۳) ۲٫۴ ۴) ۲٫۵

سراسری ۹۳ تجربی H.W — در ۲۵ دادهٔ آماری، میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ می‌باشد. اگر داده‌های ناجور ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ از بین آنها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

(گزینه ۴)

۱) ۱۴٫۷۲ ۲) ۱۴٫۸۱

۳) ۱۵٫۳۳ ۴) ۱۶٫۶۶

۴. ضریب تغییرات ← حاصل تقسیم انحراف معیار داده‌ها بر میانگین داده‌ها است.

ضریب تغییرات را با C.V نشان می‌دهند. $C.V=\frac{\sigma}{\bar{x}}$

▷ در حالتی که واریانس (انحراف معیار) دو جامعهٔ مورد مقایسه، یکسان باشد، میزان پراکندگی را بر اساس ضریب تغییرات بررسی می‌کنند.

▷ ضریب تغییرات، عبارت است از میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین.

▷ هرچقدر ضریب تغییرات کمتر باشد، میزان پراکندگی داده‌ها کمتر است و این موضوع در علم آمار مطلوب می‌باشد.

▷ از ضریب تغییرات، که معیاری بدون واحد می‌باشد، می‌توان برای مقایسه میزان پراکندگی دو یا چند جامعهٔ آماری که برحسب یک واحد نمی‌باشند، استفاده کرد. به عنوان مثال مقایسه پراکندگی داده‌های قد و داده‌های وزن افراد در یک کلاس.

▷ اگر تمام داده‌ها با عدد ثابت مثبتی مانند a جمع شوند، ضریب تغییرات کاهش می‌یابد. زیرا انحراف معیار تغییری نمی‌کند، اما میانگین به اندازهٔ a افزایش می‌یابد.
همچنین اگر تمام داده‌ها به اندازهٔ عدد ثابت مثبتی مانند a کم شوند، ضریب تغییرات افزایش می‌یابد.

▷ اگر تمام داده‌ها در عدد ثابت مثبتی مانند a ضرب شوند، ضریب تغییرات تغییر نمی‌کند. اما اگر عدد ثابت a، منفی باشد، ضریب تغییرات، قرینه می‌گردد.

سراسری ۹۸: میزان بارندگی یک استان در ۱۰ سال گذشته به صورت زیر است. در نمایش نمودار جعبه‌ای، ضریب تغییرات داده‌های داخل جعبه کدام است؟
(۵۹ , ۳۹ , ۵۶ , ۴۶ , ۵۰ , ۵۴ , ۳۷ , ۴۲ , ۵۷ , ۳۲)

۱) ۰/۰۷ ۲) ۰/۰۹
۳) ۰/۱۲ ۴) ۰/۱۵

سراسری ۹۲ خ ۹۶ — در ۱۲ دادهٔ آماری، مجموع تمام داده‌ها ۷۲ و مجموع مجذورات آن‌ها ۴۸۰ می‌باشد. ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{2}{9}$

۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{5}$

سراسری ۹۵ — داده‌های $x_i = 1, 2, 3, 4, 5$ مفروض است. ضریب تغییرات داده‌های $y_i = 12x_i + 6$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۴۸

۳) ۰/۵۲ ۴) ۰/۶

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3 \rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}} = \sqrt{2}$$

$$\rightarrow C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \xrightarrow{\text{برای داده‌های جدید}} (C.V)_{\text{جدید}} = \_\_\_\_\_$$

سراسری ۹۳ — با توجه به جدول آماری دسته‌بندی شدهٔ روبه‌رو، مقدار ضریب تغییرات داده‌های x کدام است؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۰۸

۳) ۰/۱ ۴) ۰/۲

$x-44$	-3	-1	1	3	5
فراوانی	۴	۷	۵	۳	۱

حل: اگر میانگین داده‌های داده‌شده در جدول را بیابیم، آن‌گاه میانگین داده‌های x، ۴۴ واحد بیشتر است.

$$\text{میانگین داده‌های جدول} = \frac{4\times(-3)+7\times(-1)+5\times1+3\times3+1\times5}{4+7+5+3+1} = 0 \xrightarrow{+44} \bar{x} = 44$$

اما انحراف معیار داده‌های جدول با انحراف معیار داده‌های x، برابر است، پس

$$\sigma = \sqrt{\frac{4(-3)^2+7(-1)^2+5(1)^2+3(3)^2+1\times(5)^2}{20}} = \sqrt{5} \xrightarrow{\text{برای داده‌های } x} C.V = \frac{\sqrt{5}}{44} \simeq 0.05$$

$(\sqrt{5} \simeq 2.23)$

سراسری ۹۵ تجربی — میانگین طول اضلاع مربع‌های ۱۵ واحد با ضریب تغییرات ۰/۲ محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

۱) ۲۲۹ ۲) ۲۳۲

۳) ۲۳۴ ۴) ۲۳۶

سراسری ۹۸ تجربی — در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند. میانگین نمرات مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۸۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ است. کدام گروه بهتر می‌باشد؟

سراسری ۹۳ / ۹۸ خ تجربی — نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به صورت مقابل است. دقت عمل کدام بیشتر است؟

A: 15, 14, 15, 16, 17, 19

B: 16, 14, 17, 14, 17, 18

۱) A ۲) B

۳) یکسان ۴) غیرقابل پیش‌بینی

حل:

$$\begin{cases} \bar{x}_A = \frac{15+14+15+16+17+19}{6} = 16 \\ \bar{x}_B = \frac{16+14+17+14+17+18}{6} = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_A^2 = \frac{(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2+(0)^2+(1)^2+(3)^2}{6} = \frac{16}{6} \quad , \quad \sigma_B^2 = \frac{(0)^2+(-2)^2+(1)^2+(-2)^2+(1)^2+(2)^2}{6} = \frac{14}{6}$$

پس $\sigma_B < \sigma_A$ و لذا $(C.V)_B < (C.V)_A$ ← دقت B بیشتره

آمار استنباطی: فرایند نتیجه‌گیری درباره پارامترهای جامعه بر اساس نمونه است.

به عبارت دیگر چون همواره دسترسی به کل جامعه (عمل سرشماری) به راحتی امکان پذیر نیست (زمان‌بر و پرهزینه است)، بنابراین با استفاده از نتایج نمونه‌ها، تجزیه و تحلیل داده‌های نمونه‌ها به کمک نظریهٔ احتمال و تخمین، به تصمیماتی در مورد کل جامعه می‌توان دست یافت.

▷ آمارگیری: گردآوری داده‌ها به یکی از روش‌های ممکن.

▷ آمارگیر: کسی که آمارگیری را انجام می‌دهد.

روش‌های گردآوری داده‌ها

۱. مشاهده: گردآوری داده‌ها بدون نیاز به فرد پاسخگو (اگر به دقت زیادی نیاز باشد، مناسب نیست)

۲. پرسش‌نامه: مجموعهٔ سؤالات از پیش تعیین شده که توسط تعدادی پاسخگو تکمیل می‌شود (بسیار مرسوم)

(هرچند اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمان‌بر است.)

▷ در ضمن سؤالات باید با هدف آمارگیری هماهنگ باشد. سؤالات تا حد ممکن ساده و واضح باشد و از مطرح کردن سؤالاتی که پاسخ دادن به آنها نوعی اکراه به همراه داشته باشد و یا سؤالاتی که نظر خاصی را القا می‌کنند، خودداری شود.

۳. مصاحبه: معمولاً بین دو نفر صورت می‌گیرد: یکی مصاحبه‌گر (همان آمارگیر) و دیگری مصاحبه‌شونده که پاسخگو است. از این روش بیشتر زمانی استفاده می‌شود که آمارگیر از همه پاسخ‌های ممکن اطلاع کافی ندارد. (هرچند ممکن است سؤالات در حین مصاحبه تغییر کنند)

۴. دادگان: شامل مجموعه‌ای از اطلاعات ذخیره شده است و داده‌ها از این مجموعه به دست می‌آیند.

(هرچند همیشه اطلاعات قبلی در اختیار نیست)

مثال: در هر یک از موضوعات زیر، روش بهتر برای گردآوری داده‌ها را مشخص کنید.

الف) میزان تأخیر پروازهای داخلی فرودگاه در سال گذشته ←

ب) نظر دانش‌آموزان در مورد کیفیت آزمون‌های برگزار شده در سال تحصیلی ←

پ) تعداد وسایل نقلیه عبوری از ساعت ۱۲ شب تا ۶ بامداد از اتوبان خاص ←

ت) بررسی راه‌کار بهبود الگوی تغذیهٔ مردم در سطح جامعه ←

ث) تحقیق در مورد تعداد ازدواج‌های ثبت شده در استان هرمزگان ←

ج) سرشماری نفوس و مسکن در ایران ←

چ) بررسی ساعت‌های خواب دانش‌آموزان کلاس ←

ح) میزان رضایت مشتریان بانک از نحوهٔ برخورد و رسیدگی به درخواست آنها ←

خ) سن همه دانش‌آموزان مدرسه برحسب ماه در پایهٔ دوازدهم ←

د) تعداد سرنشینان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر ←

ذ) بررسی میزان مطالعهٔ زنان خانه‌دار در کشور ←

پارامتر (پارامتر جامعه): یک مشخصهٔ عددی است که توصیف کنندهٔ جنبه‌ای خاص از جامعه است و درصورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند قابل محاسبه است. پارامتر جامعه به رغم ثابت بودن، مجهول است.

آماره (آمارهٔ نمونه): مشخصهٔ عددی است که توصیف کنندهٔ جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه به دست می‌آید. آماره‌ها از نمونه‌ای به نمونهٔ دیگر تغییر می‌کنند و از آنها برای تخمین پارامتر جامعه استفاده می‌شود.

مثال: در یک زمین کشاورزی با کشت هندوانه، وزن تک تک هندوانه‌ها را اندازه‌گیری می‌کنیم. این عمل .... است و میانگین وزن همه هندوانه‌های قابل برداشت در این زمین، .... می‌باشد (زیرا این عدد برای همه اعضای جامعه است). برای بررسی مزهٔ هندوانه‌ها، بخشی از کل هندوانه‌ها را بررسی می‌نماییم، که این بخش ...... نامیده می‌شود و نسبت تعداد هندوانه‌های دارای مزهٔ "خوب" در این بخش، یک .... است.

مثال: در هر یک از موارد زیر، مشخص کنید عددی که زیر آن خط کشیده شده است، پارامتر جامعه یا آماره نمونه است؟

الف) در یک دبیرستان، <u>۴۸٫۲</u> درصد دانش آموزان با دوچرخه به مدرسه می آیند.

ب) در یک دبیرستان، با بررسی نمونه ای از دانش آموزان پایه دوازدهم دریافته ایم که <u>۴۷</u> درصد آنها با دوچرخه می آیند.

پ) در یک نظرسنجی علمی، <u>۵۲</u> درصد از دانشمندان اروپایی مرکز تحقیقات بین المللی گفته اند که زمین در حال گرم شدن است.

ت) سخنگوی سازمان بیمه اعلام کرده است که نسبت همه زنانی که بیمه عمر دارند، برابر <u>۳۰</u> درصد است.

ث) مدیریت هتل دریافته است که از بین ۲۰ مهمان انتخابی، <u>۱۰</u> درصد آنها قصد سفر دوباره و اقامت در این هتل را دارند.

ج) در یک نظرسنجی، درباره مشاغل، <u>۱۲٫۵</u> درصد از افرادی که مورد سؤال قرار گرفته اند، بیکار بوده اند.

چ) نیروی انتظامی اعلام کرده است که تعداد سرقت های سال گذشته در شهر تهران، که شامل تلفن همراه بوده، برابر <u>۲۶۴۱</u> عدد است.

ح) در نمونه تصادفی از دندان پزشکان، <u>۸۰</u> درصد آنها یک خمیردندان خاص را برای مسواک زدن توصیه می کنند.

خ) یک شرکت تولیدکننده گوشی تلفن همراه، اعلام کرده است میانگین عمر بهینه محصولاتش، حداقل <u>۵</u> سال است.

نمونه گیری و روش های آن

نمونه گیری: فرایند انتخاب نمونه ای از یک جامعه، به منظور تعمیم اطلاعات آن بر جامعه

اگر جامعه آماری کوچک باشد، برای مطالعه آن از سرشماری استفاده می کنیم، ولی قبلاً دیدیم که سرشماری معایبی دارد و برای جامعه بزرگ، باید از طریق نمونه گیری بررسی را انجام دهیم.

الف) نمونه گیری غیراحتمالی: عضوهای جامعه، شانس مشخصی برای انتخاب شدن در نمونه ندارند.

روش ها:
1. نمونه گیری در دسترس (راحت): عضوهای در دسترس در نمونه انتخاب می شوند.
2. نمونه گیری غیرتصادفی: عامل شانس در نمونه نقشی ندارد.
3. نمونه گیری قضاوتی: به سراغ اعضای خاصی از جامعه می رویم.

⋮

مثال: روش نمونه‌گیری در هر یک از بررسی‌های زیر را مشخص کنید.

الف) برای بررسی سلامت دهان و دندان به یک مرکز دندان پزشکی در محله خود مراجعه کرده‌ایم.

ب) برای بررسی از یک قفس بزرگ خرگوش‌های یک آزمایشگاه، بدون برنامه‌ریزی قبلی، خرگوش‌هایی را برمی‌داریم که دستمان به آنها می‌خورد.

پ) در مطالعاتی که در آنها فرایند سنجش برای شخصی که سنجیده می‌شود ناخوشایند یا دردسرآفرین است، داوطلبانی که حاضر به پاسخ به سؤالات ما در یک نظرسنجی می‌شوند، انتخاب می‌گردند.

ب) **نمونه‌گیری احتمالی:** نمونه‌گیری است که همهٔ واحدهای آماری، احتمالی معلوم برای انتخاب در نمونه داشته باشند و از روشی تصادفی برای انتخاب واحدهای نمونه استفاده شود.

روش‌ها: ۱. تصادفی ساده ۲. خوشه‌ای ۳. طبقه‌ای ۴. سامانمند (سیستماتیک)

---

۱. نمونه‌گیری تصادفی ساده

روشی از نمونه‌گیری است که در آن همهٔ واحدهای آماری برای انتخاب شدن در نمونه، احتمال یکسان دارند.

مثال: می‌خواهیم متوسط درآمد کارکنان یک مجتمع تجاری را محاسبه کنیم. فرض کنید در این مجتمع ۲۰ نفر کار می‌کنند. اگر اسامی این افراد را بر روی برگه‌های کوچک بنویسیم و ۷ اسم را به تصادف از بین آنها انتخاب کنیم، "نمونه‌گیری تصادفی ساده" انجام داده‌ایم. زیرا تمام افراد (همه واحدهای جامعه) احتمال برابر برای انتخاب شدن دارند.

* اشکال این روش: اگر اندازهٔ جامعه بزرگ باشد، یعنی تعداد واحدهای آماری زیاد باشند، دسترسی به فهرستی از اعضای جامعه و دسترسی به اعضای انتخابی دشوار و پرهزینه است.

نکته ۱: در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده، برای انتخاب یک نمونه با حجم n از یک جامعه با اندازه N، احتمال انتخاب هر کدام از نمونه‌های با اندازه n (که همگی شانس برابر برای انتخاب شدن دارند) برابر است با $\frac{1}{\binom{N}{n}}$.

مثال: می‌خواهیم از جامعه‌ای با اندازه ۴، یک نمونه ۲ عضوی انتخاب کنیم. احتمال انتخاب این نمونه چقدر است؟

نمونه ۲ عضوی	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,d\}$	$\{b,c\}$	$\{b,d\}$	$\{c,d\}$
احتمال	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\xrightarrow{\text{جواب}} \frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$

نکته ۲: "نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جای‌گذاری" ← هر واحد آماری فقط یک بار می‌تواند در نمونه بیاید.

* در این روش احتمال انتخاب برای اولین عضو برابر با $\frac{1}{N}$

برای دومین عضو برابر با $\frac{1}{N-1}$

$\vdots$

برای n اُمین عضو برابر با $\frac{1}{N-n+1}$ است.

نکته ۳: "نمونه‌گیری تصادفی ساده با جای‌گذاری" ← هر واحد آماری می‌تواند بیش از یک بار در نمونه بیاید.

یعنی نمونه اول، پس از انتخاب شدن، به جامعه برگردانده می‌شود و شانس مجدد برای انتخاب در نمونه را دارد و این موضوع تا انتخاب n اُمین عضو ادامه دارد.

* در این روش احتمال انتخاب برای هر یک عضوهای نمونه از جامعه آماری برابر با $\frac{1}{N}$ است.

توجه ۱: در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جای‌گذاری، احتمال انتخاب نمونه‌ای به اندازه n برابر است با

$$\frac{1}{N} \times \frac{1}{N-1} \times \cdots \times \frac{1}{N-n+1} = \frac{(N-n)!}{N!}$$

توجه ۲: در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده با جای‌گذاری، احتمال انتخاب نمونه‌ای به اندازه n برابر است با

$$\frac{1}{N} \times \frac{1}{N} \times \cdots \times \frac{1}{N} = \frac{1}{N^n}$$

نتیجه: اگر اندازه جامعه بزرگ باشد ($N \to \infty$)، نمونه‌گیری تصادفی ساده در هر دو حالت بدون جای‌گذاری و با جای‌گذاری، مشابه یکدیگر فرض می‌شوند و احتمال انتخاب نمونه‌ای با اندازه n از جامعه‌ای با حجم N برابر با $\frac{1}{N^n}$ فرض می‌شود.

تست با روش نمونه‌گیری تصادفی ساده از یک کلاس ۲۵ نفری، افرادی را به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم.

الف) اگر از نمونهٔ اول اطلاع نداشته باشیم، احتمال این که هر عضو، دومین عضو نمونه باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶۲۵}$　۲) $\frac{۱}{۲۵}$

۳) $\frac{۱}{۲۴}$　۴) $\frac{۱}{۵}$

ب) اگر نمونه‌گیری بدون جای‌گذاری باشد و از نمونهٔ اول خبر نداشته باشیم، هر عضو با کدام احتمال دومین عضو نمونه است؟

۱) $\frac{۱}{۶۲۵}$　۲) $\frac{۱}{۶۰۰}$

۳) $\frac{۱}{۲۵}$　۴) $\frac{۱}{۲۴}$

پ) اگر نمونه‌گیری بدون جای‌گذاری باشد و از نمونهٔ اول خبر داشته باشیم، با کدام احتمال هر عضو، سومین عضو نمونه است؟

۱) $\frac{۱}{۶۲۵}$　۲) $\frac{۱}{۲۵}$

۳) $\frac{۱}{۲۴}$　۴) $\frac{۱}{۵۵۲}$

تست جامعهٔ $\{a, b, c, d, e, f\}$ را در نظر می‌گیریم. اگر با روش نمونه‌گیری تصادفی ساده و با جای‌گذاری عمل کنیم، با کدام احتمال a در نمونهٔ اول و دوم نیست و در نمونهٔ سوم ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۲۱۶}$　۲) $\frac{۵}{۲۱۶}$

۳) $\frac{۲۵}{۲۱۶}$　۴) $\frac{۱۲۵}{۲۱۶}$

تست ۸۰.۷ از جامعهٔ $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$، نمونه‌های ۴ عضوی به روش تصادفی ساده انتخاب می‌کنیم. نمونه‌های $\{a, b, e, f\}$ یا $\{b, d, f, g\}$ با چه احتمالی انتخاب می‌شوند؟ (کنکوریم)

۱) $\frac{۱}{۷۰}$　۲) $(\frac{۱}{۷۰})^۲$

۳) $\frac{۱}{۳۵}$　۴) $\frac{۲}{۳۵}$

چیزهایی که بهت آسیب زدند رو فراموش کن

امّا درس‌هایی که بهت دادند رو از یاد نبر

۲. نمونه‌گیری خوشه‌ای

جامعه به خوشه (گروه) هایی تقسیم می‌شود. یعنی واحدهای نمونه‌گیری اولیه در جامعه گروه‌ها یا خوشه‌ها می‌باشند، که از آنها به تصادف چند خوشه انتخاب می‌گردد. سپس همهٔ واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب شده را به عنوان نمونه در نظر می‌گیرند. (به عبارت دیگر در هر خوشه انتخابی، سرشماری انجام می‌گیرد.)

مثال: در شهر کاشان قرار است از ۱۲۰ محلهٔ موجود، که هرکدام متشکل از ۵۰ خانوار می‌باشند، به سراغ ۱۵۰۰ خانوار برویم و از آنها در مورد نوع تغذیه فرزندانشان تحقیق کنیم. در این صورت، اگر هر محله را به عنوان یک خوشه در نظر بگیریم، باید از ۱۲۰ محلهٔ موجود تعداد ۳۰ محله را به تصادف انتخاب نماییم (روش نمونه‌گیری تصادفی ساده) و سپس از ۳۰ محله انتخابی هر ۵۰ خانوار آن را به عنوان نمونه در نظر بگیریم. در این صورت ($30 \times 50 = 1500$) خانوار را برای آمارگیری در اختیار داریم.

نکته ۱: هرچه پراکندگی درون خوشه‌ها بیشتر باشد، یعنی ناهمگن‌تر باشند، نمونه‌گیری خوشه‌ای نتیجهٔ بهتری دارد. ولی در حالت کلی، خوشه‌ها باید شبیه هم باشند. یعنی تفاوت بین خوشه‌ها کم و تفاوت درون خوشه‌ها باید زیاد باشد.

نکته ۲: در روش نمونه‌گیری خوشه‌ای، احتمال انتخاب خوشه‌ها به عنوان واحدهای آماری، یکسان است. از آن جایی که پس از انتخاب هر خوشه، تمام عضوهای آن سرشماری می‌شوند (انتخاب می‌گردند در نمونه وجود دارند)، پس احتمال انتخاب واحدهای آماری برابر با احتمال انتخاب خوشه مربوط به آن واحد است. پس احتمال انتخاب عضوها نیز یکسان می‌باشد. توجه کنید که احتمال انتخاب هر عضو، به تعداد عضوهای خوشهٔ مربوط به آن عضو ربطی ندارد و به تعداد کل خوشه‌ها بستگی دارد.

در مثال بالا احتمال انتخاب هر محله (خوشه) برابر با $\frac{30}{120} = \frac{1}{4}$ و در نتیجه احتمال انتخاب هر خانوار از هر محلهٔ انتخاب شده نیز برابر با $\frac{1}{4}$ است.

* **اشکال روش نمونه‌گیری خوشه‌ای:** برآوردهایی با خطاهای زیاد را شامل می‌شود، زیرا اعضای هر خوشه انتخابی همواره شبیه هم هستند.

۳. نمونه‌گیری طبقه‌ای

جامعه به زیرجامعه‌های مجزا (که عضو مشترکی با هم ندارند) طبقه‌بندی می‌شود و یک نمونه‌ی تصادفی ساده از هر طبقه انتخاب می‌شود. به عبارت دیگر

"جامعه از چند قسمت جداگانه (که با هم اشتراکی ندارند) تشکیل می‌شود و افراد یا اشیای هر قسمت دارای ویژگی یکسانی می‌باشند و در هر قسمت به طور جداگانه نمونه‌گیری تصادفی ساده انجام می‌شود."

مثال: کارشناسان حوزه‌ی سلامت، قصد دارند در مورد وضعیت قد افراد جامعه بررسی آماری انجام دهند. برای این منظور افراد جامعه را به دو طبقه‌ی مرد و زن تقسیم می‌کنند و از هر طبقه تعدادی را به عنوان نمونه (متناسب با حجم هر طبقه) به طور تصادفی (یعنی با روش نمونه‌گیری تصادفی ساده در هر طبقه) انتخاب می‌کنند.

نکته ۱: هر چه پراکندگی درون هر طبقه کمتر باشد، یعنی اعضا در ویژگی مورد نظر به هم نزدیک‌تر و همگن‌تر باشند، نمونه‌گیری طبقه‌ای نتیجه‌ی بهتری دارد. (برعکس خوشه‌ای)
بنابراین در نمونه‌گیری طبقه‌ای تا آنجا که ممکن است تفاوت درون طبقه‌ها کم و تفاوت بین طبقه‌ها باید زیاد باشد.

نکته ۲: در روش نمونه‌گیری طبقه‌ای، احتمال انتخاب شدن عضوهای هر طبقه، در بین خودشان، یکسان است (یعنی داده‌های هر طبقه هم شانس‌اند)، اما از آن جایی که تعداد عضوهای انتخابی از هر طبقه، متناسب با حجم آن طبقه است، پس در حالت کلی شانس انتخاب عضوها یکسان نیست، مگر آن که تعداد عضوهای تمام طبقات یکسان باشند.

نکته ۳: اگر جامعه‌ای با اندازه‌ی N را به m طبقه با تعداد عضوهای $N_1, N_2, \dots, N_m$ تقسیم‌بندی نماییم، تعداد عضوهای انتخابی از طبقه‌ی i اُم $(1 \leq i \leq m)$ در یک نمونه‌ی n عضوی برابر است با:

$$\frac{N_i}{N} \times n$$

* **اشکال روش نمونه‌گیری طبقه‌ای:** پرهزینه و زمان‌بر است، اما دقت نمونه‌گیری افزایش می‌یابد.

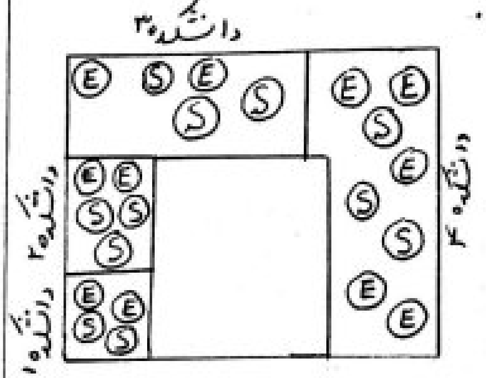
مثال: محله‌ای دارای ۲۵۰ خانوار است، که ۲۵، ۱۷۵ و ۵۰ خانوار به ترتیب درآمد کم، متوسط و زیاد دارند. با استفاده از روش نمونه‌گیری طبقه‌ای، نمونه‌ای به اندازه ۲۰ خانوار متناسب با درآمدهای مذکور مشخص کنید.

تعداد خانوارهای انتخابی از طبقه کم درآمدها = $\frac{\text{تعداد خانوارهای طبقه کم درآمد}}{\text{تعداد کل خانوارها}}$ × اندازه نمونه = $\frac{25}{250} \times 20 = 2$

" " " " " با درآمد متوسط = $\frac{\text{تعداد خانوارهای طبقه متوسط}}{\text{تعداد کل خانوارها}}$ × اندازه نمونه = $\frac{175}{250} \times 20 = 14$

" " " " " با درآمد زیاد = $\frac{\text{تعداد خانوارهای طبقه با درآمد زیاد}}{\text{تعداد کل خانوارها}}$ × اندازه نمونه = $\frac{50}{250} \times 20 = 4$

نکته: در یک دانشگاه، ۴ دانشکده مختلف مطابق شکل وجود دارد. دانشجویان رشته‌های مهندسی را با حرف E و سایر دانشجویان را با حرف S نشان داده‌ایم.



اگر با روش نمونه‌گیری طبقه‌ای یک نمونه ۴ عضوی انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد همه عضوهای نمونه از دانشجویان رشته‌های مهندسی باشند؟

۱) $\frac{1}{20}$ ۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{32}$ ۴) $\frac{1}{8}$

نکته: از یک جامعه ۱۰۰ عضوی، نمونه‌ای با اندازه ۱۲ مورد نظر است. اگر جامعه را به ۴ بخش ۲۵ عضوی تقسیم کنیم و از هرکدام ۳ عضو انتخاب نماییم، روش نمونه‌گیری و احتمال انتخاب هر عضو جامعه کدام است؟

۱) خوشه‌ای، ۰/۱۲ ۲) خوشه‌ای، ۰/۰۳

۳) طبقه‌ای، ۰/۱۲ ۴) طبقه‌ای، ۰/۰۳

نکته: جامعه‌ای ۱۵۰ عضو دارد. اگر این جامعه را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم نماییم و تمام اعضای دو قسمت را به عنوان نمونه انتخاب کنیم، روش نمونه‌گیری و احتمال انتخاب هر عضو جامعه کدام است؟

۱) خوشه‌ای، $\frac{2}{15}$ ۲) خوشه‌ای، $\frac{1}{5}$

۳) طبقه‌ای، $\frac{2}{15}$ ۴) طبقه‌ای، $\frac{1}{5}$

۴. نمونه‌گیری سامانمند (سیستماتیک)

نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای است که در آن اندازهٔ طبقات با هم برابر است. فقط از طبقهٔ اول واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود و با همان رویه از طبقات دیگر، این کار انجام می‌گیرد.

◁ برای انجام نمونه‌گیری سیستماتیک به روش زیر عمل می‌کنیم:

- ابتدا حجم جامعه را بر حجم نمونه تقسیم می‌کنیم و جزء صحیح این مقدار را K فرض می‌کنیم. $K=\left[\frac{N}{n}\right]$
- سپس یک عدد تصادفی بین ۱ تا K در نظر می‌گیریم. آن عدد تصادفی، شماره اولین عضو از طبقهٔ اول می‌باشد، که در نمونهٔ انتخابی قرار می‌گیرد.
- از شمارهٔ اولین عضو انتخابی، K تا K تا جلو می‌رویم و سایر عضوهای نمونه را مشخص می‌کنیم.

مثال: در یک دبیرستان با ۲۰۰ دانش‌آموز، نمونه‌ای با اندازهٔ ۲۰ مورد نظر است. در این صورت $۱۰ = \left[\frac{۲۰۰}{۲۰}\right] = K$. بین ۱ تا ۱۰، یک عدد دلخواه به تصادف انتخاب می‌کنیم. مثلاً ۷ پس از طبقهٔ اول عضو شماره ۷ انتخاب می‌شود. با افزودن عدد ۱۰ به ۷، عضو بعدی شماره ۱۷ از طبقه دوم و ... است. بنابراین شمارهٔ عضوهای نمونهٔ مورد نظر عبارت‌اند از:

۷ , ۱۷ , ۲۷ , ۳۷ , ۴۷ , ۵۷ , ۶۷ , ۷۷ , ۸۷ , ۹۷

۱۰۷ , ۱۱۷ , ۱۲۷ , ۱۳۷ , ۱۴۷ , ۱۵۷ , ۱۶۷ , ۱۷۷ , ۱۸۷ , ۱۹۷

نکته ۱: در روش نمونه‌گیری سامان‌مند، برای انتخاب نمونه‌ای با n عضو (نمونه‌ای با اندازه یا حجم n)، ابتدا جامعه را به n طبقهٔ K عضوی تقسیم می‌کنیم. اگر شمارهٔ عضو انتخابی از گروه اول، a_1 باشد (که به صورت تصادفی انتخاب شده است)، آنگاه بقیهٔ عضوهای نمونه، به کمک فرمول تصاعد حسابی $a_n = a_1 + (n-1)K$ به دست می‌آیند.

نکته ۲: در روش نمونه‌گیری سامان‌مند، اگر جامعه به n گروه K عضوی طبقه‌بندی شده باشد، هر عضو جامعه، با احتمال $\frac{1}{K}$، در نمونه ظاهر می‌شود. پس تمام عضوها شانس برابر دارند.

✱ در واقع روش نمونه‌گیری سیستماتیک، تغییر شکل یافتهٔ روش نمونه‌گیری تصادفی ساده است. در صورتی که فهرستی از عضوهای جامعه در دسترس باشد، این روش بسیار سریع و مقرون به صرفه است.

تست از بین ۷۵ دانش آموز یک کلاس، که از شماره ۱ تا شماره ۷۵ فهرست شده‌اند، به روش سیستماتیک یک نمونه ۵ نفری انتخاب می‌کنیم. اگر دانش آموز شماره ۶۲ عضو نمونه باشد، دومین عدد انتخابی در این نمونه ۵ نفری کدام است؟

۱) ۱۶　　۲) ۱۷
۳) ۳۲　　۴) ۳۳

تست در یک سالن امتحانات، از بین افرادی که روی صندلی‌های شماره ۳ تا ۷۷ نشسته‌اند، قرار است به روش سامانمند، نمونه‌ای با احتمال $\frac{1}{5}$ انتخاب گردد. اگر صندلی شماره ۱۶ سومین عدد انتخاب شده در نمونه مذکور باشد، آخرین عدد انتخابی در این نمونه کدام است؟

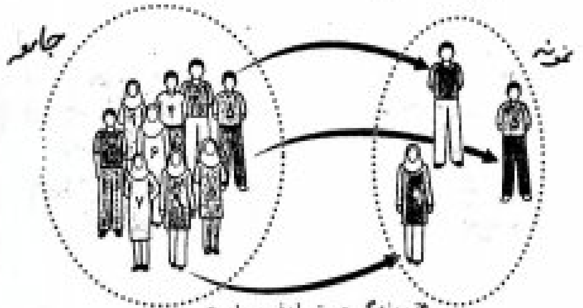
۱) ۲۶　　۲) ۳۶
۳) ۶۶　　۴) ۷۶

تست ۱۴۰۲ در یک بانک، جهت ارتقای خدمات رسانی به مشتریان، در یک روز از بین شماره‌های ۷ تا ۷۱، به روش سیستماتیک یک نمونه ۵ نفری انتخاب می‌شود و از آن‌ها درخواست می‌نمایند با پر کردن پرسشنامه، بانک را در رسیدن به این هدف یاری کنند. اگر شماره ۱۷ اولین فرد انتخابی باشد، کدام شماره در بین افرادی که پرسش نامه را پُر می‌کنند، وجود دارد؟

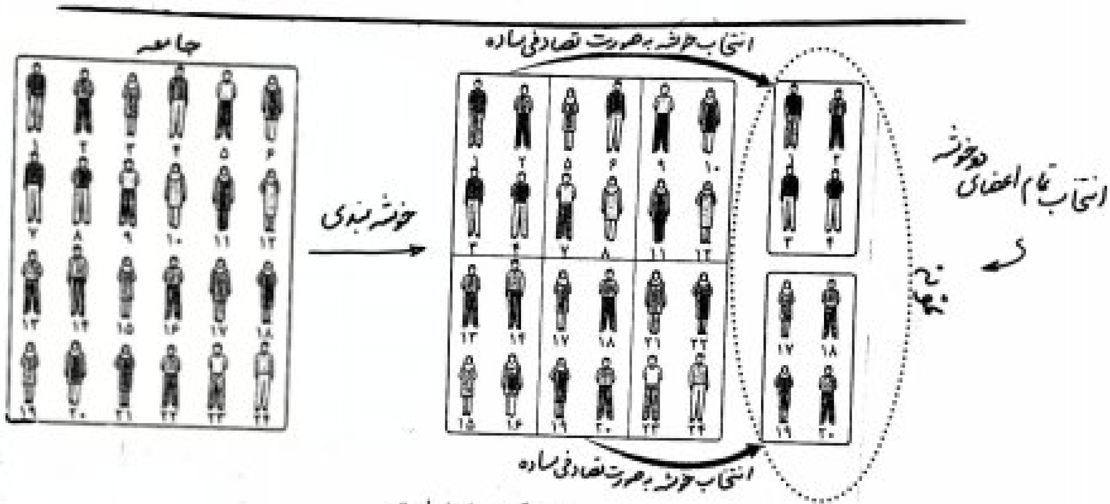
۱) ۵۶　　۲) ۴۲
۳) ۴۵　　۴) ۶۸

روش نمونه‌گیری	مزایا	معایب
تصادفی ساده	شانس انتخاب شدن برای همه اعضا مساوی است	عدم دسترسی مناسب به همه واحدهای آماری در جامعه بزرگ (این روش هزینه زیاد دارد)
خوشه‌ای	کم هزینه و سریع	امکان ایجاد خطا به دلیل تنوع ویژگی در خوشه‌ها
طبقه‌ای	اطمینان از انتخاب عضو از همه طبقات در نمونه	زمان‌بر و پرهزینه، واحدهای آماری لزوماً شانس برابر برای انتخاب ندارند.
سیستماتیک	شانس انتخاب اعضا یکسان، سریع و کم هزینه	بدون وجود یک فهرست از واحدهای آماری قابل انجام نیست.

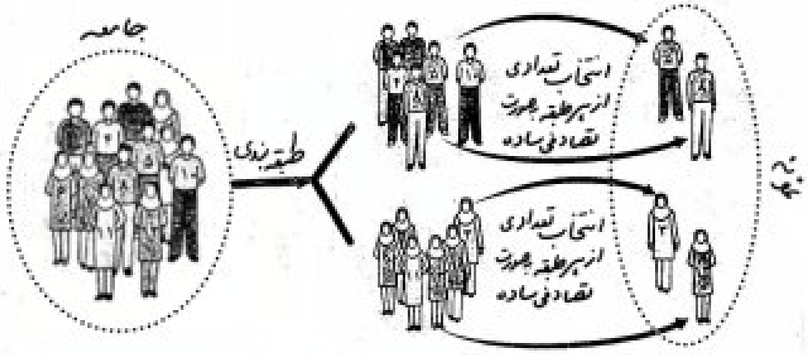
جمع‌بندی در شکل‌های زیر، هر ۴ روش نمونه‌گیری احتمالی، به صورت یک‌جا نمایش داده شده



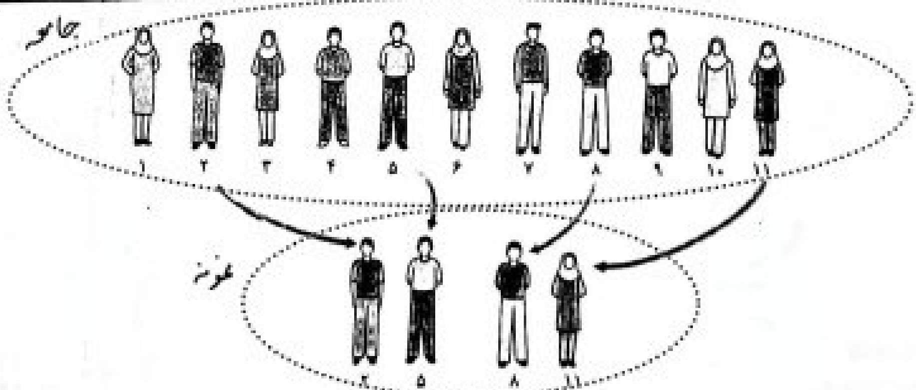
«نمونه‌گیری تصادفی ساده»



«نمونه‌گیری خوشه‌ای»



«نمونه‌گیری طبقه‌ای»



«نمونه‌گیری سیستماتیک»

سراسری ۱۴۰۰ برای دانش آموزان یک شهر از مقطع ابتدایی تا کلاس دوازدهم، یک عدد پنج رقمی به صورت زیر اختصاص می یابد: دو رقم اول سمت راست نمایش پایهٔ تحصیلی (از ۰۱ تا ۱۲)، دو رقم دوم نمایش سن (از ۰۷ تا ۱۸) و رقم پنجم جنسیت (پسر ۱ و دختر ۲). سپس اعداد را به ترتیب صعودی در یک مجموعه قرار می دهیم. سن صدمین عضو مجموعه کدام است؟
(ممکن است عدد پنج رقمی مورد نظر به هیچ فردی اختصاص نیابد، ولی در محاسبه شمرده شود)

۱) ۱۳ ۲) ۱۴
۳) ۱۵ ۴) ۱۶

سراسری ۱۴۰۰ خ
H.W

برای یک مجموعهٔ ۱۰۰ نفری از شهروندان یک شهر یک کد شش رقمی به صورت زیر ساخته می شود: دو رقم سمت راست، سن شهروند (از ۵۱ تا ۸۵)، سه رقم بعدی تعداد افراد هم سن (۰۰۰ ـ ۱۰۰) و رقم ششم جنسیت (مرد ۱ و زن ۲) اختصاص می یابد. سپس کدهای به دست آمده را به ترتیب صعودی در یک مجموعه قرار می دهیم. سن مورد انتظار برای ده هزارمین عضو مجموعه کدام است؟ (اگرچه ممکن است شهروندی به آن اختصاص نیابد)

(گزینه ۴)

۱) ۱۵ ۲) ۱۶
۳) ۵۴ ۴) ۵۵

نکته: در جامعه‌ای به اندازهٔ N، احتمال انتخاب هر عضو جامعه در نمونه‌ای به اندازهٔ n برابر است با $\frac{n}{N}$.

توجه: این احتمال به روش نمونه‌گیری ربطی ندارد. به عبارت دیگر با هر یک از چهار روش نمونه‌گیری تصادفی ساده، خوشه‌ای، طبقه‌ای (به شرط آن که تعداد عضوهای طبقات برابر باشد) و سیستماتیک، این احتمال همواره $\frac{n}{N}$ می‌باشد.

مثال: فرض کنید جامعه‌ای از $N = 100$ عضو تشکیل شده و نمونه‌ای به اندازهٔ $n = 20$ از آن مورد نظر است.
(مطابق نکتهٔ بالا احتمال انتخاب هر عضو جامعه در نمونه، برابر با $\frac{20}{100} = 0/2$ می‌باشد)

حال بررسی می‌کنیم در هر یک حالت‌های زیر، احتمال انتخاب هر عضو جامعه در نمونه چقدر است؟

الف) از بین ۱۰۰ عضو جامعه، یک نمونه ۲۰ تایی به تصادف انتخاب شود.

◁ روش نمونه‌گیری در این حالت، تصادفی ساده است. از آن جایی که یک عضو خاص از جامعه، در نمونه است باید ۱۹ عضو دیگر، از ۹۹ عضو باقی‌مانده انتخاب شود (توجه کنید که فضای نمونه، $\binom{100}{20}$ عضو دارد). پس احتمال انتخاب هر عضو جامعه، به عنوان نمونه در این حالت برابر است با:

$$P = \frac{\binom{99}{19}}{\binom{100}{20}} = \frac{\frac{99!}{19! \times 80!}}{\frac{100!}{20! \times 80!}} = \frac{99! \times 20!}{19! \times 100!} = \frac{20}{100} = 0/2$$

ب) جامعه به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شود و دو قسمت به عنوان نمونه انتخاب گردد.

◁ روش نمونه‌گیری در این حالت، خوشه‌ای است. ابتدا ۲ قسمت از ۱۰ قسمت انتخاب می‌شود که از هر قسمت، هر ۱۰ عضو آن انتخاب می‌گردد. پس فضای نمونه، $\binom{10}{2} = 45$ عضو دارد. از آن جایی که یک عضو خاص از جامعه، در نمونه است، پس خوشه مربوط به این عضو انتخاب شده است (ثابت) و باید یک خوشه دیگر از ۹ خوشهٔ باقی‌مانده انتخاب گردد. پس احتمال انتخاب هر عضو جامعه، به عنوان نمونه، در این حالت برابر است با:

$$P = \frac{\binom{9}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5} = 0/2$$

پ) **جامعه به دو قسمت ۵۰ تایی تقسیم شود و از هر قسمت نمونهٔ تصادفی ۱۰ تایی انتخاب گردد.**

◁ روش نمونه‌گیری در این حالت، طبقه‌ای است. واضح است که فضای نمونه دارای $\binom{50}{10}\binom{50}{10}$ عضو است. از آن جایی که یک عضو خاص از جامعه، در نمونه است، پس از قسمت مربوط به آن عضو، باید ۹ عضو دیگر از ۴۹ عضو باقی‌مانده انتخاب گردد (توجه کنید که از قسمت دیگر همان ۱۰ عضو از ۵۰ عضو انتخاب می‌شود).
پس احتمال انتخاب هر عضو جامعه، به عنوان نمونه در این حالت برابر است با:

$$P=\frac{\binom{49}{9}\binom{50}{10}}{\binom{50}{10}\binom{50}{10}}=\frac{\dfrac{49!}{9!\times\cancel{40!}}}{\dfrac{50!}{10!\times\cancel{40!}}}=\frac{\overset{10}{\cancel{10!}}\times\cancel{49!}}{\cancel{9!}\times\underset{50}{\cancel{50!}}}=\frac{10}{50}=/2$$

ت) **جامعه به تصادف به ۲۰ قسمت مساوی تقسیم شود و از قسمت اول دومین عضو به تصادف انتخاب گردد و از قسمت‌های بعدی نیز، دومین عضو انتخاب شود.**

◁ روش نمونه‌گیری در این حالت، سیستماتیک است. چون هر یک از قسمت‌ها، دارای ۵ عضو می‌باشد، پس احتمال انتخاب هر عضو در هر قسمت (مثلاً احتمال انتخاب دومین عضو) برابر با $\frac{1}{5}$ است و احتمال انتخاب هر عضو هم‌شماره با عضو انتخابی در قسمت اول، برابر ۱ می‌باشد. پس احتمال انتخاب هر عضو جامعه، به عنوان نمونه، در این حالت برابر است با:

$$P=\frac{1}{5}\times1\times1\times\dots\times1=\frac{1}{5}=/2$$

از لذت عشق کس خبر نشد
آن لحظه خبر شد که ویران شد

مثال: در هر یک از موارد زیر، روش نمونه‌گیری را مشخص کنید:

الف) در کلاسی با ۶۰ دانش‌آموز، که در شش ردیف ۱۰ نفری نشسته‌اند، می‌خواهیم نمونه‌ای ۱۰ تایی از دانش‌آموزان انتخاب کنیم. برای این منظور یک تاس سالم را پرتاب می‌کنیم و با توجه به عدد ظاهر شده از تاس، تمام دانش‌آموزان ردیف هم‌شماره با عدد تاس را انتخاب می‌کنیم.

ب) یک کارخانه تولید آبمیوه، ۳ خط تولید برای ۳ نوع آبمیوه دارد. بازرس اداره بهداشت، برای تحقیق در مورد کیفیت آبمیوه‌ها، از هر خط تولید تعدادی آبمیوه به تصادف انتخاب می‌کند.

پ) برای نظرسنجی درباره یک فیلم، در انتهای اکران از نفرات خروجی از سالن سینما پرسش به عمل می‌آید. پرسش‌ها از نفرات اول، چهارم، هفتم، دهم، سیزدهم، ... صورت پذیرفته است.

ت) یک شرکت کنترل کیفی، برای بررسی قطعات تولید شده در یک کارخانه، هر ۱۰۰۰ اُمین قطعه تولیدی را بررسی می‌کند.

ث) در یک کلاس با ۶۰ دانش‌آموز، که در شش ردیف ۱۰ نفری نشسته‌اند، می‌خواهیم نمونه‌ای ۶ تایی از دانش‌آموزان انتخاب کنیم. برای این منظور از هر ردیف، یک نفر را به تصادف انتخاب می‌نماییم.

ج) یک شرکت هواپیمایی به طور تصادفی یکی از پروازهای روزانهٔ خود را انتخاب می‌کند و از تمام مسافران این پرواز در مورد رضایت‌مندی آنها از غذای داخل هواپیما سؤال می‌پرسد.

چ) برای بررسی نظر مردم در مورد افزایش قیمت بنزین، یک نمونهٔ تصادفی از هر گروه سنی ۴۰-۲۵، ۵۰-۴۰، ۶۵-۵۰ و ۷۵-۶۵ به نسبت جمعیت هر گروه به کل جمعیت جامعه، انتخاب می‌نماییم.

ح) در یک تحقیق علمی در مورد وزن افراد جامعه، تعدادی زن و تعدادی مرد، به نسبت جمعیت، انتخاب می‌گردد.

خ) برای بررسی میزان درآمد افراد جامعه، دولت تصمیم می‌گیرد به طور تصادفی، چند استان از کشور را انتخاب کند و از تمام ساکنین استان‌های انتخابی میزان درآمد آنها سؤال می‌شود.

د) در یک اداره، از بین ۴۵ کارمند، قرار است یک هیئت بازرسی ۷ نفره انتخاب گردد. برای این منظور اسامی کارمندان را روی برگه‌های مختلف می‌نویسند و برگه‌ها را داخل یک کیسه قرار می‌دهند و از ۷ نفر از مراجعین درخواست می‌کنند هر کدام یک برگه به تصادف از کیسه خارج کنند.

نمونه‌گیری اُریب

در روش‌های نمونه‌گیری، باید نمونهٔ انتخابی برای نتیجه‌گیری در مورد کُل جامعه قابل استفاده باشد.
اگر نمونه‌گیری به گونه‌ای باشد که نمونهٔ انتخابی در برگیرندهٔ همهٔ ویژگی‌های جامعه باشد، یک نمونه‌گیری ایده‌آل است.

اگر یک روش نمونه‌گیری از نمونه‌گیری ایده‌آل فاصله بگیرد و به سمتی خاص انحراف پیدا کند می‌گوییم آن روش نمونه‌گیری اُریب است. آمارشناسان تلاش می‌کنند تا با شناسایی منابع تولید اُریبی، نمونه‌گیری‌ها را تا جایی که می‌توانند نااُریب کنند.

مثال: دلیل اُریب بودن هر یک از نمونه‌گیری‌های زیر را توضیح دهید.

الف) یک سازمان نظرسنجی، دربارهٔ نتایج انتخابات ریاست جمهوری یک کشور، که دو کاندیدای A و B دارد، از افراد یک استان پرسش به عمل می‌آورد و کاندیدای A را پیروز این رقابت معرفی می‌کند.

ب) سازمان سلامت اعلام کرده است ۴۲ درصد از زنان جامعه اضافه وزن دارند. این سازمان نمونه‌گیری را از بین زنان ۴۰-۲۵ سال انجام داده است.

پ) مدیر یک رستوران قصد دارد پنج نوع غذای جدید به منوی رستوران اضافه کند. برای این که نظر مشتریان خود را در مورد این کار بداند، از گارسون‌ها می‌خواهد در ۷ روز متوالی، از ۱۰ نفر اولی که برای ناهار به این رستوران می‌آیند، نظرسنجی نمایند.

ت) برای بررسی متوسط ساعت مطالعهٔ افراد در شهر تهران، از عضوهای چند کتابخانهٔ معروف شهر، نمونه‌گیری می‌شود.

ث) برای یافتن میانگین تعداد افراد خانوارها، به طور تصادفی از اشخاص سطح جامعه در مورد تعداد اعضای خانوادهٔ آنها سؤال می‌شود.

برآورد (تخمین)

● برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه

مقدار عددی حاصل از جای‌گذاری اعداد نمونهٔ تصادفی در آمارهٔ نظیر آن پارامتر را گویند. به بیان دیگر مقدار عددی آماره را برآورد یا برآورد نقطه‌ای می‌نامند.

مثال فرض کنید یک شرکت تولید لیوان شیشه‌ای می‌خواهد تعداد لیوان‌هایی که در یک بسته قرار دهد متناسب با بُعد خانوارهای کشور (میانگین تعداد اعضای خانواده‌ها) مشخص کند. پس

◄ در این مثال بُعد خانوارهای کشور (میانگین تعداد اعضای خانواده‌ها)، پارامتر جامعه است.

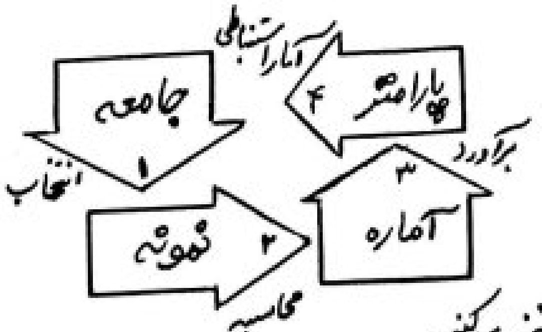
از آن جایی که امکان سرشماری کل خانوارهای کشور برای این شرکت میسر نیست، لذا تصمیم می‌گیرد بُعد خانوارهای خریدارهای محصول خود را به وسیلهٔ نمونه‌گیری انجام دهد. مثلاً بُعد ۹ خانوار را به صورت زیر مشخص کرده است.

۲ ، ۲ ، ۵ ، ۲ ، ۵ ، ۳ ، ۳ ، ۱ ، ۴

واضح است که میانگین بُعد این ۹ خانوار $\frac{4+1+3+3+5+2+5+2+2}{9} = 3$ است.

در این صورت عدد ۳ برای بُعد خانوارها یک آماره (آمارهٔ نمونه) است.

حال اگر کارشناس این شرکت، از روی همین عدد، اعلام نماید که بُعد خانوارهای کشور، عدد ۳ می‌باشد، برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه را با عدد ۳ مشخص کرده است.



نتیجه: روند کلی برآورد نقطه‌ای به صورت مقابل است:

① پارامتر جامعه را، که می‌خواهیم برآورد کنیم، در نظر می‌گیریم.

② با انتخاب از جامعه (به کمک روش‌های نمونه‌گیری)، نمونه را مشخص می‌کنیم.

③ آمارهٔ متناظر با پارامتر جامعه را در نمونه می‌یابیم.

④ مقدار آمارهٔ نمونه را به عنوان برآورد پارامتر جامعه (برآورد نقطه‌ای) اعلام می‌کنیم.

نکتهٔ مهم: اگر پارامتر جامعه را میانگین جامعه در نظر بگیریم، آن‌گاه هرچقدر اندازهٔ (حجم) نمونه را زیاد کنیم، برآورد میانگین نمونه (آماره) به میانگین جامعه (پارامتر) نزدیک می‌شود.

(در واقع با افزایش تعداد عضوهای نمونه، خطای برآورد نقطه‌ای کاهش می‌یابد.)

مثال: می‌خواهیم میانگین درآمد ماهیانه خانواده‌های یک کوچه را بیابیم (پارامتر جامعه). فرض کنید این کوچه از ۶ خانواده با درآمدهای ماهیانه به ترتیب ۹، ۲، ۵، ۳، ۱ و ۴ میلیون تومان تشکیل شده باشد. واضح است که میانگین درآمد ماهیانه خانواده‌های این کوچه (میانگین جامعه) برابر است با:

$$\mu = \frac{4+1+3+5+2+9}{6} = 4$$

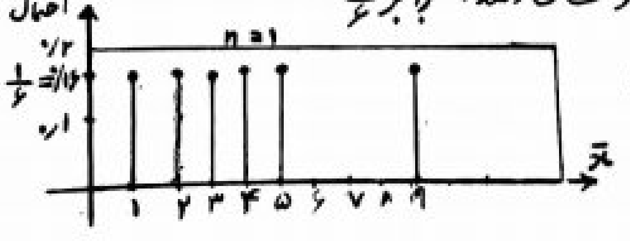
(میانگین جامعه را با μ نشان می‌دهند)

اکنون فرض کنید میانگین جامعه را نداریم و می‌خواهیم با انتخاب نمونه‌هایی به اندازه n از جامعه، میانگین جامعه را برآورد کنیم. داریم:

① اندازهٔ نمونه $n=1$ است. تعداد نمونه‌های تک‌عضوی برابر با $\binom{6}{1}=6$ است.

نمونه	{۴}	{۱}	{۳}	{۵}	{۲}	{۹}
$\bar{x}$	۴	۱	۳	۵	۲	۹
احتمال	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

واضح است که آمارهٔ مورد بررسی (میانگین درآمد ماهیانه خانواده‌های کوچهٔ مورد نظر)، در هر نمونهٔ انتخابی، با عدد خود نمونه، برابر است. یعنی با انتخاب نمونهٔ تک‌عضوی ۴ (خانواده‌ای که درآمد ماهیانهٔ ۴ میلیون دارد)، میانگین درآمد ماهیانهٔ این نمونه، همان ۴ است. پس احتمال انتخاب نمونه‌ای تک‌عضوی که میانگین این نمونه، برآورد درستی از میانگین جامعه را نشان دهد، برابر $\frac{1}{6}$ است.



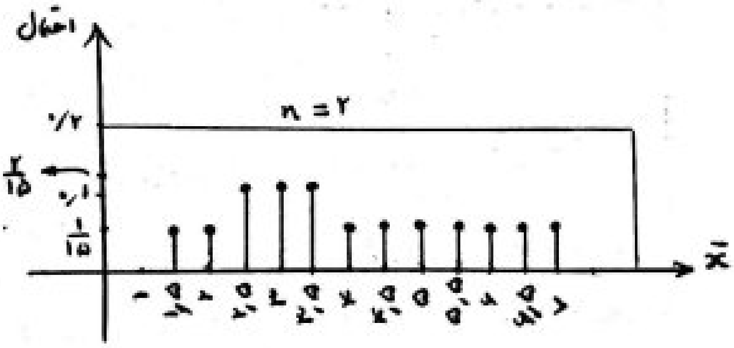
◁ برحسب مقادیر میانگین نمونه‌ها (محور افقی) و احتمال هرکدام (محور عمودی) نمودار میله‌ای رسم می‌شود.

۲) اندازهٔ نمونه $n=۲$ است. تعداد نمونه‌های دوتایی برابر با $\binom{۶}{۲}=۱۵$ است.

نمونه	{۱،۲}	{۱،۳}	{۱،۴} {۲،۳}	{۱،۵} {۲،۴}	{۱،۶} {۲،۵}	{۳،۵}	{۴،۵}	{۱،۹}	{۲،۹}	{۳،۹}	{۴،۹}	{۵،۹}
$\bar{x}$	۱،۵	۲	۲،۵	۳	۳،۵	۴	۴،۵	۵	۵،۵	۶	۶،۵	۷
احتمال	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$

واضح است که آمارهٔ مورد بررسی (میانگین درآمد ماهیانهٔ خانوارهای کوچهٔ مورد نظر)، در هر نمونهٔ انتخابی، میانگین دو عدد همان نمونه است. به عنوان مثال با انتخاب نمونهٔ {۳،۵}، میانگین نمونه $۴=\frac{۳+۵}{۲}$ می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با انتخاب، نمونهٔ به اندازهٔ $n=۲$، تعداد میانگین‌های بیشتری نزدیک به میانگین جامعه (عدد ۴) به دست می‌آید.

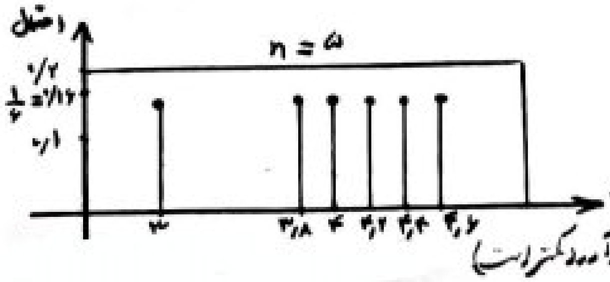
▷ نمودار میله‌ای:



۳) اندازهٔ نمونه $n=۵$ است. تعداد نمونه‌های ۵تایی برابر با $\binom{۶}{۵}=۶$ است.

نمونه	{۱،۲،۳،۴،۵}	{۱،۲،۳،۴،۹}	{۱،۲،۳،۵،۹}	{۱،۲،۴،۵،۹}	{۱،۳،۴،۵،۹}	{۲،۳،۴،۵،۹}
$\bar{x}$	۳	۳،۸	۴	۴،۲	۴،۴	۴،۶
احتمال	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$

واضح است که آمارهٔ مورد بررسی (میانگین درآمد ماهیانهٔ خانوارهای کوچهٔ مورد نظر)، در هر نمونهٔ انتخابی، میانگین ۵ عدد همان نمونه است. به عنوان مثال با انتخاب نمونهٔ {۱،۲،۳،۵،۹}، میانگین نمونه $\frac{۱+۲+۳+۵+۹}{۵}=۴$ می‌باشد.



▷ نمودار میله‌ای: ارتفاع میله‌ها (احتمال هر نمونه) یکسان است و با حالت $n=۱$ برابر است. اما میانگین نمونه‌ها (آماره) به میانگین جامعه (پارامتر) نزدیک‌تر می‌باشد (خطای برآورد کمتر است).

نتیجه: در یک جامعه با اندازهٔ n ، احتمال رخ دادن میانگین نمونه‌های تک عضوی و احتمال رخ دادن میانگین نمونه‌های $(n-1)$ عضوی هر کدام برابر با $\frac{1}{n}$ است و لذا در نمودار میله‌ای هر دو، ارتفاع میله‌ها یکسان می‌باشد. اما

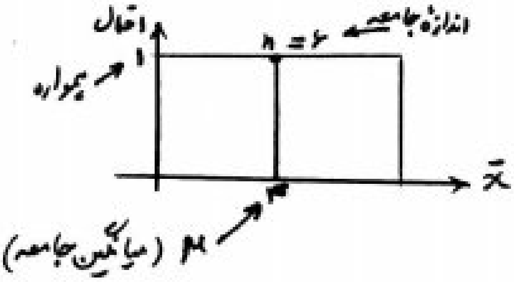
در حالت $(n-1)$ عضوی، خطای برآورد میانگین به مراتب کمتر شده است.

---

۴) اندازهٔ نمونه $n=6$ است. تعداد نمونه برابر با $\binom{6}{6}=1$ است. در واقع اندازهٔ نمونه با اندازهٔ جامعه برابر است. پس میانگین نمونه با میانگین جامعه برابر می‌باشد و در نمودار میله‌ای فقط یک میله وجود دارد، که احتمال رخ دادن آن برابر ۱ است.

نمونه	$\{1,2,3,4,5,6\}$
$\bar{x}$	۴
احتمال	۱

نمودار میله‌ای:



تست: از جامعه‌ای ۶ عضوی با مقادیر ۱۷, ۱۶, ۱۵, ۱۴, ۱۳, ۱۲ نمونه‌ای به اندازهٔ ۲ در نظر گرفته‌ایم. با کدام احتمال میانگین جامعه به درستی برآورد می‌شود؟

۱) $\frac{1}{15}$ ۲) $\frac{2}{5}$

۳) $\frac{4}{15}$ ۴) $\frac{1}{5}$

حل: ابتدا میانگین جامعه را می‌یابیم:

$$\mu=\frac{12+13+14+15+16+17}{6}=14.5$$

از طرفی تعداد نمونه‌های ۲ عضوی برابر با $\binom{6}{2}=15$ است. اکنون نمونه‌های ۲ عضوی با میانگین ۱۴٫۵، که مطلوب سؤال می‌باشد (یعنی با میانگین جامعه برابر باشد و برآورد میانگین جامعه درست باشد) را می‌یابیم (توجه کنید که باید جمع دو عضو نمونه برابر با ۲۹ شود):

سراسری ۱۴۰۱ از اعداد ۰ تا N، پنج عدد ۲، ۹، ۵، ۸ و ۱۱ به تصادف انتخاب شده‌اند. برآورد نقطه‌ای N به کمک میانگین کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲
۳) ۱۴ ۴) ۱۶

تست ۱۴۰۳ با انتخاب نمونه‌ای به اندازهٔ ۳ از بین اعداد ۱، ۲، ...، ۶، چقدر احتمال دارد میانگین آمارهٔ نمونه برابر ۴ شود؟ (تمرین ۴)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲
۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۲۵

تست با توجه به جدول مقابل، احتمال این که میانگین برآورد شده از جامعه، بیشتر از ۳/۵ باشد، کدام است؟

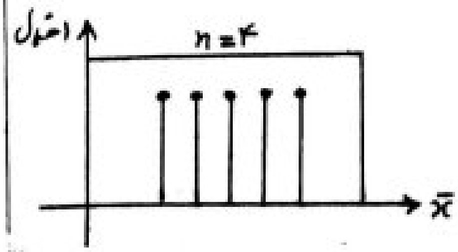
نمونه	A	B	C	D	E
$\bar{x}$	۲/۵	۳	۳/۵	۴	۴/۵
احتمال	۰/۱	2α	۰/۱	۰/۲	α

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۴
۳) ۰/۵ ۴) ۰/۷

تست در جامعه‌ای احتمال انتخاب نمونهٔ ۳ عضوی $\{x, y, z\}$ برابر $\frac{1}{35}$ است. احتمال انتخاب نمونهٔ $\{a, b\}$ در این جامعه چقدر است؟

۱) $\frac{1}{35}$ ۲) $\frac{2}{35}$
۳) $\frac{1}{21}$ ۴) $\frac{2}{21}$

تست نمودار میله‌ای یک نمونه با اندازهٔ $n=4$ از یک جامعه به صورت مقابل است. احتمال انتخاب یک نمونه ۳ عضوی از این جامعه کدام است؟



انحراف معیار برآورد میانگین (انحراف معیار میانگین نمونه‌ها)

انحراف معیار اعداد حاصل از میانگین برآورد شده توسط نمونه‌ها را می‌گوییم ← نماد $\sigma_{\bar{x}}$

مثال: در مثال مربوط به برآورد میانگین درآمد ماهیانه خانوارهای کوچه مورد بحث، دیدیم که مقادیر میانگین حاصل از نمونه‌های با اندازه $n=5$ عبارت اند از:

$$3 \,,\ 3.8 \,,\ 4 \,,\ 4.2 \,,\ 4.4 \,,\ 4.6$$

اکنون انحراف معیار این شش عدد را می‌یابیم:

- ابتدا میانگین این شش عدد را محاسبه می‌کنیم (میانگین میانگین‌های حاصل از نمونه‌ها)

$$\frac{3+3.8+4+4.2+4.4+4.6}{6}=4$$

(جالبه! برابر میانگین جامعه است)

اکنون به محاسبهٔ انحراف معیار می‌پردازیم:

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{(3-4)^2+(3.8-4)^2+(4-4)^2+(4.2-4)^2+(4.4-4)^2+(4.6-4)^2}{6}}\simeq 0.52$$

حال اگر همین عملیات را برای مقادیر میانگین حاصل از نمونه‌های با اندازهٔ $n=2$ انجام دهیم، انحراف معیار میانگین نمونه‌ها برابر با ۱٫۲۳ به دست می‌آید. یعنی پراکندگی میانگین نمونه‌ها در حالتی که $n=2$ می‌باشد، نسبت به حالت $n=5$ بیشتر است. به عبارت دیگر

هرچقدر حجم (اندازه) نمونه افزایش یابد، انحراف معیار میانگین کاهش پیدا می‌کند و در نتیجه برآورد دقیق‌تر می‌شود.

نکته مهم "ارتباط بین انحراف معیار جامعه و انحراف معیار میانگین نمونه‌ها"

اگر $\sigma_{\bar{x}}$ انحراف معیار برآورد میانگین (انحراف معیار میانگین نمونه‌ها)،
برای نمونه‌ای به اندازهٔ n از جامعه‌ای با انحراف معیار σ باشد،
آنگاه

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

* به کمک این رابطه می‌توان از انحراف معیار میانگین نمونه‌ها، به انحراف معیار جامعه رسید.
* انحراف معیار برآورد میانگین ($\sigma_{\bar{x}}$) با جذر اندازهٔ نمونه، نسبت عکس دارد.

یعنی اگر n_1 و n_2 اندازهٔ دو نمونه از یک جامعه و انحراف معیار برآورد میانگین برای هرکدام از این نمونه‌ها به ترتیب $(\sigma_{\bar{x}})_1$ و $(\sigma_{\bar{x}})_2$ باشد،
آنگاه

$$\frac{(\sigma_{\bar{x}})_2}{(\sigma_{\bar{x}})_1} = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}$$

تست اگر واریانس جامعه‌ای ۹ باشد، اندازهٔ نمونه چقدر باشد تا انحراف معیار برآورد میانگین برابر ۰/۰۶ شود؟

۱) ۱۲۵ ۲) ۲۵۰
۳) ۱۲۵۰ ۴) ۲۵۰۰

تست واریانس جامعه‌ای ۶,۲۵ است. همه داده‌ها را ۲ برابر می‌کنیم و سپس نمونه‌ای با حجم ۱۴۴ در نظر می‌گیریم. انحراف معیار میانگین نمونه‌ها کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۴۱
۳) ۰/۴۲ ۴) ۰/۴۳

سراسری ۱۴۰۱ برای برآورد میانگین درآمد افراد یک جامعه از دو نمونهٔ تصادفی استفاده کرده‌ایم. اندازهٔ نمونهٔ دوم را طوری انتخاب می‌کنیم که انحراف معیار برآورد میانگین با نمونهٔ دوم، $\frac{2}{3}$ برابر مقدار محاسبه شده با نمونهٔ اول باشد. اندازهٔ نمونهٔ دوم چند برابر اندازهٔ نمونهٔ اول است؟

۱) ۱,۵ ۲) ۲,۲۵
۳) ۲,۷۵ ۴) ۳,۵

● برآورد بازه‌ای پارامتر جامعه

برآورد بازه‌ای پارامتر جامعه یا بازهٔ اطمینان پارامتر جامعه عبارت است از بازه‌ای عددی برای پارامتر به همراه یک درصد اطمینان که ضریب اطمینان نامیده می‌شود.

◁ در بحث برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه، در مورد میانگین جامعه، دریافتیم که در بسیاری از مواقع میانگین نمونه با میانگین جامعه برابر نیست و نمونه‌گیری و در نتیجه برآورد میانگین با خطا همراه است.
برای رفع این مشکل از برآورد بازه‌ای استفاده می‌کنیم. برآورد بازه‌ای محدوده‌ای را به ما نشان می‌دهد که پارامتر جامعه (مثلاً میانگین جامعه)، با یک ضریب اطمینانی، که با درصد بیان می‌شود، در آن بازه قرار دارد.

اگر $\bar{x}$ میانگین نمونه‌ای به اندازهٔ n از جامعه‌ای با انحراف معیار σ باشد، با اطمینان بیش از ۹۵ درصد، میانگین جامعه (μ) در بازهٔ زیر قرار دارد:

$$\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{یا} \quad \bar{x}-2\sigma_{\bar{x}}\leq\mu\leq\bar{x}+2\sigma_{\bar{x}}$$

به عبارت دیگر

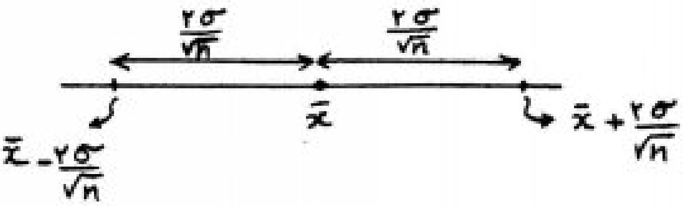
$$\boxed{\mu\in\left[\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\,,\,\bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad \text{یا} \quad \mu\in\left[\bar{x}-2\sigma_{\bar{x}}\,,\,\bar{x}+2\sigma_{\bar{x}}\right]}$$

نتیجه ۱: بازهٔ اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین جامعه را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$\xrightarrow{-(\bar{x})} -\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\leq\mu-\bar{x}\leq\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{تعریف قدرمطلق}} |\mu-\bar{x}|\leq\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

* عبارت $|\mu-\bar{x}|$ را میزان خطای برآورد نقطه‌ای میانگین را نشان می‌دهد.
* حداکثر خطای قابل قبول در محاسبهٔ میانگین جامعه، با استفاده از میانگین نمونه، برابر با $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ است.
* اگر اندازهٔ نمونه، k برابر شود، حداکثر خطای قابل قبول برآورد، $\frac{1}{\sqrt{k}}$ برابر می‌شود.

نتیجه ۲: بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین، به صورت زیر روی یک محور، نمایش داده می‌شود:



بنابراین

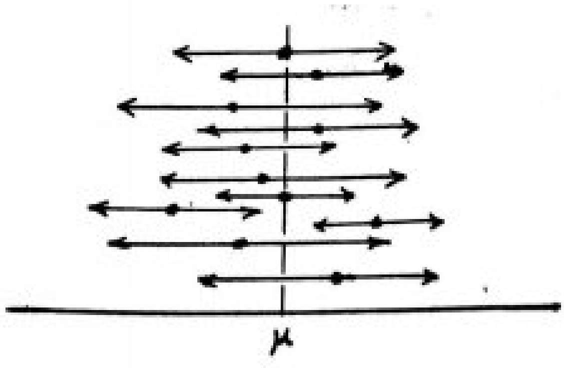
طول بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد برابر است با: $\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$

و مرکز این بازه همواره $\bar{x}$ است.

نتیجه ۳: منظور از بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد، آن است که در بیش از ۹۵ درصد موارد از نمونه‌گیری‌ها، بازه به دست آمده برای هر بار نمونه‌گیری، شامل میانگین جامعه است. مثلاً اگر ۴۰ بار نمونه‌گیری صورت پذیرفته است، بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد، به ما می‌گوید که اگر بازه اطمینان هر بار نمونه‌گیری را (مطابق با نتیجه ۲) رسم کنیم، بیش از $38 = 40 \times 95\%$ مورد آنها، شامل میانگین جامعه اند. بازه‌هایی که شامل میانگین جامعه نمی‌باشند، خطای برآورد دارند.

توجه: اگر در رابطه بازه اطمینان، به جای ضریب ۲، عدد بزرگتری قرار دهیم، برآورد بازه‌ای با اطمینان بیشتر (مثلاً بیش از ۹۶ درصد، بیش از ۹۷ درصد، ...) به دست می‌آید.

«هرچه ضریب اطمینان بیشتر شود، طول بازه اطمینان افزایش می‌یابد.»



تست در جامعه‌ای با انحراف معیار ۱٫۵، نمونه‌ای به اندازهٔ ۴ با مقادیر ۱۱، ۴٫۵، ۲٫۵، ۲ انتخاب کرده‌ایم. بازهٔ اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین این جامعه کدام است؟

۱) [۳,۵] ۲) [۳,۷]

۳) [۳٫۵,۵٫۵] ۴) [۳٫۵,۶٫۵]

حل: ابتدا میانگین نمونه را می‌یابیم:

$$\bar{x} = \frac{۲ + ۲٫۵ + ۴٫۵ + ۱۱}{۴} = ۵$$

پس:

تست اگر حداکثر خطای برآورد نقطه‌ای میانگین در نمونه‌ای به حجم ۴۰۰ برابر ۰/۲۵ باشد، آن‌گاه واریانس جامعه کدام است؟

۱) ۲٫۲۵ ۲) ۲٫۵

۳) ۶٫۲۵ ۴) ۵٫۵

تست میانگین جامعه‌ای (با انحراف معیار ۴۰)، با اطمینان بیش از ۹۵ درصد در بازهٔ [۱۵,۳۵] برآورد شده است. تعداد اعضای نمونه کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۳۲

۳) ۱۲۵ ۴) ۱۰۰

تست براساس نمونه‌ای به اندازهٔ ۴۰۰ شاخص پوسیدگی دندان در سال ۱۳۹۶ برابر ۹ است (۳ تا دندان کشیده شده، ۳ تا پوسیده و ۳ تا پر شده). انحراف معیار این سه مورد به ترتیب ۲، ۱ و ۱/۶ است. کران بالای بازهٔ اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین این سه مورد کدام است!

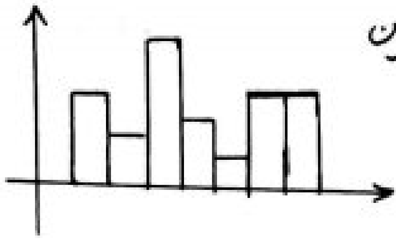
۱) ۳٫۲، ۳٫۱، ۳٫۱۶

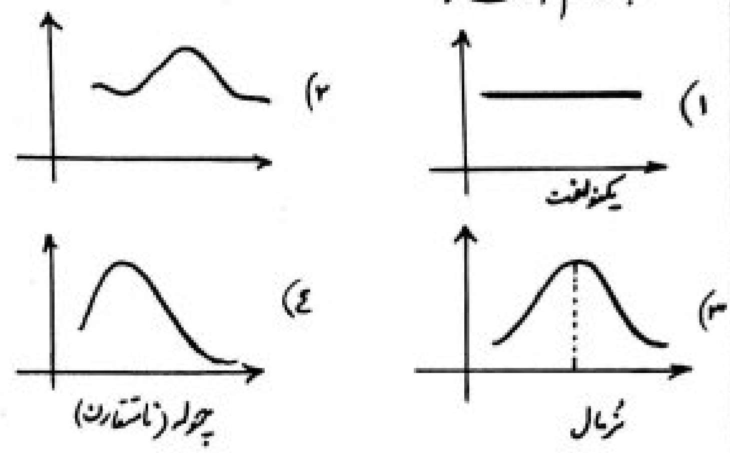
۲) ۳٫۱۶، ۳٫۱، ۳٫۲

۳) ۳٫۱، ۳٫۱۶، ۳٫۲

۴) ۳٫۱، ۳٫۲، ۳٫۱۶

تست (H.W): نمودار بافت نگاشت یک جامعه به صورت مقابل است. اگر از این جامعه ۲۰۰ بار نمونه‌گیری با حجم زیاد انجام دهیم، نمودار چندبر فراوانی برآورد میانگین به کدام است؟





نکته: اگر حجم نمونه زیاد باشد ($n \geq 30$)، بدون توجه به نمودار جامعه، نمودار چندبر فراوانی برآورد میانگین، به صورت نرمال است. (گزینه ۳)

اختیاری

تست: انحراف معیار درآمد افراد یک جامعه ۱٫۶ است. در یک نمونه به اندازهٔ ۴ از این جامعه، درآمدها به صورت ۳٫۵، ۳، ۴ و ۱٫۵ می‌باشد. خط فقر در این جامعه، با اطمینان بیش از ۹۵ درصد، در چه بازه‌ای قرار می‌گیرد؟

۱) [۲۷ , ۲٫۳] ۲) [۱٫۴ , ۴٫۶]

۳) [۲٫۸ , ۹٫۲] ۴) [۲٫۲ , ۳٫۸]

یاد باد سال‌ها از راه دل حل می‌شدن
در نهایت جهان ابن سینا مشکل نشد

اساس علم ریاضی پیاده خواهد رفت
اگر مسائل ما عاشقانه حل نشود