به نام آنکه جان را فکرت آموخت

۱۴۰۲ ـ ۱۴۰۱

درس :

آمار و احتمال

و

ریاضیات گسسته

مبحث :

منطق ریاضی

مجموعه

ترکیبیات

احتمال

آمار توصیفی

آمار استنباطی

تهیه و تنظیم : مهندس ترکمن

گزاره (Proposition)

ن   د

← جمله ای است خبری که بتوان دقیق و بدون ابهام ارزش درستی یا نادرستی آن را مشخص کرد. هرچند ممکن است در حال حاضر نتوان ارزش آن را تعیین کرد.

پس جملات ناکامل (ناقص)، سؤالی، تعجبی، امری، عاطفی (احساسی)، گزاره نیستند.

تست کدام جمله یک گزاره محسوب نمی‌شود؟

1) هر معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

2) در پرتاب یک تاس سالم، احتمال ظاهر شدن عدد زوج برابر $\frac{1}{2}$ است.

3) ای کاش همهٔ دانش آموزانم در کنکور قبول شوند.

4) هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت.

گزاره نما

← هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل می‌شود.

مثلاً a عددی فرد است ، او یک شاعر است ، احتمال رخ داد پیشامد A برابر $\frac{1}{2}$ است.

دامنهٔ متغیر گزاره نما (Domain) ← مجموعهٔ مقادیری که می‌توان به جای متغیر (های) یک گزاره نما قرار داد تا تبدیل به یک گزاره شود.

نماد: D

مثلاً

a عددی فرد است ←

او یک شاعر است ←

احتمال رخ داد پیشامد A برابر $\frac{1}{2}$ است ←

مجموعهٔ جواب گزاره نما ← زیرمجموعه ای از دامنهٔ متغیر گزاره نما، که بازای تمام عضوهای آن، گزاره نما، تبدیل به گزاره ای با ارزش درست می‌شود.

نماد: S

$S \subseteq D$

مثلاً الف) a عددی فرد است ← $D = \mathbb{Z}$

ب) در پرتاب یک تاس سالم احتمال رخ دادن پیشامد A برابر $\frac{1}{2}$ است ←

ج) $x^2 - 3x + 2 = 0$ ← $D = \mathbb{R}$

نقیض یک گزاره (Negation) ← نقیض گزارهٔ P، گزاره ای است که ارزش آن مخالف ارزش گزارهٔ P می‌باشد و با نماد $\sim P$ نشان داده می‌شود.

به کمک منفی کردن فعل جملهٔ خبری گزاره به دست می‌آید یا قرار دادن عبارت "چنین نیست که" در ابتدای گزاره

مثلاً

P: $\sqrt{2}$ عددی گنگ است $\xrightarrow{\text{نقیض}}$ $\sim P$: $\sqrt{2}$ عددی گنگ نیست

$\sim P$: $\sqrt{2}$ عددی گویا است

$\sim P$: چنین نیست که $\sqrt{2}$ عددی گنگ است

P: عدد ۱۷ مضرب ۳ است $\xrightarrow{\text{نقیض}}$ $\sim P$: عدد ۱۷ مضرب ۳ نیست

$\sim P$: چنین نیست که عدد ۱۷ مضرب ۳ است

توجه: $\sim(\sim P) \equiv P$

دو گزارهٔ هم‌ارز (هم‌ارزش) ← ستون مربوط به هر کدام از این دو گزاره در جدول ارزش درستی آن‌ها یکسان است.

نماد: $\equiv$

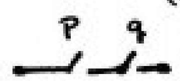
ترکیب گزاره‌ها (گزاره‌های مرکب) ← ترکیب عطفی، فصلی، شرطی، دوشرطی

ترکیب عطفی دو گزاره ← نماد ← $\wedge$ ← بین دو گزاره حرف "و" قرار داده می‌شود.

فقط زمانی ارزش آن درست است که هر دو گزاره درست باشند.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

شبیه دو کلید متوالی (سری)



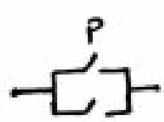
جریان زمانی برقرار است که هر دو کلید بسته باشند.

ترکیب فصلی دو گزاره ← نماد ← $\vee$ ← بین دو گزاره حرف "یا" قرار داده می‌شود.

فقط زمانی ارزش آن نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

شبیه دو کلید موازی



جریان زمانی برقرار نیست که هر دو کلید باز باشند.

تست کدام یک دارای ارزش نادرست است؟

۱) $(x^2+1=0) \vee$ (عدد ۲۱۹۷۱۴ مضرب ۱۱ است)   ۲) (عدد π گنگ است) و (مربع دو قطر عمود بر هم دارد.)

۳) عدد 5^9+8 اول است یا عدد ۴۶۴۲۱۴۸ مربع است.   ۴) $\{1\} \in \{1,2,\{1\},\{2\}\}$ و $\{1\} \subseteq \{1,2,\{1\},\{2\}\}$

تست با توجه به جدول مقابل، دوتایی (a,b) کدام است؟

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
عدد $2^{12}+1$ مرکب است	.....	a	....
.....	عدد n^4+1 به ازای تمام اعداد طبیعی n، اول نیست.	....	b

۱) (د، د) ۲) (ن، د) ۳) (د، ن) ۴) (ن، ن)

گزاره همیشه درست (True) $\xleftarrow{\text{در جدول}}$ همواره ارزش آن "د" است. $\xleftarrow{\text{نماد}}$ T

گزاره همیشه نادرست (False) $\xleftarrow{\text{در جدول}}$ همواره ارزش آن "ن" است. $\xleftarrow{\text{نماد}}$ F

نقیض یکدیگرند

نکته: برای گزاره دلخواه p داریم:

$$\begin{cases} p \vee F \equiv p \\ p \wedge T \equiv p \end{cases} \qquad \begin{cases} p \vee T \equiv T \\ p \wedge F \equiv F \end{cases} \qquad \begin{cases} p \vee \sim p \equiv T \\ p \wedge \sim p \equiv F \end{cases}$$

ویژگی های ترکیب عطفی و ترکیب فصلی

۱) خودتوانی
$$\begin{cases} p \wedge p \equiv p \\ p \vee p \equiv p \end{cases}$$

۲) جا به جایی
$$\begin{cases} p \wedge q \equiv q \wedge p \\ p \vee q \equiv q \vee p \end{cases}$$

۳) شرکت پذیری
$$\begin{cases} (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \\ (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \end{cases}$$

۴) توزیع پذیری
↓
(فاکتورگیری)
$$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

⑤ جذب ← ۲ ویژگی دارد (هم ۸ و هم ۷ دیده می‌شود / یک گزاره، تکراری شود)
← هم ارز است با گزاره تکرار شده ☺

$$\begin{cases} p\wedge(p\vee q)\equiv p \\ p\vee(p\wedge q)\equiv p \end{cases}$$

نتیجه ۱ : $p\wedge q\equiv p \Leftrightarrow p\vee q\equiv q$

نتیجه ۲ : $p\wedge q\equiv p\vee q \Leftrightarrow p\equiv q$

⑥ قانون دمورگان
↓
تک تک را نقیض می‌کند
علامت وسط را برعکس می‌کند

$$\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$$
$$\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$$

مثال: نقیض گزاره («عدد π گنگ است» یا «قطرهای مستطیل برابرند») عبارت است از:

نقیض گزاره ($2\in\{1,2,3,4\}$ و $25^{12}\leq 12^{25}$) عبارت است از :

⑦ قانون پوشانی (شبه جذب)

$$\begin{cases} p\vee(\sim p\wedge q)\equiv p\vee q \\ p\wedge(\sim p\vee q)\equiv p\wedge q \end{cases}$$

تست : گزاره $(p\vee q)\wedge(p\vee\sim q)$ هم ارز کدام گزاره است؟

۱) p ۲) q
۳) $\sim p$ ۴) $\sim q$

تست (۹۰ خ) کدام گزاره همواره نادرست است؟

۱) $(p\wedge q)\vee p$ ۲) $(p\wedge q)\vee\sim q$ ۳) $(p\vee q)\wedge\sim p$ ۴) $\sim(p\vee q)\wedge p$ (گزینه ۴)

ترکیب شرطی دو گزاره ← نماد ← ($\Rightarrow$) ← "اگر p آن‌گاه q" : $p \Rightarrow q$

مقدم (فرض) : p — تالی (حکم) : q

فقط زمانی ارزش آن نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

ن ⇒ ○

هر گزاره شرطی با انتفای مقدم درست است

مثلاً

الف) اگر $2 > 5$ ، آن‌گاه عدد ۸ اول است. ←

ب) $(3 \mid 2^7+1 \Rightarrow 6 \mid 5^9+1)$ ←

ج) اگر $\{2\} \in \{1,2,3\}$ ، آن‌گاه $\{2\} \subseteq \{1,2,3\}$ ←

چند ویژگی مهم

① ترکیب شرطی هر گزاره دلخواه با خودش، گزاره‌ای همیشه درست است. $p \Rightarrow p \equiv T$

② تبدیل گزاره شرطی به ترکیب فصلی (هم انی "نافذ")

$$p \Rightarrow q \equiv \underbrace{\sim p}_{\text{نقیض اولی}} \underbrace{\vee}_{\text{فاصل}} \underbrace{q}_{\text{دومی}}$$

شکل کلی : $\square \Rightarrow \bigcirc \equiv \sim \square \vee \bigcirc$

③ قانون عطف مقدمات

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

④ توزیع پذیری "$\vee$" نسبت به "$\Rightarrow$"

$$p \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)$$

توجه: "$\wedge$" نسبت به "$\Rightarrow$" توزیع پذیر نیست.

$$p \wedge (q \Rightarrow r) \not\equiv (p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$$

⑤ توزیع پذیری "$\Rightarrow$" از چپ نسبت به "$\vee$" و "$\wedge$"

$$\begin{cases} p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \\ p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \end{cases}$$

اثبات اولی

توجه: "$\Rightarrow$" از راست نسبت به "$\vee$" ، "$\wedge$" توزیع نمی‌شود.

$$\begin{cases} (p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \\ (p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \end{cases}$$

اثبات اولی

⑥ قانون تعدی (قیاس)

$$\{[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)\} \equiv T$$

تست اگر p گزاره‌ای با ارزش درست و q و r دو گزاره دلخواه باشند، کدام یک گزاره‌ای همیشه درست است؟

۱) $(\sim p \wedge q) \Rightarrow r$
۲) $(p \wedge q) \Rightarrow r$
۳) $(\sim p \vee q) \Rightarrow r$
۴) $(p \vee q) \Rightarrow r$

سراسری خارج ۹۹ کدام یک از گزاره‌های زیر، هم ارز منطقی گزاره $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q)$ است؟

۱) p
۲) q
۳) $p \wedge q$
۴) $p \Rightarrow q$

تست اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، کدام یک گزاره‌ای همیشه درست است؟

۱) $p \Rightarrow (p \vee q)$
۲) $p \Rightarrow (\sim p \wedge q)$
۳) $p \Rightarrow \sim(p \vee q)$
۴) $p \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

تست اگر ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge \sim q$ درست باشد، کدام گزاره همیشه درست است؟

۱) p
۲) q
۳) $\sim p \vee q$
۴) $\sim p \wedge q$

سراسری خارج ۹۸ گزاره $(p \wedge r) \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$، با کدام گزاره زیر، هم ارزش است؟

۱) $p \vee (q \wedge r)$
۲) $p \wedge (q \vee r)$
۳) $r \Rightarrow (p \wedge q)$
۴) $r \Rightarrow (p \vee q)$

تست اگر ارزش گزاره $p \Rightarrow [\sim q \Rightarrow (r \Rightarrow q)]$ درست و ارزش گزاره q نادرست باشد، آنگاه ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

۱) $p \wedge q$
۲) $p \Rightarrow \sim r$
۳) $\sim(p \vee \sim q)$
۴) $\sim q \Rightarrow (p \wedge q)$

انخ ۱۴۰۰ جدول ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر با جدول ارزش گزارهٔ $(q\vee r)\Rightarrow(p\vee q)$ یکسان نیست؟

۱) $p\Rightarrow(q\vee r)$ ۲) $(p\wedge q)\vee r$ ۳) $\sim p\vee q\vee r$ ۴) $(p\Rightarrow q)\vee r$

انخ ۱۴۰۰ اگر گزاره‌های $\sim p\Rightarrow q$ و $p\Rightarrow q$ هردو درست باشند، آنگاه کدام گزارهٔ زیر همواره درست است؟

۱) $(q\vee p)\Rightarrow q$ ۲) $(q\vee p)\Rightarrow p$ ۳) $p\wedge\sim q$ ۴) $(q\vee p)\Rightarrow(p\wedge q)$

انخ ۱۴۰۱ جدول ارزش کدام گزاره، با جدول ارزش گزارهٔ $(r\wedge(p\Rightarrow q))\Rightarrow(p\Rightarrow q)$ یکسان نیست؟

۱) $p\vee q\vee r$ ۲) $(p\wedge\sim q)\vee r$ ۳) $\sim(p\Rightarrow q)\vee r$ ۴) $(p\vee r)\wedge(q\Rightarrow r)$

انخ ۱۴۰۱ گزارهٔ $((\sim p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow\sim q))\Rightarrow p$، در کدام حالت نادرست است؟

۱) p و q درست

۲) $\sim p$ و q نادرست

۳) p، $\sim q$ درست

۴) p و $\sim q$ نادرست

سراسری ۱۴۰۱ خ ارزش گزارهٔ $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)$ در کدام حالت زیر درست است؟

۱) p درست، q نادرست، r درست

۲) p نادرست، q نادرست، r نادرست

۳) p درست، q درست، r نادرست

۴) p نادرست، q درست، r نادرست

سراسری ۱۴۰۰ ارزش گزاره $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست است. احتمال این که ارزش گزاره r نادرست باشد کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$
د	د	د	د	
د	د	ن	د	
د	ن	د	د	
د	ن	ن	ن	
ن	د	د	د	
ن	د	ن	د	
ن	ن	د	د	
ن	ن	ن	ن	

سراسری ۱۴۰۰خ ۲۰۳ ارزش گزاره $(p \vee q) \Rightarrow r$ نادرست است. احتمال این که q نادرست باشد کدام است؟
(گزینه ۲)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	
د	د	ن	د	
د	ن	د	د	
د	ن	ن	د	
ن	د	د	د	
ن	د	ن	د	
ن	ن	د	ن	
ن	ن	ن	ن	

بیان یک ترکیب شرطی درست به صورت شرط لازم و شرط کافی ←

$\underset{\text{شرط کافی}}{\square} \Rightarrow \underset{\text{شرط لازم}}{\bigcirc}$

مثلاً گزاره شرطی "اگر سه ضلع یک مثلث مساوی باشند، آن گاه مثلث متساوی الاضلاع است" به صورت‌های زیر بیان می‌شود:

- شرط کافی برای متساوی الاضلاع بودن مثلث، آن است که سه ضلع آن مساوی باشند.
- مساوی بودن سه ضلع مثلث شرط کافی برای متساوی الاضلاع بودن آن است.
- شرط لازم برای مثلث با سه ضلع مساوی، آن است که متساوی الاضلاع باشد.
- متساوی الاضلاع بودن مثلث شرط لازم برای مساوی بودن سه ضلع مثلث است.

تست: برای دو عدد حقیقی a و b، $a^2=b^2$ چه شرطی برای $a=-b$ است؟

۱) لازم
۲) کافی
۳) لازم و کافی
۴) نه لازم و نه کافی

نقیض یک ترکیب شرطی

شکل کلی: $\sim(\square \Rightarrow \bigcirc) \equiv \square \wedge \sim\bigcirc$

(سراسری ۹۸)

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

اثبات:

مثلاً

الف) اگر یک مثلث قائم الزاویه باشد، آن گاه میانه وارد بر بزرگترین ضلع، نصف آن ضلع است.

نقیض ←

ب) اگر $a^2=b^2$، آن گاه ($a=b$ یا $a=-b$).

نقیض ←

پ) اگر ($a>b$ و $c>0$)، آن گاه $ac>bc$.

نقیض ←

عکس نقیض یک ترکیب شرطی ← هم‌ارز با خودِ ترکیب شرطی است .

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

اساس کار: اثبات غیرمستقیم (برهان خلف) ←

اثبات

مثلاً

الف) اگر یک دانش آموز درس بخواند، آن‌گاه در امتحان نهایی قبول می‌شود.

عکس نقیض

ب) $a^2 = b^2$ یک شرط لازم برای $a = b$ است .

عکس نقیض

پ) اگر $a \overset{3}{\equiv} b$ و $a \overset{5}{\equiv} b$ ، آن‌گاه $a \overset{15}{\equiv} b$

عکس نقیض

تست: عکس نقیض گزاره " اگر یک چهارضلعی لوزی باشد یا دارای دو قطر برابر باشد، آن‌گاه چهارضلعی متوازی الاضلاع است و مستطیل است" کدام است؟

۱) اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع و مستطیل نباشد، آن‌گاه لوزی است یا دو قطر برابر دارد.

۲) اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع یا مستطیل نباشد، آن‌گاه لوزی نیست و دو قطر برابر ندارد.

۳) اگر یک چهارضلعی لوزی نباشد و دارای دو قطر برابر نباشد، آن‌گاه متوازی الاضلاع نیست یا مستطیل نیست.

۴) اگر یک چهارضلعی لوزی نباشد یا دارای دو قطر برابر نباشد، آن‌گاه متوازی الاضلاع نیست و مستطیل نیست.

(گزینه ۲)

ترکیب دوشرطی دو گزاره ← نماد ← $\Leftrightarrow$ ← اگر p، آنگاه q و برعکس : $p \Leftrightarrow q$ (اگر و تنها اگر)

فقط زمانی ارزش آن درست است که دو گزاره هم ارزش باشند.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

اساس کار گزاره های هم ارز (اثبات بازگشتی)

برای اثبات درستی $p \Leftrightarrow q$، می توان نشان داد $p \equiv q$. (برگرفته از ترازوی دو کفه ای)

◁ در صورت درستی گزاره دوشرطی $p \Leftrightarrow q$، آن را قضیه دوشرطی می نامند (شرط لازم و کافی)

توجه:

① ترکیب دوشرطی هر گزاره با خودش همواره درست است $\quad p \Leftrightarrow p \equiv T$

② " " " با نقیض خودش همواره نادرست است. $\quad p \Leftrightarrow \sim p \equiv F$

③ ترکیب دوشرطی دو گزاره، ترکیب عطفی ترکیب شرطی دو گزاره با عکس آن است.

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

$$\equiv [(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \vee [(\sim p \vee q) \wedge p]$$

$$\equiv [\underbrace{(\sim p \wedge \sim q)}_{\sim(p \vee q)} \vee \underbrace{(q \wedge \sim q)}_{F}] \vee [\underbrace{(\sim p \wedge p)}_{F} \vee \underbrace{(q \wedge p)}_{p \wedge q}]$$

$$\equiv \sim(p \vee q) \vee (p \wedge q)$$

(سراسری ۹۹)

نقیض ترکیب دوشرطی

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

مثال: نقیض گزاره $x = y \Leftrightarrow \sin x = \sin y$ عبارت است از:

$x \neq y \Leftrightarrow \sin x = \sin y$ یا $x = y \Leftrightarrow \sin x \neq \sin y$

توجه:

تست با توجه به جدول مقابل سه‌تایی (a,b,c) کدام است؟

p	q	$p\Rightarrow q$	$p\wedge q$	$p\Leftrightarrow q$
$65 \mid 2^{18}+1$	...	د	....	a
....	عدد $2^{2^5}+1$ اول است	b	....	ن
عدد ۷۱۳ غیر اول است	...	...	c	د

۱) (د، ن، د) ۲) (د، د، د)

۳) (ن، د، د) ۴) (د، ن، ن)

تست اگر ارزش گزاره $[p\wedge(r\Leftrightarrow q)]\Rightarrow(\sim p\vee r)$ نادرست باشد، آن‌گاه به‌جای گزارهٔ $\sim q$ کدام گزاره می‌تواند قرار گیرد؟

۱) هر عدد اول، فرد است. ۲) بی‌شمار عدد اول وجود دارد.

۳) هر مربع کامل زوج است. ۴) عدد 2^n+3 به ازای همهٔ اعداد طبیعی n، اول است.

سراسری ۹۹ کدام یک از گزاره‌های زیر، هم‌ارز منطقی گزارهٔ $p\Leftrightarrow q$ است؟

۱) $(p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)$

۲) $(p\vee q)\vee\sim(p\wedge q)$

۳) $(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$

۴) $(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)$

حرف‌هایی است برای نگفتن

و ارزش واقعی هر کس به اندازهٔ حرف‌هایی است که برای نگفتن دارد

(دکتر شریعتی)

سراسری ۱۴۰۱ کدام گزاره زیر، هم‌ارز منطقی گزاره $q \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ است؟

۱) p ۲) $p \vee q$
۳) q ۴) $\sim p \Leftrightarrow q$

ان‌ارخ ۱۴۰۰ ارزش گزاره $(\sim(p \Leftrightarrow q) \wedge p) \Rightarrow \sim q$، کدام است؟

۱) همواره درست است.
۲) همواره نادرست است.
۳) به ارزش p بستگی دارد.
۴) به ارزش q بستگی دارد.

ان‌ارخ ۱۴۰۱ اگر p گزاره درست، q گزاره نادرست و r گزاره دلخواه باشد. ارزش کدام گزاره درست است؟

۱) $(p \Leftrightarrow \sim q) \vee r$ ۲) $\sim(p \wedge \sim q) \wedge r$ ۳) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q)$ ۴) $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \vee q)$

ویژگی‌های ترکیب عطفی و ترکیب فصلی در یک نگاه

خودتوانی: $\begin{cases} p\wedge p\equiv p \\ p\vee p\equiv p\end{cases}$	جابه‌جایی: $\begin{cases} p\wedge q\equiv q\wedge p \\ p\vee q\equiv q\vee p\end{cases}$
شرکت‌پذیری: $\begin{cases} p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r \\ p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r\end{cases}$	توزیع‌پذیری (فاکتورگیری): $\begin{cases} p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r) \\ p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)\end{cases}$
$\begin{cases} p\wedge(p\vee q)\equiv p \\ p\vee(p\wedge q)\equiv p\end{cases}$ جذب $\begin{cases} p\wedge(\sim p\vee q)\equiv p\wedge q \\ p\vee(\sim p\wedge q)\equiv p\vee q\end{cases}$ شبه‌جذب (هم‌پوشانی)	دمورگان: $\begin{cases} \sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q \\ \sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q\end{cases}$
$\begin{cases} p\wedge F\equiv F \\ p\vee F\equiv p\end{cases}$, $\begin{cases} p\wedge T\equiv p \\ p\vee T\equiv T\end{cases}$	$\begin{cases} p\wedge q\equiv p \longleftrightarrow p\vee q\equiv q \\ p\wedge q\equiv p\vee q \longleftrightarrow p\equiv q\end{cases}$

ویژگی‌های ترکیب شرطی و ترکیب دوشرطی در یک نگاه

$$\underbrace{p\Rightarrow q\equiv\sim p\vee q}_{\text{نافذ}}\equiv\underbrace{\sim q\Rightarrow\sim p}_{\text{عکس نقیض}}$$

$T\Rightarrow F\equiv F$	$F\Rightarrow p\equiv T$ انتفای مقدم	$p\Rightarrow p\equiv T$

$[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)]\Rightarrow(p\Rightarrow r)]\equiv T$ تعدی	$p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$ عطف مقدمات
$\begin{cases}(p\vee q)\Rightarrow r\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r) \\ (p\wedge q)\Rightarrow r\equiv(p\Rightarrow r)\vee(q\Rightarrow r)\end{cases}$ توزیع‌پذیری $\Rightarrow$ روی $\vee$ و $\wedge$ از راست امکان‌پذیر نیست!	$\begin{cases}p\Rightarrow(q\vee r)\equiv(p\Rightarrow q)\vee(p\Rightarrow r) \\ p\Rightarrow(q\wedge r)\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)\end{cases}$ توزیع‌پذیری $\Rightarrow$ روی $\vee$ و $\wedge$ از چپ امکان‌پذیر است.

$$\begin{cases}p\vee(q\Rightarrow r)\equiv(p\vee q)\Rightarrow(p\vee r) \\ p\wedge(q\Rightarrow r)\equiv\ ??\end{cases}$$

$\vee$ روی $\Rightarrow$ توزیع‌پذیر است.

$\wedge$ روی $\Rightarrow$ توزیع‌پذیر نیست!!

$$p\Leftrightarrow q\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)\equiv\sim(p\vee q)\vee(p\wedge q)$$

$p\Leftrightarrow q\equiv\sim p\Leftrightarrow\sim q\equiv\sim q\Leftrightarrow\sim p$ (شبیه عکس نقیض)	$\begin{cases}p\Leftrightarrow p\equiv T \\ p\Leftrightarrow\sim p\equiv F\end{cases}$

$$\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q \qquad \text{(نقیض ترکیب شرطی)}$$

$$\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv p\Leftrightarrow\sim q\equiv\sim p\Leftrightarrow q \qquad \text{(نقیض ترکیب دوشرطی)}$$

گزاره های سوری

① گزارهٔ باسور عمومی ⟵ خاصیتی برای همه (All) عضوهای یک مجموعه بیان می‌شود $\xrightarrow{\text{نماد}}$ $\forall$

$\forall x \; ; \; p(x)$ ⟵ به ازای هر xای که در $p(x)$ صدق می‌کند یا برای هر xای، $p(x)$ برقرار است.

زمانی درست است که $S = D$، یعنی مجموعهٔ جواب گزاره نما، با دامنه برابر باشد
به عبارت دیگر مثال نقض برای آن یافت نشود.

مثال:

الف) $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; x^2 \geq x \xrightarrow{\text{بیان}}$

ب) $\forall k \in \mathbb{Z} \; ; \; k.(k+1) = ۲q \xrightarrow{\text{بیان}}$

ج) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \; ; \; x + \frac{1}{x} \geq ۲ \xrightarrow{\text{بیان}}$

تست H.W: اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq ۵\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری

الف) $\forall x \in A \; ; \; x + ۲ \leq ۹$ ب) $\forall x \in A \; ; \; x + 1 \geq ۳$ کدام است؟ (گزینهٔ ۱)

۱) الف : درست ، ب : نادرست
۲) الف : درست ، ب : درست
۳) الف : نادرست ، ب : درست
۴) الف : نادرست ، ب : نادرست

۲) گزارهٔ باسور وجودی ← خاصیتی برای بعضی از عضوهای یک مجموعه بیان می‌شود ← $\exists$ نماد (Exist)

$\exists x \,;\, p(x) \Rightarrow$ وجود دارد x ای که در $p(x)$ صدق می‌کند یا برای بعضی از مقادیر x، $p(x)$ برقرار است

زمانی درست است که $S \neq \phi$ ، یعنی مجموعهٔ جواب گزاره‌نما، حداقل یک عضو داشته باشد.

مثلاً

الف) $\exists x \in \mathbb{Z} \,;\, |x|<1 \xrightarrow{\text{بیان}}$

ب) $\exists a \in \mathbb{R} \,;\, a^3 = a \xrightarrow{\text{بیان}}$

پ) $\exists x \in \mathbb{N} \,;\, 2x^2+3x+1=0 \xrightarrow{\text{بیان}}$

نقیض گزاره های سوری

$$\boxed{\begin{array}{l} \sim(\forall x \,;\, p(x)) \equiv \exists x \,;\, \sim p(x) \\ \sim(\exists x \,;\, p(x)) \equiv \forall x \,;\, \sim p(x) \end{array}}$$

مثلاً

الف) $\forall x \in \mathbb{R} \,;\, x^2 > 0 \xrightarrow{\text{نقیض}}$

ب) $\exists x \in \mathbb{Z} \,;\, x.(x+1) = 2k \xrightarrow{\text{نقیض}}$

پ) $\forall a \in \mathbb{N} \,;\, ((a=2k) \vee (a=2k+1)) \xrightarrow{\text{نقیض}}$

ت) $\exists x \in \mathbb{R} \,;\, ((x^2>0) \wedge (x^2<0)) \xrightarrow{\text{نقیض}}$

ث) $\forall y \in \mathbb{R} \,;\, ((y>0) \Rightarrow (y^2>1)) \xrightarrow{\text{نقیض}}$

ج) $\exists x \in \mathbb{Z} \,;\, ((x^2+1=0) \Leftrightarrow (x^2<0)) \xrightarrow{\text{نقیض}}$

سراسری خ ۹۸ کدام گزاره سوری زیر، دارای ارزش درست است؟

۱) $\forall x\in \mathbb{R}: x^2+2>2x$

۲) $\exists x\in \mathbb{R}: \frac{x-1}{x}=x$

۳) $\exists x\in \mathbb{R}: \left|x+\frac{1}{x}\right|<2$

۴) $\forall x\in \mathbb{R}: \frac{x^2-4}{x-2}=x+2$

سراسری ۹۸ گزاره سوری $\forall x\in \mathbb{N}, \exists y\in \mathbb{N}: P(x,y)$، با کدام گزاره‌نمای $P(x,y)$ دارای ارزش درست است؟

۱) $y-x=6$ ۲) $x-y=6$ ۳) $x+y=6$ ۴) $xy=6$

سراسری گزاره‌نمای $|x+y|=[x]+[y]$ به ازای کدام دو سور برقرار است؟ $(x,y\in \mathbb{R})$ (گزینه ۴)

۱) $\forall x \forall y$ ۲) $\forall x \exists y$ ۳) $\exists x \forall y$ ۴) $\exists x \exists y$

نکته: تعویض جای دو سور غیرهم‌نام در حالت کلی مجاز نیست.

مثال:

الف) $\exists x\in \mathbb{R}\ \forall y\in \mathbb{R}: x>y \xrightarrow{\text{بیان}}$

ب) $\forall y\in \mathbb{R}\ \exists x\in \mathbb{R}: x>y \xrightarrow{\text{بیان}}$

مجموعه ← هواره
Set

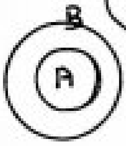
مجموعهٔ مرجع (جهانی) : همهٔ عضوها را دارد ← نماد U
(Universe)

مجموعهٔ تهی : هیچ عضوی ندارد ← نماد ϕ یا $\{\ \}$

زیرمجموعه
Subset

$$A \subseteq B \iff (\forall x \in U ;\ x \in A \Rightarrow x \in B)$$

همهٔ عضوهای A ، در B باشند.



پس هر مجموعه‌ای ، زیرمجموعهٔ U است.

نتیجه:

$$A \not\subseteq B \iff$$

ویژگی ها :

① هر مجموعه ، زیرمجموعهٔ خودش است. $A \subseteq A$

② مجموعهٔ تهی ، زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است. $\phi \subseteq A$

③ خاصیت تعدی

$$(A \subseteq B \land B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$$

* شرط تساوی دو مجموعه : هر یک زیرمجموعهٔ دیگری باشند (شرط لازم و کافی)

$$(A \subseteq B \land B \subseteq A) \iff A = B$$

* نتیجه : برای مجموعهٔ دلخواه A از مرجع U داریم :

$$\boxed{\begin{cases} A \subseteq \phi \Rightarrow A = \phi \\ U \subseteq A \Rightarrow A = U \end{cases}}$$

قضیه : تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با 2^n

* به تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه ، به جز خودِ آن مجموعه ، زیرمجموعه‌های محض (سره) می‌گویند.

پس تعداد زیرمجموعه‌های محض (سره) یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با $2^n - 1$

سراسری ۹۱ چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{a, b, \{a,b\}, \{b,a\}\}$ عضو $\{a,b\}$ را ندارد؟

۱) ۴ ۲) ۶
۳) ۸ ۴) ۷

سراسری اگر ۲ عضو از اعضای مجموعهٔ A کم کنیم، از تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود. مجموعهٔ A دارای چند زیرمجموعهٔ ناتهی است؟

۱) ۶۳ ۲) ۱۲۷
۳) ۵۱۱ ۴) ۱۰۲۳

سراسری خارج اگر $A=\{2\}$ ، $B=\{2,\{2\}\}$ و $C=\{\{2\},\{2,\{2\}\}\}$ ، کدام نادرست است؟

۱) $B\subseteq C$
۲) $A\subset B$
۳) $A\in B$
۴) $B\in C$

نکته:
خود دایره در مربع باشد: $\bigcirc \in \square$
تمام عضوهای دایره در مربع باشد: $\bigcirc \subseteq \square$

سراسری ۹۵ H.W اگر $A=\{2\}$ ، $B=\{3,5,\{2\}\}$ و $C=\{\{\{2\},3,5\},2\}$ ، کدام نادرست است؟ (گزینه ۲)

۱) $A\in B$ ۲) $A\in C$
۳) $B\in C$ ۴) $A\subset C$

سراسری اگر $A=\{a,b,\{a\},\{a,b\}\}$ و $B=\{a,b\}$ ، مجموعهٔ $A-\{B\}$ چند زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۷
۳) ۶ ۴) ۱۴

سراسری خارج اگر $A=\{a,b,\{a\},\{b\}\}$ ، مجموعهٔ $A-\{A\}$ چند زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۷
۳) ۶ ۴) ۱۵

سراسری خ ۹۲
خ ۰۳

اگر $A=\{1,\{1\},\{1,2\},\{2\},2\}$ و $B=\{x\in \mathbb{R};\ x^2+2=3x\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $A-B$ دارای چند زیرمجموعهٔ ناتهی است؟ (گزینهٔ ۳)

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۷ ۴) ۱۴

سراسری خ ۹۴

اگر $A=\{1,2,\{1,2,3\}\}$ و $B=\{1,2,3,\{1,2\}\}$ و $C=\{1,2,3\}$، کدام درست است؟

۱) $A-B=C$

۲) $B-C=\phi$

۳) $B-C=\{1,2\}$

۴) $A-B=\{C\}$

مجموعهٔ توانی یک مجموعه (Power Set) اختیاری

مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A را گویند ← نماد $P(A)$

$P(A)=\{X : X\subseteq A\}$ → $n(P(A))=2^{n(A)}$

مثلاً اگر $\underbrace{A=\{1,2\}}_{\text{۲ عضو}}$، آن‌گاه $\underbrace{P(A)}_{2^2=4\ \text{عضو}}=\{\underbrace{\{\,\}}_{\phi},\{1\},\{2\},\underbrace{\{1,2\}}_{A}\}$

تست: اگر $A=\{a,b,\{a,b\}\}$، آن‌گاه تعداد عضوهای $P(P(A))$ کدام است؟

۱) ۱۲۸

۲) ۲۵۶

۳) ۶۴

۴) ۵۱۲

سراسری
خ ۰۳

اگر A مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی دورقمی و $B=\{7k \mid k\in A\}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ توانی $A\cap B$ چند عضو دارد؟ (گزینهٔ ۴)

۱) ۸

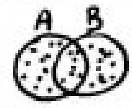
۲) ۱۶

۳) ۱۶

۴) ۳۲

جبر مجموعه‌ها ← اجتماع، اشتراک، تفاضل، ضرب دکارتی

اجتماع دو مجموعه (Union) ← شکل

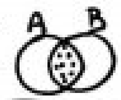


تعریف ← عضوهای متعلق به A یا B یا هردو (متعلق به حداقل یکی)

$$A\cup B=\{x\in U \mid x\in A \lor x\in B\}$$

$$x\in(A\cup B)\Leftrightarrow(x\in A \lor x\in B)$$

اشتراک دو مجموعه (Intersection) ← شکل



تعریف ← عضوهای متعلق به A و B (متعلق به هردو)

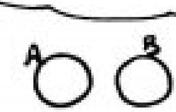
$$A\cap B=\{x\in U \mid x\in A \land x\in B\}$$

$$x\in(A\cap B)\Leftrightarrow(x\in A \land x\in B)$$

با توجه به شکل واضح است که

$$\begin{cases}A\subseteq(A\cup B)\\ B\subseteq(A\cup B)\end{cases},\quad \begin{cases}(A\cap B)\subseteq A\\ (A\cap B)\subseteq B\end{cases},\quad (A\cap B)\subseteq(A\cup B)$$

تذکر: A و B دو مجموعهٔ جدا از هم هستند $\Leftrightarrow$ $(A\cap B=\varnothing)$



سراسری: اگر $n\in\mathbb{N}$ و $A_n=\{m\in\mathbb{Z} : m\geq -n , 2^m\leq n\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $A_3\cap A_4$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۶
۳) ۳۲ ۴) ۶۴

تذکر ۱: دو طرف دو یا چند رابطهٔ زیرمجموعه را می‌توان باهم نظیر به نظیر اجتماع یا اشتراک کرد.

$$\begin{cases}A\subseteq B\\ C\subseteq D\end{cases}\Rightarrow (A\cap C)\subseteq(B\cap D)\ ,\ (A\cup C)\subseteq(B\cup D)$$

تذکر ۲: دو طرف دو یا چند رابطهٔ تساوی را می‌توان باهم نظیر به نظیر اجتماع یا اشتراک کرد.

$$\begin{cases}A=B\\ C=D\end{cases}\Rightarrow A\cap C=B\cap D\ ,\ A\cup C=B\cup D$$

تذکر ۳: به دو طرف هر تساوی (زیرمجموعه) می‌توان مجموعهٔ دلخواهی را اجتماع یا اشتراک کرد.

$$\begin{cases}A=B\Rightarrow A\cap C=B\cap C\ ,\ A\cup C=B\cup C\\ A\subseteq B\Rightarrow (A\cap C)\subseteq(B\cap C)\ ,\ (A\cup C)\subseteq(B\cup C)\end{cases}$$

ویژگی های مهم اجتماع و اشتراک

① خودتوانی
$$\begin{cases} A\cup A = A \\ A\cap A = A \end{cases}$$

② جابه‌جایی
$$\begin{cases} A\cup B = B\cup A \\ A\cap B = B\cap A \end{cases}$$

③ شرکت‌پذیری
$$\begin{cases} A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C \\ A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C \end{cases}$$

④ توزیع‌پذیری
فاکتورگیری
$$\begin{cases} A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C) \\ A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C) \end{cases}$$

⑤ جذب
$$\begin{cases} A\cup(A\cap B) = A \\ A\cap(A\cup B) = A \end{cases}$$

۲ ویژگی دارد: هم اجتماع، هم اشتراک وجود دارد. یک مجموعه تکراری می‌شود.
(جواب: مجموعهٔ تکراری می‌باشد.)

---

⑥

$$\begin{cases} A\subseteq B \Longleftrightarrow A\cup B = B \\ A\subseteq B \Longleftrightarrow A\cap B = A \end{cases}$$

(اجتماع میشه بزرگه / اشتراک میشه کوچیکه)

پس $A\cup B = B \Longleftrightarrow A\cap B = A$

نتیجه:
$$\boxed{\begin{matrix} \phi\cup A = A, & A\cup U = U \\ \phi\cap A = \phi, & A\cap U = A \end{matrix}}$$

---

⑦ خاصیت "حذف‌پذیری" ندارند.
$$\begin{cases} A\cup B = A\cup C \not\Rightarrow B = C \\ A\cap B = A\cap C \not\Rightarrow B = C \end{cases}$$

امّا
$$[(A\cup B = A\cup C) \wedge (A\cap B) = A\cap C] \Longleftrightarrow B = C$$

---

⑧
$$A\cup B = A\cap B \Longleftrightarrow A = B$$

---

⑨
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n \quad , \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n$$

تمرین H.W نشان دهید

الف) $A\cup B = \phi \Longleftrightarrow A = B = \phi$

ب) $A\cap B = U \Longleftrightarrow A = B = U$

سراسری ۹۶ اگر $n\in\mathbb{N}$ و $A_n=\{m\in\mathbb{Z} : |m|\le n , 2^m\le 2n\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $(A_6-A_4)\cup A_1$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵
۳) ۶ ۴) ۷

سراسری ۹۳ اگر $A_i=[-i , \frac{9-i}{2}]$، آن‌گاه $(A_2\cap A_5)-(A_1\cap A_7)$ به کدام صورت است؟

۱) $[-3,-1)\cup(1,3]$
۲) $[-3,-1]\cup[1,3]$
۳) $[-1,1]$
۴) ϕ

سراسری اگر n عددی طبیعی و A_n بازهٔ $((-1)^n n , 2n)$ باشد، چند عدد صحیح به $\bigcup_{n=1}^{4}A_n$ تعلق دارد؟

۱) ۸ ۲) ۹
۳) ۱۰ ۴) ۱۱

سراسری خ ۹۶ H.W اگر $n\in\mathbb{N}$ و $A_n=(-\frac{2}{n} , \frac{n-2}{n})$ باشد، آن‌گاه $\bigcap_{i=4}^{8}A_i$ کدام است؟
(گزینه ۱)

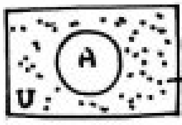
۱) $(-\frac{1}{4} , \frac{1}{2})$
۲) $(-\frac{1}{4} , \frac{3}{4})$
۳) $(-\frac{1}{2} , \frac{3}{4})$
۴) $(-\frac{1}{8} , \frac{1}{2})$

سراسری H.W اگر $A_i=\{m\in\mathbb{Z} : -i\le m\le 8-i\}$، مجموعهٔ $\bigcup_{i=1}^{8}A_i-\bigcap_{i=1}^{8}A_i$ چند عضو دارد؟
(گزینه ۲)

۱) ۱۳ ۲) ۱۴
۳) ۱۵ ۴) ۱۶

متمم یک مجموعه (نسبت به مجموعهٔ مرجع) (مکمل)

متمم (مکمل) مجموعهٔ دلخواه A (نسبت به مجموعهٔ U)، شامل همهٔ عضوهای متعلق به مجموعهٔ U است که در A وجود ندارند.



متمم A: $A' = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$ ← $x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$ ، $x \in A \Leftrightarrow x \notin A'$

واضح است که A و A' دو مجموعهٔ جدا از هم می‌باشند، یعنی $A \cap A' = \phi$

بنابراین $A \cup A' = U$

سراسری ۱۴۰۱ خ: اگر U مجموعهٔ مرجع و $A' \cup B = A' \cap B'$ باشد، کدام مورد درست است؟

۱) $A=B$ ۲) $A=\phi$ ۳) $B=U$ ۴) $B=\phi$

نتیجه ۱: تنها مجموعه‌ای که هم زیرمجموعهٔ A و هم زیرمجموعهٔ A' است، مجموعهٔ تهی می‌باشد. یعنی

$$(X \subseteq A \wedge X \subseteq A') \Rightarrow X = \phi$$

نتیجه ۲: تنها مجموعه‌ای که هم A و هم A' زیرمجموعه‌ای از آن می‌باشند، مجموعهٔ مرجع است. یعنی

$$(A \subseteq X \wedge A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$$

ویژگی‌های مهم

۱) متمم‌گیری: $A = B \Leftrightarrow A' = B'$

۲) $(A')' = A$

۳) $\phi' = U \,,\, U' = \phi$

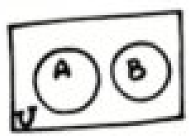
۴) $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$ نه مانند

۵) قانون دمورگان:

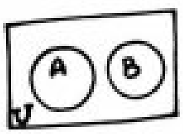
$$\begin{cases} (A\cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases}$$

← تک‌تک را متمم و علامت وسط را برعکس می‌کند.

۶) اگر دو مجموعه جدا از هم باشند، هر یک زیرمجموعهٔ متمم دیگری است.



$$A \cap B = \phi \Leftrightarrow (A \subseteq B' \wedge B \subseteq A')$$



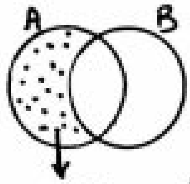
سراسری ۹۷: اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، مجموعهٔ $(A \cap (A' \cup B)) \cup (B \cap (A' \cup B'))$ برابر کدام است؟

۱) $A \cap B$ ۲) $A \cup B$ ۳) B ۴) A

سراسری ۱۴۰۱: اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ مرجع U باشند، مجموعهٔ $A' \cup ((B \cap A) \cap [(B \cup A) \cap B])$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) $(A-B)'$ ۲) $B-A$ ۳) B ۴) ϕ

تفاضل دو مجموعه
Diffrence



$A-B=\{x\in U : x\in A \wedge x\notin B\}$ ← شامل عضوهایی که متعلق به A می‌باشند و متعلق به B نمی‌باشند (فقط متعلق به اولی)

$$x\in(A-B) \Longleftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B)$$

نتیجه: با توجه به شکل واضح است که $(A-B)\subseteq A$ و به همین ترتیب $(B-A)\subseteq B$

ویژگی‌های مهم

① تبدیل تفاضل به اشتراک $\quad A-B=A\cap B'$

به طور کلی

$$\boxed{\bigcirc - \square = \bigcirc \cap \square'}$$

(متمم)

نتیجه ۱: $A'=U-A$

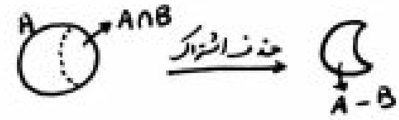
اثبات: $U-A=U\cap A'=A'$

نتیجه ۲: $A-B=B'-A'$

اثبات:

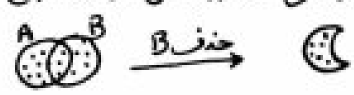
② برای یافتن $A-B$، کافی است از مجموعهٔ A، عضوهای مشترک با B را حذف کنیم. به عبارت دیگر

$$A-B=A-(A\cap B)$$



نتیجه: برای یافتن $A-B$، می‌توان از اجتماع این دو مجموعه، B را حذف کرد. یعنی

$$A-B=(A\cup B)-B$$



③ اگر دو مجموعه جدا از هم باشند، تفاضل آن‌ها برابر با مجموعهٔ اولی است. (اولی = تفاضل ⟵ جدا از هم)

$$A\cap B=\Phi \Longleftrightarrow (A-B=A \wedge B-A=B)$$

نتیجه: برای مجموعهٔ دلخواه A داریم:

الف) $A-A=\Phi$ $\quad$ ب) $A-A'=A$ $\quad$ پ) $A-\Phi=A$ $\quad$ ت) $\Phi-A=\Phi$

۴) $A \subseteq B \iff A - B = \phi$

✱ توجه :

۵) تفاضل از راست بر اجتماع و اشتراک توزیع پذیر است.

$$\begin{cases}(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)\\(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)\end{cases}$$

هشدار ✱ تفاضل از چپ بر اجتماع و اشتراک توزیع نمی‌شود.

$$\begin{cases}A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)\\A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)\end{cases}$$

۶) اشتراک روی تفاضل توزیع پذیر است.

$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$ ولی اجتماع نه !!

$A\cup(B-C)=\,??$

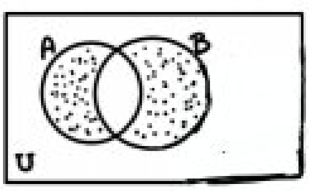
۷) $A-B=B-A \iff A=B$

۸) تفاضل خاصیت شرکت پذیری ندارد. $A-(B-C)\neq(A-B)-C$

۹) تفاضل خاصیت حذف پذیری ندارد. $A-B=A-C \nRightarrow B=C$

۱۰) تفاضل خاصیت جابجایی ندارد. $A-B\neq B-A$

تفاضل متقارن دو مجموعه ← شامل عضوهایی است که فقط به یکی از دو مجموعه تعلق دارد. (اختیاری)



$$A\Delta B=\underbrace{(A-B)}_{\text{فقط } A}\cup\underbrace{(B-A)}_{\text{فقط } B}=(A\cup B)-(A\cap B)$$

یا

مثال: اگر $A=\{1,2,3,4,5\}$ و $B=\{2,3,7\}$، آنگاه $A\Delta B$ را بیابید.

نکته: $A'\Delta B'=A\Delta B$

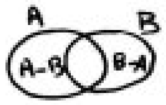
زیرا :

سراسری مجموعهٔ $(A-B)' \cap (A \cup B) \cap A'$ برابر کدام است؟

۱) $B-A$ ۲) B
۳) ϕ ۴) A'

سراسری اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی باشند، مجموعهٔ $[(B \cap A) \cup (B-A)] \cap [A \cup (A \cap B)]'$ برابر کدام است؟

۱) $A'-B'$ ۲) $(A-B)'$
۳) A' ۴) ϕ



سراسری ۹۱ خ اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، $(A \cap B') - (B-A)$ برابر کدام است؟

۱) B' ۲) ϕ
۳) $A \cap B$ ۴) $A-B$

سراسری خ متمم مجموعهٔ $C \cup A' \cup B'$ نسبت به مجموعهٔ جهانی، با کدام مجموعه برابر نیست؟

۱) $(A \cap B)-(A \cap C)$ ۲) $(A-C) \cup (B-C)$
۳) $A \cap (B-C)$ ۴) $(A \cap B)-C$

سراسری ۹۰ اگر A، B و C سه مجموعهٔ ناتهی و $A \subset B$ باشند، حاصل $(A \cap (B-C)) - (A \cap B \cap C)$ کدام است؟

۱) $A \cap C'$ ۲) $A \cap C$
۳) A ۴) B

سراسری ۹۵ خ مجموعهٔ A دارای ۱۵ زیرمجموعهٔ ناتهی و مجموعهٔ B دارای ۸ زیرمجموعه است. مجموعهٔ $C = A \cap (A'-B)'$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸
۳) ۱۲ ۴) ۱۶

سراسری ۹۸ خ مجموعهٔ A دارای ۵۱۲ زیرمجموعه است. مجموعهٔ $A \cap B$ دارای ۳ عضو است. تعداد زیرمجموعه‌های $(B \cup A')'$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۳۲
۳) ۴۸ ۴) ۶۴

سراسری ۹۹ فرض کنید A و B دو مجموعهٔ غیرتهی با شرط $A \subset B$ باشند، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟

۱) $B - A' = A$ ۲) $A - B' = A$ ۳) $A \cap B' = \phi$ ۴) $B \cap A' = \phi$

سراسری ۹۹خ فرض کنید A و B دو مجموعهٔ غیرتهی و جدا از هم، با یک مجموعهٔ مرجع باشند، کدام رابطه نادرست است؟

۱) $A \subset B'$ ۲) $A - B' = \phi$ ۳) $A \cap B' = A$ ۴) $(A \cup B)' = \phi$

سراسری ۹۹ مجموعهٔ $(A-B) \cup \left((B \cap C)' \cap ((B' \cup A) - B)\right)$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) $A \cup B'$
۲) $A \cap B'$
۳) A
۴) B'

سراسری ۹۹خ مجموعهٔ $(A - (A \cap B')) \cup (B \cap (A \cap B')')$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) A
۲) B
۳) A'
۴) B'

سراسری ۱۴۰۰ فرض کنید $U = A \cup B$ مجموعهٔ مرجع و $C = (A-B) \cup (B-A)$. اگر $((A'-B)' \cap C)' = B$، کدام عبارت درست است؟

۱) $B \subsetneq A$
۲) $A \cap B = \phi$
۳) $A \subsetneq B$
۴) $A = B$

سراسری ۱۴۰۰خ فرض کنید $C = (A-B) \cup (B-A)$، حاصل $(A' \cap B')' \cap C'$ کدام است؟ H.W

۱) $A \cap B$ ۲) C
۳) $A \cup B$ ۴) C'

(گزینه ۱)

سراسری ۱۴۰۱ خ — اگر A و B دو مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، مجموعه $[(A\cap B)\cup(A-B)]\cap[(A\cap B)-B]'$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) A ۲) $A-B$

۳) ϕ ۴) $A'-B'$

[illegible] ۱۴۰۰ خ — اگر متمم مجموعه $(A-B)\cup(B-A)$، برابر $A\cap B$ باشد، کدام عبارت درست است؟ (U مجموعه مرجع است)

۱) $A\subset B$

۲) $A\subseteq B'$

۳) $A\cup B=U$

۴) $A=\phi$ یا $B=\phi$

[illegible] ۱۴۰۰ خ — اگر $A\subseteq B'$، حاصل $((A-B)\cup(B-A))'$ کدام است؟

۱) $A\cap B$

۲) $A\cup B$

۳) $A'\cap B'$

۴) $A'\cup B'$

ویژگی‌های اجتماع، اشتراک و متمم در یک نگاه

خودتوانی $\begin{cases} A\cup A = A \\ A\cap A = A \end{cases}$	جابه‌جایی $\begin{cases} A\cup B = B\cup A \\ A\cap B = B\cap A \end{cases}$
شرکت‌پذیری $\begin{cases} A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C \end{cases}$	توزیع‌پذیری (فاکتورگیری) $\begin{cases} A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \end{cases}$
$\begin{cases} A\cup(A\cap B) = A \\ A\cap(A\cup B) = A \end{cases}$ جذب — $\begin{cases} A\cup(A'\cap B) = A\cup B \\ A\cap(A'\cup B) = A\cap B \end{cases}$ شبه جذب (هم‌پوشان)	دمورگان $\begin{cases} (A\cup B)' = A'\cap B' \\ (A\cap B)' = A'\cup B' \end{cases}$
$\begin{cases} A\cup U = U \quad , \quad A\cup\phi = A \\ A\cap U = A \quad , \quad A\cap\phi=\phi \end{cases}$	اجتماع همیشه بزرگ، اشتراک همیشه کوچک $\begin{cases} A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B = B \\ A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B = A \end{cases}$
$A\cup B = A\cap B \Leftrightarrow A=B$	$A\cap B = A \Leftrightarrow A\cup B = B$
$[(A\cup B=A\cup C) \wedge (A\cap B=A\cap C)] \Rightarrow B=C$	حذف‌پذیری ندارد $\begin{cases} A\cup B = A\cup C \not\Rightarrow B=C \\ A\cap B = A\cap C \not\Rightarrow B=C \end{cases}$
$A\cap B=\phi \Leftrightarrow (A\subseteq B' \wedge B\subseteq A')$ — $\begin{cases} U'=\phi \\ \phi'=U \end{cases}$	$\begin{cases} A=B \Leftrightarrow A'=B' \\ A\subseteq B \Leftrightarrow B'\subseteq A' \end{cases}$ — $\begin{cases} A\cap A'=\phi \\ A\cup A' = U \end{cases}$

ویژگی‌های تفاضل دو مجموعه در یک نگاه

$A-B = A\cap B' = A-(A\cap B) = (A\cup B)-B = B'-A'$	
$A\cap B=\phi \Leftrightarrow (A-B=A \,,\, B-A=B)$ اولی = تفاضل ← جدا از هم	$A\subseteq B \Leftrightarrow A-B=\phi$ (اشتراک = بزرگ ـ کوچک)
$A-B=B-A \Leftrightarrow A=B$	$\begin{cases} A-A=\phi \\ \phi-A=\phi \end{cases}$ — $\begin{cases} A-\phi = A \\ A-A' = A \end{cases}$
$\begin{cases} (A\cup B)-C = (A-C)\cup(B-C) \\ (A\cap B)-C = (A-C)\cap(B-C) \end{cases}$ تفاضل از راست، روی اجتماع و اشتراک توزیع‌پذیر است.	$\begin{cases} A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C) \\ A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C) \end{cases}$ تفاضل از چپ روی اجتماع و اشتراک توزیع‌پذیر نیست!!
اشتراک روی تفاضل توزیع‌پذیر است. اجتماع روی تفاضل توزیع‌پذیر نیست!!	$\begin{cases} A\cap(B-C) = (A\cap B)-(A\cap C) \\ A\cup(B-C) = ?? \end{cases}$
$A-B = A-C \not\Rightarrow B=C$ حذف‌پذیری ندارد	$A-(B-C) \neq (A-B)-C$ شرکت‌پذیری ندارد

ضرب دکارتی دو مجموعه ← ضرب دکارتی مجموعهٔ A در مجموعهٔ B، مجموعه‌ای است شامل تمام زوج‌های مرتب که مؤلفهٔ اول آن‌ها از A و مؤلفهٔ دوم آن‌ها از B است.

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\} \longrightarrow (x,y) \in (A \times B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B)$$

مثلاً:

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$

$$\begin{cases} A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\} \\ B \times A = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\} \end{cases}$$

واضح است که

① ضرب دکارتی دو مجموعه خاصیت جابه‌جایی ندارد. $A \times B \neq B \times A$

② $n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \cdot n(B)$

سراسری ۱۴۰۱ مجموعه‌های A، B، C و D را در نظر بگیرید: تعداد اعضای C، دو واحد بیشتر از A و تعداد اعضای D، سه واحد کمتر از B است. اگر تعداد اعضای مجموعهٔ $C \times B$، ۲۵ درصد بیشتر از تعداد اعضای مجموعهٔ $A \times B$ و ۱٫۵ برابر تعداد اعضای مجموعهٔ $A \times D$ باشد، اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های A و B چقدر است؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۱۰

تذکر

$$A^2 = A \times A = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in A\}$$

مثلاً:

$A = \{a,b\} \Rightarrow A^2 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,a),(b,b)\}$

تست ۱۴۰۳ اگر $A = \{2^k \mid k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 10\}$، آنگاه مجموعهٔ $B^2 - A^2$ چند عضو دارد؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۶
۴) ۷

(گزینه ۱)

ویژگی‌های مهم

① $$\phi \times A = A \times \phi = \phi$$

نتیجه ۱: $\phi \times \phi = \phi$

نتیجه ۲: $A\times B = \phi \Leftrightarrow (A=\phi \vee B=\phi)$

نتیجه ۳: $A\times B = B\times A \Leftrightarrow (A=\phi \vee B=\phi \vee A=B)$

نتیجه ۴:

$$\boxed{A\times B = B\times A \xLeftrightarrow[B\neq\phi]{A\neq\phi} A=B}$$

تست اگر $A=\{y+2, 5, z\}$ ، $B=\{x+1, 4, -2\}$ و $A\times B=B\times A$ ، آنگاه $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

سراسری ۹۹ در مجموعه‌های چهارعضوی $A=\{x+2, 1, 4, y\}$ و $B=\{5, 7, z, t-1\}$ ، فرض کنید $A\times B=B\times A$ باشد. تعداد مجموعه‌ها به صورت $\{(x,y),(z,t)\}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۶

② $$\boxed{(A\subseteq C \wedge B\subseteq D) \Leftrightarrow (A\times B)\subseteq (C\times D)}$$

دو یا چند رابطه زیرمجموعه را می‌توان نظیر به نظیر ضرب دکارتی کرد.

نتیجه ۱:

$$(A=C \wedge B=D) \Leftrightarrow A\times B = C\times D$$

نتیجه ۲:

$$\boxed{A\times B = A\times C \Leftrightarrow B=C}$$

ضرب دکارتی، خاصیت حذف‌پذیری دارد.

سراسری اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند و $(A\times B)-(B\times A)=\phi$ ، آنگاه کدام مجموعه غیرتهی است؟

۱) $A\cap B$ ۲) $A-B$

۳) $B-A$ ۴) $(B\times A)-(A\times B)$

۳) ضرب دکارتی روی تمام عملگرهای جبر مجموعه‌ای (اجتماع، اشتراک، تفاضل) توزیع‌پذیر است.

$$\begin{cases} A\times(B\bigcirc C)=(A\times B)\bigcirc(A\times C)\\ (B\bigcirc C)\times A=(B\times A)\bigcirc(C\times A)\end{cases}$$

---

۴) ضرب دکارتی و اشتراک می‌توانند، با حفظ ترتیب مجموعه‌ها، جایشان را عوض کنند.

$$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$$

نتیجه:

$$\boxed{(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)\times\underbrace{(B\cap A)}_{A\cap B}=(A\cap B)^2}$$

سراسری ۹۳ اگر $A=\{x\in\mathbb{N} : 5<x^2<50\}$ و $B=\{3k-2 \mid k\in\mathbb{Z} \wedge 1\le k\le 4\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های $(A\times B)\cap(B\times A)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸

۳) ۱۶ ۴) ۳۲

سراسری ۹۲ H.W اگر $A=\{2k-1 \mid k\in\mathbb{Z} \wedge 1\le k\le 5\}$ و $B=\{k\in\mathbb{Z} : |k-3|\le 2\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $(A\times B)\cap(B\times A)$ چند عضو دارد؟

(گزینه ۳)

۱) ۶ ۲) ۸

۳) ۹ ۴) ۱۶

سراسری اگر B, A دو مجموعهٔ غیرتهی باشند و $(A\times B)\cap(B\times A)=\phi$، آن‌گاه مجموعهٔ $A-B$ کدام است؟

۱) A ۲) ϕ

۳) B ۴) $B-A$

تست اگر A مجموعهٔ اعداد اول یک رقمی و $B=\{3,4,5,6,7\}$ ، آن‌گاه هر یک از مجموعه‌های زیر چند عضو دارد؟

الف) $A \cup B$

ب) $A - B$

پ) $A \Delta B$

ت) $(A \times B) \cap (B \times A)$

ث) $(A \times B) \cup (B \times A)$

ج) $(A \times B) - (B \times A)$

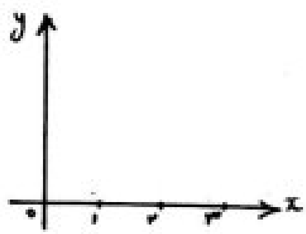
چ) $A^2 \cap B^2$

ح) $A^2 - B^2$

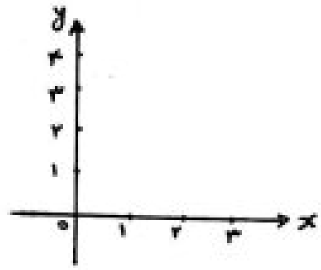
خ) $(A \times B) - (B \times B)$

تست: اگر $A=\{x\in\mathbb{R} \mid 1\leq x\leq 3\}$ و $B=\{4\}$، آن‌گاه نمودار مختصاتی مجموعهٔ $A\times B$ کدام است؟

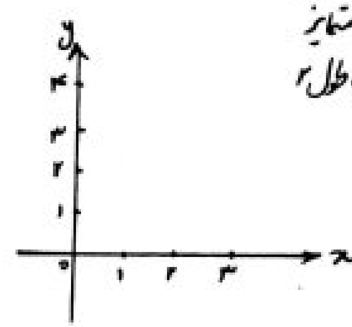
۱) ناحیهٔ بین دو خط موازی
۲) سطح یک مستطیل
۳) دو نقطهٔ متمایز
۴) پاره‌خطی به طول ۲



A



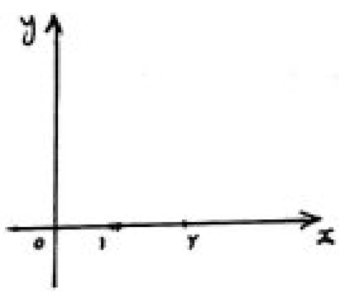
B



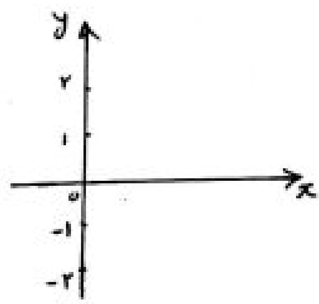
A × B

تست: اگر $A=[-2,2]$ و $B=[1,2]$، آن‌گاه نمودار مختصاتی $B\times A$ کدام است؟

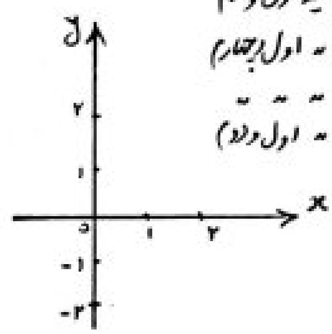
۱) مستطیلی در ناحیه اول و دوم
۲) " " " اول و چهارم
۳) مربعی " " " "
۴) مربعی " " اول و دوم



B



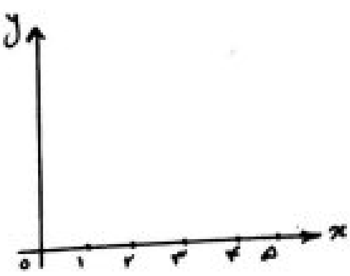
A



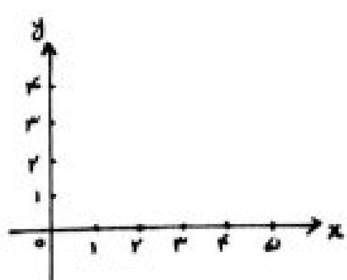
B × A

تست: اگر $A=(1,5]$ و $B=\{3,4\}$، آن‌گاه نمودار مختصاتی $A\times B$ کدام است؟

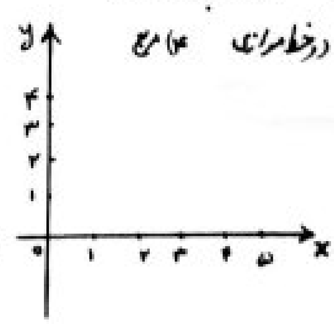
۱) مستطیل ۲) دو پاره‌خط موازی
۳) ناحیه بین دو خط موازی ۴) مربع



A



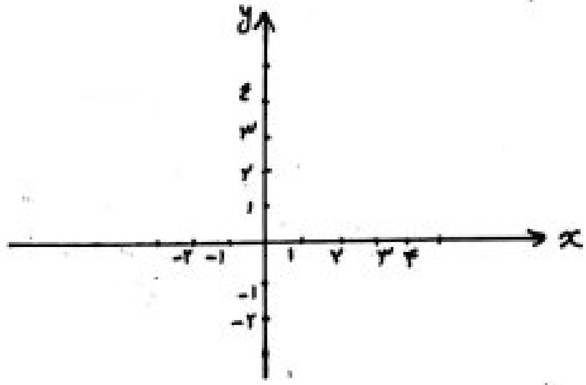
B



A × B

سراسری ۹۹ خ

اگر $A=[1,4]$ و $B=(-1,3]$ باشند، مساحت نمودار $(A\times A)-(B\times B)$ در صفحهٔ مختصات کدام است؟

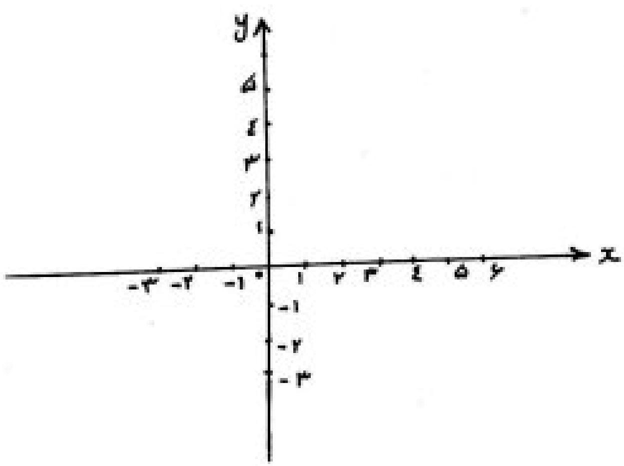


۱) ۴ ۲) ۵
۳) ۶ ۴) ۷

تست H.W

اگر $A=[-2,5)$ و $B=[0,3]$ ، آن‌گاه مساحت نمودار $(A\times B)-A^2$ در صفحهٔ مختصات کدام است؟

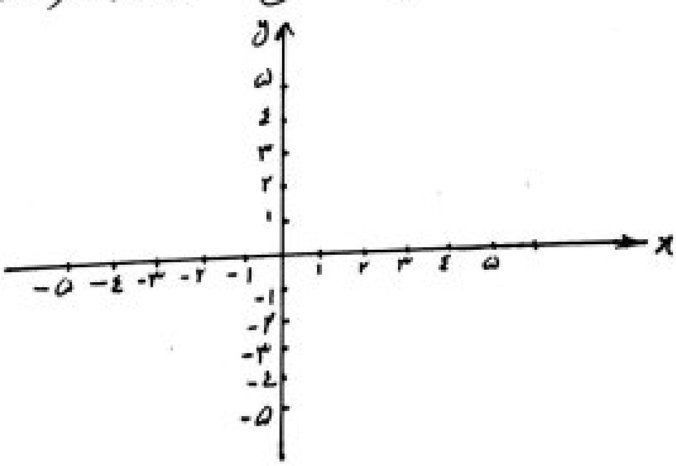
(گزینه ۴)



۱) ۲۸ ۲) ۲۱
۳) ۳۲ ۴) صفر

تست

اگر $A=[-4,4]$ و $B=[1,5]$ ، آن‌گاه فاصلهٔ دورترین نقطهٔ سطح نمودار $(A\times A)-(A\times B)$ از مبدأ مختصات کدام است؟



۱) $\sqrt{14}$ ۲) $\sqrt{17}$
۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{2}$

* شمارش بدون شمردن :

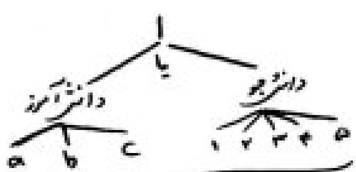
ترکیبیات : روش های شمارش را بررسی می‌کند و مبتنی بر دو اصل مهم زیر است :

① اصل جمع

اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام آن کار، $m+n$ روش وجود دارد.

(اصل جمع قابل تعمیم است)

مثال : می‌دانیم انتخاب یک دانش آموز از بین سه دانش آموز به ۳ روش و انتخاب یک دانشجو از بین پنج دانشجو به ۵ روش ممکن است. به چند طریق می‌توان یک دانش آموز یا یک دانشجو انتخاب کرد؟



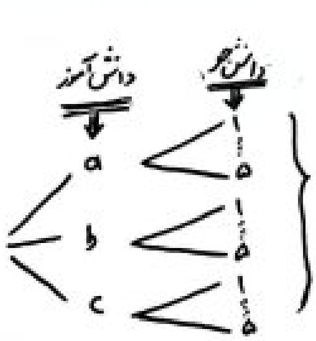
$۳ + ۵ = ۸$

② اصل ضرب

اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحلهٔ اول m روش و برای انجام هرکدام از این m روش، مرحلهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد، کار مورد نظر با $m.n$ روش قابل انجام است.

(اصل ضرب قابل تعمیم است)

مثال ، در مثال قبل به چند طریق می‌توان یک دانش آموز و یک دانشجو انتخاب کرد؟



$۳ \times ۵ = ۱۵$

مثال عبارت های زیر هرکدام چند جمله دارند؟

الف) $(r+s).(a+b+c)$

۲ × ۳ = ۶ جمله

ب) $(x+y+z).(t+u).(a+d)$

۳ × ۲ × ۲ = ۱۲ ✓

مثال با استفاده از سه رنگ "آبی، قرمز، سبز" به چند طریق می‌توان خانه‌های زیر را رنگ کرد به طوری که هر دو خانه‌ی مجاور متفاوت باشند؟

?	?	?	?	?	?

۳ حالت × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ = ۳ × ۲^۵ = ۹۶ ✓

مثال با استفاده از حروف a، b، c چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

?	?	?	?	?

۳ حالت × ۳ × ۳ × ۳ × ۳ = ۳^۵ = ۲۴۳ ✓

* اگر قرار باشد هیچ دو حرف مجاوری یکسان نباشند، چطور؟

۳ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ = ۳ × ۲^۴ = ۴۸ ✓

مثال از بین سه داوطلب رشته ریاضی، ۴ داوطلب رشته انسانی و ۵ داوطلب رشته تجربی به چند روش می‌توان ۲ نماینده انتخاب کرد به طوری که هر دو از یک گروه نباشند؟

حل: (تجربی و ریاضی) یا (انسانی و ریاضی) یا (انسانی و تجربی)

(۳ حالت × ۵) + (۳ × ۴) + (۵ × ۴) = ۴۷ ✓

و ⟷ ×

یا ⟷ +

مثال افراد a_1، a_2 و a_3 از شهر A، b_1، b_2 و b_3 از شهر B و c_1، c_2، c_3، c_4 از شهر C قرار است سوار یک وسیله نقلیه با ظرفیت ۳ نفر شوند. می‌دانیم a_1 با b_1، a_2 با b_3 و a_3 با c_1, c_2 سازگار نیستند و نمی‌توانند با هم سوار شوند. اگر قرار باشد از هر شهر فقط یک نفر سوار شود، به چند طریق این عمل امکان پذیر است؟

شهر A		شهر B		شهر C	
a_1	و	b_2 یا b_3	و	?	→ ۱ × ۲ × ۴ = ۸
a_2	و	b_1 یا b_2	و	?	→ ۱ × ۲ × ۴ = ۸
a_3	و	?	و	c_3 یا c_4	→ ۱ × ۳ × ۲ = ۶

یا / یا

+ → ۲۲ ✓

تمرین (H.W): خودروی سمند در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور و ۲ نوع جعبه دنده (اتوماتیک و کلاچی) تولید می‌شود.

الف) چند نوع مختلف از این خودرو تولید می‌شود؟

مدل و رنگ و حجم موتور و جعبه دنده

۵ حالت × ۱۰ × ۳ × ۲ = ۳۰۰ ✓

ب) چند نوع مختلف با رنگ سفید تولید می‌شود؟

۵ × ۱ × ۳ × ۲ = ۳۰

پ) چند نوع مختلف با رنگ سفید و اتوماتیک تولید می‌شود؟

تمرین (H.W): در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، ۸ تا ۱۰ خیابان، در هر خیابان ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه ۲۰ تا ۲۵ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر کارخانه‌ها در این شهرک را بیابید. (جواب: ۸۰۰۰ و ۱۵۰۰۰)

مثال چند ماتریس ۲×۳ با درایه‌ای ۰ و ۱ وجود دارد؟

شش درایه $\begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}_{2\times 3}$

۱یا۰ ، ۱یا۰ ، ۱یا۰ ، ۱یا۰ ، ۱یا۰ ، ۱یا۰

۲ حالت × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ = $2^6 = 64$

مثال مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d,e\}$

الف) دارای چند زیرمجموعه است؟

a, b, c, d, e

باشد یا نباشد: ۲ حالت × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ = $2^5 = 32$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با: 2^n

ب) دارای چند زیرمجموعه شامل عضو a است؟

a, b, c, d, e

هست: ۱ حالت × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ = $2^4 = 16$

پ) دارای چند زیرمجموعه فاقد عضو b است؟

a, b, c, d, e

۲ حالت × ۱ حالت (نیست) × ۲ × ۲ × ۲ = $2^4 = 16$

ج) دارای چند زیرمجموعه شامل a و فاقد b است؟

a, b, c, d, e

هست ، نیست: ۱ حالت × ۱ × ۲ × ۲ × ۲ = $2^3 = 8$

* نتیجه: در هنگام محاسبه‌ی کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه، به ازای هر شامل (فاقد) یک واحد از توان کم کنید.

مثال به چند طریق می‌توان به پنج سؤال تستی سه گزینه‌ای پاسخ داد در صورتی که

الف) هیچ محدودیتی نباشد؟

که هر سؤال ۴ حالت دارد: گزینه ۱، گزینه ۲، گزینه ۳، جواب ندادن

سؤال ۱ ، سؤال ۲ ، سؤال ۳ ، سؤال ۴ ، سؤال ۵

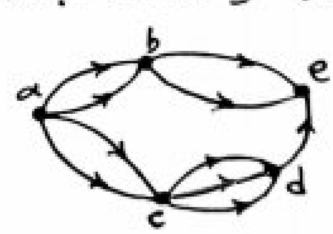
۴ حالت × ۴ × ۴ × ۴ × ۴ = $4^5 = 1024$

ب) پاسخ به همه‌ی سؤالات الزامی باشد؟

سؤال ۱ ، سؤال ۲ ، سؤال ۳ ، سؤال ۴ ، سؤال ۵

۳ حالت × ۳ × ۳ × ۳ × ۳ = $3^5 = 243$

مثال: در شکل زیر به چند طریق می‌توان از a به e رفت؟



abe یا acde

۲ حالت × ۲ + ۲ حالت × ۳ × ۱ = ۱۰

هرکس بد ما به خلق گوید

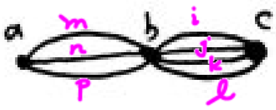
ما چهرهٔ دل نخراشیم

ما خوبی او به خلق گوییم

تا هر دو دروغ گفته باشیم

مثال : با توجه به شکل مقابل به چند طریق می‌توان از a به c رفت و برگشت در صورتی

الف) یال های رفت و برگشت تکرار نشوند؟



رفت: a b c و برگشت: c b a

۳ حالت × ۴ حالت × ۳ حالت × ۲ حالت = ۷۲ ✓

ب) مسیر رفت و برگشت یکی نباشد؟

mi , mj , mk , ml
ni , nj , nk , nl
pi , pj , pk , pl

رفت ۱۲ مسیر × برگشت ۱۱ حالت = ۱۳۲ ✓

مثال : چند عدد پنج رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟ (تکرار ارقام مجاز است)

صفر نمی‌تواند

۹ حالت × ۱۰ حالت × ۱۰ حالت × ۱۰ حالت × ۲ حالت (۰ یا ۵) → ۱۸۰۰۰ ✓

توجه : ارقام از ۰ تا ۹ (۱۰ حالت)

مثال : چند عدد پنج رقمی مضرب ۵ وجود دارد که دو رقم سمت چپ آنها بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد؟ (تکرار ارقام مجاز است)

۸	۵
۶	۸
۵	۱
۳	۴
۱	۷

$\underbrace{\quad\quad}_{۵}$ × ۱۰ حالت × ۱۰ حالت × ۲ حالت (۰ یا ۵) = ۱۰۰۰ ✓

مثال : چند عدد چهار رقمی وجود دارد که بزرگتر از ۴۰۰۰ باشد؟

الف) تکرار مجاز است.

۶ حالت (۴ تا ۹) × ۱۰ حالت × ۱۰ حالت × ۱۰ حالت = ۶۰۰۰ − ۱ (خود ۴۰۰۰) = ۵۹۹۹ ✓

راه دوم: ۹۹۹۹ − ۴۰۰۰ = ۵۹۹۹ ✓

ب) تکرار مجاز نیست.

۶ حالت (۴ تا ۹) × ۹ حالت × ۸ حالت × ۷ حالت = ۳۰۲۴ ✓

مثال : چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۴۵۰۰ وجود دارد؟

الف) تکرار مجاز است. ۹۹۹۹ − ۴۵۰۰ = ۵۴۹۹ ✓

ب) تکرار مجاز نیست.

شروع با ۴ : ۴ ، (۵ تا ۹) ، ? ، ?
۱ حالت × ۵ حالت × ۸ حالت × ۷ حالت = ۲۸۰

یا

شروع با غیر ۴ : (۵ تا ۹) ، ? ، ? ، ?
۵ حالت × ۹ حالت × ۸ حالت × ۷ حالت = ۲۵۲۰

+ → ۲۸۰۰ ✓

تست (H.W) تعداد اعداد پنج رقمی فرد با ارقام متمایز ، به طوری که رقم صدگان آن ۲ ، عددی اول باشد ، کدام است؟

۱) ۸۱۹۲ ۲) ۶۴۵۰
۳) ۵۱۹۹ ۴) ۴۹۹۸

(گزینه ۴)

صدگان ۲ : غیرصفر ? ، ? ، ۲ ، ? ، فرد ← {۱، ۳، ۵، ۷، ۹}

یا

صدگان غیر ۲ : غیرصفر ? ، ? ، اول {۳، ۵، ۷} ، ? ، فرد

مثال با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد پنج رقمی زوج و بدون تکرار ارقام وجود دارد؟

صفر در یکان نقش داره و تکرار مجاز نیست

صفر در یکان هست:

۱ حالت (۰) × ۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۲۴

یا

صفر در یکان نیست: (۴ یا ۲) — غیر صفر و غیر یکان

۲ حالت × ۳ × ۳ × ۲ × ۱ = ۳۶

$\xrightarrow{+}$ ۶۰ ✓

سراسری ۹۹ تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵، با ارقام غیرتکراری، کدام است؟

۱) ۹۴۸ ۲) ۹۵۲ ۳) ۹۶۸ ۴) ۹۷۲

صفر در یکان هست:

۱ حالت (۰) × ۷ × ۸ × ۹ = ۵۰۴

یا

صفر در یکان نیست: (۵) — غیر صفر

۱ حالت (۵) × ۷ × ۸ × ۸ = ۴۴۸

$\xrightarrow{+}$ ۹۵۲ ✓

تکرار مجاز است و صفر نمی‌تواند اول بیاید

تست برای بازکردن یک قفل رمزی چهار رقمی فرد که می‌دانیم رقم ۵ در آن به کار رفته است، درصورتی که امتحان کردن هر رمز ۷ ثانیه طول بکشد، حداکثر چند ساعت وقت لازم است؟

۱) ۶ ✓ ۲) ۸٫۱ ۳) ۷٫۲۴ ۴) ۷٫۵

فرد ← {۱، ۳، ~~۵~~، ۷، ۹}

? ? ? ?

۴ حالت × ۹ × ۹ × ۹ = ۲۹۱۶ $\xrightarrow{\times 7 \text{ ثانیه}}$ ۲۰۴۱۲ ثانیه $\xrightarrow{\div 3600}$ ۵٫۷ ≃ ۶

مثال چند عدد پنج رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن عددی زوج باشد؟ (تکرار مجاز است)

غیرصفر — به دلخواه

۹ حالت × ۱۰ × ۱۰ × ۱۰ × ۵ = ۴۵۰۰۰ ✓

if جمع چهار رقم اول = فرد → رقم یکان باید فرد باشد ← {۱، ۳، ۵، ۷، ۹}

if 〃 〃 〃 = زوج → 〃 〃 〃 زوج 〃 ← {۰، ۲، ۴، ۶، ۸}

سراسری ۹۹ خ تعداد اعداد چهار رقمی با ارقام غیرتکراری که شامل رقم ۵ باشند کدام است؟

۱) ۱۸۴۸ ✓ ۲) ۱۷۹۲ ۳) ۱۷۴۸ ۴) ۱۶۵۸

روش مستقیم

۵ ? ? ?: ۱ حالت × ۹ × ۸ × ۷ = ۵۰۴

? ۵ ? ? (غیرصفر): ۸ × ۱ حالت × ۸ × ۷ = ۴۴۸

? ? ۵ ? (غیرصفر): ۸ × ۸ × ۱ حالت × ۷ = ۴۴۸

? ? ? ۵ (غیرصفر): ۸ × ۸ × ۷ × ۱ حالت = ۴۴۸

$\xrightarrow{+}$ ۱۸۴۸

روش متمم

کل (غیرصفر): ۹ حالت × ۹ × ۸ × ۷ = ۴۵۳۶

فاقد ۵ (غیرصفر): ۸ حالت × ۸ × ۷ × ۶ = ۲۶۸۸

$\xrightarrow{-}$ ۱۸۴۸

تست چند عدد چهاررقمی وجود دارد که دقیقاً یک رقم آن، برابر ۵ باشد؟ (تکرار مجاز است)

۱) ۱۱۲۸ ۲) ۲۶۷۳ ۳) ۲۸۲۰ ۴) ۳۱۶۰

(۵) ۱ حالت × ۹ حالت × ۹ حالت × ۹ حالت = ۷۲۹

غیرصفر ۸ حالت × (۵) ۱ حالت × ۹ حالت × ۹ حالت = ۶۴۸ × ۳ = ۱۹۴۴

+ → ۲۶۷۳

مثال

الف) چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

غیرصفر ۹ حالت × ۹ حالت × ۸ حالت × ۷ حالت = ۴۵۳۶

ب) چند عدد چهاررقمی وجود دارد که حداقل یکی از ارقام آن تکراری باشد؟

کل اعداد چهاررقمی → ۹ حالت × ۱۰ حالت × ۱۰ حالت × ۱۰ حالت = ۹۰۰۰

روش متمم

جواب = ۹۰۰۰ − ۴۵۳۶ = ۴۴۶۴

(ارقام متمایز دارند) (حداقل یک رقم تکراری دارند)

تست چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز a، b، c و d به صورت $\overline{abcd}$ وجود دارد که $2 \mid (a+d)$ برقرار باشد؟

هر دو زوج یا هر دو فرد (تا زوج شود)

۱) ۲۲۴۰ ۲) ۲۰۱۶ ۳) ۲۵۲۰ ۴) ۲۸۸۰

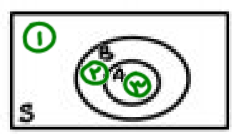
a و d هر دو زوج اند: غیرصفر a: ۴ حالت × b: × c: × d: ۴ حالت

یا

a و d هر دو فرد اند: a: ۵ حالت × b: × c: × d: ۴ حالت

تمرین فرض کنید $S=\{a,b,c,d,e\}$ و A و B زیرمجموعه‌های S می‌باشند. تعداد زوج‌های مرتبی مانند (A,B) را بیابید به طوری که

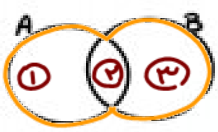
الف) $A \subseteq B$



a ، b ، c ، d ، e

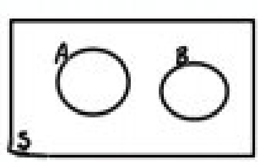
۳ حالت × ۳ حالت × ۳ حالت × ۳ حالت × ۳ حالت $= 3^5 = 243$

ب) $A \cup B = S$

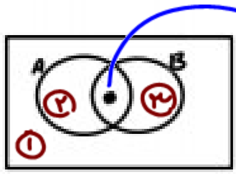


3^5

پ) $A \cap B = \varnothing$



ت) $n(A \cap B) = 1$



$\binom{5}{1} \times$ ۳ حالت × ۳ حالت × ۳ حالت × ۳ حالت (انتخاب)

$= 5 \times 3^4$

تست چند زیرمجموعهٔ ۵ عضوی از مجموعهٔ اعداد طبیعی ناپیشتر از ۱۰ وجود دارد که مجموع هیچ دو عضو از آن برابر ۱۱ نباشد؟

$\{1, 2, \dots, 10\}$

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۱۰۴ ۴) ۲۵۵

جفت اعدادی که مجموع آنها برابر ۱۱ می‌باشد → {۱ , ۱۰} {۲ , ۹} {۳ , ۸} {۴ , ۷} {۵ , ۶}

۲ حالت × ۲ حالت × ۲ حالت × ۲ حالت × ۲ حالت $= 2^5 = 32$

اگر از هر گروه یک عضو انتخاب شود آنگاه مجموع هیچ دو عضو ۱۱ نمی‌شود

جای‌گشت

جا به جایی اشیاء در یک "ردیف" به طوری که حالت جدیدی ایجاد شود.

مثال: با ارقام ۶ ، ۷ ، ۸ و ۹ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام وجود دارد؟

$$\underset{?}{4\ \text{حالت}} \times \underset{?}{3} \times \underset{?}{2} \times \underset{?}{1} = 4! = 24 \checkmark$$

قضیه: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$

مثال: با حروف کلمه‌ی "دبیرستان" چند کلمه‌ی هشت حرفی وجود دارد؟ (تکرار مجاز نیست)

جایگشت ۸ حرف متمایز : $8! = 40320$

مثال: در مثال قبل چه تعداد از کلمات ساخته شده

الف) با حرف "د" شروع می‌شوند؟

[د | ← ۷ حرف →] — د: ثابت (۱ حالت)

$7! = 5040$

ب) با حرف "د" شروع و به حرف "ن" ختم می‌شوند؟

[د | ← ۶ حرف → | ن] — د: ثابت، ن: ثابت

$6! = 720$

شی ثابت در جایگشت شرکت نمی‌کند.

پ) با حرف نقطه‌دار شروع می‌شوند؟

[نقطه‌دار | ← ۷ حرف →] — ب ی ت ن

$4\ \text{حالت} \times 7! = 20160$

ت) به حرف نقطه‌دار ختم می‌شوند؟

ی

[← ۷ حرف → | نقطه‌دار] — ب ت ن

$7! \times 3\ \text{حالت} = 15120$

ث) با حرف نقطه‌دار شروع و به حرف نقطه‌دار ختم می‌شوند؟

ب ت ن

شروع با ب: [ب | ۶ حرف | ?]

$1\ \text{حالت} \times 6! \times 3\ \text{حالت} = 3 \times 6!$

یا

شروع با غیر ب: [| ۶ حرف | ?] — ب ت ن

$3\ \text{حالت} \times 6! \times 2\ \text{حالت} = 6 \times 6!$

یک نقطه‌دار کم شده

$$+ \rightarrow 9 \times \underbrace{6!}_{720} = 6480 \checkmark$$

مثال (Ex): پنج نفر به نام های a، b، c، d و e را به چند طریق می‌توان در یک ردیف قرار داد به طوری که

الف) محدودیتی نباشد؟ ← جایگشت ۵ شی متمایز: $5! = 120$

ب) a و b همواره کنار هم باشند؟

"تجمیع"

$\underbrace{\boxed{a,b}, c, d, e}_{\text{۴ شی متمایز}}$ $\xrightarrow{\text{جایگشت}}$ $4! \times \overbrace{2!}^{\text{جایگشت داخل جعبه}} = 48$

پ) c و d هیچ‌گاه کنار هم نباشند؟

(روش متمم)

$\overbrace{5!}^{\text{کل حالت‌ها}} - \overbrace{4! \times 2!}^{\text{حالاتی که c و d کنار هم هستند}} = 120 - 48 = \overbrace{72}^{\text{حالاتی که c و d کنار هم نیستند}}$

ت) a و b کنار هم باشند و c و d کنار هم نباشند؟

a و b کنار هم باشند

$\underbrace{\boxed{a,b}, c, d, e}_{4! \times 2!}$ ، $\underbrace{4! \times 2!}_{48} = \underbrace{\boxed{a,b}\boxed{c,d}e}_{\underbrace{3! \times 2! \times 2!}_{24}} + x$

a و b کنار هم‌اند و c و d کنار هم‌اند **یا** a و b کنار هم‌اند و c و d کنار هم نیستند

$\rightarrow x = 24$

Ex: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب ریاضی متمایز و ۴ کتاب ادبی متمایز را در قفسه‌ای چید به طوری که کتاب‌های هر درس کنار هم باشند؟

$\boxed{\text{۳ تا ریاضی}}\ \boxed{\text{۴ تا ادبی}}$ $\xrightarrow{\text{جایگشت ۲ جعبه}}$ $2! \times 3! \times 4! = 288$

تست: با حروف کلمهٔ DELAVARAN چند کلمهٔ ۹ حرفی می‌توان نوشت به طوری که هر سه حرف A کنار هم باشند؟

۱) $7!$ ۲) $2 \times 7!$ ۳) $8!$ ۴) $\frac{9!}{3!}$

$\underbrace{\boxed{AAA}\ D E L V R N}_{\text{۷ شی متمایز}} \longrightarrow 7!$

تمرین (H.W): به چند طریق می‌توان ۵ دانش‌آموز را در یک ردیف شامل ۶ صندلی نشاند به طوری که

الف) همگی به صورت متوالی باشند؟

$\xrightarrow{\text{متوالی}}$ $2 \times 5! = 240$

ب) همگی به صورت متوالی باشند و دو نفر خاص (a, b) کنار هم قرار گیرند؟

$\overset{\text{متوالی}}{2} \times \underbrace{\boxed{a,b}\, c, d, e}_{4! \times 2!} = 96$

مثال : به چند طریق می‌توان ۳ دانش آموز و ۴ دانش جو را به صورت یک درمیان در یک صف قرار داد؟

$4! \times 3! = 144$ ✓

* اگر تعداد دانش آموزان برابر ۴ باشد، چه طور؟

شروع با مربع → $4! \times 4!$

یا

شروع با دایره → $4! \times 4!$

$\xrightarrow{+} 2 \times 4! \times 4!$ ✓

تست : به چند طریق می‌توان ۳ دانش آموز و ۴ دانش جو را به صورت یک درمیان در یک صف قرار داد به طوری که یک دانش آموز خاص و یک دانش جو خاص همواره کنار هم باشند؟

a b

۱) ۶۰ ۲) ۱۲۰
۳) ۷۲ ۴) ۱۴۴

$6 \times 3! \times 2! = 72$

تست ۱۴۰۰ : با حروف کلمهٔ BARANA چند رمز شش حرفی می‌توان ساخت به طوری که سه حرف A به صورت یک درمیان باشند؟ (گزینه ۲)

۱) ۶ ۲) ۱۲
۳) ۲۴ ۴) ۴۸

سراسری ۱۴۰۱ : چند عدد پنج رقمی با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت که ارقام آن یک درمیان زوج و فرد باشند؟

۱) ۱۸۴۰ ۲) ۱۹۲۰
۳) ۲۱۶۰ ۴) ۲۴۰۰

۰,۲,۴,۶,۸ / ۱,۳,۵,۷,۹

غیر صفر

۴ حالت × ۵ × ۴ × ۴ × ۳ = ۹۶۰

۵ حالت × ۵ × ۴ × ۴ × ۳ = ۱۲۰۰

$\xrightarrow{+} 2160$ ✓

سراسری تجربی ۱۴۰۱ خ : ۴ کتاب متمایز با موضوع ریاضی و ۲ کتاب متمایز آمار را به چند طریق می‌توان در قفسه‌ای کنار هم قرار داد به طوری که موضوع دو کتاب مجاور هر کتاب (به جز کتاب اول و آخر) متفاوت باشد؟

۱) ۹۶ ۲) ۷۲
۳) ۴۸ ۴) ۲۴

R A

$R_1 R_2 A_1 A_2 R_3 R_4$

$4! \times 2! = 48$ ✓

مثال به چند روش می‌توان با افراد یک کلاس ۸ نفری،

الف) یک صف ۸ نفری تشکیل داد؟

جایگشت ۸ نفر : ۸!

ب) یک صف ۷ نفری تشکیل داد؟

? ? ? ? ? ? ?

۸× ۷× ۶× ۵× ۴× ۳× ۲ حالت = ۸! ✓

نتیجه: تعداد جایگشت‌های (n-1) تایی n شیء، با تعداد جایگشت‌های آن n شیء برابر است.

مثال Ex: پنج نفر به نام‌های a، b، c، d و e قرار است در یک همایش سخنرانی کنند. به چند طریق ترتیب سخنرانی (جایگشت) این افراد ممکن است، هرگاه

الف) هیچ شرطی نباشد؟ ۵! = ۱۲۰ ✓

ب) b بلافاصله بعد از a سخنرانی کند؟

جعبه بدون جایگشت

$\boxed{a, b}$, c, d, e → ۴! = ۲۴ ✓

۴ شیء متمایز

پ) بین a و b فقط یک نفر دیگر سخنرانی کند؟

a ? b ? ?

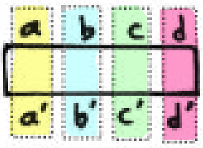
e یا d یا c

۳ شیء متمایز → ۳! × ۲! × ۳ = ۳۶

b و a = جایگشت

حالت

مثال Ex: به چند طریق می‌توان ۸ نفر را که دو به دو برادرند، در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل نشاند به طوری که هر کس مقابل برادر خود بنشیند؟



جایگشت ۴ جعبه متمایز → ۴! × ۲! × ۲! × ۲! × ۲! = ۴! × (۲!)^۴ = ۳۸۴ ✓

جایگشت درون هر جعبه

تمرین H.W: به چند طریق می‌توان ۲ دانشجو و ۶ دانش‌آموز را در یک ردیف نشاند به طوری که در دو طرف این ردیف، دانشجو بنشینند؟

جایگشت های با تکرار (جایگشت با اشیای تکراری)

Ex

⇐ چون جایگشت اشیای تکراری باهم، بی مورد است (حالت جدیدی ایجاد نمی کند)، با تقسیم کردن از کل جایگشت ها حذف می شود.

جایگشت های سه حرف x، x و y:

yxx , xyx , xxy

~~yxx~~ , ~~xxy~~ , ~~xyx~~

$\frac{3!}{2!} = 3$ که حذف جایگشت ۲ تا x با هم

جایگشت های سه حرف x، y و z:

xyz , yxz , zxy

xzy , yzx , zyx

$3! = 6$

مثال Ex: با ارقام ۱، ۲، ۲، ۳، ۴ چند عدد پنج رقمی می توان نوشت؟

۱۲۳۲۴

۱۲۳۲۴

ابتدا همه اشیا را متمایز فرض کنید. $\frac{5!}{2!} = 60$ حذف جایگشت ۲ تا ۲ با هم

مثال Ex: با ارقام ۱، ۲، ۲، ۲، ۳، ۳، ۳، ۴، ۴، ۵ چند عدد ده رقمی می توان نوشت؟

$$\frac{10!}{3! \times 3! \times 2!} = \frac{10\times \cancel{9}\times\cancel{8}\times 7!}{\cancel{72}} = 50400$$

۳ تا ۲ ، ۳ تا ۳ ، ۲ تا ۴

مثال با حروف کلمهٔ «ریاضی دانان»

الف) چند رمز ده حرفی می توان ساخت؟

$$\frac{10!}{3! \times 2! \times 2!}$$

۳ تا «الف» ، ۲ تا «ن» ، ۲ تا «ی»

ب) چند رمز ۹ حرفی می توان ساخت؟ همان (الف)

مثال Ex: با حروف a، a، b، a، c، c، d، d، d می خواهیم روی تعدادی از اجناس کد ۹ حرفی ثبت کنیم.

الف) چه تعداد از اجناس را می توانیم کدگذاری کنیم؟

$$\frac{9!}{3! \times 2! \times 3!} = 7! = 5040$$

ب) در چه تعداد از کدها، سه حرف d کنار هم اند؟

$\boxed{ddd}$ a, a, a, b, c, c

$$\frac{7!}{3! \times 2!}$$

قضیهٔ جایگشت با تکرار Ex

اگر n شی مفروض باشند به طوری که n_1 تای آن ها از نوع اول و یکسان، n_2 تای آن ها از نوع دوم و یکسان، ... و n_k تای آن ها از نوع k ام و یکسان باشند، آن گاه تعداد جایگشت های این n شی برابر است با

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!} = q \in \mathbb{N}$$

(توجه کنید: $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$)

نتیجه

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k \leq n \Rightarrow n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k! \mid n!$$

مثلاً

$$2 + 3 + 5 \leq 12 \rightarrow 2! \times 3! \times 5! \mid 12!$$

$$3! \times 7! \times 9! \nmid 18!$$

$$3 + 7 + 9 \not\leq 18$$

تمرین H.W: اگر $n \in \mathbb{N}$، نشان دهید $2^{3n} \times 3^{n} \mid (4n)!$

تست Ex با ارقام ۰، ۰، ۱، ۲، ۲، ۲، ۳ و ۴ چند عدد هشت رقمی وجود دارد؟

$\boxed{\text{غیرصفر}\ \longleftarrow \text{۷ رقم} \longrightarrow}$

۱) ۳۴۲۰ ۲) ۴۷۴۰ ۳) ۲۵۲۰ ۴) ۲۱۰۰

$$\frac{\cancel{7}\times 7!}{\cancel{3!}\times 2!} = \frac{7!}{2!} = \frac{5040}{2} = 2520 \checkmark$$

حالت — ۲ تا ۳ — ۲ تا صفر

(گزینه ۳)

تست H.W در سوال بالا چند عدد هشت رقمی زوج وجود دارد؟

۱) ۱۲۰۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۱۹۲۰ ۴) ۲۱۰۰

سراسری ۹۲ تجربی تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ system به طوری که s ها کنار هم نباشند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۳۶۰

کل حالات

$$\frac{6!}{2!} - 5! = 360 - 120 = 240 \checkmark$$

s تا ۲

$\overbrace{\boxed{ss}ytem}$

تمرین H.W با حروف a، a، b، b، c، c، c، e، e، e چند رمز ده حرفی می‌توان ساخت که حروف صدادار کنار هم باشند؟

$\underbrace{\boxed{a,a,e,e,e},b,b,c,c,c}$

۶ شی $\longrightarrow \dfrac{6!}{2!\times 3!} \times \dfrac{5!}{2!\times 3!} = 600 \checkmark$

تمرین H.W در چه تعداد از جایگشت‌های حروف کلمهٔ SOCIOLOGICAL .

الف) دو حرف A و G کنار هم اند؟

ب) همگی با عبارت GAS شروع می‌شوند؟

$$(a+b)^3 = 1\underbrace{a^3}_{aaa} + 3\underbrace{a^2.b^1} + 3a^1.b^2 + b^3$$

$a^2b^1 \longrightarrow$ aab, aba, baa $\longrightarrow \dfrac{3!}{2!} = 3$

تعداد جایگشت‌های جمله

تست: در بسط عبارت $(x+y+z)^7$، ضریب جملهٔ $x^2y^2z^3$ کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۱۰ ✓ ۳) ۶۰ ۴) ۷۲

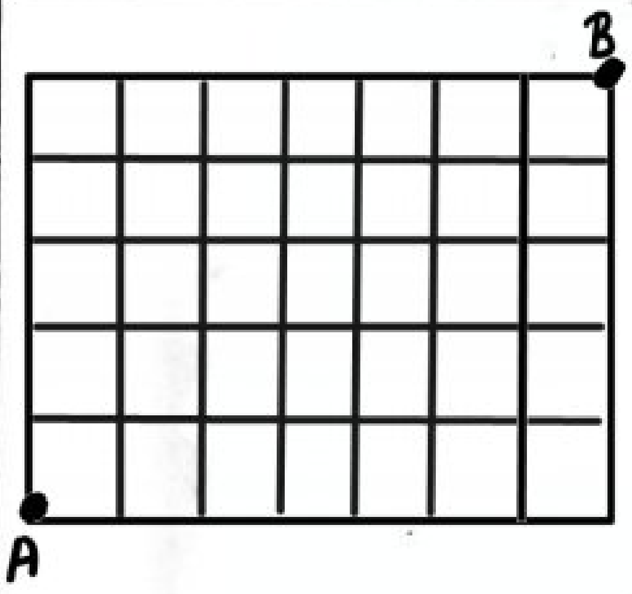
$$x^2y^2z^3 = xxyyzzz \xrightarrow{\text{جایگشت}} \frac{7!}{2!\times 2!\times 3!} = 210$$

تمرین H.W ضریب جملهٔ x^2y^3z در بسط عبارت $(2x-y+z)^6$ کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۰- ۳) ۲۴۰ ۴) ۲۴۰-

$$(2x)^2.(-y)^3.z = -4\,\underbrace{x^2y^3z}$$

مثال: در شکل مقابل به چند روش می‌توان با کمترین حرکت، از نقطهٔ A به نقطهٔ B رسید، به طوری که



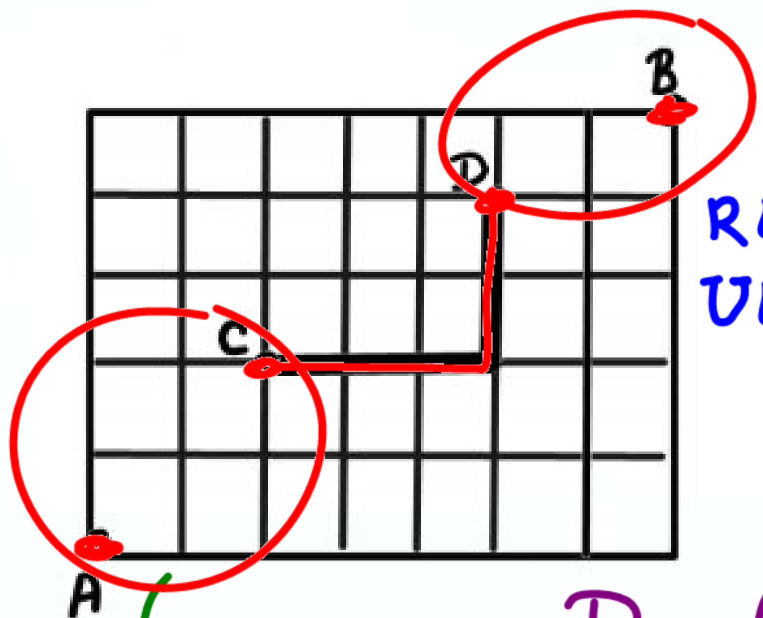
الف) هیچ شرطی نباشد؟

(R) ۷ تا راست
(U) ۵ تا بالا
} ۱۲ حرکت

روش۱ → RRRRRRUUUUUR
روش۲ → RUUURRRUURRR
روش۳ → RURURURURURR
⋮

جایگشت ۱۲ حرف → $\frac{12!}{7!\times 5!}=792$ (R تا ۷ ، U تا ۵)

ب) از نقطهٔ C بگذریم؟



A به C (۴ حرکت: R تا ۲ ، U تا ۲) و C به B (۸ حرکت: R تا ۵ ، U تا ۳)

$$\frac{4!}{2!\times 2!}\times\frac{8!}{5!\times 3!}=336 \checkmark$$

پ) از نقطهٔ D نگذریم؟

کل حالات − (A به D (۹ حرکت: R تا ۵ ، U تا ۴) و D به B (۳ حرکت: R تا ۲ و یکی U))

$$\frac{9!}{5!\times 4!}\times\frac{3!}{2!}$$

از D بگذرد

$$=792-378=414 \checkmark$$

ت) از نقطهٔ C و از نقطهٔ D بگذریم؟

A به C و C به D و D به B

$$\frac{4!}{2!\times 2!}\times\frac{5!}{3!\times 2!}\times\frac{3!}{2!}=180 \checkmark$$

ث) از نقطهٔ C بگذریم و از نقطهٔ D نگذریم؟

$$C\cap D'=C-D=C-(C\cap D)$$

$$336-180=156 \checkmark$$

ج) از نقطهٔ C یا از نقطهٔ D بگذریم؟ (یا: $\cup$)

از C بگذریم ، از D بگذریم ، از C, D بگذریم

$$336+378-180=534 \checkmark$$

چ) نه از نقطهٔ C و نه از نقطهٔ D بگذریم؟ H.W

$$\underbrace{C'\cap D'}_{(C\cup D)'}=S-(C\cup D)$$

$$=792-534=258 \checkmark$$

ح) از خط پررنگ بگذریم؟ H.W

A به C و C به D و D به B

$$\frac{4!}{2!\times 2!}\times 1\times\frac{3!}{2!}=18 \checkmark$$

تمرین ۲.۷: در چند جایگشت از حروف کلمهٔ mathematics، عبارت mat یک بار دیده می‌شود؟

mat hematics − mat mat heics

مثال: پنج نفر به نام‌های a، b، c، d و e قرار است به ترتیب وارد یک سالن شوند. این عمل (جایگشت) به چند روش ممکن است هرگاه

الف) هیچ شرطی نباشد؟

$5! = 120$ ✓

ب) a بعد از b وارد شود؟ (نه لزوماً بلافاصله)

ورود به سالن → ... a ... b ... (قفلی بزن ☺)

$\frac{5!}{2!} = 60$ حذف جایگشت a و b

پ) a بعد از b و b بعد از c وارد شود؟

→ ... a ... b ... c ...

$\frac{5!}{3!} = 20$ ✓

ت) a بعد از b و c بعد از d وارد شود؟

$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$ ✓

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز، که ترتیب k تا از آنها معلوم باشد، برابر است با $\frac{n!}{k!}$

تست: با حروف a, a, a, b, c, d, e چند کلمه ۷ حرفی می‌توان ساخت که حرف b بین دو حرف c و d و لزوماً مجاور با آن‌ها، قرار گیرد؟

... d ... b ... c ... (قفلی)

$\frac{7!}{3! \times 3!} \times 2!$

(۳! در مخرج: a تا ۳ و قفلی)

گروه بندی اشیاء (افراز)

مثال (Ex): به چند طریق می‌توان ۹ نفر را در سه اتاق ۲، ۳ و ۴ نفری قرار داد؟

اتاق ۲ نفری	اتاق ۳ نفری	اتاق ۴ نفری
a, b	c, d, e	f, g, h, i

روش اول: جایگشت ۹ نفر → $\frac{9!}{2! \times 3! \times 4!} = 1260$ ✓

(حذف جایگشت ۲ نفر در اتاق ۲ نفری، حذف جایگشت ۳ نفر در اتاق ۳ نفری، حذف جایگشت ۴ نفر در اتاق ۴ نفری)

روش دوم: انتخاب ۲ نفر از ۹ نفر، انتخاب ۳ نفر از ۷ نفر، انتخاب ۴ نفر از ۴ نفر

$\binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{4} = 1260$ ✓

مثال (Ex): به چند طریق می‌توان ۴ نفر را به دو تیم دو نفری پینگ پنگ تقسیم کرد؟

$\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!} = 3$ ✓

حالت ۱) {a, b} : {c, d}

حالت ۲) {a, c} : {b, d}

حالت ۳) {a, d} : {b, c}

~~حالت ۴) {c, d} : {a, b}~~

~~حالت ۵) {b, d} : {a, c}~~

~~حالت ۶) {b, c} : {a, d}~~

توضیح: در گروه بندی اشیاء (افراز)، هرگاه گروه‌های بدون نام و با تعداد عضوهای برابر وجود داشته باشد، جواب را بر فاکتوریل تعداد گروه‌های با تعداد عضوهای برابر تقسیم می‌کنیم.

مثال (Ex): به چند طریق می‌توان ۱۰ نفر را به دو گروه ۳ نفری و دو گروه ۲ نفری تقسیم کرد؟

$\frac{\binom{10}{3} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}}{2! \times 2!}$

مثال (EX): به چند طریق می‌توان ۱۰ نفر را در دو اتاق ۳ نفری و دو اتاق ۲ نفری اسکان داد؟

اتاق ۱۰۱ | اتاق ۱۰۲ | اتاق ۲۰۱ | اتاق ۲۰۲

xxx | xxx | xx | xx

$$\binom{10}{3}\times\binom{7}{3}\times\binom{4}{2}\times\binom{2}{2}$$

تعداد افرازهای یک مجموعه

یادآوری: افراز (Partition) یک مجموعه، یعنی بخش کردن یک مجموعه به زیرمجموعه‌هایی که بر سه شرط زیر را دارند:

۱) هر کدام از زیرمجموعه‌ها ناتهی باشند. ۲) اشتراک دو به دو آنها تهی است. (جدا از هم) ۳) اجتماع آنها، همان مجموعهٔ اولیه است.

مثال: مجموعهٔ $\{1,2,3,4,5,6\}$ را به چند طریق می‌توان

الف) به سه زیرمجموعهٔ ۲ عضوی افراز کرد؟ (سراسری ۹۰)

xx xx xx

$$\frac{\binom{6}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{2}{2}}{3!}=15 \checkmark$$

ب) به دو زیرمجموعهٔ ۳ عضوی افراز کرد؟

xxx xxx

$$\to \frac{\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{2!}=10 \checkmark$$

سراسری ۹۰: مجموعهٔ $A=\{a,b,\{a\},\{a,b\}\}$ را به چند طریق می‌توان به ۳ زیرمجموعه افراز کرد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴ عضو

x | x | x x

$$\to \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{2!}=6 \checkmark$$

سراسری ۹۶ خ: تعداد افرازهای مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ که شامل مجموعه‌های ۲ عضوی و ۳ عضوی باشد کدام است؟ (گزینهٔ ۱)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

سراسری ۹۳ خ: یکی از افرازهای مجموعهٔ A به صورت $\{a\},\{b\},\{\{a,b\}\},\{c\}$ است. تعداد افرازهای مجموعهٔ A که فاقد مجموعهٔ تک عضوی باشند؟

۴ عضو — یک

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

xx | xx یا xxxx

$$\to \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!}+\underbrace{\binom{4}{4}}_{1}=4 \checkmark$$

سراسری ۹۳: تعداد افرازهای مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ که شامل فقط یک مجموعهٔ تک عضوی باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

x | xxxx یا x | xx | xx

$$\to \binom{5}{1}\binom{4}{4}+\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!}=20 \checkmark$$

سراسری ۹۲: یک مجموعهٔ ۸ عضوی را به چند طریق می‌توان به دو مجموعهٔ ۳ عضوی و یک مجموعهٔ ۲ عضوی افراز کرد؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۲۸۰ ۴) ۳۲۰

(گزینهٔ ۳)

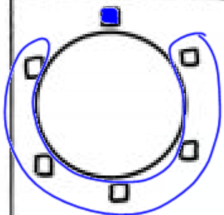
سراسری ۹۷: مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ را به چند طریق می‌توان به دو مجموعهٔ ۳ عضوی و یک مجموعهٔ تک عضوی افراز کرد به طوری که فاقد $\{a\}$ باشد؟

۱) ۴۵ ۲) ۵۰ ۳) ۵۶ ۴) ۶۰

غیر a

x | xxx | xxx

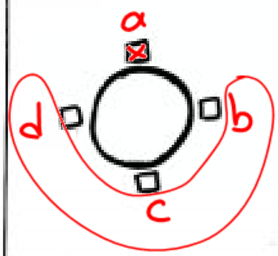
$$\frac{\binom{6}{1}\times\binom{6}{3}\times\binom{3}{3}}{2!}=60 \checkmark$$



جایگشت "دایره‌ای" اشیاء

⬅ چون دایره، نقطهٔ شروع (مبدأ) ندارد، بنابراین:

یک شی را به دلخواه، به عنوان مبدأ درنظر می‌گیریم (ثابت)
سپس جایگشت (خطی) اشیای باقی‌مانده را محاسبه می‌کنیم.

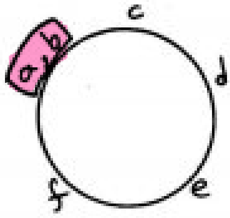


مثال: به چند طریق می‌توان ۴ نفر را دور یک میز گرد نشاند؟ $۳! = ۶$ ✓

قضیه: تعداد جایگشت‌های دایره‌ای n شی متمایز برابر است با: $(n-1)!$

مثال: به چند طریق می‌توان افراد a، b، c، d، e و f را دور یک میز نشاند به طوری که

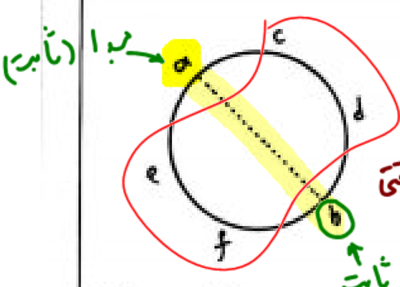
الف) a و b همواره کنار هم باشند؟



جایگشت دایره‌ای ۵ شی متمایز ⟶ $(۵-۱)! \times \underset{\text{جایگشت درون جعبه}}{۲!} = ۴۸$ ✓

راه دوم: b حذف موقتی ⟶ (جایگشت دایره‌ای ۵ نفر باقیمانده) $(۵-۱)! \times ۲ = ۴۸$ ✓

انتخاب‌های b (سمت راست a یا سمت چپ a)



ب) a و b همواره روبه‌روی هم باشند؟

b حذف موقتی ⟶ (جایگشت دایره‌ای ۵ نفر باقیمانده) $(۵-۱)! \times ۱ = ۲۴$ ✓ دو سر قطر

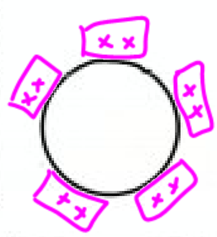
تنها انتخاب b (فقط روبه‌روی a)

تجربی ۱۴۰۰ خارج: به چند طریق ۳ بازیکن فوتبال، ۲ بازیکن بسکتبال و ۳ شناگر دور یک میز بنشینند به طوری که افراد هم‌تیمی کنار هم باشند؟

جایگشت دایره‌ای ۳ جعبهٔ متمایز ⟶ $(۳-۱)! \times \underbrace{۳! \times ۲! \times ۳!}_{\text{جایگشت درون هر جعبه}} = ۱۴۴$ ✓

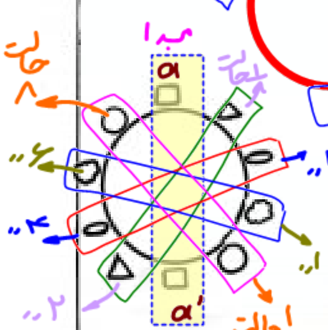
مثال: پنج زوج به چند طریق می‌توانند دور یک میز قرار گیرند به طوری که

الف) هر زوج کنار هم باشند؟



جایگشت دایره‌ای ۵ جعبهٔ متمایز ⟶ $(۵-۱)! \times (۲!)^۵ = ۷۶۸$ ✓

ب) هر زوج روبه‌روی هم باشند؟



$\underset{\text{جایگشت ۴ جعبه}}{۴!} \times \underbrace{(۲!)^۴}_{\text{جایگشت درون جعبه}} = ۳۸۴$ ✓

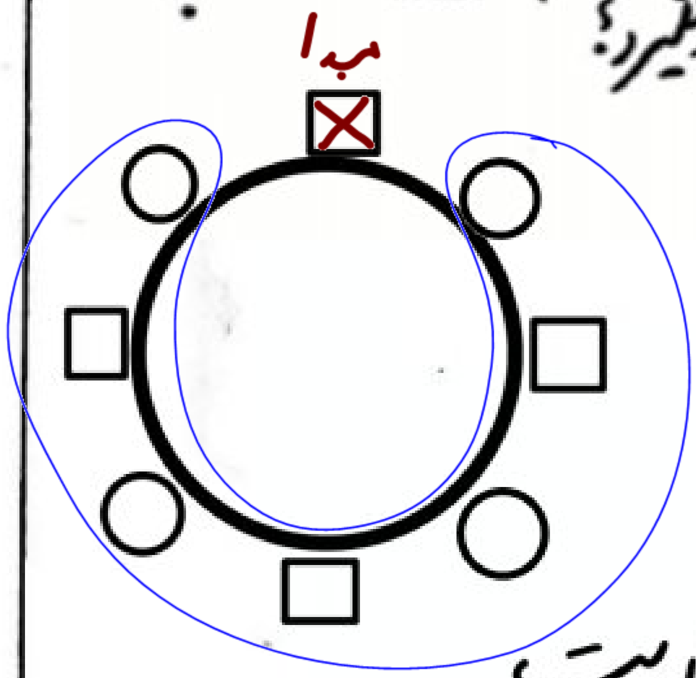
$۸ \times ۶ \times ۴ \times ۲ = ۳۸۴$ ✓

تمرین H.W: دور یک میز دایره‌ای شکل، ۵ صندلی با پنج رنگ متمایز قرار دارد. به چند طریق می‌توان

الف) ۵ نفر را دور این میز نشاند؟ (جایگشت خطی) ب) ۳ نفر را دور این میز نشاند؟

تجربی ۱۴۰۰ در یک جلسه آموزشی میزگردی شامل ۴ دانش آموز کلاس پایه یازدهم و ۴ دانش آموز کلاس پایه دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش آموزان در صندلی‌ها بنشینند به طوری که در کنار هر دانش آموزی، دانش آموز هم پایه قرار نگیرد؟

یک در میان



جایگشت یک در میان $\rightarrow$ $3! \times 4! = 144$ ✓

مثال تعداد جایگشت‌های دایره‌ای حروف a ، b ، b ، b ، c ، c ، c ، c ، d و d کدام است؟

$$\frac{(10-1)!}{3! \times 4! \times 2!}$$

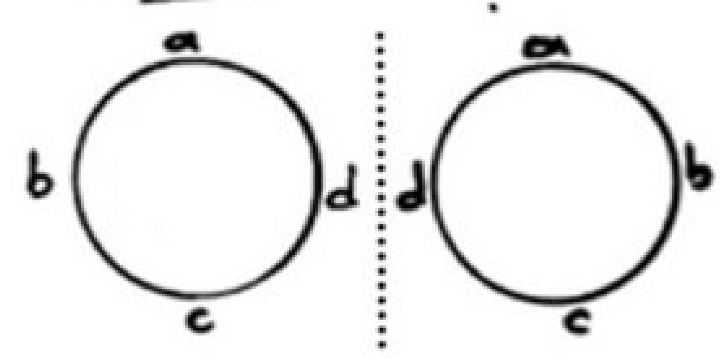
b تا ۳ ، c تا ۴ ، d تا ۲

تست H.W شش وجه یک مکعب را به چند طریق می‌توان با اعداد ۱ ، ۲ ، ... ، ۶ شماره گذاری کرد؟ (گزینه ۳)

۱) ۱۲۰ ۲) ۶۰
۳) ۳۰ ۴) ۱۵

مثال: با چهار مهره متمایز چند گردن بند مختلف می‌توان ساخت؟

$$\frac{(4-1)!}{2} = 3$$ ✓



این دو حالت دور یک میز "متفاوت" می‌باشند، زیرا دو نفر جایگشت داشته اند (b و d جابه جا شده اند) اما در گردن بند، تسبیح، ... این دو حالت "یکسان" اند زیرا یکی پشت و رو شده‌ی دیگری است.

نتیجه: تعداد گردن بندها، تسبیح ها، دسته کلیدها، ... با n شیء متمایز برابر است با : $\frac{(n-1)!}{2}$

$$\text{تعداد دورهای به طول } n \text{ در گراف } K_p = \binom{p}{n} \times \frac{(n-1)!}{2}$$

ترکیب: انتخاب بدون جایگشت (Combination)

در مسائلی مطرح می‌شود که اشیاء را انتخاب می‌کنیم ولی ترتیب قرار گرفتن آنها مهم نیست به عبارت دیگر

مثال: به چند طریق می‌توان از بین افراد a، b، c و d دو نماینده انتخاب کرد؟

$\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}$
$\{b,c\}, \{b,d\}$
$\{c,d\}$

ترکیب r تایی n شیء ← انتخاب r شیء از n شیء بدون در نظر گرفتن ترتیب آنها

قضیه: تعداد ترکیب‌های r تایی n شیء متمایز برابر است با:

$$C(n,r) = C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \in \mathbb{N} \quad : r \leq n$$

مثال: با ده نقطه‌ی متمایز که بر محیط یک دایره داده شده‌اند، چند مثلث می‌توان ساخت؟

انتخاب ۳ نقطه از ۱۰ نقطه بدون در نظر گرفتن ترتیب $\rightarrow \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = 120$ ✓

مثال: از بین ۳ دانش‌آموز و ۵ دانشجو به چند طریق می‌توان یک گروه ۳ نفری تشکیل داد؟

کل افراد: ۸ نفر

انتخاب ۳ نفر از ۸ نفر بدون در نظر گرفتن ترتیب $\rightarrow \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = 56$ ✓

مثال: به چند روش می‌توان ۴ حرف از حروف کلمه‌ی «دبیرستان» انتخاب کرد؟

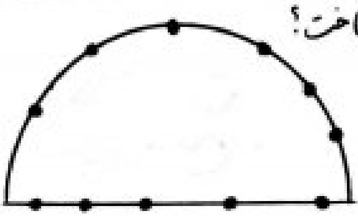
ترتیب قرار گرفتن مد نظر نیست $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\,4!} = 70$ ✓

چند فرمول (به خاطر بسپارید، بهتر است!)

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{\text{تهی}} = \underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{همه}} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n \;,\; \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2\times 1} \;,\; \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2\times 1} \;,\; \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times 3\times 2\times 1} \;,\; \dots$$

مثال: با ۱۱ نقطه، متمایز که فقط پنج تای آنها روی یک خط راست می‌باشند، چند مثلث می‌توان ساخت؟



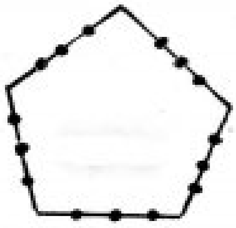
راه اول:

۳ نقطه از کمان یا ۱ نقطه از خط و ۲ نقطه از کمان یا ۲ نقطه از خط و ۱ نقطه از کمان

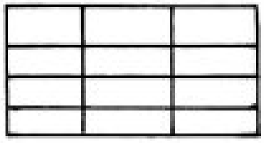
$$\binom{6}{3} + \binom{5}{1}\times\binom{6}{2} + \binom{5}{2}\times\binom{6}{1} = 155$$

راه دوم :

تمرین H.W: با نقاط شکل مقابل چند مثلث وجود دارد؟ (جواب : ۴۵۰)



مثال: در شکل روبه‌رو چند مستطیل وجود دارد؟



مثال سهم ۲ : اگر $\binom{n}{11} = \binom{n}{10}$ ، آنگاه $\binom{n}{19}$ کدام است؟

نکته مهم: $\binom{n}{x} = \binom{n}{y} \Longleftrightarrow x + y = n$

نتیجه: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

سراسری H.W: اگر $\binom{n}{8} = 2\binom{n}{7}$ ، آنگاه n کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

یادآوری: $n! = n(n-1)!$

(گزینه ۴)

حل

$$\frac{n!}{\underbrace{8!}_{8\times 7!}\times(n-8)!} = 2\times\frac{n!}{7!\times\underbrace{(n-7)!}_{(n-7)\cdot(n-8)!}} \longrightarrow \cdots$$

مثال : در یک آزمون ۱۰ سؤالی به چند طریق می‌توان به ۶ سؤال پاسخ داد به طوری که از پنج سؤال اول، فقط به ۳ سؤال جواب داده شود!

سراسری سکه‌ای را آنقدر می‌اندازیم تا برای سومین بار "رو" بیاید. تعداد حالاتی که می‌توان در ۱۰ بار پرتاب یک سکه به این منظور رسید؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲۰

۳) ۲۵ ۴) ۳۶

مثال : یک مجموعهٔ ۷ عضوی دارای چند زیرمجموعهٔ ۲ عضوی می باشد؟

مجموعه : فاقد ترتیب و تکرار

نتیجه: تعداد زیرمجموعه های ۲ عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با: $\binom{n}{2}$

مثال : در یک مهمانی هفت نفری، هر دو نفر یک بار با هم دست داده اند. تعداد کل دست دادن ها چقدر است؟

مثال: هفت خط متمایز در صفحه، حداکثر چند نقطه تقاطع دارند؟

$\binom{7}{2}=21$ ✓ $\xrightarrow[\text{۲ عضوی یک مجموعهٔ ۷ عضوی}]{\text{تعداد کل زیرمجموعه های}}$ ... , $\{d_1, d_2\}$, $\{d_2, d_3\}$, $\{d_1, d_2\}$

(زیر هر کدام: ۱ نقطه تقاطع)

مثال هفت شطرنج باز قرار است با هم دو به دو یک بار مسابقه بدهند. تعداد کل بازی ها چندتاست؟

تمرین H.W در یک مسابقه ورزشی ورزشکارانی از کشورهای a، b، c، d، e، f و g شرکت کرده اند. قرار است برای ارتباط بهتر ورزشکاران با هم تعدادی فرهنگ لغت دوزبانه به منظور آشنایی هر ورزشکار با سایر زبان ها تهیه شود. چند نوع فرهنگ لغت لازم است؟
(جواب: ۲۱)

مثال مجموعهٔ $S=\{1,2,3,\dots,30\}$ دارای چند زیرمجموعهٔ ۲ عضوی مانند $A=\{a,b\}$ است به طوری که

الف) $2|a+b$ ب) $2|ab$ پ) $5|ab$

تمرین H.W مجموعهٔ $S=\{1,2,\dots,30\}$ دارای چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی مانند $\{a,b,c\}$ است به طوری که

الف) $3|a+b+c$ ب) $3|abc$

تمرین H.W نشان دهید تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی مجموعهٔ $\{1,2,\dots,n\}$، که هیچ دو عضو آن اعداد متوالی نیستند برابر است با $\binom{n-3+1}{3}$

تست ـ به چند طریق می‌توان از ۱۰ زوج ساکن در یک آپارتمان ۱۰ واحدی، یک شورای ۴ نفری تشکیل داد به طوری که از هر خانواده تنها زن یا شوهر عضو شود؟

××	××
××	××
××	××
××	××
××	××

۱) ۲۵۲۰ ۲) ۳۳۶۰

۳) ۱۸۲۰ ۴) ۲۱۶۰

* اگر قرار باشد فقط یک زوج در این شورای ۴ نفری عضو باشد، چه طور؟

* اگر قرار باشد حداقل یک زوج در این شورای ۴ نفری عضو باشد، چه طور؟

سراسری ۹۲ از هر یک از ۶ منطقهٔ کشوری، ۱۵ دانش آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش آموز از بین آن‌ها که دو به دو غیرهم منطقه‌ای باشند، انتخاب کرد؟

A	B	C	D	E	F
۱۵ نفر	۱۵ نفر	۱۵ نفر	۱۵ نفر	۱۵ نفر	۱۵ نفر

۱) ۵۷۸۰ ۲) ۶۷۵۰۰

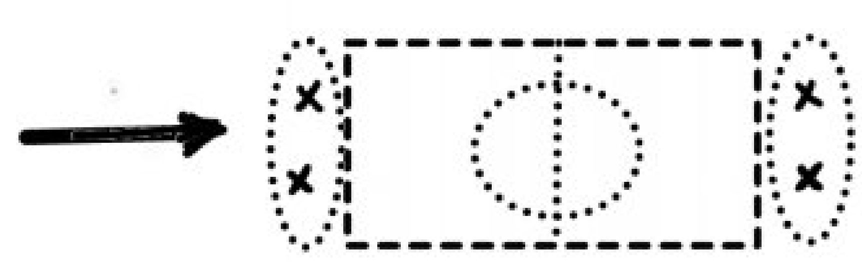
۳) ۷۵۸۰۰ ۴) ۷۶۵۰۰

سراسری ۹۲ خ از هر یک از ۸ مدرسهٔ علاقه‌مند، ۶ نفر برای بازی تنیس ۴ نفری (۲ نفر در مقابل ۲ نفر) انتخاب شده‌اند. به چند طریق این بازی‌ها ممکن است انجام شود به طوری که دو نفر همیار هم از یک مدرسه باشند؟ (بازی بین مدارس مختلف برگزار می‌شود)

۱) ۷۲۰۰ ۲) ۶۳۰۰

۳) ۵۱۰۰ ۴) ۲۸۰۰

A	B	C	D	E	F	G	H
۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر	۶ نفر



دنیا را بد ساخته‌اند

کسی را که دوست داری دوست ندارد و کسی که تو را دوست دارد تو دوستش نداری

اما کسی که تو دوستش داری و او هم تو را دوست دارد

به رسم و آیین زندگانی به هم نمی‌رسند و این رنج بزرگی است

(دکتر شریعتی)

توجه : حداقل ۳ شی : ۳ شی یا بیشتر — حداکثر ۳ شی : ۳ شی یا کمتر — متمم یکدیگر نیستند (زیرا هردو در ۳ شی اشتراک دارند)

مثال از بین ۳ زن و ۵ مرد به چند طریق می‌توان یک گروه چهارنفری تشکیل داد به طوری که

الف) ۲ مرد و ۲ زن انتخاب بشود!

۲ مرد و ۲ زن

$$\binom{5}{2}\times\binom{3}{2}=10\times 3=30\ \checkmark$$

ب) حداقل یک زن انتخاب بشود! ← یک زن یا بیشتر

۱ زن و ۳ مرد یا ۲ مرد و ۲ زن یا ۱ مرد و ۳ زن

$$\underbrace{\binom{3}{1}}_{3}\times\underbrace{\binom{5}{3}}_{10}+\underbrace{\binom{3}{2}}_{3}\times\underbrace{\binom{5}{2}}_{10}+\underbrace{\binom{3}{3}}_{1}\times\underbrace{\binom{5}{1}}_{5}=65\ \checkmark$$

پ) حداکثر یک مرد انتخاب بشود! ← یک مرد یا کمتر

۱ مرد و ۳ زن یا ۴ زن و صفر مرد

$$\underbrace{\binom{5}{1}}_{5}\times\underbrace{\binom{3}{3}}_{1}+\binom{5}{0}\times\binom{3}{4}=5\ \checkmark$$

سراسری از ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخ‌گویی انتخاب کرد، به شرط آنکه حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول، انتخاب بشود؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۵

۴ پرسش از ۵ پرسش اول و ۴ پرسش از ۵ پرسش دوم یا ۵ پرسش از ۵ پرسش اول و ۳ پرسش از ۵ پرسش دوم

$$\underbrace{\binom{5}{4}}_{5}\times\underbrace{\binom{5}{4}}_{5}+\underbrace{\binom{5}{5}}_{1}\times\underbrace{\binom{5}{3}}_{10}=35\ \checkmark$$

مثال (تجربی ۹۸): گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. چند دسته گل متفاوت می‌تواند بسازد؟

مثال: از بین ۱۲ نفر به چند طریق می‌توان گروه‌هایی با حداقل ۳ عضو تشکیل داد؟

یادآوری:

$$\underbrace{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}}_{\text{تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی}}=2^n$$

تجربی ۱۴۰۰: تعداد چندضلعی‌های محدبی که با ۸ نقطه‌ی متمایز واقع بر محیط یک دایره می‌توان ساخت کدام است؟ (جواب: ۲۱۹)

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های با تعداد عضوهای فرد یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های با تعداد زوج آن مجموعه برابر است.

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\dots=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots=2^{n-1}$$

مثال: از بین ۸ دانش‌آموز به چند طریق می‌توان یک گروه ۳ نفره انتخاب کرد به طوری که فرد مخصوصی اصلاً انتخاب نشود؟

مثال: از بین ۸ دانش‌آموز به چند طریق می‌توان یک گروه ۳ نفره انتخاب کرد به طوری که یک فرد مورد نظر در بین آنها باشد؟

نکته ۱: تعداد ترکیب‌های r تایی n شیء متمایز، که همگی شامل یک شیء مخصوص‌اند برابر است با: $\boxed{\binom{n-1}{r-1}}$

نکته ۲: تعداد ترکیب‌های r تایی n شیء متمایز، که همگی فاقد یک شیء مخصوص‌اند برابر است با: $\boxed{\binom{n-1}{r}}$

مثال: از بین افراد a ، b ، c ، d ، e ، f ، g و h به چند طریق می‌توان ۴ نفر انتخاب کرد به طوری که

الف) a و b حتماً انتخاب شوند؟

$\underbrace{a, b}_{\text{انتخاب شده‌اند}}, \underbrace{c, d, e, f, g, h}_{\text{انتخاب ۲ نفر دیگر از ۶ نفر باقی‌مانده}} \longrightarrow \binom{6}{2} = 15$ ✓

ب) c انتخاب نشود؟

$a, b, \underset{\text{حذف}}{c}, d, e, f, g, h \xrightarrow{\text{انتخاب ۴ نفر از ۷ نفر باقی‌مانده}} \binom{7}{4} = 35$ ✓

ج) a و b انتخاب شوند و c انتخاب نشود؟

$\underbrace{a, b}_{\text{انتخاب شده‌اند}}, \underset{\text{حذف}}{c}, \underbrace{d, e, f, g, h}_{\text{انتخاب ۲ نفر دیگر از ۵ نفر باقی‌مانده}} \longrightarrow \binom{5}{2} = 10$ ✓

مثال: از ۱۰ پرسش موجود به چند طریق می‌توان به ۸ سؤال جواب داد به طوری که پاسخ به ۳ سؤال اول اجباری باشد؟

سؤال‌ها ← $\underbrace{1, 2, 3}_{\text{اجباری (ثابت)}}, \underbrace{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}$ ⟶

مثال: مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ دارای چند زیرمجموعه‌ی ۴ عضوی است به طوری که

الف) فاقد ۱ باشد؟ ۱ حذف ⟵

ب) شامل ۲ باشد؟ ۲ ثابت ⟵

$\{\underset{\text{مصرف شده}}{2}, \underbrace{?, ?, ?}\}$

$\binom{5}{3} = 10$ ✓ انتخاب ۳ عضو دیگر از ۵ عضو باقی‌مانده

ج) شامل ۲ و فاقد ۱ باشد؟ ۱ حذف، ۲ ثابت ⟵

$\{\underset{\text{مصرف شده}}{2}, \underbrace{?, ?, ?}\}$ ⟶

مثال: از بین ۱۰ نفر که دو نفر آنها برادر هستند، به چند طریق می‌توان یک گروه ۶ نفری تشکیل داد به طوری که

الف) هر دو برادر با هم در گروه باشند؟

ب) هیچ کدام از برادرها نباشند؟

پ) فقط یکی از دو برادر در گروه باشد؟

ت) هر دو برادر با هم در گروه نباشند؟ (تجربی ۹۹)

مثال در اداره‌ای ۱۸ پرسنل، شامل ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند و ۳ کارشناس امور حقوقی مشغول به کارند. به چند طریق می‌توان یک جلسه ۵ نفره برگزار کرد به طوری

الف) رئیس و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

ب) یکی از معاونان و یک کارمند در جلسه باشند؟

پ) رئیس، یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس اداری باشند؟

مثال یک آشپز با استفاده از ۳ ادویه از بین ۱۰ ادویهٔ موجود، یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه

الف) محدودیتی نباشد؟

ب) دو نوع ادویه نباید باهم به کار روند؟

پ) سه نوع ادویه نباید هر سه باهم استفاده شوند؟

ت) ادویه‌ها به دو دستهٔ ۵ تایی تقسیم می‌شوند، که ادویه‌های دستهٔ اول با ادویه‌های دستهٔ دوم سازگاری ندارند؟

تجربی ۱۴۰۱ ۷ کتاب در موضوعات مختلف که ریاضی، فیزیک و زیست هم جزء آنهاست، در اختیار داریم. به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را طوری انتخاب کرد که اگر ریاضی انتخاب شود، زیست نیز انتخاب شود و اگر فیزیک انتخاب شود، زیست انتخاب نشود؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱

۳) ۱۵ ۴) ۱۴

نتیجه مهم "قاعده پاسکال"

$$\boxed{\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}}$$

تست حاصل $\binom{13}{4}+\binom{13}{3}+\binom{12}{2}$ کدام است؟

۱) $\binom{14}{3}$
۲) $\binom{14}{4}$
۳) $\binom{15}{4}$
۴) $\binom{15}{3}$

تست ۱۴۰۳ حاصل $\binom{21}{6}+2\binom{21}{5}+\binom{21}{4}$ کدام است؟

۱) $2\times\binom{22}{6}$
۲) $\binom{22}{6}$
۳) $2\times\binom{23}{6}$
۴) $\binom{23}{6}$

تست یک مجموعه ۱۵ عضوی دارای چند زیرمجموعه ۹ عضوی یا ۱۰ عضوی است؟

۱) $2\times\binom{15}{10}$ ۲) $\binom{16}{10}$
۳) $2\times\binom{16}{10}$ ۴) $\binom{16}{9}$

ترکیب با اشیای تکراری ←

تست : به چند طریق می‌توان ۳ حرف از حروف کلمه «گسسته» انتخاب کرد؟

۱) ۱۰ ۲) ۹
۳) ۸ ۴) ۷

تمرین ۱۴۰۳ به چند طریق می‌توان ۴ حرف از حروف کلمه «دانشگاه» انتخاب کرد؟ (جواب: ۲۵)

دانشگه
حروف متمایز →
۱، ۱، ؟، ؟ →

سراسری هر یک از حروف کلمه DELAVARAN بر روی ۹ گوی نوشته شده است. به چند طریق می‌توان ۳ گوی از این ۹ گوی انتخاب کرد؟

۱) ۳۵ ۲) ۴۲
۳) ۵۶ ۴) ۸۳

تبدیل : انتخاب همراه با جایگشت (Permutation)

⟵ در مسائلی مطرح می‌شود که اشیاء را انتخاب می‌کنیم ولی ترتیب قرارگرفتن آنها نیز مهم است. به عبارت دیگر

مثال : به چند طریق می‌توان از بین ۵ دانش‌آموز یک صف ۳ نفری تشکیل داد؟

مثال در یک شرکت سهامی، از بین ۶ نفر، به چند طریق می‌توان

الف) ۳ نماینده انتخاب کرد؟ ب) یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کرد؟

مثال در یک مسابقه ورزشی بین ۶ دانش‌آموز، به چند طریق می‌توان به رتبه‌های اول، دوم و سوم، مدال‌های طلا، نقره و برنز داد؟

مثال درون ظرفی یک سیب، یک پرتقال و یک انار قرار دارد. اگر از بین ۶ نفر، ۳ نفر مجاز باشند به طرف ظرف رفته و هر کدام یک میوه بردارند به چند طریق سه میوه توزیع می‌شود؟

مثال با حروف کلمه‌ی "دبیرستان" چند کلمه‌ی چهار حرفی می‌توان نوشت به طوری که

الف) هیچ شرطی نباشد.

....

ب) همگی با حرف "د" شروع شوند؟ ⟵ | ? | ? | ? | د |

ثابت

....

پ) همگی شامل حرف "د" باشند؟ ⟵ د ب ی ر س ت ا ن

....

ت) همگی شامل حروف "د" و "ر" و فاقد "ن" باشند؟ ⟵ د ب ی ر س ت ا ن

حذف

....

ث) همگی با "د" شروع شوند و به حرف نقطه‌دار ختم گردند؟ | نقطه‌دار | ? | ? | د |

ثابت ثابت

مثال: با حروف کلمهٔ "دانش پژوه" چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت به طوری که

الف) در چهار حرف اول آن از حروف کلمهٔ "دانش" استفاده شود؟

ب) در چهار حرف اول آن، کلمهٔ "دانش" دیده شود؟

تست در یک ماشین حساب با ۲۰ کلید، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید متمایز با ترتیب مشخص فشار داده شوند. اگر فردی دستور خاص را نداند و بخواهد به تصادف این کار را انجام دهد، در صورتی که امتحان کردن هر سه کلید ۲۰ ثانیه زمان ببرد، این فرد حداکثر چند ساعت زمان برای اجرای دستور لازم دارد؟

۱) ۲:۲۶ ۲) ۳:۴۸
۳) ۳:۲۰ ۴) ۲:۴۸

مثال مهم به چند طریق می‌توان ۳ دختر خردسال و ۵ پسر خردسال را در یک ردیف قرار داد، به طوری که

الف) محدودیتی نباشد؟

ب) در دو انتهای این ردیف، دختر باشد؟

پ) در دو انتهای این ردیف، افراد از یک جنس باشند؟

ت) هیچ دو دختری کنار هم نباشند؟

مثال ۸ نفر به نام‌های a ، b ، c ، d ، e ، f ، g و h به چند طریق می‌توانند

الف) در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که بین a و b دقیقاً سه نفر دیگر باشد؟

ب) دور یک میز قرار گیرند، به طوری که بین a و b دقیقاً سه نفر دیگر باشد؟

پ) دور یک میز قرار گیرند، به طوری که هیچ یک از افراد a ، b و c کنار هم نباشند؟

تست H.W به چند طریق می‌توان از بین ۷ استاد ریاضی، یک میزگرد ۴ نفری تشکیل داد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۱۰
۳) ۴۸۰ ۴) ۸۴۰

(گزینه ۲)

سراسری ۹۴ EX با ارقام ۱، ۲، ۳، ...، ۹ به چند طریق می‌توان یک عدد پنج رقمی ساخت به طوری که دست‌کم دو رقم آن زوج باشد؟

۱) ۶۴۰۰ ۲) ۷۲۰۰
۳) ۸۴۰۰ ۴) ۹۶۰۰

سراسری EX ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را به چند طریق می‌توان به طور یک در میان در قفسه‌ای چید؟

- اگر یک در میان گفته نمی‌شد ← $\underbrace{\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}}_{\text{انتخاب کتاب‌ها}}\times\underbrace{7!}_{\text{جایگشت ۷ کتاب}}$

- اگر قرار باشد کتاب‌های هر سال پهلوی هم باشند ← $\underbrace{\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}}_{\text{انتخاب کتاب‌ها}}\times\underbrace{3!\times 4!}_{\text{جایگشت درون جعبه‌ها}}\times\underbrace{2!}_{\text{جایگشت جعبه‌ها}}$

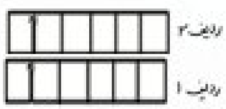
$\underbrace{\boxed{\text{۴ تا دوم}}\boxed{\text{۳ تا اول}}}_{\text{۲ تا جعبه}}$

- 〃 〃 〃 کتاب‌های سال اول کنار هم باشند ← $\underbrace{\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}}_{\text{انتخاب کتاب‌ها}}\times\underbrace{5!}_{\text{جایگشت ۵ شیء متمایز}}\times\underbrace{3!}_{\text{جایگشت درون جعبه}}$

$\underbrace{\boxed{\text{۳ تا اول}}\times\times\times\times}_{\text{۵ شیء متمایز}}$

تمرین ۱۴۰۳ در یک سالن، به چند طریق می‌توان ۷ نفر را روی ۱۲ صندلی یک ردیف قرار داد به طوری که هیچ دو صندلی خالی مجاوری وجود نداشته باشد؟

مثال در یک سالن دو ردیف صندلی ۶ تایی قرار دارد. به چند طریق می‌توان ۴ دانش‌آموز سال دهم و ۴ دانش‌آموز سال یازدهم را روی این صندلی‌ها نشاند، به طوری که دهمی‌ها در ردیف اول باشند؟ (یازدهمی‌ها به دلخواه می‌نشینند)



سراسری ۱۴۰۱ خ در یک مطب، ۵ صندلی در یک ردیف قرار دارد. ۷ بیمار همزمان وارد مطب می‌شوند. به چند طریق بیماران می‌توانند روی ۵ صندلی بنشینند، به طوری که دو نفر از آن‌ها نخواهند کنار هم بنشینند؟

۱) ۱۵۶۰ ۲) ۱۸۰۰
۳) ۲۰۴۰ ۴) ۲۲۸۰

توجه: هرگاه ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخابی مشخص باشد (در صورت سؤال گفته باشد)، آن‌گاه ...

تست چند عدد سه رقمی با شرط «رقم صدگان > رقم دهگان > رقم یکان» می‌توان نوشت؟

۱) ۸۴ ۲) ۹۰
۳) ۲۱۰ ۴) ۱۲۰

● اگر گفته می‌شد (رقم صدگان < رقم دهگان < رقم یکان)؟

● اگر گفته می‌شد (رقم صدگان ≥ رقم دهگان ≥ رقم یکان)؟

تبدیل با اشیای تکراری راه حل: شاخه‌بندی حالت‌ها جهت مشخص شدن وضعیت تکراری‌ها

تست : با حروف کلمهٔ «گسسته» چند کلمهٔ ۳ حرفی وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۳۰

۳) ۲۴ ۴) ۳۳

تمرین H.W : با حروف کلمهٔ "دانشگاه" چند کلمهٔ ۴ حرفی وجود دارد؟ (جواب : ۴۸۰)

$\underbrace{\text{دان ش گ ه}}_{\text{۶ حروف متمایز}}$ →

۱ , ۱ , ? , ? →

مثال : با حروف کلمهٔ "زلزله" (ه) چند کلمهٔ ۳ حرفی می‌توان نوشت؟

....

با چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

ز ، ز ، ل ، ل → $\frac{4!}{2!\,2!} = 6$

ه ، ل ، ز ، ز → $\frac{4!}{2!} = 12$

ه ، ز ، ل ، ل → $'' = 12$

$\xrightarrow{+} 30$ ✓

تست : تعداد جایگشت‌های سه حرفی با حروف کلمهٔ SERESHT کدام است؟

۱) ۸۴ ۲) ۶۰

۳) ۷۲ ۴) ۵۶

مرور سری H.W : تعداد جایگشت‌های ۴ حرفی از حروف کلمهٔ SALAMAT که دو حرف آن A باشد، کدام است؟ (جواب : گزینهٔ ۴)

۱) ۲۴ ۲) ۳۶

۳) ۵۶ ۴) ۷۲

تست با ارقام ۲، ۲، ۴، ۴، ۶، ۶ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

تست با ارقام ۱، ۲، ۲، ۳، ۳، ۳، ۳ چند عدد چهار رقمی وجود دارد؟

سه رقم ۳: ۳، ۳، ۳، ? $\xrightarrow{\text{۲ یا ۱}}$ $\binom{2}{1} \times \frac{4!}{3!} = 8$

دو رقم ۳:
- ۳، ۳، ۲، ۱ $\longrightarrow \frac{4!}{2!} = 12$
- ۳، ۳، ۲، ۲ $\longrightarrow \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$

تک رقم ۳: ۳، ۲، ۲، ۱ $\longrightarrow \frac{4!}{2!} = 12$

$\xrightarrow{+} 38$

تست با حروف کلمهٔ DELAVARAN چند کد سه حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۲۹
۳) ۲۶۰ ۴) ۳۷۲

تبدیل r تایی n شی ← انتخاب r شی از n شی و جایگشت r شی انتخاب شده

قضیه: تعداد تبدیل‌های r تایی n شی متمایز برابر است با

$$P(n,r) = P_n^r = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!} \in N \quad : r \le n$$

نتیجه:

مثال اگر $(n)_2 - \binom{n}{2} = 36$ باشد، آن گاه $\binom{n}{6}$ کدام است؟ ۱) ۵۶ ۲) ۸۴ ۳) ۹۲ ۴) ۱۰۵

توزیع اشیای یکسان در جعبه‌های متمایز

Ex

⟸ وقتی اشیاء یکسان اند، جایگشت آنها بی‌مورد است و مهم نیست که کدام شیء در کدام جعبه قرار می‌گیرد. اما چون جعبه‌ها متمایز اند، مهم است که در هر جعبه چند شی قرار می‌گیرد.

مثال: به چند طریق می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر، به دلخواه توزیع کرد؟

Ex

x	y	z
oo	o	oo
ooo		oo
o	ooo	o
⋮	⋮	⋮

$$\xrightarrow{\text{جایگشت ۷ تا شکل هندسی}} \frac{7!}{2!\times 5!} = \binom{7}{2} = 21$$

$\binom{7}{2}$: $7 = 5+(3-1)$ ، $2 = 3-1$

$2!$ ← حذف جایگشت دو خط عمودی باهم

$5!$ ← حذف جایگشت ۵ دایره یکسان

قضیه: تعداد روش‌های توزیع n شی یکسان در k جعبهٔ متمایز، که ممکن است به برخی چیزی نرسد، (توزیع به دلخواه) ($k-1$) خط عمودی لازم است

برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

Ex

اثبات:

k جعبه متمایز $\longrightarrow$ ($k-1$) خط عمودی $\xrightarrow{\text{به همراه } n \text{ شی یکسان}}$ $[n+(k-1)]$ شکل هندسی

$$\xrightarrow{\text{جایگشت}} \frac{[n+(k-1)]!}{(k-1)!\times n!} = \binom{n+(k-1)}{k-1}$$

$(k-1)!$ ← حذف جایگشت ($k-1$) خط عمودی با هم

$n!$ ← حذف جایگشت n دایره باهم

مثال مهم (سراسری) Ex: معادلهٔ $x+y+z=5$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

$x+y+z$: ۳ جعبهٔ متمایز ، ۵: ۵ شی یکسان

نامنفی ← امکان صفر شدن جواب (خالی ماندن جعبه) هست.

معادله‌ی خطی با ضرایب واحد (ضرایب ۱+ ، درجه اول)

توزیع ۵ شی یکسان در ۳ جعبهٔ متمایز به دلخواه $\xrightarrow[k=3]{n=5}$ $\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$

نتیجه: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$

Ex

توزیع به دلخواه ⟵ حسابی

$x_1+x_2+\dots+x_k$: k جعبهٔ متمایز ، n: n شی یکسان

سراسری Ex: تعداد چهارتایی مرتب (x_1,x_2,x_3,x_4) از اعداد صحیح نامنفی که در تساوی $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ صدق نماید؟ (جواب‌های)

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۱۴۴ ۴) ۲۸۶

$k=4$ ، $n=10$

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} = 286$$

تست: چند عدد طبیعی حداکثر چهار رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر ۹ باشد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۱۴۰ ۴) ۲۴۰

$\overline{abcd}$

$$a+b+c+d=9$$

$$\xrightarrow[k=4]{n=9} \binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3} = 220$$

سراسری خارج تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=7$ با تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=2$ برابر است، k کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

$n=2$ ، $n=7,\ k=3$

$$\binom{2+k-1}{k-1}=\binom{7+3-1}{3-1} \Rightarrow \binom{\overbrace{k+1}^{9}}{\underbrace{k-1}_{7}}=\binom{9}{2} \longrightarrow k=8$$

مثال معادلهٔ $\underbrace{x_1}_{\text{باید زوج باشد}}+\underbrace{2x_2}_{\text{زوج}}+\underbrace{2x_3}_{\text{زوج}}=\underbrace{20}_{\text{زوج}}$ چند جواب صحیح غیرمنفی دارد؟

$$\xrightarrow{x_1=2t} 2t+2x_2+2x_3=20 \xrightarrow{\div 2} t+x_2+x_3=10$$

$$\xrightarrow[n=10,\ k=3]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{10+3-1}{3-1}=\binom{12}{2}=66$$

مثال معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_7=13$ چند جواب صحیح و نامنفی فرد دارد؟

$x_i=2t_i+1$

$$\Rightarrow (2t_1+1)+(2t_2+1)+\dots+(2t_7+1)=13 \longrightarrow 2(t_1+t_2+\dots+t_7)=6$$

$$\xrightarrow{\div 2} t_1+t_2+\dots+t_7=3 \xrightarrow[k=7]{n=3} \binom{3+7-1}{7-1}=\binom{9}{6}=\binom{9}{3}=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

مثال: بسط عبارت $(a+b-c+d)^7$ چند جمله دارد؟ (سراسری ۹۹)

$$(a+b)^{3} = a^3.b^0+?\,a^2.b^1+?\,a^1.b^2+a^0.b^3$$

$$\xrightarrow{\text{هر جمله}} a^{x_1}.b^{x_2} \longrightarrow x_1+x_2=3 \xrightarrow[n=3,\ k=2]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{3+2-1}{2-1}=\binom{4}{1}=4 \text{ جمله}$$

$$(a+b-c+d)^7 \xrightarrow{\text{هر جمله}} a^{x_1}.b^{x_2}.c^{x_3}.d^{x_4} \longrightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=7 \xrightarrow[k=4]{n=7} \binom{7+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}=120 \text{ جمله}$$

تمرین H.W دستگاه
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11 \end{cases}$$
چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟ (جواب: ۱۴۷)

(بیان دیگر: معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$، چند جواب حسابی با شرط $x_1+x_2+x_3=5$ دارد؟)

$$\left.\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5 \xrightarrow[k=3]{n=5} \binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}=21 \\ \underbrace{x_1+x_2+x_3}_{\cancel{5}}+x_4+x_5=\cancel{11}\ 6 \longrightarrow x_4+x_5=6 \xrightarrow[k=2]{n=6} \binom{6+2-1}{2-1}=\binom{7}{1}=7 \end{cases}\right\} \xrightarrow{\times}$$

تست معادلهٔ $\underbrace{(x_1+x_2)}_{?}.\underbrace{(x_3+x_4+x_5)}_{?}=21$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱) ۷۰۲ ۲) ۷۹۶ ۳) ۸۰۲ ۴) ۸۶۴

$$\left.\begin{cases} x_1+x_2=1 \longrightarrow \binom{1+2-1}{2-1}=2 \\ x_3+x_4+x_5=21 \longrightarrow \binom{21+3-1}{3-1}=\binom{23}{2}=253 \end{cases}\right\} \xrightarrow{\times} 506$$

$$\left.\begin{cases} x_1+x_2=21 \longrightarrow \binom{21+2-1}{2-1}=22 \\ x_3+x_4+x_5=1 \longrightarrow \binom{1+3-1}{3-1}=\binom{3}{2}=3 \end{cases}\right\} \xrightarrow{\times} 66$$

$$\left.\begin{cases} x_1+x_2=3 \longrightarrow \binom{3+2-1}{2-1}=4 \\ x_3+x_4+x_5=7 \longrightarrow \binom{7+3-1}{3-1}=\binom{9}{2}=36 \end{cases}\right\} \xrightarrow{\times} 144$$

$$\left.\begin{cases} x_1+x_2=7 \longrightarrow \binom{7+2-1}{2-1}=8 \\ x_3+x_4+x_5=3 \longrightarrow \binom{3+3-1}{3-1}=\binom{5}{2}=10 \end{cases}\right\} \xrightarrow{\times} 80$$

$$\xrightarrow{+} 796$$

EX
توزیع اشیای یکسان در جعبه‌های متمایز به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند (در هر جعبه حداقل یک شی باشد)

ابتدا در هر جعبه یک شی قرار دهیم. سپس توزیع اشیای یکسان باقی مانده به دلخواه انجام می‌شود.

سراسری (سراسری ۹۸) EX
به چند طریق می‌توان ۱۲ سکهٔ یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد به طوری که به هرکدام لااقل یک سکه برسد؟

ابتدا یک سکه به هرکدام می‌دهیم (۳ سکه مصرف می‌شود). اکنون توزیع ۹ سکه یکسان باقی مانده بین ۳ نفر به دلخواه مورد نظر است:

$$\begin{cases} n=9 \\ k=3 \end{cases} \rightarrow \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{9+3-1}{3-1}=\binom{11}{2}=55 \checkmark$$

$$\rightarrow \binom{n-1}{k-1}=\binom{12-1}{3-1}=\binom{11}{2}=55$$

EX
نتیجه: تعداد روش‌های توزیع n شی یکسان در k جعبهٔ متمایز، به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند، (در هر جعبه حداقل یک شی باشد) برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$

اثبات: ابتدا در هر جعبه، یک شی قرار دهیم (k شی مصرف می‌شود)، که در این صورت $(n-k)$ شی باقی می‌ماند. اکنون مسئله توزیع $(n-k)$ شی یکسان در k جعبهٔ متمایز مطرح است، که ممکن است از آنها به برخی چیزی نرسد، پس جواب عبارت است از: $\binom{(n-\cancel{k})+(\cancel{k}-1)}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$

سراسری ۹۲
به چند طریق می‌توان ۹ کتاب یکسان ($n=9$) را در ۵ قفسهٔ متمایز ($k=5$) جای داد به طوری که در هر قفسه حداقل یکی از آنها قرار داده شود؟

$$\binom{n-1}{k-1}=\binom{9-1}{5-1}=\binom{8}{4}=70$$

سراسری ۱۴۰۰
۷ گردو به چند طریق می‌توانند در سه لانهٔ متمایز قرار گیرند به طوری که هیچ لانه‌ای خالی نماند. (جواب: ۱۵)

تست
با پنج حرف a، b، c، d و e چند رمز ۱۰ حرفی می‌توان ساخت به طوری که در همگی آنها بر یک از این پنج حرف حداقل یک بار ظاهر شوند (و به ترتیب حروف الفبا باشند)

۱) ۱۲۶ ۲) ۸۴ ۳) ۲۸۶ ۴) ۱۱۲

$x_a+x_b+x_c+x_d+x_e=10$ ← تعداد a ها

$$\rightarrow \binom{n-1}{k-1}=\binom{10-1}{5-1}=\binom{9}{4}$$

مثال EX
معادلهٔ $x+y+z=9$ چند جواب صحیح و مثبت (طبیعی) دارد؟ ← جعبه‌ای خالی نباشد (در هر جعبه حداقل یک شی باشد)

$$\binom{n-1}{k-1}=\binom{9-1}{3-1}=\binom{8}{2}=28 \checkmark$$

EX
نتیجه: تعداد جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی) معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ برابر است با: $\binom{n-1}{k-1}$

اثبات: ابتدا در هر کدام از متغیر (جعبه)‌های x_1، x_2، ....، x_k، یک شی قرار دهیم (k شی مصرف می‌شود). اکنون مسئله توزیع $n-k$ شی یکسان باقی مانده در k جعبهٔ متمایز مطرح است، که ممکن است از آن به برخی از جعبه‌ها چیزی نرسد، یعنی تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=n-k$، که برابر است با: $\binom{n-1}{k-1}=\binom{(n-k)+(k-1)}{k-1}$

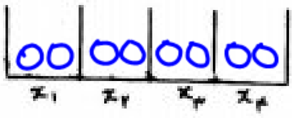
سراسری ۱۴۰۰ خ
تعداد جواب‌های طبیعی دستگاه معادلات $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=9 \\ x_4+x_5=7 \end{cases}$ کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۳۶ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۶۸ ✓

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=9 \xrightarrow[k=3]{n=9} \binom{n-1}{k-1}=\binom{9-1}{3-1}=\binom{8}{2}=28 \\ x_4+x_5=7 \xrightarrow[k=2]{n=7} \binom{n-1}{k-1}=\binom{7-1}{2-1}=\binom{6}{1}=6 \end{cases} \times \rightarrow 168$$

شرط های حداقلی (بزرگتر مساوی)

مثال Ex (سراسری ۹۸): به چند روش می‌توان ۱۳ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد، به طوری که به هر کدام حداقل ۲ توپ برسد؟

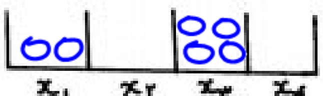


۸ توپ مصرف شده → $13-8=5$

توزیع ۵ توپ یکسان بین ۴ نفر به دلخواه ($n=5$ ، $k=4$)

$$\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{5+4-1}{4-1}=\binom{8}{3}=56 \checkmark$$

مثال Ex: معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ چند جواب صحیح و نامنفی با شرط های $x_1\geq 2$ و $x_3>3$ دارد؟



$x_1\geq 2 \longrightarrow$ در جعبهٔ x_1، حداقل ۲ شی باشد

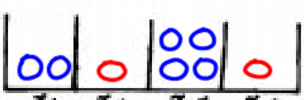
$x_3>3 \to x_3\geq 4 \to$ در جعبهٔ x_3، حداقل ۴ شی باشد

۶ شی مصرف می‌شود → $x'_1+x_2+x'_3+x_4=\underbrace{14-6}_{n=8} \longrightarrow \binom{8+4-1}{4-1}=\binom{11}{3}=165 \checkmark$

مثال Ex: معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=14$ چند جواب صحیح و مثبت با شرط های $x_1\geq 2$ و $x_3>3$ دارد؟

جعبه‌ها خالی نباشند

همیشه اولویت با شرط بزرگتر مساوی است



ابتدا شرط های بزرگتر مساوی را اعمال می‌کنیم
اگر جعبه‌ای خالی ماند، یک شی به آن می‌دهیم

۸ شی مصرف می‌شود → $x_1+x_2+x_3+x_4=\underbrace{14-8}_{n=6}$ جواب های حسابی $\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{6+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}=84 \checkmark$

مثال Ex: معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=17$ چند جواب صحیح و مثبت با شرط $x_i\geq i$ دارد؟ $(i=1,2,3,4)$

جعبه‌ها خالی نباشد

حل → $x_1\geq 1$ ، $x_2\geq 2$ ، $x_3\geq 3$ ، $x_4\geq 4$ →

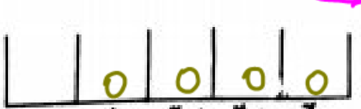
→ ۱۰ شی مصرف شده (۷ شی می‌ماند)

→ $x_1+x_2+x_3+x_4=7 \xrightarrow[k=4]{n=7} \binom{7+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}=120 \checkmark$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله جدید

مثال Ex: معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$ چند جواب صحیح و نامنفی با شرط $x_i>0$ دارد؟ $(2\leq i\leq 5)$

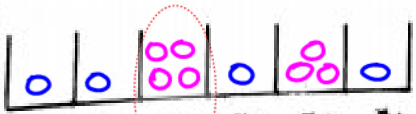
→ $x_i\geq 1 \longrightarrow (x_2\geq 1 ,\ x_3\geq 1 ,\ x_4\geq 1 ,\ x_5\geq 1)$



۴ شی مصرف شد → $\underbrace{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}_{k=5}=\underbrace{10-4}_{n=6} \longrightarrow \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{6+5-1}{5-1}=\binom{10}{4}=210 \checkmark$

مثال Ex: معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_6=12$ چند جواب صحیح و مثبت (طبیعی) با شرط های $x_3=4$ و $x_5>2$ دارد؟

جعبه‌ها خالی نباشد



$x_3=4 \longrightarrow$ ۴ شی به x_3 می‌دهیم و آن را کنار می‌گذاریم

$x_5>2 \to x_5\geq 3 \to$ ۳ شی در x_5 قرار می‌دهیم

۱۱ شی مصرف شده → $\underbrace{x_1+x_2+\cancel{x_3}+x_4+x_5+x_6}_{k=5}=\underbrace{12-11}_{n=1}$

جواب های صحیح و نامنفی → $\binom{1+5-1}{5-1}=\binom{5}{4}=5 \checkmark$

مثال EX: به چند طریق می‌توان یک دسته گل شامل ۱۱ شاخه، از ۵ نوع گل مختلف انتخاب کرد به طوری که

الف) به دلخواه انتخاب کنیم؟ (اساسی)

$$\underbrace{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}=11 \xrightarrow[\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}]{n=11,\ k=5} \binom{11+5-1}{5-1}=\binom{15}{4}$$

$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 9$

ب) از هر نوع حداقل یک شاخه انتخاب کنیم؟

جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی)

$$\binom{n-1}{k-1}=\binom{11-1}{5-1}=\binom{10}{4}=210 \checkmark$$

پ) از هر نوع گل حداقل دو شاخه انتخاب کنیم؟ (اساسی ۹۸)

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\cancel{11}\ 1$$

$$\xrightarrow[k=5]{n=1} \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{1+5-1}{5-1}=\binom{5}{4}=5 \checkmark$$

ت) از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم؟

$x_2 \geq 2$ ، $x_5>3 \to x_5 \geq 4$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\cancel{11}\ 5 \xrightarrow[k=5]{n=5} \binom{5+5-1}{5-1}=\binom{9}{4}=126 \checkmark$$

ث) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم؟

$x_3=0$ کنار می‌رود ، $x_4 \geq 5$

$$x_1+x_2+\cancel{x_3}+x_4+x_5=\cancel{11}\ 6 \xrightarrow[k=4]{n=6} \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{6+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}=84 \checkmark$$

ج) دقیقاً از ۲ نوع گل (خاص) اصلاً انتخاب نکنیم؟

مثلاً x_1 و x_2 کنار بروند

$$x_3+x_4+x_5=11 \xrightarrow[k=3]{n=11} \binom{n-1}{k-1}=\binom{11-1}{3-1}=\binom{10}{2}=45 \checkmark$$

جواب‌های صحیح و مثبت

چ) فقط از ۲ نوع گل انتخاب کنیم؟

تمرین H.W: بسط عبارت $(a+b-c+d)^7$ دارای چند جمله است به طوری که

الف) توان a برابر ۲ باشد؟

ب) توان a حداقل ۲ باشد؟

$$x_1+x_2+x_3+x_4=7$$

الف) $x_1=2$

ب) $x_1 \geq 2$

شرط‌های حداکثری ☹ ← روش متمم

سراسری خارج ۹۹ — تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x+y+z+t=11$ به شرط آن که $x<5$ باشد، کدام است؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۲۷۰ ۴) ۲۸۰

کل جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $\xrightarrow[k=4]{n=11} \binom{11+4-1}{4-1}=\binom{14}{3}=364$

$x<5 \xrightarrow{\text{متمم}} x\geq 5 \xrightarrow{\text{۵ شیء در جعبهٔ } x} x'+y+z+t=\cancel{11}\ 6 \xrightarrow[n=6,\ k=4]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{6+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}=84$

$\text{جواب} = \underbrace{364}_{\text{کل}} - \underbrace{84}_{\text{متمم}} = 280$ ✓

تست ۱۴۰۳ — به چند طریق می‌توان ۱۱ سکهٔ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد به طوری که شخص معین A حداکثر ۴ سکه دریافت کند؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۲۷۰ ۴) ۲۸۰

(گزینهٔ ۴)

$A+B+C+D=11 \rightarrow$

$A\leq 4 \xrightarrow{\text{متمم}} A\geq 5 \rightarrow$

سراسری ۱۴۰۱ — چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۶۰۰۰ با مجموع ارقام ۸ وجود دارد؟

۱) ۱۵۵ ۲) ۱۶۵ ۳) ۱۶۴ ۴) ۱۵۸

$\overline{abcd} \xrightarrow{\text{شرط مسأله}} a+b+c+d=8$

$\xrightarrow[k=4]{n=8} \binom{8+4-1}{4-1}=\binom{11}{3}=165$ (کل جواب‌های صحیح و نامنفی)

$a<6 \xrightarrow{\text{متمم}} a\geq 6 \xrightarrow{\text{۶ شیء در جعبهٔ } a} a'+b+c+d=\cancel{8}\ 2$

$\xrightarrow[n=2,\ k=4]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{2+4-1}{4-1}=\binom{5}{3}=10$

$\text{جواب} = 165-10=155$ ✓

تست — تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x+y+z+t=11$ با شرط‌های $x<5$ و $y>3$ کدام است؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۹۰

$y>3 \rightarrow y\geq 4 \xrightarrow{\text{۴ شیء در جعبهٔ } y} \underbrace{x+y+z+t=7}_{\text{معادله جدید}}$ با شرط $x<5$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ جدید $\xrightarrow[k=4]{n=7} \binom{7+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}=120$

$x<5 \xrightarrow{\text{متمم}} x\geq 5 \xrightarrow{\text{۵ شیء در جعبهٔ } x} x+y+z+t=\cancel{7}\ 2 \xrightarrow[n=2,\ k=4]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{2+4-1}{4-1}=\binom{5}{3}=10$

$\xrightarrow{-} 110$ ✓

نامعادله‌های خطی با ضرایب واحد

$x_1+x_2+\dots+x_k \le n$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $= \binom{n+k}{k}$

" " " و مثبت $= \binom{n}{k}$

مثال: نامعادله $x+y+z\le 8$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟ (سراسری ۹۴ و ۹۷)

$a\le b \xleftrightarrow[\text{تبدیل به معادلهٔ هم‌ارز}]{t\ge 0} a+t=b$

$x+y+z\le 8 \xleftrightarrow[t\ge 0]{\text{تبدیل به معادله هم‌ارز}} x+y+z+t=8$

$\xrightarrow[n=8,\ k=4]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله}} \binom{8+4-1}{4-1}=\binom{11}{3}=165$ ✓

مثال: نامعادله $x+y+z<9$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ (جعبه‌ها خالی نباشد)

$x+y+z\le 8$

$\overset{0}{x}+\overset{0}{y}+\overset{0}{z}\le \cancel{8}\ 5 \rightarrow x+y+z\le 5 \xrightarrow[\text{تبدیل به معادلهٔ هم‌ارز}]{t\ge 0} x+y+z+t=5$

$\xrightarrow[n=5,\ k=4]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله}} \binom{5+4-1}{4-1}=\binom{8}{3}=56$ ✓

مثال: نامعادله $x_1+x_2+x_3+x_4\le 10$ با شرط‌های $x_1\ge 2$ و $x_3\ge 3$:

($x_1 \ge 2$: ۲ شی در جعبهٔ x_1 ؛ $x_3\ge 3$: ۳ شی در جعبهٔ x_3)

الف) چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۵ شی مصرف شده

$x_1+x_2+x_3+x_4\le \cancel{10}\ 5 \xrightarrow[n=5,\ k=4]{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{n+k}{k}=\binom{5+4}{4}=\binom{9}{4}=126$ ✓

ب) چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ (جعبه‌ها خالی نباشد)

" " $\overset{00}{x_1}+\overset{0}{x_2}+\overset{000}{x_3}+\overset{0}{x_4}\le \cancel{5}\ 3$ " " $\xrightarrow[n=3,\ k=4]{} \binom{n+k}{k}=\binom{3+4}{4}=\binom{7}{4}=35$ ✓

مثال: نامعادله $4\le x_1+x_2+x_3\le 10$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

$x_1+x_2+x_3\le 10 \xrightarrow[t\ge 0]{\text{تبدیل به معادلهٔ هم‌ارز}} x_1+x_2+x_3+t=10 \xrightarrow[k=4]{n=10} \binom{10+4-1}{4-1}=\binom{13}{3}=286$

$x_1+x_2+x_3\le 3 \xrightarrow[t\ge 0]{\text{تبدیل به معادلهٔ هم‌ارز}} x_1+x_2+x_3+t=3 \xrightarrow[k=4]{n=3} \binom{3+4-1}{4-1}=\binom{6}{3}=20$

$-$ → 266 ✓

تمرین (H.W): نامعادله $100<(x_1+x_2+x_3)^3<250$ چند جواب طبیعی دارد؟

(جواب: ۱۶)

ریشه سوم ↓

$4,\dots<x_1+x_2+x_3<6,\dots$

$\rightarrow 5\le x_1+x_2+x_3\le 6 \rightarrow ???$

معادله‌های غیرخطی / معادله‌های با ضرایب غیر واحد

ک ← مجهولی که ضریب یا توان غیر ۱ دارد، با مقادیرش کنار می‌رود.

مثال (Ex): معادله $x_1+x_2+10x_3=20$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

$x_3=0 \rightarrow x_1+x_2=20 \xrightarrow{n=20,k=2} \binom{20+2-1}{2-1}=\binom{21}{1}=21$

یا

$x_3=1 \rightarrow x_1+x_2=10 \xrightarrow{n=10,k=2} \binom{10+2-1}{2-1}=\binom{11}{1}=11$

یا

$x_3=2 \rightarrow x_1+x_2=0 \xrightarrow{n=0,k=2} \binom{0+2-1}{2-1}=\binom{1}{1}=1$

$\xrightarrow{+} 33$

تست: معادله $x_1^4+x_2+x_3+x_4=6$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱) ۲۱ ۲) ۳۵ ۳) ۴۹ ۴) ۵۶

$x_1=0 \rightarrow x_2+x_3+x_4=6 \xrightarrow{n=6,k=3} \binom{6+3-1}{3-1}=\binom{8}{2}=28$

یا

$x_1=1 \rightarrow x_2+x_3+x_4=5 \xrightarrow{n=5,k=3} \binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}=21$

یا

$x_1=2 \rightarrow x_2+x_3+x_4=-10$ ×

$\xrightarrow{+} 49$

سراسری ۱۴۰۰: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3=\frac{10}{x_4}$ کدام است؟

x_4 ← شمارنده طبیعی ۱۰

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۸۱ ۴) ۹۶

$x_4=1 \rightarrow x_1+x_2+x_3=10 \xrightarrow{n=10,k=3} \binom{10+3-1}{3-1}=\binom{12}{2}=66$

$x_4=2 \rightarrow x_1+x_2+x_3=5 \xrightarrow{n=5,k=3} \binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}=21$

$x_4=5 \rightarrow x_1+x_2+x_3=2 \rightarrow \binom{2+3-1}{3-1}=\binom{4}{2}=6$

$x_4=10 \rightarrow x_1+x_2+x_3=1 \rightarrow \ldots =3$

$\xrightarrow{+} 96$

سراسری ۱۴۰۱ خارج (Ex): معادله $x_1+\sqrt{x_2}+x_3+x_4=4$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱) ۳۵ ۲) ۲۰ ۳) ۳۱ ۴) ۱۸

x_2: مربع کامل

$x_2=0 \rightarrow x_1+x_3+x_4=4 \xrightarrow{n=4,k=3} \binom{4+3-1}{3-1}=\binom{6}{2}=15$

$x_2=1 \rightarrow x_1+x_3+x_4=3 \xrightarrow{n=3,k=3} \binom{3+3-1}{3-1}=\binom{5}{2}=10$

$x_2=4 \rightarrow x_1+x_3+x_4=2 \xrightarrow{n=2,k=3} \binom{2+3-1}{3-1}=\binom{4}{2}=6$

$x_2=9 \rightarrow x_1+x_3+x_4=1 \xrightarrow{n=1,k=3} \binom{1+3-1}{3-1}=\binom{3}{2}=3$

$x_2=16 \rightarrow x_1+x_3+x_4=0 \xrightarrow{n=0,k=3} \binom{0+3-1}{3-1}=\binom{2}{2}=1$

$\xrightarrow{+} 35$

تمرین (H.W): معادله $\frac{10}{x_3}=x_1+x_2+x_3$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟ (جواب: ۱۴)

تمرین (H.W): معادله $(x_1+x_2)^3+x_3+x_4=20$ چند جواب طبیعی دارد؟ (جواب: ۱۱)

$x_1=x_2=1 \rightarrow$

تست معادله $x_1+x_2+x_3+\frac{3}{x_4}=14$ با شرایط $x_1>1$ ، $x_2>2$ و $x_3>3$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱

$x_1 \geq 2$ ← ۲ شی در x_1

$x_2 \geq 3$ ← ۳ شی در x_2

$x_3 \geq 4$ ← ۴ شی در x_3

۹ شی مصرف شده $\longrightarrow x_1+x_2+x_3+\frac{3}{x_4} = \underbrace{14-9}_{5}$

شمارنده طبیعی ۳

$x_4=1 \longrightarrow x_1+x_2+x_3=2 \xrightarrow[n=2,\ k=3]{\text{تعداد جوابهای صحیح و نامنفی}} \binom{2+3-1}{3-1}=\binom{4}{2}=6$

یا

$x_4=3 \longrightarrow x_1+x_2+x_3=4 \xrightarrow[n=4,\ k=3]{\text{تعداد جوابهای صحیح و نامنفی}} \binom{4+3-1}{3-1}=\binom{6}{2}=15$

$\xrightarrow{+} 21$ ✓

تست تعداد جواب‌های طبیعی معادله $(x_1^2+x_2+x_3)\left(\frac{6}{y_1}+y_2+y_3\right)^2=\underbrace{245}_{5\times 7^2}$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۶ ۳) ۸۴ ۴) ۹۰

$\underbrace{x_1^2+x_2+x_3}_{5}$ ، $\underbrace{\frac{6}{y_1}+y_2+y_3}_{7}$

$x_1^2+x_2+x_3=5 \longrightarrow$

$x_1=1 \longrightarrow x_2+x_3=4 \xrightarrow[n=4,\ k=2]{\text{تعداد جوابهای طبیعی}} \binom{n-1}{k-1}=\binom{4-1}{2-1}=3$

$x_1=2 \longrightarrow x_2+x_3=1 \xrightarrow[\times]{''\quad ''}$?

$\frac{6}{y_1}+y_2+y_3=7 \longrightarrow$ شمارنده طبیعی ۶

$y_1=1 \longrightarrow y_2+y_3=1 \longrightarrow \times$

یا $y_1=2 \longrightarrow y_2+y_3=4 \xrightarrow[n=4,\ k=2]{''\quad ''} \binom{4-1}{2-1}=\binom{3}{1}=3$

یا $y_1=3 \longrightarrow y_2+y_3=5 \xrightarrow[n=5,\ k=2]{''\quad ''} \binom{5-1}{2-1}=\binom{4}{1}=4$

یا $y_1=6 \longrightarrow y_2+y_3=6 \xrightarrow[n=6,\ k=2]{''\quad ''} \binom{6-1}{2-1}=\binom{5}{1}=5$

$\xrightarrow{+} 12$

$3\times 12=36$ جواب ✓

تست معادله $x_1+x_2+x_3=5$ چند جواب صحیح و نامنفی با شرط $x_1 \geq x_2$ دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

مقداردهی $x_2=0 \longrightarrow x_1+x_3=5 \xrightarrow[n=5,\ k=2]{x_1\geq 0} \binom{5+2-1}{2-1}=\binom{6}{1}=6$

یا $x_2=1 \longrightarrow x_1+x_3=\cancel{4}\ 3 \xrightarrow[n=3]{x_1\geq 1} \binom{3+2-1}{2-1}=\binom{4}{1}=4$

یا $x_2=2 \longrightarrow x_1+x_3=\cancel{3}\ 1 \xrightarrow[n=1]{x_1\geq 2} \binom{1+2-1}{2-1}=\binom{2}{1}=2$

$\xrightarrow{+} 12$ ✓

تست H.W به چند طریق می‌توان ۵ خودکار یکسان و ۴ مداد یکسان را بین ۳ نفر به دلخواه توزیع کرد؟

۱) ۲۸۰ ۲) ۳۱۵ ۳) ۲۴۵ ۴) ۳۴۰

$x_1+x_2+x_3=5 \longrightarrow$

$x_1+x_2+x_3=4 \longrightarrow$

$\xrightarrow{\times}$

تست H.W در چند جایگشت از حروف کلمهٔ VISITING بین هر دو حرف I حداقل دو حرف قرار دارد؟

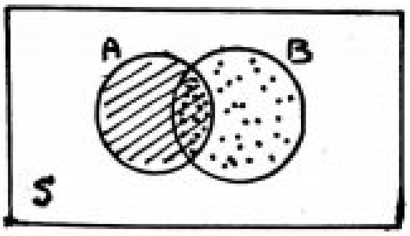
~~۱) ۱۲۰ ...~~

x_1 تا حرف ... I ... x_2 تا حرف ... I ... x_3 تا حرف ... I ... x_4 تا حرف

جایگشت ۵ حرف غیر I

$x_1+x_2+x_3+x_4=\cancel{5}\ 1 \xrightarrow[n=1,\ k=4]{x_2\geq 2,\ x_3\geq 2} \binom{1+4-1}{4-1}=\binom{4}{3}=4\times 5!=480$ ✓

اصل شمول و عدم شمول



① اگر دو مجموعهٔ A و B زیرمجموعه‌های مجموعهٔ متناهی S باشند، آن‌گاه

تعداد اعضا

$$\underbrace{|A\cup B|}_{\text{A یا B یا هر دو (حداقل یکی)}} = \underbrace{|A|+|B|}_{\text{شمول}} - \underbrace{|A\cap B|}_{\text{عدم شمول}}$$

نتیجه: تعداد عضوهای از مجموعهٔ S، که نه در A و نه در B قرار دارند، عبارت است از:

دمورگان

$$|A'\cap B'| = |(A\cup B)'| = |\overline{A\cup B}| = |S|-|A\cup B|$$
$$= |S|-(|A|+|B|-|A\cap B|)$$

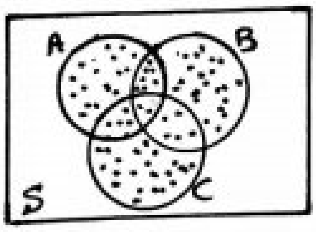
نه در A و نه در B

مثال ۲۹۸: در یک کلاس ۳۰ نفری (S)، ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال (F) و ۱۸ نفر عضو تیم والیبال (V) مدرسه‌اند. اگر ۹ نفر در هر دو تیم ($F\cap V$) فعالیت کنند، چند نفر عضو هیچ کدام از این دو تیم نیستند؟

$$|F'\cap V'| = |\overline{F\cup V}| = |S|-|F\cup V| = |S|-(|F|+|V|-|F\cap V|)$$
$$= 30-(15+18-9)$$
$$= 6$$

نه فوتبال و نه والیبال

② اگر سه مجموعهٔ A، B و C زیرمجموعه‌های مجموعهٔ متناهی S باشند، آن‌گاه



$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|$$
$$-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|$$
$$+|A\cap B\cap C|$$

نتیجه: تعداد عضوهای از مجموعهٔ S، که در هیچ یک از مجموعه‌های A، B و C قرار ندارند، عبارت است از:

$$|A'\cap B'\cap C'| = |(A\cup B\cup C)'| = |\overline{A\cup B\cup C}| = |S|-|A\cup B\cup C| = |S|-\ldots$$

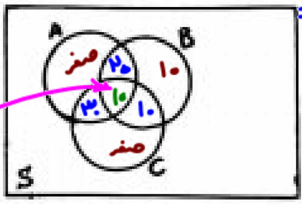
مثال: از ۱۰۰ نفر دانش‌آموزان یک دبیرستان، ۳۵ نفر در رشتهٔ فوتبال، ۴۵ نفر در رشتهٔ والیبال و ۵۰ نفر در رشتهٔ بسکتبال فعالیت می‌کنند. اگر ۱۰ نفر در هر سه رشته فعالیت کنند، ۱۵ نفر فوتبال و والیبال، ۱۲ نفر فوتبال و بسکتبال و ۱۸ نفر والیبال و بسکتبال بازی کنند، چند نفر عضو هیچ رشته‌ای از این سه ورزش نیستند؟

$$|F'\cap V'\cap B'| = |\overline{F\cup V\cup B}| = |S|-|F\cup V\cup B|$$
$$= |S|-(|F|+|V|+|B|-|F\cap V|-|F\cap B|-|V\cap B|+|F\cap V\cap B|)$$
$$= 100-(35+45+50-15-12-18+10)$$
$$= 5$$

مثال EX در یک دبیرستان از بین ۱۰۰ دانش‌آموز، ۶۰ نفر مجله‌ی A، ۵۰ نفر مجله‌ی B، ۵۰ نفر مجله‌ی C، ۳۰ نفر مجله‌ی A و B، ۲۰ نفر مجله‌ی B و C، ۴۰ نفر مجله‌ی A و C و ۱۰ نفر هر سه مجله‌ی A و B و C را می‌خوانند. مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی که

الف) هیچ مجله‌ای نمی‌خوانند؟

$$|A'\cap B'\cap C'| = |S| - |A\cup B\cup C|$$
$$= |S| - (|A|+|B|+|C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |A\cap C| + |A\cap B\cap C|)$$
$$= 100-(60+50+50-30-20-40+10)=20$$



ب) دقیقاً ۲ مجله می‌خوانند؟

فقط A و B یا فقط A و C یا فقط C و B

$$\underbrace{20}_{} + \underbrace{30}_{} + \underbrace{10}_{} = 60$$

پ) حداقل ۲ مجله می‌خوانند؟ $60+10=70$ ✓

ت) فقط یک مجله می‌خوانند؟

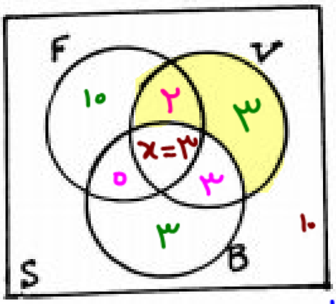
جواب الف ← $100-(10+10+10+20+30)=20$ ✓

فقط A یا فقط B یا فقط C

$$0 + 10 + 0 = 10$$ ✓

مثال EX در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر عضو تیم بسکتبال‌اند. اگر ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نباشند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی کنند، مطلوب است تعداد افرادی که

$$|F'\cap V'\cap B'|=10 \to \underbrace{|S|}_{34} - |F\cup V\cup B|=10$$



الف) در هر سه رشته فعالیت می‌کنند.

$$\to |F\cup V\cup B|=24$$
$$\to |F|+|V|+|B|-|F\cap V|-|V\cap B|-|F\cap B|+|F\cap V\cap B|=24$$
$$\to 15+11+9-5-6-3+x=24 \to \boxed{x=3}$$

ب) فقط فوتبال بازی می‌کنند. ← ۱۰

پ) والیبال بازی می‌کنند و بسکتبال بازی نمی‌کنند.

$$|V\cap B'|=|V-B|$$
$$=|V|-|V\cap B|=11-6=5$$ ✓

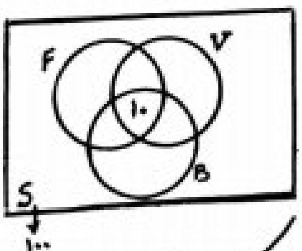
ت) فقط یک رشته فعالیت دارند.

فقط فوتبال یا فقط والیبال یا فقط بسکتبال

$$10 + 3 + 3 = 16$$ ✓

تمرین از ۱۰۰ نفر دانش‌آموزان یک دبیرستان، ۳۵ نفر در رشته فوتبال، ۴۵ نفر در رشته والیبال و ۵۰ نفر در رشته بسکتبال فعالیت می‌کنند. اگر ۱۰ نفر در هر سه رشته فعالیت کنند و ۱۵ نفر در هیچ کدام از این سه رشته ورزشی عضویت نداشته باشند، چند نفر دقیقاً در دو رشته فعالیت می‌کنند؟

(جواب: ۲۵)



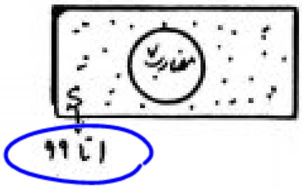
آنجا که چشمان مشتاقی برای لبخندی اشک می‌ریزند
نگاه‌ها چه غمگینانه می‌خندند

(دکتر شریعتی)

تعداد مضرب‌های مثبت عدد طبیعی a بین ۱ تا n $= \left[\frac{n}{a}\right]$

مثال (Ex): بین اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰ (۱ تا ۹۹)، چند عدد وجود دارد که

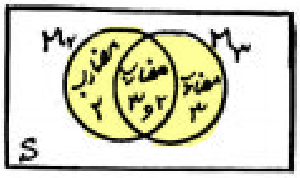
الف) مضرب ۷ نباشند؟



تعداد مضرب‌های ۷ بین ۱ تا ۹۹

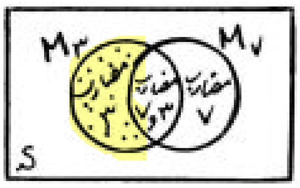
$$\text{جواب} = \underbrace{99}_{\text{کل}} - \underbrace{\left[\frac{99}{7}\right]}_{14} = 85$$

ب) بر ۲ یا بر ۳ بخش‌پذیر باشند؟



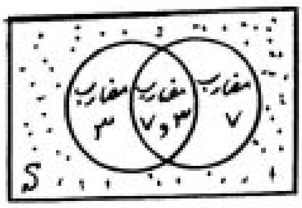
$$|M_2 \cup M_3| = |M_2| + |M_3| - |M_2 \cap M_3|$$
$$= \left[\frac{99}{2}\right] + \left[\frac{99}{3}\right] - \left[\frac{99}{\underbrace{[2,3]}_{6}}\right]$$
$$= 49 + 33 - 16 = 66$$

پ) بر ۳ بخش‌پذیر باشد و بر ۷ بخش‌پذیر نباشد؟



$$|M_3 \cap M_7'| = |M_3 - M_7| = |M_3| - |M_3 \cap M_7|$$
$$= \left[\frac{99}{3}\right] - \left[\frac{99}{\underbrace{[3,7]}_{21}}\right]$$
$$= 33 - 4 = 29$$

ت) نه بر ۳ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۷ بخش‌پذیر باشد؟



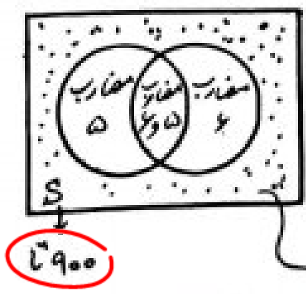
$$|M_3' \cap M_7'| = |S| - |M_3 \cup M_7|$$
$$= |S| - (|M_3| + |M_7| - |M_3 \cap M_7|)$$
$$= 99 - \left(\underbrace{\left[\frac{99}{3}\right]}_{33} + \underbrace{\left[\frac{99}{7}\right]}_{14} - \underbrace{\left[\frac{99}{21}\right]}_{4}\right) = 56$$

ث) نه مضرب ۴ و نه مضرب ۶ باشد؟

$$|M_4' \cap M_6'| = |\overline{M_4 \cup M_6}| = |S| - |M_4 \cup M_6|$$
$$= |S| - (|M_4| + |M_6| - |M_4 \cap M_6|)$$
$$= 99 - \left(\left[\frac{99}{4}\right] + \left[\frac{99}{6}\right] - \left[\frac{99}{\underbrace{[4,6]}_{12}}\right]\right)$$
$$= 99 - (24 + 16 - 8) = 67$$

مثال (Ex): چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که نه بر ۵ تقسیم‌پذیرند و نه بر ۶؟

تعداد اعداد سه‌رقمی $= 999 - 99 = 900$



تعداد مضرب‌های سه‌رقمی ۵ $= \left[\frac{999}{5}\right] - \left[\frac{99}{5}\right] = 180$

۶ " " " " $= \left[\frac{999}{6}\right] - \left[\frac{99}{6}\right] = 150$

۶،۵ " " " " $= \left[\frac{999}{5\times6}\right] - \left[\frac{99}{5\times6}\right] = 30$

$([5,6] = 5\times6)$

$$\text{جواب} = \underbrace{900}_{\text{کل}} - (180 + 150 - 30) = 600$$

$$|M_5' \cap M_6'| = |S| - (|M_5| + |M_6| - |M_5 \cap M_6|)$$

تا ۳۰۰

تست تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از ۳۰۱ که نه مضرب ۴، نه مضرب ۵ و نه مضرب ۶ است، کدام است؟

(چند عدد طبیعی مانند n، $1 \le n \le 300$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵ و ۶ بخش پذیر نباشد)

۱) ۷۰ ۲) ۸۰ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۶۰

$$|M_4'\cap M_5'\cap M_6'|=|S|-|M_4\cup M_5\cup M_6| \qquad [4,6]=12 \qquad [4,5,6]=60$$

$$=|S|-\left(|M_4|+|M_5|+|M_6|-|M_4\cap M_5|-|M_5\cap M_6|-|M_4\cap M_6|+|M_4\cap M_5\cap M_6|\right)$$

$$=300-\left(\underbrace{\left[\frac{300}{4}\right]}_{75}+\underbrace{\left[\frac{300}{5}\right]}_{60}+\underbrace{\left[\frac{300}{6}\right]}_{50}-\underbrace{\left[\frac{300}{20}\right]}_{15}-\underbrace{\left[\frac{300}{30}\right]}_{10}-\underbrace{\left[\frac{300}{12}\right]}_{25}+\underbrace{\left[\frac{300}{60}\right]}_{5}\right)=160$$

گزینه ۳

تمرین H.W

۹۰ برابر است

تعداد اعداد دورقمی که نسبت به ۱۰۵ اول اند، کدام است؟

نه مضرب ۳، نه مضرب ۵ و نه مضرب ۷

۱) ۳۹ ۲) ۴۰ ۳) ۴۱ ۴) ۴۲

$105 \overset{\text{تجزیه}}{=} 3\times5\times7$

تعداد اعداد دورقمی (طبیعی) $= 99-9=90$

تعداد اعداد دورقمی مضرب ۳ $=\left[\frac{99}{3}\right]-\left[\frac{9}{3}\right]=30$

تعداد اعداد دورقمی مضرب ۵ $=\left[\frac{99}{5}\right]-\left[\frac{9}{5}\right]=18$

تعداد اعداد دورقمی مضرب ۷ $=\left[\frac{99}{7}\right]-\left[\frac{9}{7}\right]=13$

تعداد اعداد دورقمی مضرب ۳ و ۵ $=\left[\frac{99}{3\times5}\right]-\left[\frac{9}{3\times5}\right]=6$

تعداد اعداد دورقمی مضرب ۳ و ۷ $=\left[\frac{99}{3\times7}\right]-\left[\frac{9}{3\times7}\right]=4$

تعداد اعداد دورقمی مضرب ۵ و ۷ $=\left[\frac{99}{5\times7}\right]-\left[\frac{9}{5\times7}\right]=2$

جواب $=|M_3'\cap M_5'\cap M_7'|=|\overline{M_3\cup M_5\cup M_7}|=|S|-|M_3\cup M_5\cup M_7|$

$$=|S|-\left(|M_3|+|M_5|+|M_7|-|M_3\cap M_5|-|M_5\cap M_7|-|M_3\cap M_7|+|M_3\cap M_5\cap M_7|\right)$$

$$=90-(30+18+13-6-4-2+0)$$

$$=41$$

تمرین H.W

گزینه ۳

چند عدد طبیعی نابیشتر از ۳۰۰ وجود دارد که نسبت به ۶۰ اول اند؟

$60=2^2\times3\times5$ نه مضرب ۲، نه مضرب ۳ و نه مضرب ۵ ≤ 300

۱) ۱۲۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۶۰

تست چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که مضرب ۲ و ۳ باشد و مضرب ۷ نباشد؟

تعداد $=999-99=900$

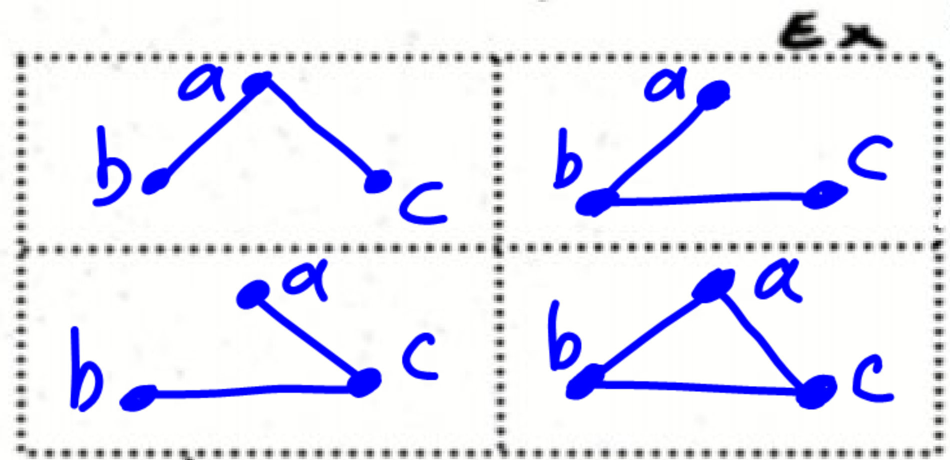
۱) ۱۲۸ ۲) ۱۲۹ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۳۱

$$|(M_2\cap M_3)\cap M_7'|=|(M_2\cap M_3)-M_7|=|M_2\cap M_3|-|M_2\cap M_3\cap M_7|$$

$$=\underbrace{\left(\left[\frac{999}{6}\right]-\left[\frac{99}{6}\right]\right)}_{150}-\underbrace{\left(\left[\frac{999}{42}\right]-\left[\frac{99}{42}\right]\right)}_{21}=131$$

تعداد گرافهای ساده از مرتبهٔ p ؟ $\rightarrow 2^{\binom{p}{2}}$

مثال (Ex) با مجموعهٔ رأس های $\{a,b,c\}$ چند گراف ساده می‌توان ساخت به طوری که فاقد رأس تنها باشد؟ $p=3$



A_a : مجموعهٔ گراف‌های ساده‌ای که در آن‌ها رأس a تنهاست

A_b : " " " " b "

A_c : " " " " c "

رأس a تنها نیست و — رأس b تنها نیست و — رأس c تنها نیست

$$\text{جواب} = |A'_a \cap A'_b \cap A'_c| = |S| - |A_a \cup A_b \cup A_c|$$

$$= |S| - (|A_a| + |A_b| + |A_c| - |A_a \cap A_b| - |A_b \cap A_c| - |A_a \cap A_c| + |A_a \cap A_b \cap A_c|)$$

$$= \underbrace{2^{\binom{3}{2}}}_{\text{کل گرافهای ساده با ۳ رأس}} - \Big(\underbrace{2^{\binom{2}{2}}}_{\text{گرافهای ساده با ۲ رأس (رأس a تنها)}} + \underbrace{2^{\binom{2}{2}}}_{\text{(b تنها)}} + 2 \underbrace{2^{\binom{2}{2}}}_{\text{(c تنها)}} - \underbrace{2^{\binom{1}{2}}}_{\text{گرافهای ساده با یک رأس (a و b تنها)}} = 0 - \underbrace{2^{\binom{1}{2}}}_{\text{(c,b تنها)}} - \underbrace{2^{\binom{1}{2}}}_{\text{(c,a تنها)}} + \underbrace{1}_{\text{هر سه رأس تنها (گراف تهی)}}\Big) = 4$$

تمرین (H.W) با ۶ رأس متمایز $v_1, v_2, \dots, v_6$ چند گراف ساده می‌توان ساخت به طوری که دقیقاً ۳ رأس تنها باشد؟

(جواب : ۸۰)

$$\underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{انتخاب ۳ رأس تنها}} \times$$

۹

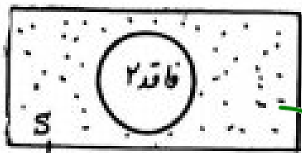
مثال (Ex): با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد (رمز) چهار رقمی وجود دارد که در همگی آنها رقم ۲ حداقل یک بار ظاهر شود؟

یک بار ۲، دو بار ۲، ....

هیچ بار $\xleftrightarrow{\text{متمم}}$ حداقل یک بار

کل اعداد چهار رقمی با ارقام داده شده → $\underset{\text{۴ حالت}}{?}\times\underset{۴}{?}\times\underset{۴}{?}\times\underset{۴}{?} = 4^4$

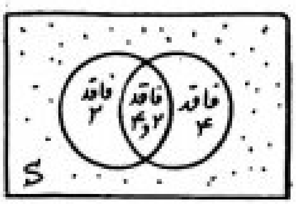
حداقل یک بار ۲ $\xrightarrow{\text{متمم}}$ هیچ بار ۲ (فاقد ۲) → $\underset{\text{۳ حالت}}{?}\times\underset{۳}{?}\times\underset{۳}{?}\times\underset{۳}{?} = 3^4$



کل اعداد چهار رقمی با ارقام داده شده

$$\text{جواب} = \underbrace{4^4}_{\text{کل}} - \underbrace{3^4}_{\text{متمم}} = 256 - 81 = 175$$

سراسری (Ex): با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد (رمز) چهار رقمی وجود دارد که در همگی آنها هر یک از رقم های ۲ و ۴ حداقل یک بار ظاهر شود؟



A: اعداد چهار رقمی با ارقام داده شده که فاقد ۲ می باشند → $\underset{\text{۳ حالت}}{?}\times\underset{۳}{?}\times\underset{۳}{?}\times\underset{۳}{?} = 3^4$

B: اعداد چهار رقمی با ارقام داده شده که فاقد ۴ می باشند → $- - - - = 3^4$

A∩B: اعداد چهار رقمی با ارقام داده شده که فاقد ۲ و ۴ می باشند → $\underset{\text{۲ حالت}}{?}\times\underset{۲}{?}\times\underset{۲}{?}\times\underset{۲}{?} = 2^4$

فاقد ۲ نه — و — فاقد ۴ نه

$$\text{جواب} = |A'\cap B'| = |\overline{A\cup B}| = |S| - |A\cup B| = |S| - (|A|+|B|-|A\cap B|)$$
$$= 4^4 - (3^4 + 3^4 - 2^4) = 110$$

حداقل یک بار ۲ ظاهر شود — و — حداقل یک بار ۴ ظاهر شود

سراسری ۹۸ خ: چند عدد سه رقمی وجود دارد که در آنها هر یک از رقم های ۳ و ۶ حداقل یک بار ظاهر شوند؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۲ ۳) ۴۸ ۴) ۵۶

غیر صفر: $\underset{\text{۹ حالت}}{?}\times\underset{۱۰}{?}\times\underset{۱۰}{?} = 9\times 10^2$

$$\text{جواب} = \underbrace{9\times 10^2}_{\text{کل}} - \big(\underset{\text{فاقد ۳}}{8\times 9^2} + \underset{\text{فاقد ۶}}{8\times 9^2} - \underbrace{7\times 8^2}_{\text{فاقد ۳ و ۶}}\big) = 52$$

مثال (Ex): در یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹، که حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می شود و امتحان کردن هر رمز آن ۵ ثانیه طول می کشد، حداکثر چند دقیقه لازم است تا قفل باز شود؟

$\underset{\text{۱۰ حالت}}{?}\times\underset{۱۰}{?}\times\underset{۱۰}{?}\times\underset{۱۰}{?} = 10^4$

$$\text{کل رمزهای مطلوب} = 10^4 - \big(\underbrace{9^4}_{\text{فاقد ۷}} + \underbrace{9^4}_{\text{فاقد ۸}} - \underbrace{8^4}_{\text{فاقد ۷ و ۸}}\big) = 974 \xrightarrow{\times 5} 4870 \text{ ثانیه}$$

$\xrightarrow{\div 60} ۸۱٫..$

مثال: EX با ارقام ۰، [redacted] و۳ چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت که در همگی آنها هر یک از رقم‌های ۰، ۱ و ۲ حداقل یک بار ظاهر شود؟

غیر صفر

	?	?	?	?
۳ حالت	۴	۴	۴	۴

$3\times4\times4\times4\times4$ ← کل اعداد پنج رقمی با ارقام داده شده $= 3\times4^4$

$$\text{جواب} = \underbrace{3\times4^4}_{\text{کل}} - \Big[\big(\underset{\text{فاقد صفر}}{3^5} + \underset{\text{فاقد ۱}}{2\times3^4} + \underset{\text{فاقد ۲}}{2\times3^4}\big) - \big(\underset{\text{فاقد ۰و۱}}{2^5} + \underset{\text{فاقد ۲و۰}}{2^5} + \underset{\text{فاقد ۱و۲}}{1\times2^4}\big) + \underset{\text{فاقد ۰و۱و۲}}{1}\Big] = 280$$

مثال: EX برای باز کردن یک قفل رمزی ۵ رقمی، که هر یک از ارقام ۲، ۳ و ۷ حداقل یک بار در آن به کار رفته‌اند، اگر امتحان کردن هر رمز، ۶ ثانیه طول بکشد، حداکثر چند دقیقه زمان لازم است؟

$$\underbrace{10^5}_{\text{کل}} - \big(\underset{\text{فاقد ۲}}{9^5} + \underset{\text{فاقد ۳}}{9^5} + \underset{\text{فاقد ۷}}{9^5} - \underset{\text{فاقد ۲و۳}}{8^5} - \underset{\text{فاقد ۲و۷}}{8^5} - \underset{\text{فاقد ۳و۷}}{8^5} + \underset{\text{فاقد ۲،۳و۷}}{7^5}\big) = 4350$$

$\xrightarrow{\times 6}$ $\xrightarrow{\div 60}$ ۴۳۵

تمرین N-۳۳: با ارقام متمایز ۱،۲،...،۶ چند عدد شش رقمی می‌توان نوشت که در آن‌ها رقم ۲ و ۳ کنار هم یا رقم ۲ و ۱ کنار هم باشند؟

۱) ۲۲۴
۲) ۲۸۶
۳) ۳۲۴
۴) ۳۳۶

(گزینه ۴)

انسان‌ها چهار گروه‌اند،

گروه اول: کسانی که تا وقتی که هستند هستند و وقتی که نیستند نیستند.

گروه دوم: کسانی که تا وقتی که هستند نیستند و وقتی که نیستند هم نیستند.

گروه سوم: کسانی که تا وقتی که هستند هستند و وقتی که نیستند باز هستند.

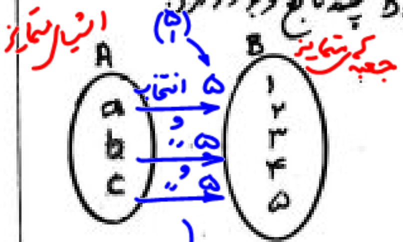
گروه چهارم: کسانی که تا وقتی که هستند نیستند و وقتی که نیستند هستند.

دکتر شریعتی

توزیع اشیای متمایز در جعبه های متمایز (یافتن تعداد توابع)

چون اشیاء متمایزند، یک شی نمی تواند به طور همزمان در بیش از یک جعبه قرار گیرد. بنابراین بحث تعداد توابع از مجموعهٔ اشیای متمایز به مجموعهٔ جعبه های متمایز مطرح می شود.

مثال (Ex): از مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به مجموعهٔ $B=\{1,2,3,4,5\}$ چند تابع وجود دارد؟



$$\text{تعداد توابع از مجموعهٔ } A \text{ به مجموعهٔ } B = |B|^{|A|}$$

$5\times5\times5=5^3=125$

$f_1=\{(a,1),(b,2),(c,3)\}$

$f_2=\{(a,1),(b,1),(c,4)\}$

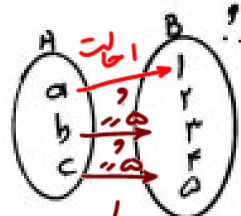
مثال (Ex): از مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به مجموعهٔ $B=\{1,2,3,4,5\}$ چند تابع وجود دارد به طوری که

الف) شامل $(a,1)$ باشد؟

$f(a)=1$

↓

a به 1 فلش بزند



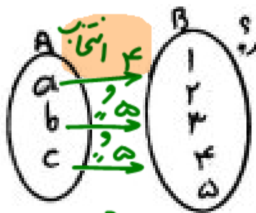
$1\times5\times5=25$ ✓

ب) فاقد $(a,1)$ باشد؟

$f(a)\neq1$

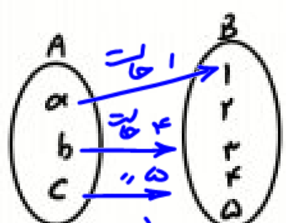
↓

a به 1 فلش نمی زند



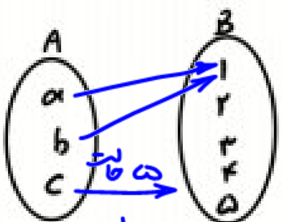
$4\times5\times5=100$ ✓

پ) شامل $(a,1)$ و فاقد $(b,2)$ باشد؟



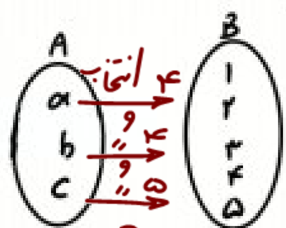
$1\times4\times5=20$ ✓

ت) شامل $(a,1)$ و $(b,1)$ باشد؟



5 ✓

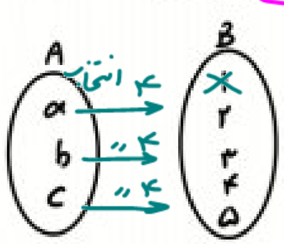
ث) فاقد $(a,1)$, $(b,1)$ باشد؟



$4\times4\times5=80$ ✓

ج) حداقل یک $x\in A$ وجود داشته باشد که $f(x)=1$ باشد؟

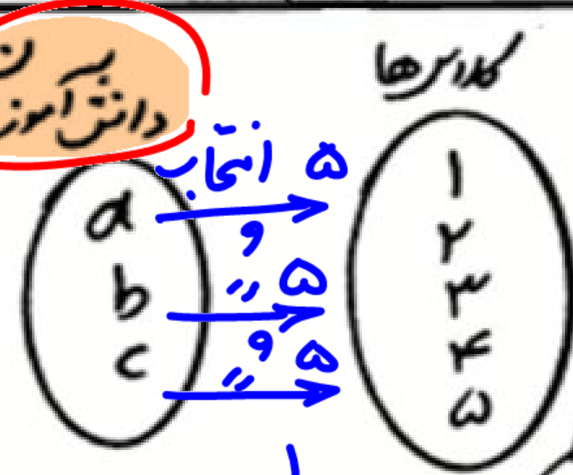
حداقل یک فلش به 1 زده شود



$\underbrace{5^3}_{\text{کل توابع}}-4^3=125-64=61$ ✓

مثال (Ex): به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز را در ۵ کلاس مختلف به دلخواه جای داد؟

۳ شی متمایز — ۵ جعبه متمایز



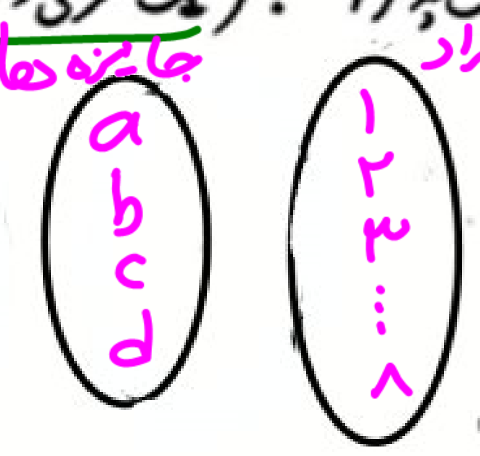
نتیجه: تعداد روش‌های توزیع n شی متمایز در k جعبهٔ متمایز (بدون هیچ محدودیتی) برابر است با k^n «یعنی تعداد توابع از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ k عضوی».

از اشیاء — به جعبه‌ها

$5^3 = 125$ ✓

یک دانش‌آموز همزمان وارد دو کلاس نمی‌شود

مثال (Ex): ۸ نفر را که برای یک برنامهٔ تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله یک جایزه به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را ببرد)

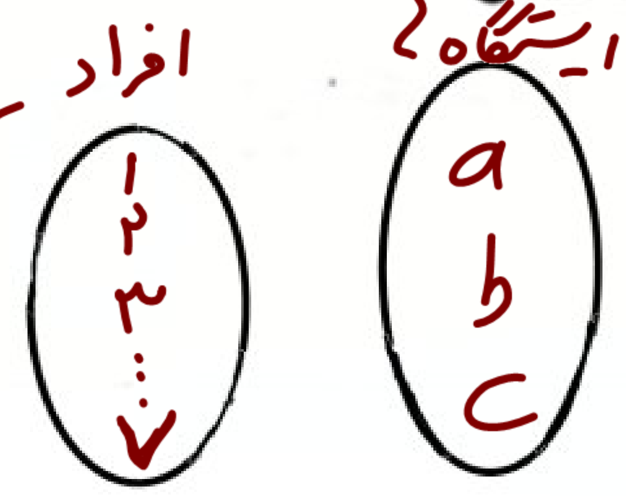


تعداد توابع → $8^4 = 4096$ ✓

یک جایزه همزمان به دو نفر داده نمی‌شود

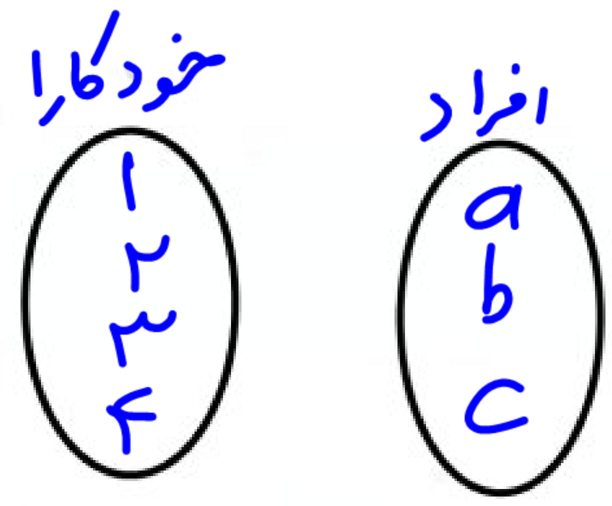
تمرین (H.W): یک خودروی ون با ۷ مسافر، در مسیر حرکت خود، در ۳ ایستگاه توقف می‌کند. تعداد روش‌های پیاده شدن این ۷ مسافر کدام است؟

(جواب: ۲۱۸۷)



یک نفر همزمان در دو ایستگاه پیاده نمی‌شود

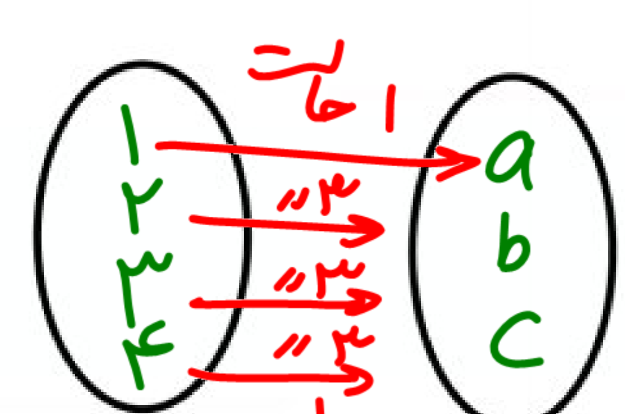
مثال: به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر به دلخواه توزیع کرد؟



یک خودکار همزمان به دو نفر داده نمی‌شود

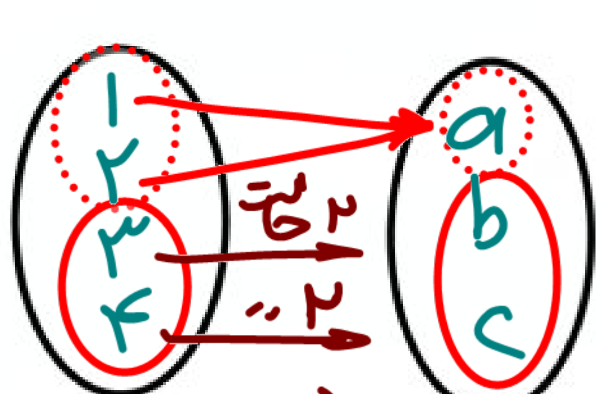
تعداد توابع → $3^4 = 81$ ✓

* اگر قرار باشد خودکار شمارهٔ ۱، به فرد a برسد، چطور؟



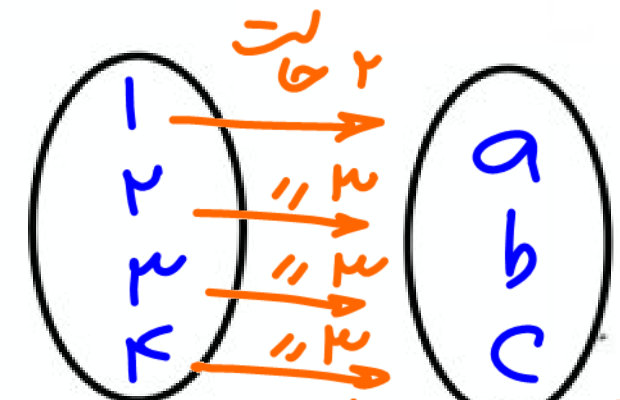
$1\times3\times3\times3 = 27$ ✓

* اگر قرار باشد فقط خودکارهای شمارهٔ ۱ و ۲، به فرد a برسد، چطور؟



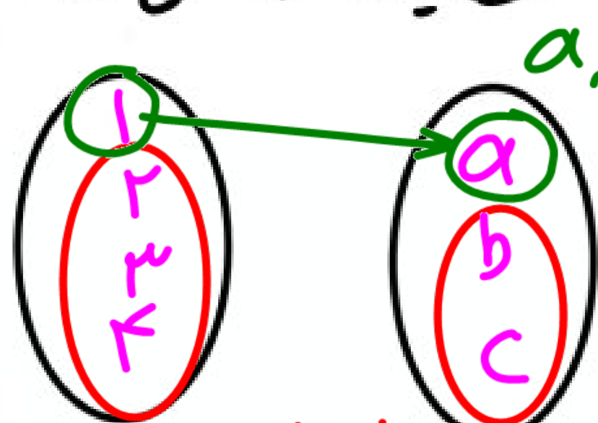
$2\times2 = 4$ ✓

* اگر قرار باشد خودکار شماره ۱، به شخص a نرسد، چطور؟



$2\times3^3 = 54$ ✓

* اگر قرار باشد فقط یک خودکار به شخص a برسد، چطور؟



انتخاب خودکار متعلق به a

$2^3\times\binom{4}{1} = 32$ ✓

تعداد توابع از ۳ عضوی به ۲ عضوی

* اگر قرار باشد حداقل یک خودکار به شخص a برسد، چطور؟

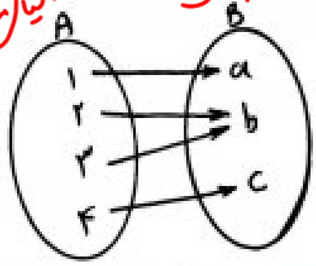
H.W

محاسبه تعداد توابع پوشا

جعبه‌ای خالی نباشد
(در هر جعبه حداقل یک شی باشد)

تعریف: تابع $f: A \to B$ پوشا است اگر و تنها اگر $R_f = B$
(یعنی به هر عضو B، حداقل یک فلش وارد شود)

اشیاء متمایز — جعبه‌ی متمایز



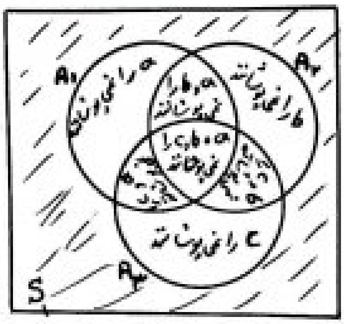
مثال (Ex): از مجموعه $A = \{1,2,3,4\}$ به مجموعه $B = \{a,b,c\}$ چند تابع پوشا وجود دارد؟
به هر عضو B حداقل یک فلش وارد شود

متمم ← هیچ فلش

A_1: مجموعه توابعی از A به B که a را نمی‌پوشانند (به a فلش نمی‌زنند) — تعداد توابع از مجموعه ۴ عضوی به مجموعه ۲ عضوی → $|A_1| = (3-1)^4$ (عضو a حذف شده)

A_2: مجموعه توابعی از A به B که b را نمی‌پوشانند (به b فلش نمی‌زنند) → $|A_2| = (3-1)^4$ (عضو b حذف شده)

A_3: مجموعه توابعی از A به B که c را نمی‌پوشانند (به c فلش نمی‌زنند) → $|A_3| = (3-1)^4$ (عضو c حذف شده)



a پوشیده نشود و b پوشیده نشود و c پوشیده نشود

$$\underbrace{|A_1' \cap A_2' \cap A_3'|}_{\text{تعداد توابع پوشا}} = |(A_1 \cup A_2 \cup A_3)'| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= |S| - \left[(|A_1|+|A_2|+|A_3|) - |A_1\cap A_2| - |A_1\cap A_3| - |A_2\cap A_3| + |A_1\cap A_2\cap A_3|\right]$$

یک عضو پوشیده نشود — دو عضو پوشیده نشود — سه عضو پوشیده نشود

$$= \underbrace{3^4}_{\text{کل توابع از A به B}} - \underbrace{\left[3\times(3-1)^4 - 3\times(3-2)^4 + (\underbrace{3-3}_{0})^4\right]}_{\text{اجتماع توابع ناپوشا}} = 36 \checkmark$$

فرمول تعداد توابع پوشا (از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه m عضوی)

$n \geq m$

$$\underbrace{m^n}_{\text{کل توابع}} - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \dots \pm \binom{m}{m}(\underbrace{m-m}_{0})^n$$

علامت‌ها یک در میان عوض می‌شود

مثال (Ex): تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی کدام است؟

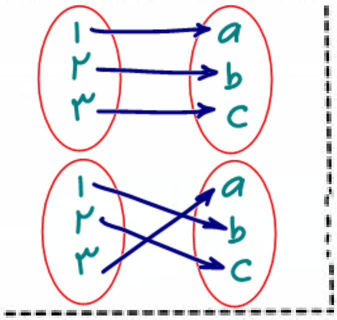
$$\underbrace{3^5}_{\text{کل توابع}} - \binom{3}{1}(3-1)^5 + \binom{3}{2}(3-2)^5 - \binom{3}{3}(\underbrace{3-3}_{0})^5 = 150 \checkmark$$

دو حالت خاص مهم:

تعداد توابع پوشا از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی $= 3^n - 3\times 2^n + 3$

" " " " " " " " ۲ عضوی $= 2^n - 2$

$$\underbrace{3^n}_{\text{کل توابع}} - \underbrace{\binom{3}{1}}_{3}(\underbrace{3-1}_{2})^n + \underbrace{\binom{3}{2}}_{3}(\underbrace{3-2}_{1})^n = 3^n - 3\times 2^n + 3$$



سراسری ۹۸ Ex: تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ ۶ عضوی به یک مجموعهٔ ۳ عضوی کدام است؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۵۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۵۴۰

$$3^6 - 3\times 2^6 + 3 = 540 \checkmark$$

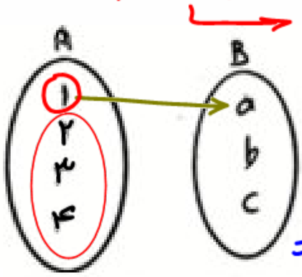
حالت خاص: تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با $n!$ ← که همگی یک به یک نیز هستند

مثال: از مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ به خودش چند تابع پوشا وجود دارد؟ ۶ عضوی به ۶ عضوی

$\longrightarrow 6! = 720 \checkmark$

تست: از مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4\}$ به مجموعهٔ $B=\{a,b,c\}$ چند تابع پوشا شامل $(1,a)$ (یا با شرط $f(1)=a$) وجود دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲ ۴) ۶



توابع پوشا در این تست:

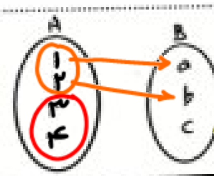
توابع پوشایی که دیگر به a فلش نمی‌زنند: $\xrightarrow{\text{۳ عضوی به ۲ عضوی}} 2^3 - 2 = 6$

یا

توابع پوشایی که بازهم به a فلش می‌زنند: $\xrightarrow{\text{۳ عضوی به ۳ عضوی}} 3! = 6$

$\xrightarrow{+} 12$

* اگر گفته شود شامل $(1,a)$ و $(2,b)$ چه طور؟



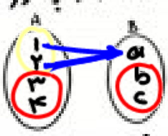
۲ عضوی به یک عضوی (c) → ۱ حالت

یا

یکی از فلش ۳ و ۴ به c و فلش دیگر به a یا b → $\binom{2}{1}\times\binom{2}{1} = 4$

تا ۵ ✓

* اگر گفته شود شامل $(1,a)$ ، $(2,a)$ چه طور؟



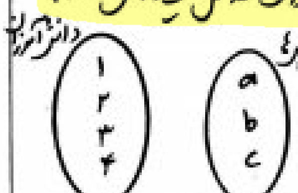
$\xrightarrow[\text{به ۲ عضوی}]{\text{۲ عضوی}} 2! = 2 \checkmark$

تست H.W: از مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,5\}$ به مجموعهٔ $B=\{a,b,c\}$ چند تابع پوشا و فاقد $(1,a)$ وجود دارد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۱۴۰

(گزینهٔ ۲)

مثال Ex: به چند طریق می‌توان ۴ دانش‌آموز را در ۳ کلاس مختلف جای داد به طوری که در هر کلاس حداقل یک دانش‌آموز باشد؟ تابع پوشا



$\xrightarrow[\text{از ۴ عضوی به ۳ عضوی}]{\text{تعداد توابع پوشا}} 3^4 - 3\times 2^4 + 3 = 36 \checkmark$

نتیجه: تعداد روش‌های توزیع n شیء متمایز در k جعبهٔ متمایز، به طوری که در هر جعبه حداقل یک شیء باشد، با تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ k عضوی برابر است.

مثال Ex ۹۹ تجربی: به چند طریق می‌توان ۵ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به طوری که به هر نفر حداقل یک خودکار برسد؟

توابع پوشا $\longrightarrow 3^5 - 3\times 2^5 + 3 = 150 \checkmark$

مثال Ex: به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی مختلف را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

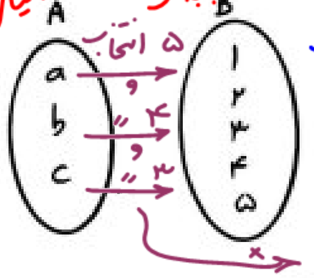
$$3^6 - 3\times 2^6 + 3 = 540 \checkmark$$

محاسبهٔ تعداد توابع یک به یک

در هر جعبه حداکثر یک شی باشد

مثال (Ex): از مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به مجموعهٔ $B=\{1,2,3,4,5\}$ چند تابع یک به یک وجود دارد؟

اشیاء متمایز — جعبه متمایز



$5\times4\times3=60$

جواب $=5\times4\times3=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1}=\frac{5!}{2!}=\frac{5!}{(5-3)!}$

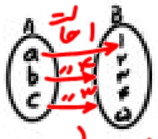
$=P(5,3)=(5)_3$ — $|B|$ ، $|A|$

نتیجه (Ex): تعداد توابع یک به یک از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ k عضوی برابر است با:

$$P(k,n)=(k)_n=\frac{k!}{(k-n)!} \qquad (n\le k)$$

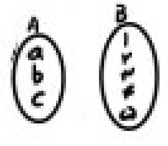
تمرین (H.W): از مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به مجموعهٔ $B=\{1,2,3,4,5\}$ چند تابع یک به یک وجود دارد که

الف) شامل $(a,1)$ باشد؟ (جواب: ۱۲)

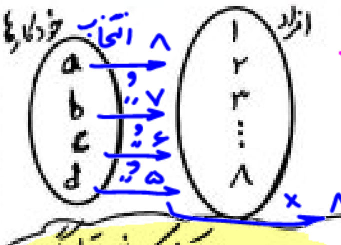


$1\times4\times3=12$ ✓

ب) فاقد $(a,1)$ باشد؟ (جواب: ۴۸)



مثال (Ex): به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به طوری که به هر نفر حداکثر یک خودکار برسد؟



$8\times7\times6\times5=1680$ ✓

تعداد توابع یک به یک $\rightarrow P(8,4)=(8)_4=\frac{8!}{4!}=1680$ ✓ (توابع یک به یک)

نتیجه: تعداد روش‌های توزیع n شی متمایز در k جعبهٔ متمایز به طوری که در هر جعبه حداکثر یک شی قرار گیرد، با تعداد توابع یک به یک از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ k عضوی یعنی $P(k,n)$ برابر است.

مثال (Ex): به چند روش می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ دانش‌آموز توزیع کرد به طوری که به هر دانش‌آموز حداکثر یک کتاب برسد؟

تعداد توابع یک به یک $\rightarrow P(8,5)=(8)_5=\frac{8!}{(8-5)!}=\frac{8!}{3!}$ ✓

سرکلاس: ۶ مهره متمایز را به چند طریق می‌توان درون ۱۰ جعبهٔ متمایز قرار داد به طوری که در هر جعبه حداکثر یک مهره قرار گیرد؟

تعداد توابع یک به یک $\rightarrow P(10,6)=(10)_6=\frac{10!}{4!}=151200$ ✓

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۰ نامهٔ مختلف را در ۱۰ پاکت متفاوت قرار داد، به طوری که در هر پاکت فقط یک نامه قرار گیرد؟

تعداد توابع یک به یک (که همگی پوشا نیز هستند) $\rightarrow P(10,10)=(10)_{10}=\frac{10!}{(10-10)!}=10!$ ✓

$0!=1$

مربع های لاتین

یک جدول مربعی n×n، که سطرها و ستون های آن با اعداد طبیعی ۱ تا n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد.

مثال:

۱	۲
۲	۱

یک مربع لاتین ۲×۲

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

دو مربع لاتین ۳×۳

۱	۳	۵	۴	۲
۵	۴	۲	۱	۳
۲	۱	۳	۵	۴
۳	۵	۴	۲	۱
۴	۲	۱	۳	۵

یک مربع لاتین ۵×۵

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

دو مربع لاتین ۴×۴

تذکر: در یک مربع لاتین می‌توان درایه‌ها را با هر n عدد متمایز دلخواه یا n حرف یا نماد پر کرد. اما در کتاب درسی فقط از اعداد ۱ تا n استفاده شده است.

a	b	c
b	c	a
c	a	b

تست: در مربع لاتین مقابل، برای x چند عدد وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	x

مرحله ۱

$x \neq ۱,۳ \rightarrow x = ۲$

مرحله ۲

تست: به ازای چند مقدار a، مربع مقابل می‌تواند مربع لاتین باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱	۳	۴	۲
۲	۱	۳	۴
۳		۱	۳
۴		a	۱

مرحله ۱

تست: برای پر کردن مربع لاتین زیر، چند روش وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

	۳	

۲ حالت (۱ یا ۲)

۱ حالت

چهار مربع گوشه: ۱ حالته

جواب = ۲×۲×۱×۱ = ۴

تست: برای مربع لاتین زیر، چند حالت وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱	۴	۲	۳
۴	۲	۳	۱
۲	۳	۱	۴
۳	۱	۴	۲

مرحله ۱

مرحله ۲

مرحله ۳

مرحله ۴

(خوارزمی)

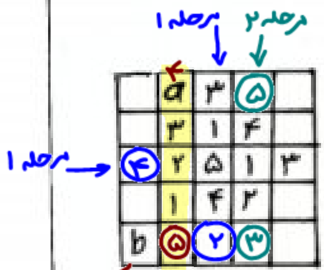
		x		۵
	۳		۱	
		۲		

تست ۱۴۰۰ به ازای چند مقدار x، جدول مقابل یک مربع لاتین ۵×۵ است؟

۱) صفر　۲) ۱

۳) ۲　۴) ۳

$x \neq ۵,۲ \rightarrow \begin{cases} x=۱ \rightarrow \\ x=۳ \rightarrow \\ x=۴ \rightarrow \end{cases}$



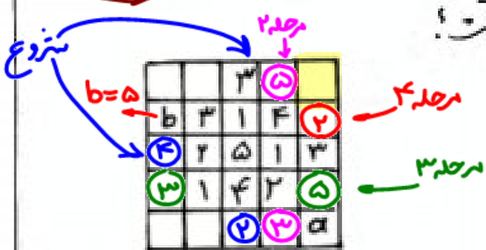
سراسری ۱۴۰۰ مربع لاتین زیر را در نظر بگیرید. زوج مرتب (a,b) کدام است؟

۱) (۵,۳)　۲) (۱,۴)

۳) (۲,۱)　۴) (۴,۱) ✓

$a \neq ۱,۲,۳,۵ \rightarrow \boxed{a=۴}$

$b \neq ۵,۲,۳,۴ \rightarrow \boxed{b=۱}$



سراسری ۱۴۰۰ خارج مربع لاتین زیر را در نظر بگیرید. زوج مرتب (b,a) کدام است؟

۱) (۴,۵)　۲) ~~(۴,۳)~~

۳) (۱,۵)　۴) ~~(۱,۳)~~

تعداد مربع های لاتین

◄ مربع لاتین ۱×۱ فقط یکی ←

۱

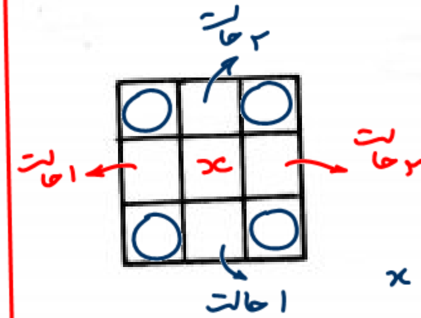
◄ مربع لاتین ۲×۲ دوتا ←

۱	۲
۲	۱

۲	۱
۱	۲

◄ مربع لاتین ۳×۳

۱۲ تا



انتخاب x

$۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ \times \binom{۳}{۱} = ۱۲$ = جواب

تعداد مربع لاتین n×n مضربی از $n! \times (n-1)!$ است.

* تعداد مربع لاتین ۴×۴ برابر است با:

$۴ \times ۴! \times ۳! = ۵۷۶$

مربع لاتین چرخشی

در یک مربع لاتین $n\times n$، سطر اول با اعداد ۱، ۲، ...، n پر شده است. اگر مطابق شکل زیر با شروع از سطر اول، هر سطر را یک واحد به راست منتقل کنیم و عدد خارج شده از مربع را در اولین خانهٔ آن سطر قرار دهیم، سطر بعدی حاصل می‌شود و اگر این کار را برای تمام سطرها انجام دهیم، مربع لاتین چرخشی به دست می‌آید.

۱	۲	۳	...		$n-1$	n
n	۱	۲	۳	...	$n-2$	$n-1$
$n-1$	n	۱	۲	...	$n-3$	$n-2$
⋮						
۳	۴	۵	...		۱	۲
۲	۳	۴	...		n	۱

* در هر سطر بعد از n عدد ۱ است (و بعد ۲، ۳ و ...)
* در هر ستون بعد از ۱ عدد n است (و بعد $n-1$ و $n-2$ و ...)

تعداد مربع‌های لاتین چرخشی مرتبهٔ n برابر است با $n!$

مثال

① مربع لاتین چرخشی 3×3

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

② مربع لاتین چرخشی 4×4

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

تست اگر A یک مربع لاتین چرخشی 9×9 با سطر اول ۱، ۲، ...، ۹ باشد، آن‌گاه درایهٔ a_{64} کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷
۳) ۸ ۴) ۹

$A=$

۱	۲	۳	...		۸	۹
۹	۱	۲	...		۷	۸
۸	۹	۱			۶	۷
۷	۸	۹	...			
۶	۷	۸	...			
۵	۶	۷	۸			

تست به چند طریق می‌توان مربع لاتین چرخشی زیر را تکمیل کرد؟

۱	۲	?	?
	۱	۲	
		۱	

→ ۱ ۲ ۳ ۴
۱ ۲ ۴ ۳

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

تست ۱۴۰۳ در یک مربع لاتین چرخشی $A=[a_{ij}]_{10\times10}$ با سطر اول ۱، ۲، ...، ۱۰، حاصل $a_{84}-a_{72}$ کدام است؟
(تکرار ۲)

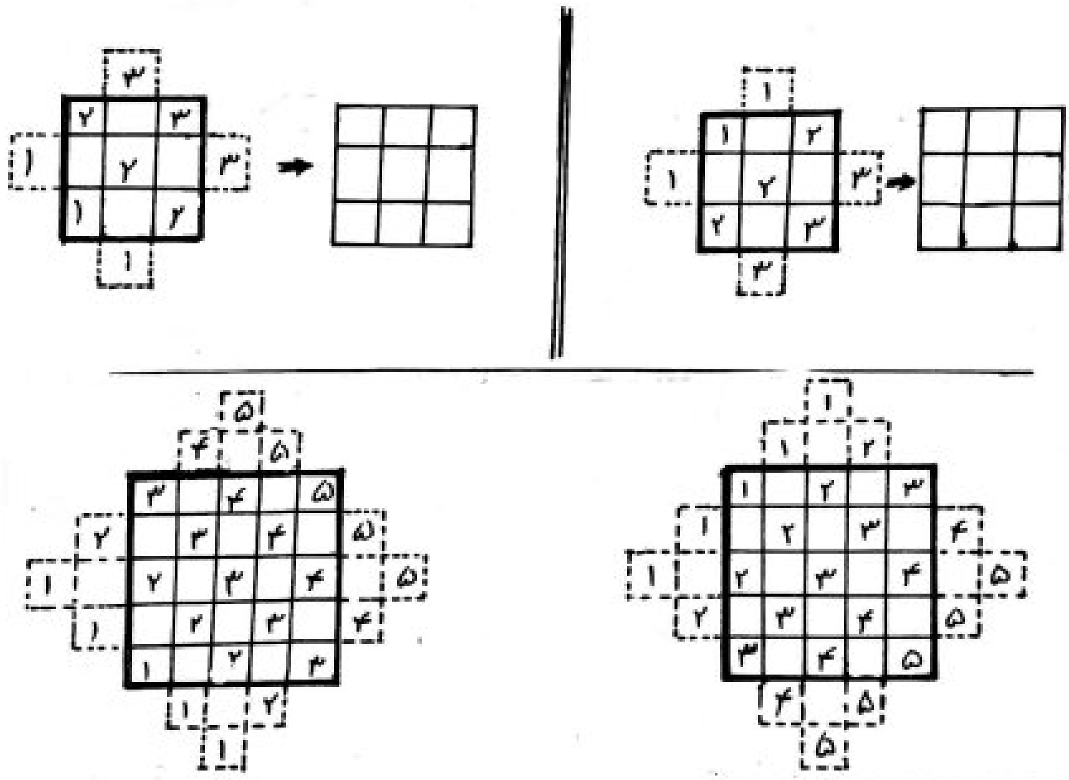
۱) صفر ۲) ۱
۳) ۴ ۴) ۹

یک روش ساخت برای مربع‌های لاتین ۳×۳ ، ۵×۵ ، ... (مرتبهٔ فرد)

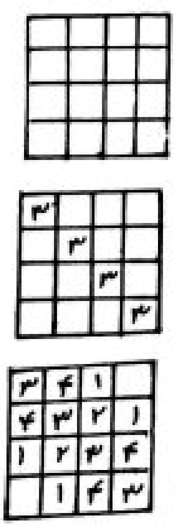
① از هر چهار طرف، خانه‌هایی به جدول اضافه می‌کنیم تا به تعداد مرتبهٔ جدول، ردیف‌هایی موازی با قطر اصلی ایجاد شود.

② در ردیف‌های موازی با قطر اصلی، هر ردیف را با عددی یکسان (از اعداد ۱ تا n) پُر می‌کنیم (مثلاً ردیف اول با عدد ۱، ردیف دوم با عدد ۲، ...) یا تمام ردیف‌های موازی با قطر اصلی را با اعداد ۱ تا n پُر می‌کنیم (مثلاً ردیف اول با اعداد ۱ تا n، ردیف دوم به همین ترتیب و...).

③ اعداد خارج مربع اصلی را در سطر یا ستون مربوط به خود، به درایهٔ خالی متقابل با فاصلهٔ n خانه دورتر منتقل می‌کنیم.



یک روش ساخت مربع لاتین ۴×۴ (اختیاری)



① یکی از اعداد ۱ تا ۴ را روی قطر اصلی قرار دهیم.

② سطرها و ستون‌هایی را می‌یابیم که بتوانیم اعداد ۱ تا ۴ را به صورت صعودی یا نزولی در آن‌ها بنویسیم.

③ درایه‌های خالی مانده را با عدد مناسب به شرط تکراری نبودن با سایر درایه‌های سطر و ستون مربوطه، پُر می‌کنیم.

R: سطر
C: ستون

نکات مهم مربع لاتین

۱) با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین، باز هم یک مربع لاتین حاصل خواهد شد. Ex

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

مربع لاتین ۳×۳

$R_1 \leftrightarrow R_2$ →

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

مربع لاتین ۳×۳ ✓

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

$C_1 \leftrightarrow C_4$ →

۳	۱	۴	۲
۱	۳	۲	۴
۲	۴	۱	۳
۴	۲	۳	۱

Ex توجیه نکته ۱: با تعویض جای دو سطر (دو ستون)، باز هم هر کدام از اعداد ۱ تا n در هر سطر و در هر ستون یک بار دیده می‌شوند.

۲) در هر مربع لاتین، با اعمال یک جایگشت بر روی اعداد ۱، ۲، ...، n یک مربع لاتین جدید حاصل می‌شود. Ex

Ex توجیه نکته ۲: زیرا در غیر این صورت در سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود خواهد داشت که این موضوع با توجه به خواص جایگشت ایجاب می‌کند که در سطر یا ستونی از مربع اول نیز عضو تکراری وجود داشته باشد و این با مربع لاتین بودن آن در تناقض است.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۲ → ۳
۳ → ۲
۱ → ۱

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

✓

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

۱ → ۳
۲ → ۲
۳ → ۴
۴ → ۱

۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳

✓

تست مربع لاتین B، از اعمال یک جایگشت بر روی درایه‌های مربع لاتین A حاصل شده است. درایه (a,b) کدام است؟

A=

۳			a
۴	۳	۲	۱
۱		۳	
۲		۴	

۴ → ۲
۳ → ۱
۲ → ۳
۱ → ۴

B=

۱	۲	۴	۳
۲	۱	۳	۴
b	۳		۲
	۴		۱

۱) (۴,۳) ۲) (۲,۳) ۳) (۲,۴) ۴) (۳,۴)

$\begin{cases} a \to ۳ \\ ۲ \to ۳ \end{cases}$
$a = ۲$ ✓

$\begin{cases} ۱ \to b \\ ۱ \to ۴ \end{cases} \Rightarrow b = ۴$ ✓

تست در یک مربع لاتین چرخشی ۶×۶ با سطر اول ۱، ۲، ...، ۶ جایگشت مقابل را اعمال می‌کنیم. ستون سوم با a شروع و به b ختم می‌شود. درایه (a,b) کدام است؟

۱ → ۱
۲ → ۴
۳ → ۶
۴ → ۲
۵ → ۳
۶ → ۵

۱) (۳,۴) ۲) (۳,۲) ۳) (۲,۶) ۴) (۶,۲)

۱	۲	۳	۴	۵	۶
۶	۱	۲	۳	۴	۵
		۱			
		۶			
		۵			
		۴			

۶
۲

کاربرد مربع های لاتین ← در مسائل برنامه‌ریزی

مثال (EX): سه سخنران به نام های m_1، m_2 و m_3 قرار است در یک روز در سه جلسه ۱۰-۸، ۱۲-۱۰ و ۱۶-۱۴ در سه سالن A، B و C سخنرانی کنند. هر سالن سه جلسه سخنرانی دارد و هر سخنران در هر یک از سالن‌ها فقط یک بار سخنرانی می‌کند. به کمک مربع لاتین برای این مسأله برنامه‌ریزی کنید.

جلسه \ سالن	A	B	C
8-10	m_1	m_2	m_3
10-12	m_3	m_1	m_2
14-16	m_2	m_3	m_1

توجیه:

① هیچ سخنرانی در یک جلسه در دو سالن حضور ندارد ← زیرا در مربع لاتین، در هیچ سطری عدد تکراری وجود ندارد

② " " در یک سالن دو بار سخنرانی نکرده است ← " " " " ستونی " " "

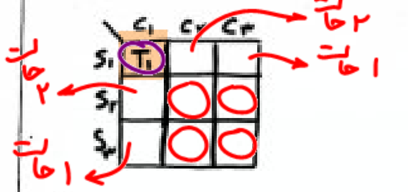
③ هر سخنران در هر یک از جلسه‌ها سخنرانی کرده است ← " " 3×3 در هر سطر تمام اعداد ۱ تا ۳ هستند

④ " " در تمام سالن‌ها سخنرانی کرده است ← " " " " ستون " " "

سراسری ۹۸ خ: در یک روز هفته برای ۳ مدرس در ۳ کلاس متمایز در ۳ جلسه متوالی به چند طریق می‌توان برنامه تدریس تعیین کرد؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

مربع لاتین ۳×۳ تعداد → ۱۲ تا ✓



* اگر قرار باشد مدرس T_1، در جلسه اول، در کلاس c_1 تدریس کند، چطور؟

۴ تا

مثال (EX): قرار است شش مدرس T_1، T_2، ...، T_6، در شش جلسه متوالی، در شش کلاس c_1، c_2، ...، c_6 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید.

مربع لاتین ۶×۶ لازم است ↓ چرخشی

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
S_1	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
S_2	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
S_3	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4
S_4						
S_5						
S_6						

تمرین (H.W): پنج کارگر در پنج روز هفته با پنج دستگاه مختلف در یک کارگاه به گونه‌ای کار می‌کنند که هر کارگر در هر روز با هر دستگاه فقط یک بار کار می‌کند و هر دستگاه در هفته فقط توسط یک کارگر به کار گرفته می‌شود. برای این منظور به دو روش برنامه‌ریزی کنید.

مربع لاتین ۵×۵ لازم است

دو مربع لاتین متعامد

اگر A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار گرفتن درایه‌های نظیر به نظیر این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود، که هر خانهٔ آن شامل یک عدد دورقمی است، که تمام رقم‌های سمت چپ (دهگان) مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست (یکان) مربوط به مربع B (و یا برعکس) است.

در این صورت دو مربع لاتین A و B را متعامد می‌گوییم، هرگاه هیچ یک از اعداد دورقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشد.

مثال :

A =

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

B =

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

$\Rightarrow$ AB =

۱۱	۲۳	۳۲
۳۳	۱۲	۲۱
۲۲	۳۱	۱۳

عدد دو رقمی تکراری ندارد

$\Rightarrow$ A و B متعامدند

A =

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

B =

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

$\Rightarrow$ AB =

۲۲	۳۳	۴۴	۱۱
۳۴	۲۱	۱۲	۴۳
۴۱	۱۴	۲۳	۳۲
۱۳	۴۲	۳۱	۲۴

عدد دو رقمی تکراری ندارد

$\Rightarrow$ A و B متعامدند

A =

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

B =

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

$\Rightarrow$ AB =

۴۱			
	۴۱		

عدد دو رقمی تکراری دارد

$\Rightarrow$ A و B نامتعامدند

تذکر: برای تشخیص متعامد بودن یا نبودن دو مربع لاتین، به این صورت است که هر دو درایه در یکی از مربع‌ها که اعداد یکسان دارند، درایه‌های نظیر آنها در مربع دیگر باید اعداد متمایز باشند. پس برای اثبات متعامد نبودن دو مربع لاتین، کافی است در یکی از دو مربع، دو درایهٔ یکسان پیدا کنیم به طوری که در درایه‌های نظیر به این دو درایه در مربع دیگر نیز درایه‌های یکسان (نه لزوماً مساوی با دو درایهٔ یکسان مربع اول) وجود داشته باشد.

نکات مهم مربع های لاتین متعامد

دو مربع لاتین ۱×۱ وجود ندارد که متعامد باشد.

$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$ $AB=\begin{bmatrix}12&\\&12\end{bmatrix}$

دو مربع لاتین ۲×۲ وجود دارد ← نامتعامدند

① برای $n=1,2,6$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود ندارد. به عبارت دیگر

EX

اگر $n\neq 1,2,6$ ، دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارد.

② اگر جای دو سطر (دو ستون) در یک مربع لاتین تعویض شود، مربع لاتین حاصل ممکن است با مربع لاتین اولیه متعامد باشد یا نباشد.

EX

$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{bmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} A'_1=\begin{bmatrix}2&3&1\\3&1&2\\1&2&3\end{bmatrix} \Rightarrow AA'_1=\begin{bmatrix}12&23&31\\33&11&22\\21&32&13\end{bmatrix}$ → A و A'_1 متعامدند

$A \xrightarrow{C_2\leftrightarrow C_3} A'_2=\begin{bmatrix}1&3&2\\3&2&1\\2&1&3\end{bmatrix} \Rightarrow AA'_2=\begin{bmatrix}11&23&32\\33&12&21\\22&31&13\end{bmatrix}$ → A و A'_2 متعامدند

$B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\\3&4&1&2\\2&3&4&1\end{bmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} B'=\begin{bmatrix}4&1&2&3\\1&2&3&4\\3&4&1&2\\2&3&4&1\end{bmatrix} \Rightarrow BB'=\begin{bmatrix}&&&\\&&&\\&&11&\\&&&11\end{bmatrix}$ → B و B' نامتعامدند

نتیجه: همان طور که در مثال های بالا دیده می شود:

در مربع لاتین ۳×۳ ، اگر جای دو سطر (دو ستون) تعویض شود، مربع لاتین حاصل با مربع لاتین اولیه متعامد است.

تذکر: یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ ، آن است که ابتدا یک مربع لاتین ۳×۳ دلخواه در نظر می گیریم و سپس با تعویض جای دو سطر (دو ستون) آن، مربع لاتین متعامد با آن به دست می آید.

EX

مثال: دو مربع لاتین متعامد مرتبهٔ ۳ مشخص کنید.

$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{bmatrix}$ (دلخواه) $\xrightarrow[\text{(دلخواه)}]{R_1\leftrightarrow R_2}$ $B=\begin{bmatrix}3&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}13&21&32\\31&12&23\\22&33&11\end{bmatrix}$ → متعامدند ✓

عدد دو رقمی تکراری ندارد.

تذکر ۲: متناظر با هر مربع لاتین (معلوم) مرتبهٔ ۳، همواره ۶ مربع لاتین متعامد با آن وجود دارد:

- ۳ بار با جابه‌جایی دو به دو سطرها
- ۳ بار با جابه‌جایی دو به دو ستون‌ها

سراسری ۹۸: تعداد مربع‌های لاتین متعامد با مربع لاتین

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۶

تذکر ۳ (Ex): در مربع لاتین ۳×۳، اگر جای دو سطر (دو ستون) تعویض شوند، مربع لاتین حاصل با مربع لاتین اولیه متعامد است. اما اگر بیش از یک بار جابه‌جایی دو سطر (دو ستون) اعمال شود، مربع لاتین نهایی با مربع لاتین اولیه متعامد نیست.

نا متعامدند

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} A'' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow AA'' = \begin{bmatrix} 12 & & \\ & 12 & \\ & & \end{bmatrix}$$

→ A و A'' متعامد نیستند

متعامدند　　متعامدند

* توجه کنید که دو مربع لاتین A' و A'' متعامدند!! یعنی هر مربع لاتین مرتبهٔ ۳، تنها با مربع لاتین حاصل از یک مرحله اعمال تعویض جای دو سطر (دو ستون) خود، متعامد است.

نا متعامدند

$A_{3\times3}$ (دلخواه) $\xleftrightarrow[\text{(دلخواه)}]{\text{تعویض جای دو سطر (ستون)}}$ $A'_{3\times3}$ $\xleftrightarrow[\text{(دلخواه)}]{\text{تعویض جای دو سطر (ستون)}}$ $A''_{3\times3}$

متعامدند　　متعامدند

از چهرهٔ افروخته گل را مشکن
افروخته نغمه مرو تو دگر به چمن
گل را تو دگر خجل مکن ای مه من
مشکن به حسن ای مه من قدر چمن

۳) اگر دو مربع لاتین هم‌مرتبه، متعامد باشند، با اِعمال یک جایگشت روی درایه‌های هرکدام بازهم متعامدند.

به‌عبارت دیگر: اِعمال جایگشت روی درایه‌های مربع‌های لاتین متعامد، تأثیری در متعامد بودن آن‌ها ندارد.

مثال:

A =

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

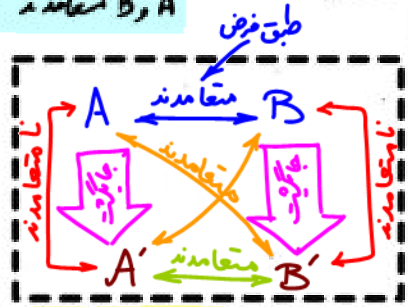
B =

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

$\Rightarrow$ AB =

۲۳	۳۱	۱۲
۳۲	۱۳	۲۱
۱۱	۲۲	۳۳

$\Rightarrow$ A و B متعامدند



$1 \rightarrow 1$
$2 \rightarrow 3$
$3 \rightarrow 2$
دلخواه

A' =

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

B' =

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

$\Rightarrow$ A'B' =

۳۲	۲۱	۱۳
۲۳	۱۲	۳۱
۱۱	۳۳	۲۲

$\Rightarrow$ A' و B' متعامدند

نکته ۱ (Ex): اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتینی که از اِعمال جایگشت بر روی درایه‌های یکی از آن‌ها به‌دست می‌آید، با مربع لاتین دیگر متعامد است.

◀ در مثال بالا داریم:

AB' =

۲۲	۳۱	۱۳
۳۳	۱۲	۲۱
۱۱	۲۳	۳۲

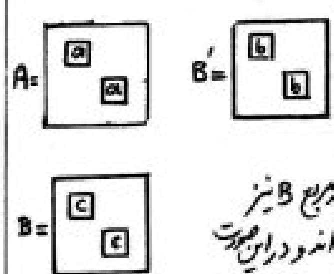
$\Rightarrow$ A و B' متعامدند

A'B =

۳۳	۲۱	۱۲
۲۲	۱۳	۳۱
۱۱	۳۲	۲۳

$\Rightarrow$ A' و B متعامدند

اثبات نکته ۱ (Ex): فرض می‌کنیم A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B' مربع لاتین حاصل از اِعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد. نشان می‌دهیم A و B' نیز متعامدند. برای این منظور از برهان خلف کمک می‌گیریم:



فرض می‌کنیم A و B' متعامد نباشند. لذا دو جایگاه در مربع A وجود دارد که اعداد یکسانی (مثلاً a) در آن‌ها قرار دارد و در جایگاه‌های نظیر آن‌ها در مربع B' نیز دو درایهٔ یکسان (مثلاً b) قرار دارند. حال با توجه به مفهوم جایگشت، در همین دو جایگاه در مربع B نیز باید دو درایهٔ یکسان (مثلاً c) باشد، که در B' با اِعمال جایگشت به درایهٔ b تبدیل شده‌اند و در این صورت دو مربع A و B نیز متعامد نخواهند بود (چرا؟) و این موضوع با فرض مسئله (که A و B متعامدند) در تناقض است. پس A و B' نمی‌توانند متعامد نباشند.

نکته ۲ (Ex): مربع لاتین حاصل از اِعمال جایگشت روی درایه‌های یک مربع لاتین، با مربع لاتین اولیه متعامد نیست.

◀ در مثال بالا داریم:

AA' =

۲۳		
		۲۳

$\Rightarrow$ A و A' نامتعامدند

BB' =

۳۲		
	۳۲	

$\rightarrow$ B و B' نامتعامدند

توجیه نکته ۲ (Ex): اگر در مربع لاتین A، یک جایگشت مثلاً به‌صورت $x \rightarrow 1$ صورت گیرد، آن‌گاه در مربع A'، متناظر با تمام ۱های A، عدد x وجود دارد و این بدان معناست که عدد دورقمی 1x بیش از یک‌بار در مربع AA' دیده می‌شود و لذا A' و A متعامد نیستند.

تست مربع لاتین A با مربع لاتین

B =

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

متعامد است. کدام یک از مربع‌های لاتین زیر با مربع لاتین A متعامد می‌باشد؟

فرض: A و B متعامدند

که A با جایگشت یافتهٔ B نیز متعامد است.

۱)

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

از تعریف جای دو سطر B (R_2 و R_3) حاصل شده پس با B متعامد است

جایگشت یافتهٔ B نیست

✗

۲)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

✓

$$\left\{\begin{array}{l} ۲ \to ۱ \\ ۳ \to ۲ \\ ۱ \to ۳ \end{array}\right.$$

جایگشت یافتهٔ B است

پس با A متعامد است.

۳)

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۴)

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

تست دو مربع لاتین متقابل متعامدند. مربع لاتین A با کدام مربع لاتین زیر متعامد است؟

(گزینه ۴)

۱)

۱	۲	۳	۴
	۴		۲
	۱	۴	
۴		۲	۱

۲)

۴		۲	
۱		۳	
	۱		۳
	۴		۲

۳)

۲		۳	
	۱		۲
۳		۱	
	۲		۴

۴)

۴		۳	۲
	۲		۱
۲		۱	
	۴	۲	

A =

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

B =

۳	۴	۱	۲
۱			
			۳

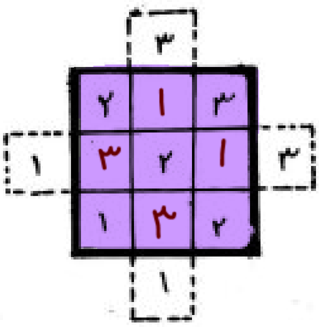
AB =

یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ فرد

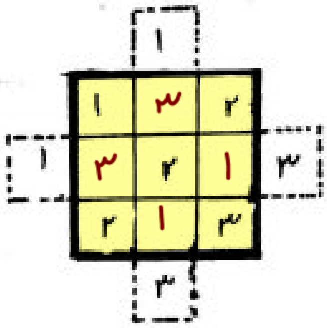
(همانند روشی که برای ساختن مربع لاتین مرتبهٔ فرد گفته شد)

مثال ۱: ساختن دو مربع لاتین متعامد ۳×۳

A =



B =



AB =

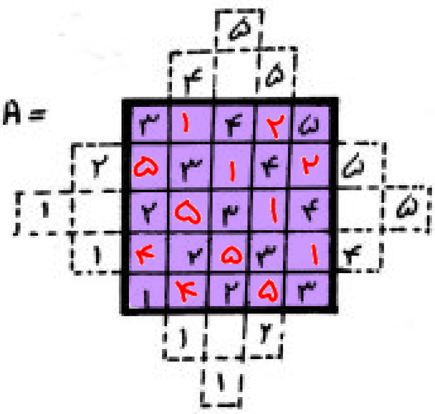
۲۱	۱۳	۳۲
۳۳	۲۲	۱۱
۱۲	۳۱	۲۳

⇒ B و A متعامدند ✓

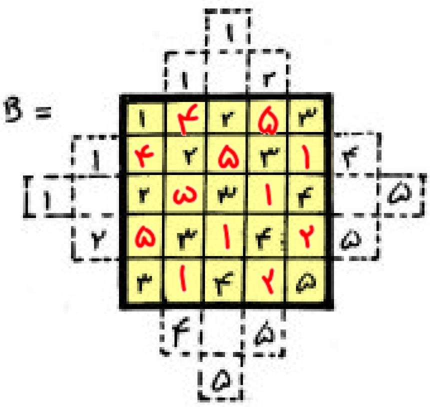
عدد دو رقمی تکراری ندارد

مثال ۲: ساختن دو مربع لاتین متعامد ۵×۵

A =



B =

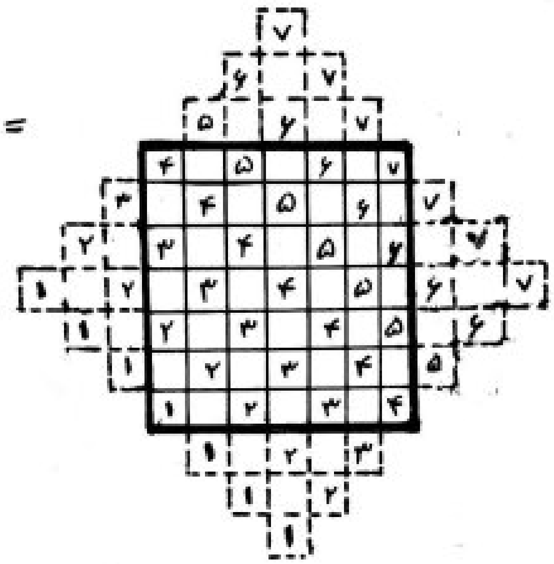


AB =

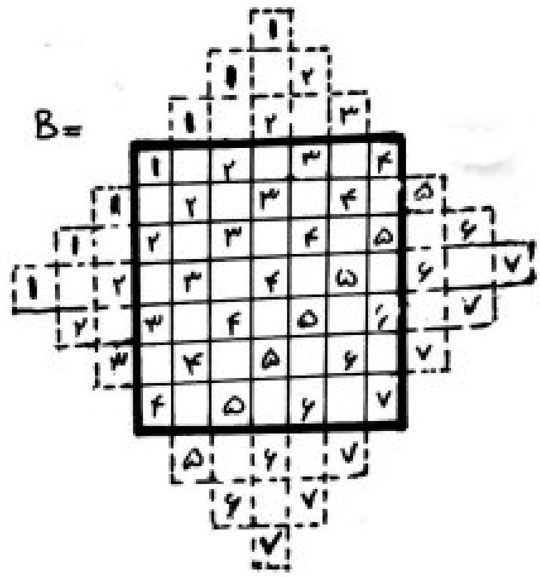
⇒ B و A متعامدند

مثال ۳ : ساختن دو مربع لاتین متعامد ۷×۷

A =



B =



AB =

۴۱	۱۵	۵۲	۲۶	۶۳	۳۷	۷۴
۷۵	۴۲	۱۶	۵۳	۲۷	۶۴	۳۱
۳۲	۷۶	۴۳	۱۷	۵۴	۲۱	۶۵
۶۶	۳۳	۷۷	۴۴	۱۱	۵۵	۲۲
۲۳	۶۷	۳۴	۷۱	۴۵	۱۲	۵۶
۵۷	۲۴	۶۱	۳۵	۷۲	۴۶	۱۳
۱۴	۵۱	۲۵	۶۲	۳۶	۷۳	۴۷

این نیز بگذرد

کاربرد مربع‌های لاتین متعامد در مسائل برنامه‌ریزی

مسئله ۱: در یک کارخانه قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخ‌ریسی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند بطوری که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و هر الیاف در هر نوع ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

حل:

مرحله ۱: یک مربع لاتین ۵×۵ ، که سطرهای آن روزهای هفته و ستون‌های آن کارگرها و درایه‌های آن شماره هرکدام از ماشین‌ها می‌باشد، در نظر می‌گیریم. یعنی هر کارگر در هر روز با یک ماشین و در طول هفته با هر ماشین دقیقاً یک بار کار کرده است.

کارگرها

$A =$

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱	۴	۲	۵	۳
یکشنبه	۴	۲	۵	۳	۱
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۵	۳	۱	۴	۲
چهارشنبه	۳	۱	۴	۲	۵

ماشین‌ها

روش کشویی ☺

مرحله ۲: یک مربع لاتین ۵×۵ ، همانند مرحله ۱ در نظر می‌گیریم، که درایه‌های آن شماره هرکدام از الیاف مورد استفاده می‌باشد. یعنی هر کارگر در هر روز با یک نوع الیاف و در طول هفته با هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده است.

کارگرها

$B =$

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۳	۱	۴	۲	۵
یکشنبه	۵	۳	۱	۴	۲
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۴	۲	۵	۳	۱
چهارشنبه	۱	۴	۲	۵	۳

الیاف

مرحله ۳: با کنار هم قرار دادن این دو مربع، یک مربع جدید حاصل می‌شود که مسئله فوق را برنامه‌ریزی کرده است.

مثلاً کارگر شماره ۴ در روز دوشنبه با ماشین شماره ۱ و الیاف ۱ کار کرده است.

$AB =$ (متعامدند)

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
یکشنبه	۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
دوشنبه	۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
سه‌شنبه	۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
چهارشنبه	۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

(عدد دو رقمی تکراری ندارد)

کارگر روز یکشنبه با ماشین ۴ و الیاف ۵ کار کرده و این حالت تکرار نشده

توجه: متعامد بودن این دو مربع لاتین، تضمین می‌کند که هر الیاف در هر نوع ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شده است. (زیرا هیچ عدد دو رقمی تکراری وجود ندارد)

مسأله۲: سه برادر (تقریباً هم سایز) در خانه سه کت و سه پیراهن دارند و می‌خواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد، هر کت و هر پیراهن را دقیقاً یک بار استفاده کند و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار پوشیده شود. چگونگی انجام این کار را مشخص کنید.

▷ به چند روش می‌توان برنامه ریزی کرد؟

$\underbrace{12}_{\text{کل مربع‌های لاتین متناظر با کت‌ها}} \times \underbrace{6}_{\text{متناظر با هر مربع لاتین مربوط با کت‌ها، ۶ مربع لاتین متعامد با آن با پیراهن}} = 72 \xrightarrow{\div 2} 36$

$C_1 \leftrightarrow C_2$

A = (دوتا)

	B_1	B_2	B_3
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

کت‌ها

B =

	B_1	B_2	B_3
شنبه	۳	۲	۱
یکشنبه	۲	۱	۳
دوشنبه	۱	۳	۲

پیراهن‌ها

⇐ AB =

	B_1	B_2	B_3
شنبه	۱۳	۲۲	۳۱
یکشنبه	۳۲	۱۱	۲۳
دوشنبه	۲۱	۳۳	۱۲

برادر ۱ در روز شنبه کت ۱ و پیراهن ۳ را استفاده کرده و این دست تکرار نشده

عدد دو رقمی تکراری ندارد (متعامدند)

▷ با فرض معلوم بودن مربع لاتین مربوط به کت‌ها برای پیراهن‌ها به چند طریق می‌توان برنامه ریزی کرد؟ ۶ تا (متناظر با هر مربع لاتین معلوم مرتبهٔ ۳، ۶ مربع لاتین متعامد با آن وجود دارد)

مسأله۳ (H.W): در یک مسابقهٔ اتومبیل رانی قرار است ۷ راننده در هفت روز هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند به طوری که هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند و هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود (هر راننده با هر ماشین فقط یک روز و هر راننده هر روز فقط در یک مسیر رانندگی می‌کند). برای این موضوع برنامه ریزی کنید.

A =

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
شنبه							
یکشنبه							
دوشنبه							
سه‌شنبه							
چهارشنبه							
پنج‌شنبه							
جمعه							

ماشین‌ها

B =

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
شنبه							
یکشنبه							
دوشنبه							
سه‌شنبه							
چهارشنبه							
پنج‌شنبه							
جمعه							

مسیرها

AB =

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
شنبه							
یکشنبه							
دوشنبه							
سه‌شنبه							
چهارشنبه							
پنج‌شنبه							
جمعه							

تست) شش سخنران قرار است در شش روز هفته در شش همایش مختلف در مورد شش موضوع مختلف سخنرانی کنند به طوری که هر سخنران در هر روز در یک همایش و در مورد یک موضوع سخنرانی نماید و هر موضوع در هر همایش یک بار مطرح می‌شود (هر سخنران در هر همایش فقط یک روز و هر سخنران هر روز فقط در مورد یک موضوع سخنرانی می‌کند). این مسئله به چند روش قابل برنامه ریزی است؟

دو مربع لاتین متعامد مرتبهٔ ۶ لازم است که وجود ندارد ☺

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱۲ ۴) هیچ ✓

سراسری ۹۹) در یک مسابقه، سه راننده در سه روز متوالی هفته با سه نوع اتومبیل ۱، ۲، ۳ در سه مسیر A، B، C شرکت می‌کنند. (۱م، ۲م، ۳م) هر کدام از راننده‌ها فقط یک مسیر و یک اتومبیل را در روز انتخاب می‌کنند و برنامه‌ریزی اتومبیل‌ها به صورت مربع لاتین زیر است. به چند طریق برنامه‌ریزی مسیر را می‌توان انجام داد، به شرطی آن که نفر اول در روز اول، مسیر A (۱م) را انتخاب نکند؟ ۶تا ☺

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ✓

	D_1	D_2	D_3
شنبه	۲	۳	۱
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۱	۲	۳

(اتومبیل‌ها)

می‌دانیم متناظر با مربع لاتین مربوط به ماشین‌ها ۶ مربع لاتین متعامد با آن برای مسیرها وجود دارد.

آنهایی قابل قبول‌اند که در روز اول، راننده ۱ در مسیر ۱ نباشه.

$R_1 \leftrightarrow R_2$ ✓

	D_1	D_2	D_3
شنبه	۳	۱	۲
یکشنبه	۲	۳	۱
دوشنبه	۱	۲	۳

$R_1 \leftrightarrow R_3$ ✗

	D_1	D_2	D_3
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

$R_2 \leftrightarrow R_3$ ✓

	D_1	D_2	D_3
شنبه	۲	۳	۱
یکشنبه	۱	۲	۳
دوشنبه	۳	۱	۲

$C_1 \leftrightarrow C_2$ ✓

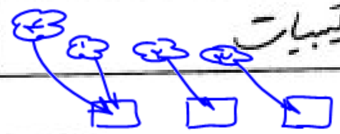
	D_1	D_2	D_3
شنبه	۳	۲	۱
یکشنبه	۱	۳	۲
دوشنبه	۲	۱	۳

$C_1 \leftrightarrow C_3$ ✗

	D_1	D_2	D_3
شنبه	۱	۳	۲
یکشنبه	۲	۱	۳
دوشنبه	۳	۲	۱

$C_2 \leftrightarrow C_3$ ✓

	D_1	D_2	D_3
شنبه	۲	۱	۳
یکشنبه	۳	۲	۱
دوشنبه	۱	۳	۲



اصل لانه کبوتری

اگر تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه‌ها باشند و همهٔ کبوترها درون لانه‌ها قرار گیرند، آن‌گاه لانه‌ای با حداقل دو کبوتر (بیش از یک کبوتر) وجود دارد.

تعداد کبوترها | تعداد لانه‌ها ← +۱ → حداقل تعداد کبوترهایی که با اطمینان در یک لانه وجود دارد $= \left\lceil \frac{\text{تعداد کبوترها}}{\text{تعداد لانه‌ها}} \right\rceil$

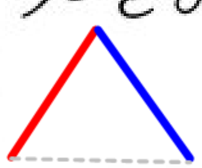
مثلاً: در یک کلاس ۸ نفری، حداقل دو نفر در یک روز هفته متولد شده‌اند. زیرا اگر ۸ نفر را به عنوان ۸ کبوتر و ۷ روز هفته را به عنوان ۷ لانه در نظر بگیریم، از آن جایی که تعداد کبوترها از تعداد لانه‌ها بیشتر است، پس طبق اصل لانه کبوتری، حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۲ نفر در یک روز هفته متولد شده‌اند.

$\left\lceil \frac{۸}{۷} \right\rceil = ۲$

تذکر: در حل مسائل مربوط به اصل لانه کبوتری، پس از تشخیص کبوترها و لانه‌ها، می‌توان تعداد کبوترها را به تعداد لانه‌ها تقسیم کرد و به عدد خارج قسمت یک واحد اضافه نمود. در این صورت حداقل تعداد کبوترهایی که (با اطمینان) در یک لانه وجود دارند، به دست می‌آید.

در مثال بالا: ۸ ÷ ۷ = ۱ (باقیمانده ۱) → ۱+۱=۲ → حداقل ۲ نفر وجود دارند که در یک روز هفته متولد شده‌اند.

مثال (Ex): نشان دهید اگر ضلع‌های یک مثلث را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ‌آمیزی کنیم، حداقل ۲ ضلع مثلث همرنگ می‌شوند.



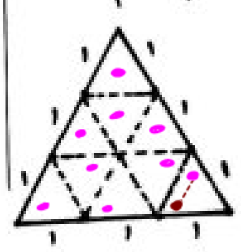
سه ضلع مثلث → ۳ کبوتر
۲ رنگ قرمز و آبی → ۲ لانه
$۳ > ۲ \xrightarrow{\text{اصل لانه کبوتری}}$ حداقل ۲ کبوتر در یک لانه‌اند، یعنی حداقل ۲ ضلع دارای یک رنگ‌اند.

تمرین (Ex / H.W): نشان دهید در یک خانوادهٔ ۵ نفری، دست کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

۵ کبوتر، ۴ لانه
$۵ > ۴ \xrightarrow{\text{اصل لانه کبوتری}}$ حداقل ۲ کبوتر در یک لانه‌اند، پس حداقل ۲ نفر در یک فصل متولد شده‌اند.

مثال (Ex): در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ واحد، ۱۰ نقطه به تصادف داخل مثلث انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌ای کمتر از یک واحد دارند.

* ابتدا مثلث داده شده را به ۹ مثلث کوچک (به ضلع ۱ واحد) تقسیم می‌کنیم.



۱۰ نقطه → ۱۰ کبوتر
۹ مثلث کوچک → ۹ لانه
$۱۰ > ۹ \xrightarrow{\text{اصل لانه کبوتری}}$ حداقل ۲ کبوتر در یک لانه‌اند، یعنی حداقل ۲ نقطه از ۱۰ نقطهٔ انتخابی، درون یک مثلث کوچک‌اند و در نتیجه فاصلهٔ بین آنها از ضلع مثلث کوچک، یعنی از عدد ۱، کمتر است.

مثال: ثابت کنید در بین ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر با روز تولد یکسان وجود دارد.
Ex

۳۶۸ کبوتر

۳۶۵ (یا ۳۶۶) لانه

حداقل دو کبوتر در یک لانه اند، یعنی حداقل ۲ نفر در یک روز متولد شده اند $\xleftarrow{\text{اصل لانه کبوتری}}$ ۳۶۵ < ۳۶۸

مثال: ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی دلخواه، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموع آنها عددی زوج باشد.
Ex

۳ کبوتر

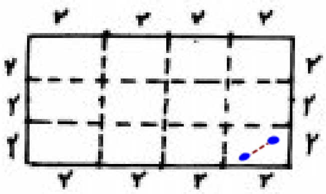
a , b , c

$\underbrace{\boxed{\text{زوج}}\ ,\ \boxed{\text{فرد}}}_{\text{۲ لانه}}$

حداقل ۲ کبوتر در یک لانه اند، یعنی حداقل ۲ عدد از ۳ عدد طبیعی $\xleftarrow{\text{اصل لانه کبوتری}}$ ۲ < ۳
دلخواه، از نظر زوج و فرد بودن یکسان اند (هر دو زوج
یا هر دو فردند). بنابراین مجموع این دو عدد قطعاً زوج است.

مثال: درون یک مستطیل ۶×۸ واحد، ۱۳ نقطه به دلخواه انتخاب می‌شود. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از آنها
Ex
فاصله‌ای کمتر از $2\sqrt{2}$ دارند.

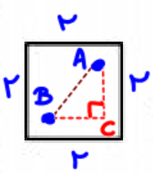
۱۳ کبوتر



حل: مستطیل داده شده را به ۱۲ مربع ۲×۲ تقسیم می‌کنیم.

۱۳ نقطه ⟵ ۱۳ کبوتر
۱۲ مربع ⟵ ۱۲ لانه

$\xrightarrow[\text{اصل لانه کبوتری}]{13>12}$ حداقل ۲ نقطه (از ۱۳ نقطهٔ انتخابی) در یک مربع قرار می‌گیرند.



پس فاصلهٔ بین این دو نقطه، از قطر مربع کوچک، یعنی از عدد $2\sqrt{2}$، کمتر است.

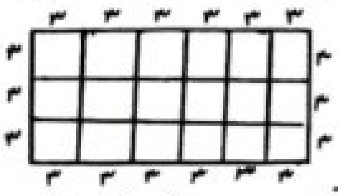
$$\begin{cases} CA<2 \\ CB<2 \end{cases} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \begin{cases} CA^2<4 \\ CB^2<4 \end{cases} \xrightarrow{+} \underbrace{CA^2+CB^2}_{\text{فیثاغورس} \to AB^2}<8 \xrightarrow{\text{جذر}} CA<2\sqrt{2}$$

سراسری ۹۸: درون یک مستطیل ۱۸×۹، حداقل چند نقطه اختیار شود، تا مطمئن باشیم لااقل فاصلهٔ ۲ نقطه از این نقاط انتخابی، کمتر از $3\sqrt{2}$ باشد؟

کبوترها: n

قطر مربع به ضلع ۳

۱) ۱۶ ۲) ۱۸
۳) ۱۹ ۴) ۲۰



مستطیل داده شده را به ۱۸ مربع ۳×۳ تقسیم می‌کنیم

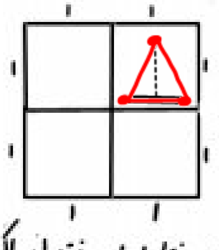
۱۸ مربع ۳×۳ ⟵ ۱۸ لانه $\xrightarrow{\text{اصل لانه کبوتری}}$ n > ۱۸ ⟵ min(n) = ۱۹

تست H.W: درون یک مربع به ضلع ۲، حداقل چند نقطه انتخاب شود، تا مطمئن باشیم لااقل ۳ نقطه از آن‌ها مثلثی به مساحت حداکثر $\frac{1}{2}$ تشکیل می‌دهند؟

کبوترها: n

۱) ۵ ۲) ۹
۳) ۱۱ ۴) ۱۷

(گزینه ۲)



مربع داده شده را به ۴ قسمت مساوی (۴ مربع ۱×۱) تقسیم می‌کنیم:

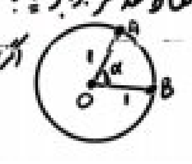
۴ مربع ۱×۱ ⟵ ۴ لانه

$\lceil \frac{n}{4} \rceil = 3 \to min(n) = 9$

تست H.W: حداقل چند نقطه روی محیط دایره‌ای به شعاع واحد انتخاب شود تا دست کم فاصلهٔ دو نقطه از این نقاط حداکثر برابر ۱ باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷
۳) ۹ ۴) ۱۰

(گزینه ۲)



مثال (Ex): نشان دهید هر زیرمجموعهٔ ۴۳ عضوی از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 84\}$ دارای حداقل ۲ عضو با مجموع ۸۵ است.

۴۳ کبوتر

جفت عددهایی که مجموع آنها ۸۵ است $\rightarrow \{1, 84\}, \{2, 83\}, \ldots, \{42, 43\}$

۴۲ گروه $\rightarrow$ ۴۲ لانه

$43 > 42$ اصل لانه کبوتری $\rightarrow$ حداقل ۲ کبوتر در یک لانه اند، یعنی حداقل ۲ عضو از زیرمجموعهٔ ۴۳ عضوی، متعلق به یک لانه اند و مجموعشان برابر ۸۵ می شود.

تست: در یک زیرمجموعهٔ n عضوی از اعداد طبیعی یک رقمی، حداقل دو عضو وجود دارد که مجموع آنها برابر ۱۰ است. کمترین مقدار n کدام است؟

n کبوتر

$S = \{1, 2, \ldots, 9\}$

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

جفت عددهایی که مجموعشان ۱۰ است $\rightarrow \{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{5\}$

۵ لانه $\xrightarrow{\text{اصل لانه کبوتری}}$ $n > 5 \rightarrow \min(n) = 6$ ✓

سراسری ۹۲: هر زیرمجموعهٔ n عضوی از $A = \{1, 2, 3, \ldots, 23\}$، به طور یقین حداقل دو عضو دارد که مجموع آن دو عضو ۲۴ می باشد. حداقل n کدام است؟

n کبوتر؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

$\underbrace{\{1, 23\}, \{2, 22\}, \ldots, \{11, 13\}}_{\text{تا ۱۱}}, \{12\}$

۱۲ لانه $\xrightarrow{\text{اصل لانه کبوتری}}$ $n > 12 \rightarrow \min(n) = 13$

سراسری ۹۴ خارج: مجموعهٔ S، اعداد طبیعی فرد و مضرب ۳، شروع از ۳ و ختم به ۶۳ است. یک زیرمجموعهٔ حداقل چند عضوی از S انتخاب شود که مطمئن باشیم شامل دو عضو با مجموع ۶۶ می باشد؟ (گزینه ۳)

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۸

سراسری ۹۳ خارج: در کیسه ای ۹۰ گوی یکسان قرار دارد که بر هر یک از اعداد دورقمی $\{10, 11, \ldots, 99\}$ بر روی آنها نوشته شده است. حداقل چند گوی از کیسه خارج کنیم تا مطمئن باشیم جمع دو عدد از دو گوی خارج شده برابر ۱۱۰ می باشد؟

n: کبوترها

۱) ۴۵ ۲) ۴۶ ۳) ۴۷ ۴) ۴۸

$\{10\}, \{11, 99\}, \{12, 98\}, \ldots, \{54, 56\}, \{55\}$

تا $\frac{88}{2} = 44$

۴۶ لانه $\xrightarrow{n > 46}$ $\min(n) = 47$

مثال (Ex): نشان دهید هر زیرمجموعهٔ ۱۳ عضوی از مجموعهٔ $\{1, 5, 9, 13, \ldots, 81, 85\}$ دارای حداقل ۲ عضو با مجموع ۹۰ است.

۱۳ کبوتر

$d = 4$ دنباله حسابی با قدرنسبت

$$\text{تعداد کل} = \frac{max - min}{d} + 1 = \frac{85 - 1}{4} + 1 = 22$$

جفت عددهایی که مجموعشان ۹۰ است $\rightarrow \{1\}, \underbrace{\{5, 85\}, \{9, 81\}, \ldots, \{41, 49\}}_{\text{تا ۱۰}}, \{45\}$ $\rightarrow$ ۱۲ لانه

$13 > 12$ اصل لانه کبوتری

حداقل ۲ عدد در یک لانه قرار دارند و مجموعشان آن دو عدد برابر ۹۰ است.

سراسری ۹۸: از مجموعهٔ اعداد $\{71, 68, 65, \ldots, 11, 8, 5\}$ که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده است، یک زیرمجموعهٔ حداقل چند عضوی انتخاب شود تا مطمئن باشیم لااقل دو عدد در این زیرمجموعه موجود است که جمع آنها ۸۲ باشد؟

n کبوتر:

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

$$\text{تعداد کل} = \frac{71 - 5}{3} + 1 = 23$$

جفت عددهایی که مجموعشان ۸۲ است $\rightarrow \{5\}, \{8\}, \{11, 71\}, \{14, 68\}, \ldots, \{38, 44\}, \{41\}$

تا $\frac{20}{2} = 10$

۱۳ لانه $\xrightarrow{n > 13}$ $\min(n) = 14$ ✓

تست از مجموعهٔ اعداد $\{1, 2, \dots, 20\}$ یک زیرمجموعه با دست کم چند عضو انتخاب کنیم تا تفاضل حداقل دو عضو متعلق به آن برابر ۷ باشد؟

n کبوتر

۱) ۸ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۱

جفت عددهایی که تفاضلشان ۷ است → $\{1,8\},\{2,9\},\{3,10\},\{4,11\},\{5,12\},\{6,13\},\{7,14\}$
$\{15\},\{16\},\{17\},\{18\},\{19\},\{20\}$

۱۳ لانه $\xrightarrow{n>13}$ $\min(n)=14$

تمرین H.W فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ ۷ عضوی از مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \dots, 21\}$ است. ثابت کنید حداقل دو زیرمجموعهٔ متمایز از S، با مجموع اعضای برابر وجود دارد.

$2^7 = 128$ زیرمجموعه دارد.

تست از مجموعهٔ اعداد $\{1, 2, 3, \dots, 35\}$ حداقل چند عضو حذف کنیم تا در بین اعداد باقی‌مانده، مجموع هیچ دو عددی برابر ۳۵ نشود؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

جفت عددهایی که مجموعشان ۳۵ است → $\underbrace{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}}_{\text{۴ تا}}, \underbrace{\{5,30\},\{6,29\},\dots,\{17,18\}}_{\frac{26}{2}=13 \text{ تا}}$

از هر گروه، یک عضو باید حذف شود.

سراسری ۱۴۰۱ حداقل چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{1,2,3,\dots,7\}$ انتخاب شود تا مطمئن شویم دو زیرمجموعه با اشتراک تهی در آن وجود دارد؟

n کبوتر؟

۱) ۶۵ ۲) ۶۴ ۳) ۴۵ ۴) ۴۶

کل زیرمجموعه‌ها $= 2^7 = 128$

جفت زیرمجموعه‌هایی که اشتراکشان تهی است → $\underbrace{\{\phi, \{1,2,\dots,7\}\}, \{\{1\}, \{2,3,4,6,7\}\}, \{\{1\},\{2\}\}, \dots}$

$\frac{128}{2} = 64$ لانه $\xrightarrow{n>64}$ $\min(n)=65$

تست در یک زیرمجموعهٔ n عضوی از مجموعهٔ $\{1,2,3,\dots,9\}$ حداقل ۳ عضو با مجموع ۱۵ وجود دارد. کمترین مقدار n کدام است؟

n کبوتر

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۵

$\underbrace{\{1,5,9\}, \{2,6,7\}, \{3,4,8\}}_{\text{۳ لانه}}$

$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil = 3 \longrightarrow \min(n) = 7$

تست در یک کلاس با ۲۴ دانش‌آموز، ۷ تیم ورزشی ۸ نفری تشکیل شده است. یک دانش‌آموز با عضویت در حداقل چند تیم ورزشی در این کلاس یافت می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

تیم ۱	تیم ۲	...	تیم ۷
××	××		××
××	××		××
××	××		××
××	××		××

$7 \times 8 = 56$ کبوتر

$\left\lceil \frac{56}{24_{\text{لانه}}} \right\rceil = 3$

مثال Ex: نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبهٔ $p \geq 2$، حداقل ۲ رأسِ هم‌درجه وجود دارد.

p رأس ← p کبوتر

حل:

درجه‌ها ← $0, 1, 2, \dots, p-2, p-1$ ← $(p-1)$ درجه ← $(p-1)$ لانه

حالت ۱: گراف رأس ایزوله (تنها) ندارد. در این صورت درجه‌ی رأس‌ها از ۱ تا $p-1$ است. ($(p-1)$ تا)

پس

p رأس ← p کبوتر

$(p-1)$ عدد برای درجه ← $(p-1)$ لانه

$\xrightarrow{\text{اصل لانه کبوتری}}$ حداقل ۲ رأس دارای یک درجه‌اند.

حالت ۲: اگر یک رأس تنها وجود داشته باشد، در این صورت درجه‌ی رأس‌ها از ۰ تا $p-2$ است. ($(p-1)$ تا)

p رأس ← p کبوتر

$(p-1)$ عدد برای درجه ← $(p-1)$ لانه

$\xrightarrow{\text{اصل لانه کبوتری}}$ حداقل ۲ رأس دارای یک درجه‌اند.

* درجه‌های گراف ساده، هیچ‌گاه تشکیل یک تصاعد نمی‌دهند، مگر آن که تمام درجه‌ها یکسان باشند (گراف منتظم) $d=0$

نتیجه Ex: در هر کلاس با n دانش‌آموز $(n \geq 2)$، حداقل ۲ دانش‌آموز وجود دارد که تعداد دوستان آنها در آن کلاس، با هم برابر است.

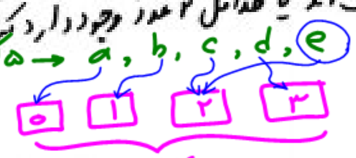
توضیح: رابطهٔ دوستی بین افراد یک گراف ساده است. پس یک گراف ساده با n رأس وجود دارد، که هر رأسِ آن یک دانش‌آموز و یال‌ها، دوستی بین آنها را نشان می‌دهد. یعنی درجهٔ هر رأس، تعداد دوستان دانش‌آموزِ متناظر با آن رأس را در کلاس نشان می‌دهد. از طرفی می‌دانیم در گراف ساده، حداقل ۲ رأسِ هم‌درجه وجود دارد. پس حداقل ۲ دانش‌آموز با تعداد دوستانِ برابر، در آن کلاس، یافت می‌شود.

مثال Ex: نشان دهید در بین هر ۵ عدد صحیح دلخواه، حداقل دو عدد وجود دارد که در تقسیم بر ۴، باقی‌ماندهٔ یکسان دارند.
(یا حداقل ۲ عدد وجود دارد که به پیمانهٔ ۴ هم‌نهشت‌اند یا حداقل ۲ عدد وجود دارد که تفاضل آنها بر ۴ بخش‌پذیر است)

۵ کبوتر

پنج عدد صحیح دلخواه ← ۵ کبوتر ← a, b, c, d, e

باقی‌مانده بر ۴ ← $\underbrace{\boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}}_{\text{۴ لانه}}$



$\xrightarrow[\text{اصل لانه کبوتری}]{5>4}$ حداقل ۲ کبوتر در یک لانه‌اند، یعنی حداقل ۲ عدد از پنج عدد انتخابی، در تقسیم بر ۴، دارای یک باقی‌مانده هستند.

نتیجه: در بین هر $(n+1)$ عدد صحیح دلخواه (یا بیشتر) حداقل ۲ عدد با باقی‌ماندهٔ یکسان در تقسیم بر عدد طبیعی n وجود دارد.
(یا حداقل ۲ عدد وجود دارد که به پیمانهٔ n هم‌نهشت‌اند یا تفاضل آنها بر n بخش‌پذیر است.)

$(n+1)$ کبوتر

n لانه ← n تا باقی‌مانده

$n+1 > n \longrightarrow \dots$

مثال Ex: پنج نقطه در صفحه مختصات وجود دارد که مختصات صحیح دارند. ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از آنها، مختصات نقطه وسط آنها صحیح است. (۵ کبوتر)

* هر نقطه با مختصات صحیح در صفحه، یکی از حالات زیر را دارد:

$\underbrace{(\text{فرد}, \text{فرد}), (\text{زوج}, \text{فرد}), (\text{فرد}, \text{زوج}), (\text{زوج}, \text{زوج})}_{\text{۴ لانه}}$

$5 > 4$ اصل لانه کبوتری

حداقل ۲ کبوتر در یک لانه اند یعنی حداقل ۲ نقطه از پنج نقطه انتخابی، از نظر زوج و فرد بودن مختص‌ها، یکی اند.

هر دو زوج یا هر دو فردند

$A(x_1, y_1)\ ,\ B(x_2, y_2) \xrightarrow[\text{پاره خط } AB]{\text{مختصات نقطه وسط}} M\left(\overbrace{\frac{x_1+x_2}{2}}^{\text{زوج}}, \overbrace{\frac{y_1+y_2}{2}}^{\text{زوج}}\right)$

هر دو زوج یا هر دو فردند

صحیح صحیح

سراسری ۹۲ H.W: حداقل چند زوج مرتب به صورت (a, b) با مختص‌های اعداد صحیح و مثبت انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم در ۲ زوج انتخابی، جمع مختص‌های اول و جمع مختص‌های دوم، اعداد زوج هستند؟ (گزینه ۳)

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

تست: حداقل چند عدد طبیعی (که بجز ۲، ۳ و ۵ بر هیچ عدد اول دیگری بخش پذیر نیستند) انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حاصل ضرب دو عدد از این اعداد، مربع کامل است؟ (n کبوتر)

۱) ۵ ۲) ۶
۳) ۹ ۴) ۱۰

$N = 2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 5^{\gamma} \rightarrow$ از نظر زوج و فرد بودن توان ۸ حالت دارد (۸ لانه)

$\begin{cases} N_1 = 2^{\alpha_1} \times 3^{\beta_1} \times 5^{\gamma_1} \\ N_2 = 2^{\alpha_2} \times 3^{\beta_2} \times 5^{\gamma_2} \end{cases} \xrightarrow{\times} N_1 \cdot N_2 = 2^{\overbrace{\alpha_1+\alpha_2}^{\text{زوج}}} \times 3^{\overbrace{\beta_1+\beta_2}^{\text{زوج}}} \times 5^{\overbrace{\gamma_1+\gamma_2}^{\text{زوج}}} = \text{مربع}$

با انتخاب ۹ عدد طبیعی به شکل N، مطمئن هستیم حداقل ۲ تای آنها از نظر زوج و فرد بودن توان‌ها، یکسان اند.

$n > 8 \rightarrow \min(n) = 9$

مثال Ex: در یک دبیرستان با ۵۰۵ دانش آموز، نشان دهید حداقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. (۵۰۵ کبوتر)

$7 \text{ حالت} \times 12 \text{ حالت} = 84$ لانه

$505 \div 84 = 6$ ، $6 + 1 = 7$

حداقل ۷ نفر در یک لانه اند
حداقل ۷ نفر در یک روز هفته و در یک ماه متولد شده اند.

سراسری خارج ۱۴۰۱: در یک کلاس ۶۵ نفری، بیشترین مقدار n، به گونه‌ای که مطمئن باشیم حداقل n نفر دارای ماه تولد یکسان هستند، کدام است؟ (۶۵ کبوتر، ۱۲ لانه)

۱) ۵ ۲) ۶
۳) ۷ ۴) ۸

$\left\lceil \frac{65}{12} \right\rceil = 6$ ✓

سراسری ۹۳ و ۹۰: مجموعه S دارای ۵۰ عضو از اعداد طبیعی است. در تقسیم عضوهای S بر عدد ۱۲، حداقل چند عضو، باقی‌مانده یکسان دارند؟ (۵۰ کبوتر)

$\underbrace{0, 1, \dots, 11}_{\text{۱۲ لانه}} \leftarrow$ باقی‌مانده بر ۱۲

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

$\rightarrow \left\lceil \frac{50}{12} \right\rceil = 5$

تست H.W: درون کیسه‌ای ۱۰۰ مهره با رنگ‌های $\underbrace{\text{سفید، سیاه، قرمز، آبی، سبز و زرد}}_{\text{۶ لانه}}$ وجود دارد. حداقل چند مهره هم‌رنگ داخل کیسه وجود دارد؟ (۱۰۰ کبوتر) (گزینه ۳)

۱) ۱۵ ۲) ۱۶
۳) ۱۷ ۴) ۱۸

$\left\lceil \frac{100}{6} \right\rceil = 17$

تعمیم اصل لانه کبوتری

اگر $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر $(kn+r)$، که $(1 \leq r < n)$، در n لانه قرار بگیرند، آن‌گاه لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گیرد.

$kn+1 \,\big|\, \frac{n}{k}$ ، $\xrightarrow{+1} k+1$: حداقل تعداد کبوترهایی که در یک لانه با اطمینان وجود دارد.

مثال (Ex): در یک کلاس، حداقل چند نفر لازم است که اطمینان داشته باشیم حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولدشان یکی است؟

$n=12$ لانه ، $k+1=7 \to k=6$ ، $(kn+1)$ کبوتر

حل: اگر ۱۲ ماه را به‌عنوان $n=12$ لانه درنظر بگیریم، طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، $k+1=7$، و درنتیجه $k=6$ است. پس حداقل تعداد کبوترها (دانش‌آموزان) برابر است با

$$kn+1 = 6\times 12+1 = 73$$

مثال (Ex): در یک سالن ورزشی حداقل چند تماشاگر لازم است تا اطمینان داشته باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟

$k+1=20 \to k=19$ ، $(kn+1)$ کبوتر ، $n=365$ لانه

جواب $= kn+1 = 19\times 365+1 = 6936$ ✓

مثال (Ex): در یک زیرمجموعه m عضوی از اعداد صحیح، دست کم ۵ عضو وجود دارد، که در تقسیم بر عدد ۱۵ باقیمانده یکسان دارند. حداقل m را بیابید.

$n=15$ لانه ، $k+1=5 \to k=4$ ، $m = kn+1 = 4\times 15+1 = 61$ کبوتر

مثال (Ex): در یک دبیرستان دست کم چند دانش‌آموز ($kn+1$) وجود داشته باشد تا مطمئن باشیم دست کم ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم فامیلشان غیرتکراری و شکل هم است؟

$k+1=3 \to k=2$

حرف دوم: ? ، حرف اول: ?

$n = 31 \times 32 = 992$ حالت (لانه)

$$kn+1 = 2\times 992+1 = 1985 \checkmark$$

مثال (Ex): در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشد تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟

$n = \underbrace{7\times 12}_{84}$ ، $k+1=10 \to k=9$ ، $kn+1$

$$kn+1 = 9\times 84+1 = 757 \checkmark$$

سراسری (H.W): کمترین تعداد افرادی که حداقل دو نفر آنها در یک ماه از سال و در یک روز هفته متولد شده‌اند کدام است؟ (گزینه ۲)

۱) ۷۵ ۲) ۸۵ ۳) ۷۸ ۴) ۸۸

تست: در یک سالن امتحان دست کم چند دانش‌آموز ($kn+1$) لازم است تا حداقل ۳ نفر آن‌ها در آزمون تستی ۳ گزینه‌ای با ۷ سؤال دارای پاسخ برگ یکسان باشند؟ (فرض کنید پاسخ به تمام سؤال‌ها الزامی است)

۱) ۲۱۸۸ ۲) ۲۸۸۴ ۳) ۴۲۶۴ ۴) ۴۳۷۵

$k+1=3 \to k=2$

$n = \underset{\text{سؤال ۱}}{3} \times \underset{\text{سؤال ۲}}{3} \times \cdots \times \underset{\text{سؤال ۷}}{3} = 3^7 = 2187$ لانه

$$kn+1 = 2\times 2187+1 = 4375$$

سراسری ۹۵ یک تاس همگن را حداقل چند بار پرتاب کنیم تا به طور یقین سه بار یا بیشتر، نتیجه یکسان داشته باشیم؟

حداقل ۳ بار

$kn+1$ $k+1=3 \to k=2$ $n=6$ لانه

۱) ۱۲   ۲) ۱۳   ۳) ۱۸   ۴) ۱۹

$$kn+1 = 2\times 6+1 = 13 \checkmark$$

سراسری ۶۵ کبوتر در حداکثر چند لانه قرار گیرند تا حداقل یک لانه با بیش از دو کبوتر وجود داشته باشد؟

$kn+1$ حداقل ۳ کبوتر

$n=?$ $k+1=3 \to k=2$

۱) ۳۱   ۲) ۳۲   ۳) ۳۳   ۴) ۳۴

$$kn+1=65 \to 2n+1=65 \to n=32 \checkmark$$

مثال Ex   ۵۳ شاخه گل را در حداکثر چند گلدان قرار دهیم تا مطمئن باشیم حداقل یک گلدان با دست کم ۵ شاخه گل وجود دارد؟

$kn+1=53$ $n=?$ $k+1=5 \to k=4$

$$4n+1=53 \to n=\left[\frac{53}{4}\right]=13 \checkmark$$

سراسری ۱۴۰۳ در یک کلاس ۴۳ نفری، ۷ نفر نامزد انتخاب مشاوره با امور مدرسه اند. انتخاب شونده باید رأی بیشتر از سایرین داشته باشد. حداقل رأی انتخاب شونده کدام است؟

(گزینه ۳)

۱) ۵   ۲) ۶   ۳) ۷   ۴) ۸

تست در یک فروشگاه لباس، شلوارها در ۵ رنگ مختلف، ۶ سایز متفاوت و ۳ نوع پارچه متمایز موجودند. حداقل چند شلوار انتخاب کنیم تا دست کم ۳ شلوار با رنگ، سایز و پارچه یکسان داشته باشیم؟

$kn+1=?$ $k+1=3 \to k=2$

۱) ۴۲   ۲) ۲۹   ۳) ۱۸۰   ۴) ۱۸۱

$$n = \underbrace{5}_{\text{رنگ}} \times \underbrace{6}_{\text{سایز}} \times \underbrace{3}_{\text{نوع پارچه}} = \underbrace{90}_{\text{لانه}}$$

$$kn+1 = 2\times 90+1 = 181$$

عشق در لحظه پدید می‌آید.
و دوست داشتن در امتداد زمان.
و این اساسی‌ترین تفاوت میان عشق و دوست داشتن است.
(دکتر حسابی)

سراسری ۸۹ — حداقل چند عدد از مجموعه‌ی {۲, ۳, ۴, ..., ۳۰} انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم لااقل دو عدد آنها مقسوم‌علیه مشترک غیر ۱ دارند؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

حداقل ۲ عدد مقسوم علیه مشترک غیر ۱ دارد ← متمم ← هیچ کدام مقسوم علیه مشترک غیر ۱ نداشته باشند (سقف بدشانسی) ← اعداد اول ← {۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹}

۱۰ تا $\xrightarrow{+1}$ ۱۱ تا

با انتخاب ۱۱ عدد، مطمئن هستیم حداقل یکی مرکب است و با اعداد اول قبلی، مقسوم علیه مشترک غیر ۱ دارد.

سراسری ۹۳ (خ۹۹) ۱۴۰۰ — هر یک از اعداد ۱ تا ۳۰ را بر روی ۳۰ گوی یکسان نوشته در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. حداقل چند گوی بیرون آوریم تا به طور یقین دست کم دو عدد با مقسوم علیه مشترک بزرگتر از ۱ داشته باشیم؟ (مشابه ۳)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

تست — کیسه‌ای شامل ۴ مهره‌ی قرمز، ۵ مهره‌ی سیاه و ۷ مهره‌ی سفید است. حداقل چند مهره خارج کنیم تا حتماً یکی از مهره‌ها سفید باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

متمم ← حداکثر مهره‌های غیر سفید ← $\underbrace{\underset{\text{سیاه}}{5} + \underset{\text{قرمز}}{4} = 9}_{\text{سقف بدشانسی}}$ $\xrightarrow{+1}$ با انتخاب ۱۰ مهره حتماً یکی سفید است.

تست — کیسه‌ای شامل ۴ مهره‌ی سیاه، ۳ مهره‌ی سفید، ۲ مهره‌ی سبز و ۳ مهره‌ی قرمز است. حداقل چند مهره از کیسه خارج کنیم تا مطمئن شویم دست کم سه رنگ متمایز خارج شده است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۱

متمم ← بیشترین تعداد مهره‌هایی که حداکثر ۲ رنگ متمایز دیده شود ← سقف بدشانسی ← $\underset{\text{سیاه}}{4} + \underset{\text{سفید}}{3} = 7 \xrightarrow{+1} 8$

با انتخاب ۸ مهره، حتماً ۳ رنگ متمایز دیده می‌شود.

سراسری ۹۶ خ۹۲ — در جعبه‌ای ۳ گوی قرمز، ۵ گوی سفید، ۷ گوی آبی و ۹ گوی زرد موجود است. حداقل چند گوی خارج کنیم تا مطمئن باشیم دست کم ۶ گوی همرنگ خارج شده است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

سقف بدشانسی ← بیشترین تعداد مهره‌ها که خارج شود و حداکثر ۵ مهره‌ی همرنگ دیده شود ← $\underset{\text{قرمز}}{3} + \underset{\text{سفید}}{5} + \underset{\text{آبی}}{5} + \underset{\text{زرد}}{5} = 18 \xrightarrow{+1} 19$

با انتخاب ۱۹ مهره، مطمئن هستیم حداقل ۶ مهره‌ی همرنگ (آبی یا زرد) وجود دارد.

سراسری ۹۶ — در کیسه‌ای ۵ گوی سفید، ۴ گوی قرمز و ۳ گوی سبز وجود دارد. حداقل چند گوی از کیسه خارج کنیم تا مطمئن باشیم بیش از ۳ گوی سفید یا بیش از ۲ گوی قرمز خارج شده است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

متمم ← حداکثر مهره‌هایی که خارج شود و نهایتاً ۳ گوی سفید و نهایتاً ۲ گوی قرمز داشته باشیم ← $\underbrace{\underset{\text{سفید}}{3} + \underset{\text{قرمز}}{2} + \underset{\text{سبز}}{3} = 8}_{\text{سقف بدشانسی}} \xrightarrow{+1} 9$

سراسری ۹۶ — در کیسه‌ای ۷ مهره‌ی سفید، ۵ مهره‌ی سیاه و ۳ مهره‌ی سبز موجود است. دست کم چند مهره از کیسه بیرون آوریم تا مطمئن باشیم لااقل ۴ مهره‌ی سفید یا ۳ مهره‌ی سیاه یا ۲ مهره‌ی سبز بیرون آمده است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

سقف بدشانسی ← $\underset{\text{نهایتاً ۳ سفید}}{3} + \underset{\text{حداکثر ۲ سیاه}}{2} + \underset{\text{نهایتاً یک سبز}}{1} = 6 \xrightarrow{+1} 7$

سراسری ۹۹ — در جعبه‌ای ۷ کتاب ادبی، ۲ کتاب هنری و ۱۰ کتاب ریاضی موجود است. حداقل چند کتاب از این جعبه برداریم تا مطمئن باشیم حداقل ۴ کتاب هم‌موضوع است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۷

حداقل ۴ کتاب هم‌موضوع ← متمم ← بیشترین تعداد کتاب‌هایی که حداکثر ۳ کتاب هم‌موضوع باشند ← $\underset{\text{هنر}}{2} + \underset{\text{ادبی}}{3} + \underset{\text{ریاضی}}{3} = 8 \xrightarrow{+1} 9$

پدیدهٔ تصادفی

هر آزمایشی که نتیجهٔ آن از قبل مشخص نباشد. مانند پرتاب یک سکه، پرتاب تاس و ...

فضای نمونه (S)

مجموعهٔ تمام نتایج ممکن از انجام یک پدیدهٔ تصادفی را گوییم.

مثال: فضای نمونهٔ پرتاب یک تاس عبارت است از $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

مثال: فضای نمونهٔ پرتاب دو سکه باهم (دو بار پرتاب یک سکه) عبارت است از

تعمیم مثال فوق:

پرتاب یک سکه: فضای نمونهٔ ← $S_1=\{پ, ر\}$ ← ۲ حالت

دو سکه باهم (دو بار پرتاب یک سکه) " " " ← $S_1 \times S_1$ ← $2\times2=2^2$ حالت

" " سه " (سه بار " " ") ← $S_1\times S_1\times S_1$ ← $2\times2\times2=2^3$ حالت

2^n ← پرتاب n سکه باهم (n بار پرتاب یک سکه)

نتیجه: اگر S فضای نمونهٔ یک بار انجام یک پدیدهٔ تصادفی باشد، فضای نمونهٔ n بار تکرار آن عبارت است از:

$$S^n = S\times S\times \cdots \times S$$

پس اگر آزمایشی در یک بار انجام، x نتیجه داشته باشد، در n بار تکرار آن، x^n نتیجه دارد.

مثال: فضای نمونهٔ هر یک از پدیده‌های زیر را بیابید.

الف) ۵ بار پرتاب یک سکه ←

ب) پرتاب ۳ تاس باهم ←

ت) پرتاب ۳ سکه و ۲ تاس باهم ←

پرتاب n سکهٔ متمایز باهم (پرتاب n بار یک سکه)	$\rightarrow 2^n$
یک خانواده n فرزندی	$\rightarrow 2^n$
پرتاب n تاس متمایز باهم (پرتاب n بار یک تاس)	$\rightarrow 6^n$

مثال: یک رانندهٔ تاکسی خطی در ایستگاه حداکثر ۴ مسافر سوار می‌کند. اما خالی حرکت نمی‌کند. فضای نمونهٔ یک بار رفت و برگشت این پدیده چند عضو دارد؟

مثال کیسه‌ای شامل n مهره (متمایز) است. دو مهره به تصادف از کیسه بیرون می‌آوریم. در مورد تعداد عضوهای فضای نمونه‌ی این آزمایش بحث کنید.

چگونگی انتخاب مهره‌ها:

- همزمان، باهم، یکجا (ترتیب ندارد) ← $|S| = \binom{n}{2}$
- یکی در پی، یکی یکی، متوالی (ترتیب دارد):
  - بدون جای‌گذاری (تکرار ندارد) ← $|S| = \underset{\text{بار اول}}{\binom{n}{1}} \times \underset{\text{بار دوم}}{\binom{n-1}{1}}$
  - با جای‌گذاری (امکان تکرار است) ← $|S| = \underset{\text{بار اول}}{\binom{n}{1}} \times \underset{\text{بار دوم}}{\binom{n}{1}}$

(اگر چگونگی انتخاب مهره‌ها در مسئله ذکر نشده باشد، همزمان فرض کنید)

شاید نتوان به گذشته بازگشت و دیگر آغازی به سامان ساخت

ولی می‌شود هم اکنون آغاز کرد و دیگر پایانی زیبا ساخت

(اختیاری)

فضای نمونه ←

- گسسته: مجموعه‌ای شمارش‌پذیر (شمارا) (قابل شمارش) است.
  - متناهی ← تعداد اعضای مجموعه معلوم است.
  - نامتناهی شمارش‌پذیر ← تعداد اعضای مجموعه معلوم نیست، ولی قابل شمارش است. مانند $\mathbb{N}$
- پیوسته: مجموعه‌ای شمارش‌ناپذیر (ناشمارا) (غیرقابل شمارش) است.
  - نقاط روی یک پاره‌خط (بازه‌های حقیقی)
  - " " صفحه (دوبعدی)
  - " فضا (سه‌بعدی)

پیشامد

زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه است . به عبارت دیگر

مثال: در پرتاب دو تاس باهم ، پیشامد آن که "مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۸ باشد" را مشخص کنید .

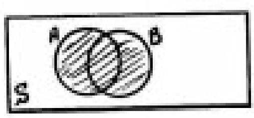
پیشامد حتمی ← فضای نمونه (S) : همواره رخ می‌دهد ← مثال در پرتاب یک تاس ، یکی از اعداد ۱ تا ۶ ظاهر شود .

پیشامد نشدنی (غیرممکن) ← Φ : هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد ← مثال در پرتاب یک تاس ، عدد ۷ ظاهر شود .

اعمال روی پیشامدها

① اجتماع دو پیشامد

(A یا B یا هردو)

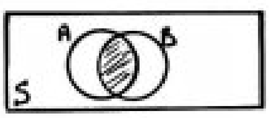


اجتماع دو پیشامد زمانی رخ می‌دهد که

حداقل یکی از دو پیشامد اتفاق بیفتند .

② اشتراک دو پیشامد ← (رخ داد توأم یا هم‌زمان)

(A و B)

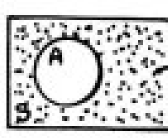


اشتراک دو پیشامد زمانی رخ می‌دهد که

هر دو پیشامد باهم اتفاق بیفتند .

حداقل یکی	↔	$\cup$	↔	یا
هردو باهم	↔	$\cap$	↔	و

③ متمم یک پیشامد

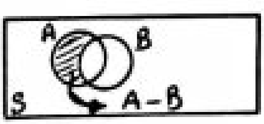


A' یا $\bar{A}$ یا A^c

زمانی رخ می‌دهد که

خود آن پیشامد اتفاق نیفتد .

④ تفاضل دو پیشامد



$\underbrace{A-B}_{\text{فقط A}} = A \cap B'$

A رخ بدهد و B رخ ندهد

زمانی رخ می‌دهد که

فقط اولی اتفاق بیفتد

● فقط یکی از دو پیشامد ← $\underbrace{(A-B)}_{\text{فقط A}} \underbrace{\cup}_{\text{یا}} \underbrace{(B-A)}_{\text{فقط B}}$

مثال: فرض کنید A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه S می‌باشند. به کمک جبر مجموعه‌ها هر یک از موارد زیر را نشان دهید.

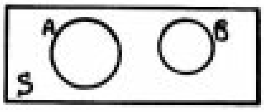
الف) A و B رخ بدهند و C رخ ندهد ←

ب) فقط A اتفاق بیفتد ←

پ) حداقل یکی از این سه پیشامد رخ بدهد ←

ت) فقط یکی رخ بدهد ←

تمرین ث) حداکثر یکی رخ بدهد ← (فقط یکی یا هیچ‌کدام)

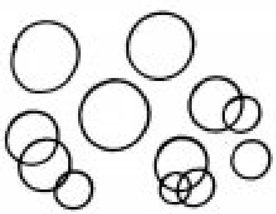


دو پیشامد ناسازگار (مجزا یا جدا از هم)

(A و B ناسازگارند $\Leftrightarrow A\cap B=\Phi$)

دو پیشامد را ناسازگار می‌گوییم اگر و تنها اگر هر دو با هم اتفاق نیفتند. (مجزا یا جدا) (رخ دادن توأم نشدنی باشند)

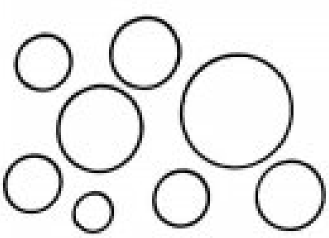
مثلاً در آزمایش پرتاب یک تاس دو پیشامد { A: عدد زوج ظاهر شده است ، B: عدد فرد ظاهر شده است } ناسازگارند.



n پیشامد ناسازگار

رخ دادن توأم همگی آنها غیرممکن است، به عبارت دیگر

$$A_1\cap A_2\cap \dots \cap A_n=\Phi \quad \text{یا} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i=\Phi$$



* n پیشامد دوبه‌دو ناسازگار *

رخ دادن توأم هر دوتای آنها غیرممکن است، به عبارت دیگر

$$\forall i\neq j:\quad A_i\cap A_j=\Phi$$

نتیجه: n پیشامد دوبه‌دو ناسازگار $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ n پیشامد ناسازگار

احتمال وقوع پیشامد A : $P(A)$

احتمال (Probability)

که عددی است حقیقی متعلق به بازه $[0,1]$ که به یک پیشامد نسبت داده می‌شود و بیانگر میزان اطمینان از وقوع آن پیشامد است.

اصول احتمال (اصول کولموگروف)

اصل ۱ : احتمال رخ دادن پیشامد حتمی برابر ۱ است ← $P(S)=1$ ٪۱۰۰

* اصل ۲ :

• تعمیم اصل ۲ : اگر n پیشامد A_1 ، A_2 ، ... ، A_n دوبه‌دو ناسازگار باشند، آنگاه

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

فضای نمونه:
- هم شانس : شانس (احتمال) رخ دادن تمام اعضا باهم برابر است. مانند سکه سالم (استاندارد، منصفانه)، تاس سالم (همگن)، مهره‌های یکسان، ....
- غیرهم شانس : هم شانس نیست. یعنی احتمال رخ دادن یک عضو بیشتر یا کمتر از عضو دیگر است. مانند تاسی که دو وجه آن ۶ است!

* محاسبه احتمال در فضاهای نمونه‌ای گسسته و هم شانس (احتمال ساده یا کلاسیک)

اگر S یک فضای نمونه‌ای گسسته و هم شانس و A پیشامدی از آن فضا باشد، آنگاه

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \text{ یا } \frac{|A|}{|S|}$$

سراسری با کدام احتمال رقم سمت راست پلاک اولین اتومبیلی که از بزرگراه خارج می‌شود از ۴ بیشتر نیست یا مضرب ۳ می‌باشد؟
(رقم صفر در پلاک اتومبیل به کار نمی‌رود)

سراسری در پرتاب دو تاس سالم باهم، با کدام احتمال مجموع دو عدد ۵ است؟

سراسری ۹۳ در پرتاب دو تاس سالم باهم، با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده عددی اول است؟

$|S| = 6^2 = 36$

$|A| = 15 \rightarrow P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ ✓

مجموع ۲ → $(1,1)$

مجموع ۳ → $(1,2),(2,1)$

مجموع ۵ → $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$

مجموع ۷ → $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$

مجموع ۱۱ → $(5,6),(6,5)$

سراسری ۹۳ تجربی دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ است؟

سراسری ابداع دو تاس همگن را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یک عدد مضرب ۳ و مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ است؟

تست H.W دو تاس سالم را باهم می‌اندازیم. احتمال این که حاصل ضرب دو عدد ظاهر شده، مضرب ۶ است؟
(جواب: $\frac{5}{12}$)

تست در پرتاب دو تاس سالم باهم، با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده کمتر از ۱۰ است؟

تست در پرتاب دو تاس قرمز و آبی، با کدام احتمال عدد تاس قرمز از عدد تاس آبی کوچکتر است؟

تست در پرتاب دو تاس قرمز و آبی، با کدام احتمال عدد تاس قرمز عدد تاس آبی را عاد می‌کند؟

مثال در پرتاب سه تاس سالم باهم، با کدام احتمال دو عدد از سه عدد ظاهر شده، یکسان اند؟

مثال در پرتاب سه تاس سالم باهم، چه قدر احتمال دارد مجموع سه عدد ظاهر شده فرد باشد؟

مثال در پرتاب سه تاس سالم باهم، با کدام احتمال مجموع سه تاس برابر ۱۵ است؟

مثال در پرتاب سه تاس قرمز، آبی و سفید، با کدام احتمال عدد تاس قرمز از عدد ظاهر شده توسط دو تاس آبی و سفید بزرگتر است؟

مثال در پرتاب سه تاس قرمز، آبی و سفید، با کدام احتمال عدد تاس سفید با مجموع اعداد ظاهر شده توسط تاس های قرمز و آبی برابر است؟

انخ ۱۴۰۰ خ در یک بازی ۱۶ نفره به هر نفر یکی از شماره های ۳، ۴، ۵، ...، ۱۸ را تخصیص می دهیم. سه تاس را پرتاب می کنیم و اعداد رو شده را با یکدیگر جمع می کنیم. شخصی که آن شماره را داشته باشد، انتخاب می شود. احتمال این که شخص شماره ۱۰ انتخاب شود کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{9}$

۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{7}$

سراسری ۴ لامپ از ۱۰ لامپ موجود سوخته است. اگر سه لامپ به تصادف انتخاب شود، با کدام احتمال هر سه سالم اند؟

* با کدام احتمال فقط یکی سالم است؟

* با کدام احتمال حداقل دو لامپ سالم است؟

سراسری در ظرفی شش مهره با شماره های ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ ریخته شده اند. دو مهره با هم بیرون می آوریم. با کدام احتمال شماره های این دو مهره اعداد متوالی اند؟

سراسری در ظرفی ۵ مهره به شماره های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ ریخته ایم. دو مهره با هم از ظرف خارج می کنیم. احتمال آن که مجموع شماره ها بزرگتر از ۵ باشد کدام است؟

حل

$|S| = \binom{5}{2} = 10$

$|A| = 6 \longrightarrow P(A) = 0/6$

$\{5,1\}, \{5,2\}, \{5,3\}, \{5,4\}$

$\{4,2\}, \{4,3\}$

سراسری شش گوی یکسان به شماره های ۱ تا ۶ در یک ظرف قرار دارند. به تصادف دو گوی از آنها برمی داریم. با کدام احتمال جمع اعداد روی این دو گوی کمتر از ۵ است؟ (جواب: $\frac{4}{15}$)

۱۴۰۳

سراسری پنج مهره به شماره های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ در ظرفی ریخته ایم سه مهره به تصادف و با هم از ظرف بیرون می آوریم. احتمال آن که مجموع سه عدد خارج شده زوج باشد چقدر است؟

سراسری اعداد ۱، ۲، ...، ۹ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف دو کارت از بین آن ها بیرون می آوریم. با کدام احتمال مجموع عدد این دو کارت برابر ۱۱ است؟

تست ۱۴۰۳ دو رأس از یک شش ضلعی به تصادف انتخاب می شود. با کدام احتمال این دو رأس مجاور نیستند؟

(جواب : ۰/۶)

سراسری اعداد ۱ تا ۶ را بر روی ۶ کارت یکسان نوشته اند. اگر به تصادف دو کارت از بین آنها بیرون آوریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو کارت زوج است؟

$|S| = \binom{6}{2} = 15$

$|A| = \underbrace{\binom{3}{2} + \binom{3}{2}}_{\text{هردو فرد یا هردو زوج}} = 6 \rightarrow P(A) = \frac{6}{15} = 0/4$ ✓

مثال: درون کیسه ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه وجود دارد. ۲ مهره به تصادف بطور ؟؟؟ بیرون می آوریم. با کدام احتمال

چگونگی انتخاب مهره ها	هم زمان (یکجا، با هم) $\lvert S\rvert = \binom{8}{2} = 28$	یکی یکی بدون جای گذاری $\lvert S\rvert = (8)(7) = 56$	یکی یکی با جای گذاری $\lvert S\rvert = (8)(8) = 64$
الف) هر دو مهره سفید است؟	$\frac{\binom{3}{2}}{28}$	دومی سفید و اولی سفید $\frac{\binom{3}{1}\times\binom{2}{1}}{56}$	دومی سفید و اولی سفید $\frac{\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}}{64}$
ب) هر دو مهره سیاه است؟	$\frac{\binom{5}{2}}{28}$	دومی سیاه و اولی سیاه $\frac{\binom{5}{1}\times\binom{4}{1}}{56}$	دومی سیاه و اولی سیاه $\frac{\binom{5}{1}\times\binom{5}{1}}{64}$
پ) هر دو مهره همرنگ است؟	(الف) + (ب) سراسری	(الف) + (ب) سراسری ۹۱ تجربی	(الف) + (ب)
ت) هر دو مهره ناهمرنگ است؟	یکی سیاه و یکی سفید $\frac{\binom{3}{1}\times\binom{5}{1}}{28}$ (سراسری ۹۴ تجربی)	دومی سفید و اولی سیاه یا دومی سیاه و اولی سفید $\frac{\binom{3}{1}\times\binom{5}{1}+\binom{5}{1}\times\binom{3}{1}}{56}$	$\frac{\binom{3}{1}\times\binom{5}{1}+\binom{5}{1}\times\binom{3}{1}}{64}$
ث) حداقل یکی سفید است؟ (یکی سفید یا هردو سفید)	(الف) + (ت)	(الف) + (ت)	(الف) + (ت)
ج) حداکثر یکی سفید است؟ (یکی سفید یا هردو سیاه)	(ب) + (ت)	(ب) + (ت)	(ب) + (ت)

سراسری کیسه ای شامل ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. مهره ای به تصادف بیرون آورده و پس از مشاهده رنگ آن به کیسه برمی گردانیم سپس مهره دیگری بیرون می آوریم. احتمال این که فقط یک بار مهره سفید مشاهده شده باشد چقدر است؟

سراسری ۸۹ تجربی در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می شود. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آنها (بدون جایگذاری) انتخاب می شود. با کدام احتمال اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

سراسری — از بین ۴ داوطلب رشته تجربی و ۶ داوطلب رشته ریاضی، ۴ نفر به تصادف انتخاب می‌شوند. با کدام احتمال ۲ نفر آنان رشته ریاضی می‌باشند؟

$|S| = \binom{10}{4} = 210$ (کل افراد $\leftarrow 10 = \underset{\text{ریاضی}}{6} + \underset{\text{تجربی}}{4}$)

$|A| = \underbrace{\binom{6}{2}}_{\text{دو نفر ریاضی}} \times \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{و دو نفر تجربی}} = 90 \longrightarrow P(A) = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$ ✓

سراسری ۹۱ H.۰۰ — از ۴ دانش‌آموز سال اول و ۵ دانش‌آموز سال دوم ۵ نفر برای شرکت در یک اردو به تصادف انتخاب شده‌اند. احتمال آن که ۲ نفر از سال اول و ۳ نفر از سال دوم انتخاب شوند کدام است؟

(جواب: $\frac{5}{14}$)

سراسری ۹۳ خ تجربی — در ظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یک مهره آبی خارج می‌شود؟

سراسری تجربی H.۰۰ — در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می‌شود که بر روی ۳ موش آزمایش انجام شده است. اگر ۲ موش از بین آنها به تصادف انتخاب شود، با کدام احتمال لااقل بر روی یکی از آن دو آزمایش انجام شده است؟

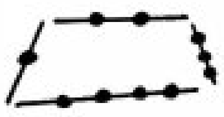
(جواب: $\frac{5}{7}$)

سراسری ۹۴ خ تجربی — در جعبه‌ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید خارج شده است؟

سراسری تجربی H.۰۰ — از بین زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ یکی به تصادف انتخاب می‌شود. احتمال این که شامل ۱ و فاقد ۲ باشد؟

(جواب: $\frac{4}{15}$)

سراسری — از ۱۰ نقطه‌ی شکل مقابل ۴ نقطه به تصادف انتخاب می‌شود. احتمال آن که با چهار نقطه‌ی انتخاب شده بتوان یک چهارضلعی ساخت به طوری که روی هر خط فقط یک رأس چهارضلعی قرار داشته باشد کدام است؟



سراسری H.۰۰ — از هر چهار گروه آزمایشی به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴ نفر داوطلب شرکت در آزمون هستند. اگر به تصادف ۴ نفر از بین آنها معرفی شوند، با کدام احتمال از هر گروه یک نفر معرفی شده است؟

(جواب: [illegible])

سراسری ۹۵ خ تجربی H.۰۰ — در جعبه‌ای ۴ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال فقط یکی از مهره‌ها سفید است؟

(جواب: $\frac{10}{21}$)

مثال ۳ دانش‌آموز و ۵ دانشجو به طور تصادفی در یک ردیف قرار می‌گیرند. با کدام احتمال

الف) دانش‌آموزان کنار هم می‌باشند؟

$\underbrace{\boxed{\text{۳ دانش‌آموز}}\ \times \times \times \times \times}_{\text{۶ شیء متمایز}} \longrightarrow P(\text{الف}) = \frac{6! \times 3!}{8!} = \frac{3}{28}$ ✓

ب) دانش‌آموزان کنار هم و دانشجوها نیز کنار هم می‌باشند؟ (۹۹ تجربی)

$\underbrace{\boxed{\text{۳ دانش‌آموز}}\ \boxed{\text{۵ دانشجو}}}_{\text{۲ شیء متمایز}} \longrightarrow P(\text{ب}) = \frac{2! \times 3! \times 5!}{8!} = \frac{1}{28}$ ✓

پ) دو انتهای صف دانشجو باشد؟

دانشجو $\boxed{\text{۶ نفر}}$ دانشجو

$\longrightarrow P(\text{پ}) = \frac{\binom{5}{2} \times 2! \times 6!}{8!} = \frac{5}{14}$ ✓

(انتخاب ۲ دانشجو از ۵ دانشجو — جایگشت دو نفر)

ت) هیچ دو دانش‌آموزی کنار هم ننشینند؟

دانشجو

$\_\ \square\ \_\ \square\ \_\ \square\ \_\ \square\ \_\ \square\ \_$

$\longrightarrow P(\text{ت}) = \frac{\binom{6}{3} \times 3! \times 5!}{8!} = \frac{5}{14}$ ✓

(انتخاب ۳ خط تیره برای ۳ دانش‌آموز)

سراسری تجربی حروف کلمه‌ی ATAXIA را به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گیرند؟

سراسری ۹۶ تجربی در جعبه‌ای ۵ مهره به شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی یکی‌یکی و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟

سراسری ۹۴ (۱۴۰۰) هر یک از اعداد ۱، ۲، ...، ۶ بر روی شش گوی یکسان نوشته شده است. به طور تصادف، متوالی هر یک گوی از جعبه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج می‌شوند؟

(جواب: ۰/۱)

سراسری هر یک از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را در یکی از ۶ خانه‌ی هم‌ردیف به تصادف قرار می‌دهیم. با کدام احتمال این ارقام در خانه‌های متوالی و دو رقم زوج کنار هم قرار می‌گیرند؟

سراسری رئیس، منشی و ۴ کارمند دور یک میز می‌نشینند. با کدام احتمال منشی مقابل رئیس قرار می‌گیرد؟

حل

$|S| = \underbrace{(6-1)!}_{\text{جایگشت دایره‌ای ۶ نفر}} = 5!$

$|A| = (5-1)! = 4! \longrightarrow P(A) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$

سراسری برای هر یک از چند کارت یکی از اعداد سه رقمی حاصل از جایگشت ترکیبات مجموعه اعداد $\{2, 4, 5, 6, 7\}$ را نوشته، به تصادف یک کارت از بین آنها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال دو رقم از اعداد این کارت فرد می‌باشند؟

مثال: با ارقام ۰، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ یک عدد چهار رقمی به تصادف ساخته می‌شود. احتمال این که این عدد بزرگتر از ۴۰۰۰ باشد کدام است؟

الف) تکرار مجاز است.

حالات ممکن $\rightarrow \underset{5\text{ حالت}}{\overset{\neq 0}{?}} \times \underset{6}{?} \times \underset{6}{?} \times \underset{6}{?} = 5 \times 6^3 = 1080$

حالات مطلوب $\rightarrow \underset{4\text{ حالت}}{\overset{7,6,5,4}{?}} \times \underset{6}{?} \times \underset{6}{?} \times \underset{6}{?} = 4 \times 6^3 - \overset{\text{خود } 4000}{1} = 863 \rightarrow P(\text{الف}) = \dfrac{863}{1080}$

ب) تکرار مجاز نیست. (جواب: ۰/۸)
H.W

سراسری اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم قرار گرفتن ارقام متمایز ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ به وجود آید، احتمال این که این عدد زوج باشد؟

سراسری تجربی H.W اگر یک عدد طبیعی چهار رقمی کمتر از ۵۰۰۰ به طور تصادفی با ارقام متمایز ۹، ۷، ۵، ۳، ۱ به وجود آید، احتمال آن که مضرب ۵ باشد کدام است؟ (جواب: $\frac{1}{4}$)

سراسری خ از بین اعداد طبیعی سه رقمی، به تصادف یک عدد برداشته‌ایم. با کدام احتمال لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر می‌گردد؟

سراسری ۹۶ تجربی در کیسه‌ای ۵ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج شده متفاوت است؟

حل) کل مهره‌ها $= 5+4+3 = 12 \rightarrow n(S) = \binom{12}{3} = 220$

$\rightarrow P(\text{سه رنگ متفاوت}) = \dfrac{\binom{5}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}}{220} = \dfrac{60}{220} = \dfrac{3}{11}$ ✓

سراسری ۹۶ خ تجربی H.W با کدام احتمال فقط دو مهره همرنگ می‌باشند؟ (جواب: $\frac{29}{44}$)

سراسری H.W سه نفر اسامی خود را روی سه کارت می‌نویسند و کارت‌ها را درون کیسه‌ای می‌اندازند. سپس هر کدام به ترتیب و به تصادف یک کارت بر می‌دارند. با کدام احتمال هیچ کدام اسم خود را بیرون نمی‌آورد؟ (جواب: $\frac{1}{3}$)

سراسری ۹۶ شش عدد توپ (یکسان)، تصادفی در ۳ جعبهٔ متمایز انداخته شده‌اند. با کدام احتمال هیچ جعبه‌ای بدون توپ نمی‌ماند؟

سراسری ۹۶ خ ۵ مهره یکسان به تصادف در ۳ جعبهٔ متمایز ریخته شده‌اند. با کدام احتمال لااقل در یکی از جعبه‌ها درست ۲ مهره جای گرفته است؟

x_1	x_2	x_3	
۲	۰	۳	
۲	۱	۲	●
۲	۲	۱	▲
۲	۳	۰	
۰	۲	۳	
۱	۲	۲	■
۲	۲	۱	▲
۳	۲	۰	
۰	۳	۲	
۱	۲	۲	■
۲	۱	۲	●
۳	۰	۲	

تست H.W ۵ توپ متمایز به تصادف درون سه جعبهٔ متمایز ریخته‌اند. با کدام احتمال هیچ جعبه‌ای بدون توپ نیست؟

(جواب: $\frac{50}{81}$)

سراسری ۹۷ ظرف A شامل ۵ مهره با شماره‌های یک رقمی فرد و ظرف B دارای ۴ مهره با شماره‌های یک رقمی زوج غیر صفر است. از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال حاصل‌ضرب آنها از ۱۰ بیشتر است؟

سراسری ۹۷ خ H.W ظرف A شامل ۸ مهره از اعداد ۱ تا ۸ و ظرف B شامل ۵ مهره از اعداد ۱ تا ۵ است. از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع آن‌ها از ۸ بیشتر است؟

(جواب: $\frac{3}{8}$)

سراسری ۱۴۰۰ خ روی هر کارت یکی از اعداد ۱ تا ۱۲ را نوشته و سپس در یک کیسه قرار می‌دهیم. به دلخواه یک کارت از کیسه بیرون می‌آوریم. اگر عدد زوج باشد، یک عدد دیگر از کیسه بیرون می‌آوریم و در سمت راست عدد اول قرار می‌دهیم. اگر عدد فرد باشد، یک تاس پرتاب کرده و عدد رو شده را در سمت راست عدد اول قرار می‌دهیم. پس از اعداد ساخته شده، در همهٔ حالت‌های ممکن، مجموعهٔ A را تشکیل می‌دهیم. یک عدد از مجموعهٔ A انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال، عدد انتخابی بر ۴ بخش‌پذیر است؟

۱) $\frac{9}{34}$ ۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{9}{40}$ ۴) $\frac{2}{9}$

سراسری ۱۴۰۰ هر یک از اعداد ۱ تا ۲۱ را روی یک کارت می‌نویسیم و در یک کیسه قرار می‌دهیم. سپس دو کارت به تصادف و به ترتیب از کیسه خارج کرده و کنار یکدیگر قرار می‌دهیم تا عددی جدید حاصل شود. اعداد تشکیل شده از همهٔ حالت‌های ممکن را در مجموعهٔ A قرار می‌دهیم. یک عدد از مجموعهٔ A انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عدد انتخابی بر ۶ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۸۴}$
۲) $\frac{۶۵}{۴۱۷}$
۳) $\frac{۱۱}{۷۰}$
۴) $\frac{۶۷}{۴۱۷}$

تجربی ۱۴۰۰

با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم که در هر عضو آن، رقم تکراری به کار نرفته است. یک عضو از مجموعهٔ فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عضو انتخاب شده بر ۴ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

تجربی ۱۴۰۰ خ

همان سؤال .... احتمال این که عضو انتخاب شده بر ۳ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

احتمال غیرهم شانس

⇦

مثال : در پرتاب یک سکهٔ ناسالم ، اگر احتمال آمدن "رو" نصف احتمال آمدن "پشت" باشد ، احتمال هر یک از حالت های "رو" و "پشت" را محاسبه کنید .

پرسش اگر $S=\{1,2,3,4\}$ و $p(1)=2p(2)=3p(3)=4p(4)$ ، آنگاه $p(1)$ ؟

مثال : سه نفر به نام های a ، b و c با هم مسابقه می دهند . شانس پیروزی a دو برابر b و شانس پیروزی c نصف b است . با کدام احتمال b یا c می برند ؟

حل

فرض مسئله $\begin{cases} p(a)=2p(b) \\ p(c)=\frac{1}{2}p(b) \end{cases} \xrightarrow{if\ p(b)=x} p(a)=2x \ , \ p(c)=\frac{x}{2}$

از طرفی $p(a)+p(b)+p(c)=1 \rightarrow 2x+x+\frac{x}{2}=1 \rightarrow x=\frac{2}{7}$

جواب $= p(b \overset{\text{یا}}{\cup} c) \overset{\text{اصل ۳}}{=} p(b)+p(c)=\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$ ✓

ناسازگار (فقط یکی برنده)

نتیجه یک تاس به گونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر وجه آن متناسب با عدد روی همان وجه است . در یک بار پرتاب این تاس احتمال آن که عددی زوج ظاهر شود کدام است ؟

پرسش یک تاس به گونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج ، ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است . در یک پرتاب ، احتمال وقوع عددی بزرگتر از ۳ کدام است ؟

حل می دانیم $\underbrace{p(1)}_{x}+\underbrace{p(2)}_{3x}+\underbrace{p(3)}_{x}+\underbrace{p(4)}_{3x}+\underbrace{p(5)}_{x}+\underbrace{p(6)}_{3x}=1 \rightarrow x=\frac{1}{12}$

جواب $= p(\text{تاس} > 3)=\underbrace{p(4)}_{3x}+\underbrace{p(5)}_{x}+\underbrace{p(6)}_{3x}=\frac{3}{12}+\frac{1}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$ ✓

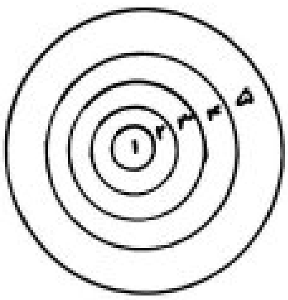
مثال در یک تجربهٔ تصادفی ، $S=\{x,y,z\}$ فضای نمونه است و $p(x)$ ، $p(y)$ و $p(z)$ یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل می دهند . مطلوب است $p(\{x,z\})$ ؟

ریاضی ۱۴۰۱ در یک تجربهٔ تصادفی، $S=\{x,y,z\}$ یک فضای نمونه است. اگر $p(x)$، $p(y)$ و $p(z)$ یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت کمتر از واحد تشکیل دهند و واسطهٔ هندسی آن $\frac{1}{5}$ باشد، کمترین مقدار احتمال یک پیشامد ساده در S، چقدر است؟

۱) $\frac{2-\sqrt{2}}{5}$ ۲) $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$

۳) $\frac{2-\sqrt{3}}{10}$ ۴) $\frac{2-\sqrt{2}}{10}$

مثال در پرتاب یک دارت به یک صفحهٔ دایره‌ای شکل، با پنج ناحیهٔ مجزا، اگر احتمال اصابت به ناحیهٔ اول برابر x و احتمال اصابت به ناحیهٔ k اُم برابر $x(2k-1)$ فرض شود، چقدر احتمال دارد دارت به ناحیه اول یا چهارم برخورد کند؟



مثال اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $p(\{b,c\})=2p(a)=\frac{3}{5}$ و $p(\{a,b\})=\frac{1}{3}$، آنگاه $p(\{b,d\})$ چقدر است؟

ریاضی ۱۴۰۱ خ مجموعهٔ $S=\{x,y,z,t,w\}$ فضای نمونهٔ یک آزمایش تصادفی و $A=\{x,y\}$، $B=\{x,y,z,t\}$ و $C=\{x,y,w\}$ سه پیشامد از S هستند. اگر $P(A)=\frac{1}{7}$ و $P(B)=\frac{3}{5}$ باشد، مقدار $p(C)$ کدام است؟

۱) $\frac{26}{35}$ ۲) $\frac{16}{35}$

۳) $\frac{19}{35}$ ۴) $\frac{11}{35}$

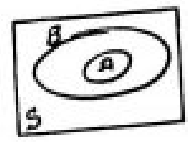
قضیه‌های احتمال

قضیه ۱: احتمال رخ دادن پیشامد نشدنی برابر صفر است. $P(\phi)=0$

نتیجه: $P(\underbrace{A\cap B}_{\phi})=0 \Longleftrightarrow$ A و B دو پیشامد ناسازگارند

قضیه ۲: برای دو پیشامد دلخواه A و B داریم

$$A\subseteq B \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} P(A)\le P(B)$$



نتیجه ۱: اگر A پیشامدی دلخواه از فضای نمونه S باشد، آنگاه $0\le P(A)\le 1$

زیرا $\xrightarrow{\text{تعریف پیشامد}} A\subseteq S \xrightarrow{\text{ق۲}} P(A)\le \underbrace{P(S)}_{1}$

یعنی احتمال متعلق به بازه حقیقی $[0,1]$ است

نتیجه ۲: اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشند، آنگاه

الف) $P(A)\le P(A\cup B)$ ، $P(B)\le P(A\cup B)$

زیرا $A\subseteq(A\cup B)$

ب) $P(A\cap B)\le P(A)$ ، $P(A\cap B)\le P(B)$

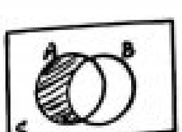
زیرا $(A\cap B)\subseteq A$

پ) $P(A-B)\le P(A)$ ، $P(B-A)\le P(B)$

زیرا $(A-B)\subseteq A$

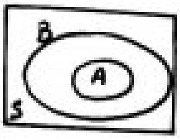
ت) $P(A\cap B)\le P(A\cup B)$

قضیه ۳: (قضیه تفاضل) اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشند، آنگاه



$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

به همین ترتیب $\leftarrow P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$



نتیجه ۱ : {

نتیجه ۲ محاسبه احتمال رخ دادن فقط یکی از دو پیشامد A و B

قضیه ۴ (قضیه اجتماع در حالت کلی) اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشند، آنگاه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

و برای سه پیشامد داریم

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C) &= P(A)+P(B)+P(C)\\ &\quad -P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)\\ &\quad +P(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

نتیجه: اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشند، آنگاه

$$P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)$$

و برای n پیشامد دلخواه A_1، A_2، ....، A_n داریم

$$P(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)\leq P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)$$

قضیه ۵ (قضیه متمم) اگر A پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشد، آنگاه

$$P(A')=\underbrace{1}_{P(S)}-P(A)$$

سراسری ۹۵: کیسه‌ای شامل ۳ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره‌ی سبز است. ۳ مهره به تصادف و هم‌زمان از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال حداکثر ۲ مهره از مهره‌های خارج شده هم‌رنگ است؟

حل:

کل مهره‌ها $= 12 \longrightarrow |S| = \binom{12}{3} = 220$

$$P(\text{حداکثر ۲ مهره هم‌رنگ}) \overset{\text{متمم}}{=} 1 - P(\text{هر سه مهره هم‌رنگ}) = 1 - \frac{\overbrace{\binom{4}{3} + \binom{3}{3} + \binom{5}{3}}^{\text{هر سه سبز یا هر سه سیاه یا هر سه سفید}}}{220} = \frac{41}{44}$$

سراسری: برای انجام مسابقه‌ای ۴ نفر از گروه ریاضی و ۶ نفر از گروه تجربی داوطلب شده‌اند. اگر به طور تصادف ۴ نفر از بین آنان انتخاب شوند، با کدام احتمال تعداد افراد انتخابی در این دو گروه متفاوت است؟

سراسری: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونه S باشند، کدام رابطه بین احتمال پیشامدها درست است؟

۱) $P(A)+P(B)+P(A'\cup B')=1$

۲) $P(A)\cdot P(B)+P(A'\cup B')=1$

۳) $P(A)+P(B)+P(A'\cap B')=1$

۴) $P(A)\cdot P(B)+P(A'\cap B')=1$

حل:

A و B ناسازگارند $\xrightarrow{\text{اصل ۳}} P(A\cup B) = P(A)+P(B)$

$\xrightarrow{\text{متمم}} 1 - P((A\cup B)') = P(A)+P(B)$

$\xrightarrow{\text{دمورگان}} 1 - P(A'\cap B') = P(A)+P(B) \longrightarrow$ گزینه ۳

تست: در پرتاب دو تاس سالم باهم، چقدر احتمال دارد مجموع دو تاس بزرگتر از ۴ و غیر مساوی باشند؟

سراسری: شش مهره با شماره‌های ۶، ...، ۲، ۱ در ظرفی قرار دارد. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم و بدون جایگذاری دو مهره‌ی دیگر خارج می‌کنیم. احتمال خارج شدن شماره‌ی ۳ کدام است؟

سراسری خارج ۹۹ تجربی — ۱۰ نفر در یک صف ایستاده اند. با کدام احتمال دو نفر مورد نظر از آن ها، درکنار هم نیستند؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{9}{10}$

سراسری — احتمال قبولی در درس فیزیک ۵۵٪ و احتمال قبولی در درس شیمی ۰/۶ است. اگر احتمال قبولی درحداقل یکی از دو درس ۷۵٪ باشد، احتمال قبولی در هر دو درس چقدر است؟

حل: P(قبولی در شیمی ∪ قبولی در فیزیک) = P(قبولی در فیزیک) + P(قبولی در شیمی) − P(قبولی در شیمی ∩ قبولی در فیزیک)

$0/75 = 0/55 + 0/6 - x \rightarrow x = 0/4$

سراسری — کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر می‌باشند. کارمندی به تصادف انتخاب می‌شود. احتمال این که مرد یا لیسانس باشد چقدر است؟

	دیپلم	لیسانس
زن	۱۵	۵
مرد	۱۰	۲۰

کل کارمندان = ۵۰ → $|S| = \binom{50}{1} = 50$

P(مرد ∪ لیسانس) = P(مرد) + P(لیسانس) − P(مرد ∩ لیسانس)

=

لااقل بر یکی از اعداد ۴ یا ۹ بخش‌پذیر

سراسری (خارج ۹۵ و ۹۹) — از مجموعه اعداد $\{100, 101, 102, \ldots, 600\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌شود. با کدام احتمال این عدد مضرب ۴ یا مضرب ۹ است؟

M_4 ، M_9

تعداد اعضای مجموعه = $600 - 99 = 501 \rightarrow |S| = \binom{501}{1} = 501$

تعداد مضارب ۴ = $\left[\frac{600}{4}\right] - \left[\frac{99}{4}\right] = 126$

۹ " " = $\left[\frac{600}{9}\right] - \left[\frac{99}{9}\right] = 55$

۴، ۹ " " = $\left[\frac{600}{4\times 9}\right] - \left[\frac{99}{4\times 9}\right] = 14$

◀ با کدام احتمال مضرب ۴ است و مضرب ۹ نیست؟

◀ با کدام احتمال نه مضرب ۴ و نه مضرب ۹ است؟

◀ با کدام احتمال مضرب ۴ است ولی به ۹ بخش پذیر نیست یا مضرب ۴ نیست ولی به ۹ بخش پذیر است؟

بیان دیگر: (فقط مضرب یکی از اعداد ۴ یا ۹ است) یا (مضرب ۴ یا ۹ است ولی مضرب ۳۶ نیست)

تست: اگر $P(A-B)=\frac{2}{17}$ و $P(B-A)=\frac{10}{17}$ و $P(B)=3P(A)$، آنگاه $P(A\cup B)$ کدام است؟

حل:

$$\begin{cases} P(A-B)=\frac{2}{17} \rightarrow P(A)-P(A\cap B)=\frac{2}{17} \\ P(B-A)=\frac{10}{17} \rightarrow \underbrace{P(B)}_{3P(A)}-P(A\cap B)=\frac{10}{17} \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2P(A)=\frac{8}{17} \rightarrow P(A)=\frac{4}{17}$$

$$\text{جواب} = P(A\cup B) = \underbrace{P(A)}_{\frac{4}{17}} + \underbrace{P(B)-P(A\cap B)}_{\frac{10}{17}} = \frac{14}{17} \checkmark$$

تست: اگر $P(A)+P(B)=1/8$، حداکثر $P(A'\cap B')$ کدام است؟

سراسری خارج ۱۴۰۰: در یک هتل ۷۲ مسافر وجود دارد که ۲۲ نفر آنان تاجرند و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. اگر ۸ نفر از تاجرین برای اولین بار سفر کرده باشند، با کدام احتمال فرد انتخابی از بین مسافرین این هتل، نه تاجر است و نه برای اولین بار سفر کرده است؟

(جواب: $\frac{5}{8}$)

سراسری ۹۲: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(A)=0/6$، $P(B)=0/7$ و $P(A\cap B')=0/2$ باشد، آنگاه $P(A'\cap B)$ کدام است؟

سراسری خارج ۹۵: در کیسه‌ای که محتوی آن ۵ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و ۳ مهره‌ی قرمز است، به تصادف ۳ مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال بین مهره‌های خارج شده، مهره‌ی سفید نیست یا مهره‌ی سیاه نیست؟

احتمال شرطی (کاهش فضای نمونه)

در برخی مسایل اعلام می‌شود پیشامدی مانند B رخ داده است ($B\neq\phi$) و از ما می‌خواهند احتمال رخ دادن پیشامد دیگری مانند A را با توجه به این که B رخ داده است، محاسبه کنیم (احتمال رخ دادن A به تنهایی مورد نظر نیست) که در این صورت می‌گوییم "احتمال رخ دادن A به شرط رخ داد B" و می‌نویسیم $P(A|B)$.

به شرط

مثال: در پرتاب یک تاس سالم،

الف) احتمال اینکه عددی زوج ظاهر شود چقدر است؟

ب) اگر بدانیم تاس عددی بزرگتر از ۳ آمده است، با کدام احتمال عدد زوج ظاهر می‌شود؟

نتیجه:

پرسش: یک تاس همگن را انداختیم. برآمد حاصل مضرب ۳ نیست. احتمال آن که شماره‌ی ظاهر شده ۲ باشد کدام است؟

مثال: جعبه‌ای شامل ۵ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی سیاه و ۳ مهره‌ی قرمز است. مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم. اگر سیاه نباشد، با کدام احتمال قرمز است؟

مثال: جعبه‌ای شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه است. به طور متوالی و بدون جای‌گذاری، دو مهره به تصادف بیرون می‌آوریم. اگر اولین مهره سفید باشد، با کدام احتمال دومین مهره نیز سفید است؟

مثال: در پرتاب دو تاس سالم، اگر تاس اول بزرگتر از ۴ آمده باشد، با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده ۸ است؟

تست در پرتاب دو تاس سالم باهم اگر حداقل یکی از تاس‌ها ۵ باشد، با کدام احتمال دو تاس دو عدد متوالی را نشان می‌دهند؟

تست در پرتاب دو تاس سالم باهم هر دو تاس کوچکتر از ۵ ظاهر شده است. احتمال آن که مجموع دو تاس برابر ۴ باشد، کدام است؟

حل

$S_{\text{جدید}} : \left(\overset{\text{تاس ۱}}{\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}} , \overset{\text{تاس ۲}}{\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}} \right)$

$4 \text{ حالت} \times 4 \text{ حالت} = \underset{\text{حالت ممکن}}{16}$

حالات مطلوب $\rightarrow \{(1,3),(2,2),(3,1)\} \rightarrow$ احتمال $= \frac{3}{16}$ ✓

تست H.W در پرتاب ۴ تاس سالم باهم، اگر چهار عدد متوالی ظاهر شده باشد، با کدام احتمال یکی از تاس‌ها ۲ است؟

(جواب: $\frac{2}{3}$)

سراسری ۹۱ دو تاس همگن را انداخته‌ایم. اگر حاصل جمع شماره‌های رو شده کمتر از ۶ باشد، احتمال آن که شماره‌ی یکی از تاس‌ها رو شده ۲ باشد کدام است؟

تست یک تاس سالم را سه بار متوالی پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع سه عدد ظاهر شده ۱۵ باشد، با کدام احتمال هر سه عدد مساوی‌اند؟

تست در پرتاب دو تاس قرمز و آبی، عدد تاس قرمز بزرگتر از آبی ظاهر شده، احتمال آن که مجموع دو تاس ۶ باشد کدام است؟

حل

کل حالات پرتاب دو تاس $= 6^2 = 36 \xrightarrow{\text{۶ حالت دو تاس مساوی‌اند}}$ ۳۰ حالت نامساوی‌اند
- قرمز < آبی : ۱۵ حالت
- آبی < قرمز : ۱۵ حالت (فضای نمونه‌ای جدید)

حالات مطلوب $= \{ \overset{\text{قرمز، آبی}}{(5,1)} , \overset{\text{قرمز، آبی}}{(4,2)} \} \rightarrow$ احتمال $= \frac{2}{15}$ ✓

سراسری تجربی H.W خانواده‌ای دارای چهار فرزند است. اگر بدانیم دو فرزند اول آن‌ها پسر است، احتمال آن که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشد، کدام است؟

(جواب: $\frac{1}{4}$)

سراسری در پرتاب دو تاس سالم با هم، می‌دانیم جمع دو عدد رو شده کمتر از ۱۰ است. با کدام احتمال هر دو عدد فردند؟

سراسری خارج ۱۴۰۳ در پرتاب دو تاس سالم با هم، می‌دانیم جمع دو عدد رو شده بزرگتر از ۵ است. با کدام احتمال هر دو عدد مساوی‌اند؟

(جواب: $\frac{4}{13}$)

سراسری ۹۲ پنج مهره سفید با شماره‌های ۱ تا ۵ و پنج مهره سیاه با شماره‌های ۱ تا ۵ و یکسان در ظرفی قرار می‌دهیم. به تصادف دو مهره از بین آنها بیرون می‌آوریم. اگر مجموع شماره‌های هر دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال هر دو هم‌رنگ‌اند؟

سراسری ۱۴۰۳ دو کارت به تصادف از بین ۹ کارت یکسان به شماره‌های ۱ تا ۹ برمی‌داریم. اگر مجموع اعداد روی این دو کارت زوج باشد، با کدام احتمال هر دو عدد فردند؟

(جواب: $\frac{5}{8}$)

سراسری ۹۹ تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این که لااقل یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد کدام است؟

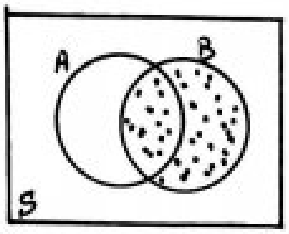
۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{3}{4}$

سراسری ۹۹ خارج احتمال این که لااقل یکی از تاس‌های رو شده ۳ باشد کدام است؟

(جواب: $\frac{23}{54}$)

فرمول احتمال شرطی ←



$P(A|B) = ?$

رخ داده است $(B \neq \phi)$

سراسری ۹۶ یک فضای نمونه متشکل از ۵ برآمد a, b, c, d, e است. اگر $p(a) = \frac{1}{4}$ و $p(\{a, b, c\}) = \frac{2}{3}$ باشد، آن‌گاه $p(\{b, c, e\} | \{a, b, c\})$ کدام است؟

سراسری ۹۸ تجربی احتمال موفقیت فردی در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال لااقل در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

سراسری ۹۹ A و B دو پیشامد از یک فضای نمونهٔ S هستند. اگر $P(A) = 0/4$، $P(B|A) = 0/25$ و $P(B) = 0/3$ باشد، آن‌گاه $P(B|A')$ کدام است؟

سراسری ۹۸ خ / H.W امیر و بهروز هر کدام به ترتیب با احتمال ۰/۶ و ۰/۳ در یک مسابقهٔ علمی شرکت می‌کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز برابر ۰/۵ است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز کدام است؟

(جواب: $\frac{9}{14}$)

سراسری ۹۳ / H.W اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند به طوری که $P(A) = 0/2$، $P(B) = 0/22$، $P(B|A) = 0/7$ آن‌گاه $P(B'|A')$ کدام است؟

(جواب: ۰/۹)

سراسری ۱۴۰۱ خ: فرض کنید علی و حسن دو کماندار باشند که با احتمال‌های ۰/۶ و ۰/۴ به هدف می‌زنند. اگر هر کدام یک بار تیراندازی کنند و بدانیم حداقل یک تیر به هدف اصابت کرده است، با کدام احتمال علی به هدف زده است؟

۱) $\frac{15}{19}$ ۲) $\frac{5}{6}$

۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{17}{25}$

چند تذکر مهم

تذکر ۱: اختیاری: هر احتمالی، یک احتمال شرطی محسوب می‌شود. به عبارت دیگر

$P(A) = P(A|S)$

[illegible]

تذکر ۲: $P(A|B) = P(B|A) = 0 \iff$ A و B دو پیشامد ناسازگارند.

تذکر ۳: اختیاری: فرمول احتمال شرطی در اصول احتمال صدق می‌کند. به عبارت دیگر

اصل ۱ $P(S|C) = 1$ $C \neq \varnothing$

اصل ۲ A و B ناسازگارند $\iff P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$

تذکر ۴: اختیاری: فرمول احتمال شرطی در قضیه‌های احتمال صدق می‌کند. به عبارت دیگر

الف) $P(\varnothing|C) = 0$

ب) $A \subseteq B \Rightarrow P(A|C) \leq P(B|C)$

پ) $P(A - B|C) = P(A|C) - P(A \cap B|C)$

ت) $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$

ث) $P(A'|C) = 1 - P(A|C)$

بر درختی می‌شمریم سیب‌های بسیار

در میان هر سیب دانه‌ها محدود است

در دل هر دانه سیب‌ها نامحدود

چیستانی عجیب دانه با شمیم سیب!

قضیهٔ ضرب احتمال‌ها (محاسبه احتمال رخ داد توأم دو پیشامد)

اگر A و B دو پیشامد (ناتهی) با احتمال‌های مثبت از فضای نمونه‌ی S باشند، آنگاه:

اثبات:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(B).P(A|B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A).P(B|A)$$

مثال: برحسب تجربه‌ی گذشته می‌دانیم احتمال اینکه رتبه‌ی اول سال آخر رشته‌ی ریاضی دبیرستانی در کنکور قبول شود ۹۵٪ است. با توجه به سوابق تحصیلی یک دانش‌آموز، احتمال اینکه او در سال آخر رشته‌ی ریاضی دبیرستان رتبه‌ی اول شود ۰/۹ است. احتمال اینکه این دانش‌آموز هم رتبه‌ی اول شود و هم در کنکور قبول شود چه قدر است؟

مثال: احتمال زنده ماندن در یک عمل پیوند عضو برابر ۰/۵ است. اگر بیماری پس از عمل زنده باشد، احتمال اینکه بدن او در طول یک ماه پیوند را قبول نکند و بمیرد ۰/۲ است. احتمال زنده ماندن یک بیمار پیوندی پس از این دو مرحله چه قدر است؟

حل:

$$P(\text{زنده ماندن در عمل} \cap \text{زنده ماندن پس از یک ماه}) = P(\text{زنده ماندن در عمل}).P(\text{زنده ماندن پس از یک ماه} \mid \text{زنده ماندن در عمل}) = ۰/۵ \times (۱ - ۰/۲) = ۰/۴$$

سراسری: در پرتاب یک تاس سالم اگر عددی بزرگتر از ۳ بیاید، مجاز به پرتاب تاس دوم هستیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده کمتر از ۸ است؟

حل:

$$P(\text{تاس اول} > ۳ \cap \text{مجموع دو تاس} < ۸) = P(\text{تاس اول} > ۳).P(\text{مجموع دو تاس} < ۸ \mid \text{تاس اول} > ۳)$$

$$= \frac{۳}{۶} \times \frac{۶}{۱۸}$$

$$= \frac{۱}{۶}$$

تاس اول $\{۴,۵,۶\}$ ، تاس دوم ?

۳ حالت × ۶ حالت = ۱۸ حالت ممکن

مطلوب: $(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۵,۱),(۵,۲),(۶,۱)$ حالت مطلوب

مثال: امیر و بابک عضو تیم ۱۴ نفره والیبال اند و قد هیچ دو نفری در تیم برابر نیست. اگر امیر از بابک بلندتر باشد، با کدام احتمال

الف) امیر بلندقدترین عضو تیم است؟

حل:

$$P(\text{امیر بلندقدترین است} \mid \text{امیر از بابک بلندتر است}) = \frac{P(\text{امیر از بابک بلندتر است} \cap \text{امیر بلندقدترین است})}{P(\text{امیر از بابک بلندتر است})}$$

$$= \frac{P(\text{امیر بلندقدترین است}).P(\text{امیر از بابک بلندتر است} \mid \text{امیر بلندقدترین است})}{\frac{۱}{۲}} = \frac{\frac{۱}{۱۴} \times ۱}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۷}$$

ب) امیر از نظر بلندی قد نفر یازدهم تیم است؟

$$P(\text{امیر از نظر قد نفر یازدهم است} \mid \text{امیر از بابک بلندتر است}) = \frac{P(\text{امیر از بابک بلندتر است} \cap \text{امیر از نظر قد نفر یازدهم است})}{P(\text{امیر از بابک بلندتر است})}$$

$$= \frac{P(\text{امیر از نظر قد نفر یازدهم است}) \cdot P(\text{امیر از بابک بلندتر است} \mid \text{امیر از نظر قد نفر یازدهم است})}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{14} \times \text{—}}{\frac{1}{2}}$$

سراسری ۱۴۰۱ در یک کیسه ۱۶ گوی به شماره‌های ۱ تا ۱۶ وجود دارد. دو گوی به طور متوالی و بدون جای‌گذاری به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم شمارهٔ گوی دوم از شمارهٔ گوی اول کمتر است. با کدام احتمال شمارهٔ گوی اول ۱۶ است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{12}$

۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{4}$

قضیهٔ ضرب احتمال‌ها برای سه پیشامد

$$\boxed{P(A\cap B\cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A\cap B)}$$

رخ دادن توأم سه پیشامد — اول رخ بدهد — دومی رخ بدهد به شرط رخ داد اولی — سومی رخ بدهد به شرط رخ داد اولی و دومی

مثال جعبه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. سه مهره به طور متوالی و بدون جای‌گذاری به تصادف خارج می‌کنیم با کدام احتمال

۴ سفید
۶ سیاه

الف) هر سه مهره سفیداند؟

$$\text{جواب} = P(\text{اولی سفید} \cap \text{دومی سفید} \cap \text{سومی سفید}) = P(\text{اولی سفید}) \cdot P(\text{دومی سفید} \mid \text{اولی سفید}) \cdot P(\text{سومی سفید} \mid \text{اولی و دومی سفید})$$

$$= \text{—} \times \text{—} \times \text{—} =$$

ب) سه مهره به طوری که در میان رنگ متفاوت دارند؟
H.W

مثال یک بازیکن بسکتبال اگر روحیهٔ خوبی داشته باشد، با احتمال ۹۰ درصد و اگر روحیهٔ خوبی نداشته باشد، با احتمال ۶۰ درصد پرتاب خود را وارد سبد می‌کند. هر پرتابی را که وارد سبد کند، برای پرتاب بعدی روحیهٔ خوبی دارد، در غیر این صورت روحیهٔ خوبی ندارد. فرض کنید در ابتدای بازی روحیهٔ خوبی دارد. احتمال این که از سه پرتاب متوالی دقیقاً دو پرتاب آخر را وارد سبد کند چقدر است؟

احتمال کل

در برخی مسایل محاسبه‌ی احتمال مطلوب به تنهایی ممکن نیست و به آنچه که در مراحل قبل رخ داده است بستگی دارد. در این نوع مسایل فضای نمونه به پیشامدهایی افراز شده است که احتمال مطلوب را باید در هر یک از این افرازها به طور جداگانه محاسبه نمود و با هم جمع کرد. عدد حاصل احتمال کل نامیده می‌شود.

تمرین: دو ظرف هستند، اولی دارای ۶ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و دومی دارای ۶ مهره‌ی سفید و ۸ مهره‌ی سیاه است. با چشم بسته یکی از این دو ظرف را اختیار کرده و مهره‌ای از آن بیرون می‌آوریم. احتمال این که مهره سفید باشد کدام است؟

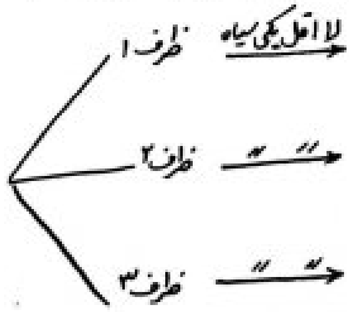
ظرف ۱: ۶ سفید، ۴ سیاه

ظرف ۲: ۶ سفید، ۸ سیاه

مثال: دو ظرف با محتویات زیر موجود است. یک تاس سالم را می‌اندازیم. اگر ۱ یا ۲ بیاید ظرف اول و در غیر این صورت ظرف دوم را انتخاب می‌کنیم و سپس مهره‌ای از ظرف انتخابی خارج می‌کنیم. احتمال سفید بودن این مهره کدام است؟

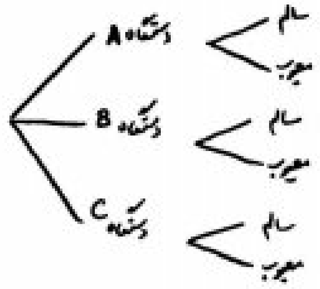
	سفید	سیاه
ظرف ۱	۳	۴
ظرف ۲	۵	۲

سراسری ۹۹: سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهره‌ی سفید، در دومی ۹ مهره‌ی سیاه و در سومی ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه قرار دارند. به تصادف از یک ظرف، ۲ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟

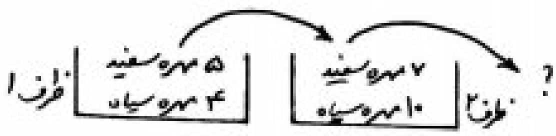


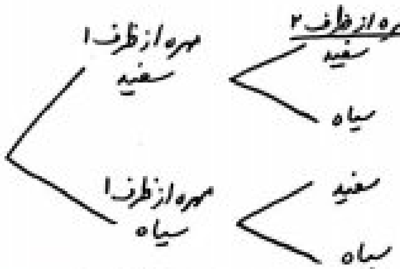
سراسری ۹۲ خ تجربی: در جعبه‌ی اول ۳ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه، و در جعبه‌ی دوم ۳ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟

سراسری خ: در کارخانه‌ای سه دستگاه A، B و C به ترتیب ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد محصولات را تولید می‌کنند و می‌دانیم محصولات این سه دستگاه به ترتیب ۱۰، ۱۰ و ۲۰ درصد معیوب‌اند. محصولی که به تصادف از این کارخانه انتخاب می‌شود، با کدام احتمال سالم است؟

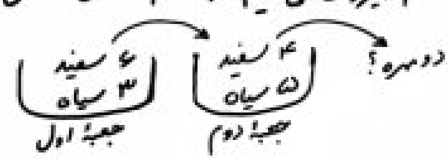


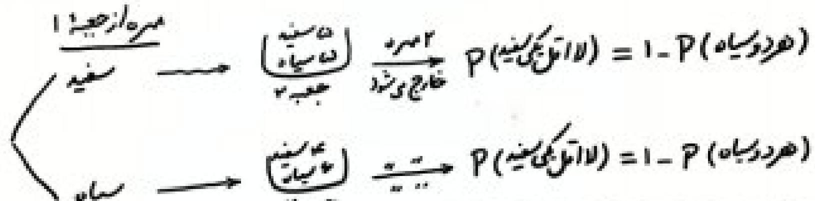
سراسری: دو ظرف داریم. در اولی ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه و در دومی ۷ مهرهٔ سفید و ۱۰ مهرهٔ سیاه است. از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف دوم قرار می‌دهیم. آنگاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟



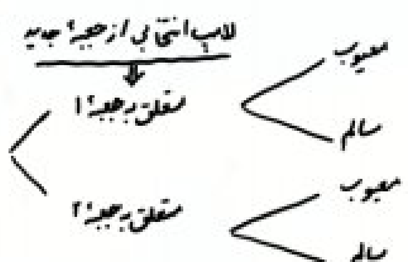


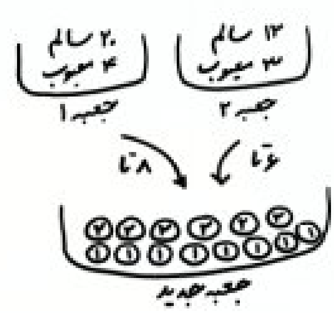
سراسری خ ۹۹: در جعبهٔ اول ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبهٔ دوم ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارد. از جعبهٔ اول یک مهره به دلخواه خارج می‌کنیم و در جعبهٔ دوم می‌اندازیم. پس دو مهره از جعبهٔ دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سفید است؟



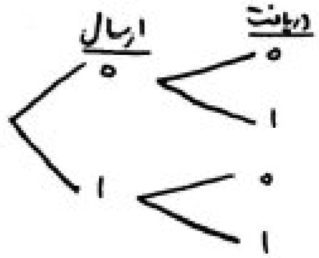


سراسری ۸۹ و ۹۸: در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لامپ یکسان موجود است. در جعبهٔ اول ۴ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب‌اند. از اولی ۸ و از دومی ۶ لامپ به تصادف برداشته و در جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید معیوب است؟

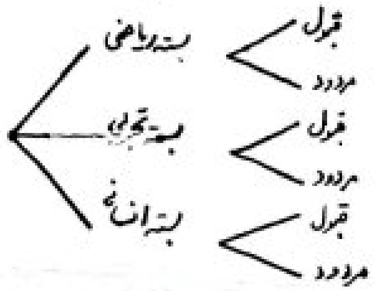




مثال در یک دستگاه مخابره کننده فقط ۰ و ۱ با احتمال‌های به ترتیب ۷۰٪ و ۳۰٪ ارسال می‌شوند. چون خطا وجود دارد، احتمال آن که صفر ارسال شده همان صفر دریافت گردد برابر ۰/۹ و احتمال آن که یک ارسال شده همان یک دریافت گردد برابر ۰/۸ است. با کدام احتمال در گیرنده صفر دریافت می‌شود؟



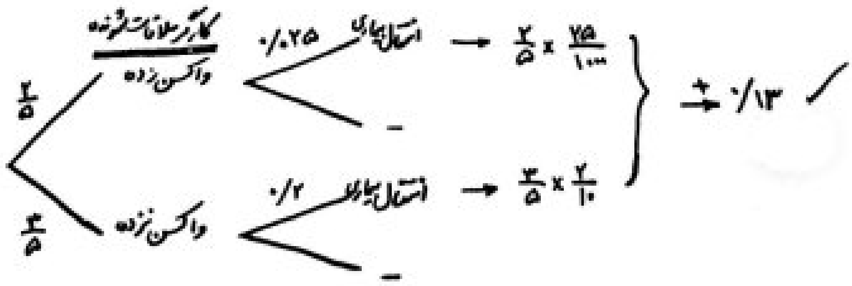
سراسری ۹۸ خ تجربی — بهروز جهت شرکت در یک مسابقه، از بین پرسش‌های ۵ بستهٔ ریاضی، ۷ بستهٔ تجربی و ۶ بستهٔ علوم انسانی، به تصادف یک بسته اختیار کرده است. احتمال برنده شدن در هر بستهٔ این دروس به ترتیب ۰/۷، ۰/۸ و ۰/۹ است. با کدام احتمال بهروز برنده می‌شود؟



سراسری ۹۳ تجربی ۱۴۰۰ — ظرف A دارای ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده سفید است؟

(جواب: $\frac{۲۵}{۶۳}$)

سراسری تجربی — احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. $\frac{۲}{۵}$ کارگران یک کارگاه، واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟

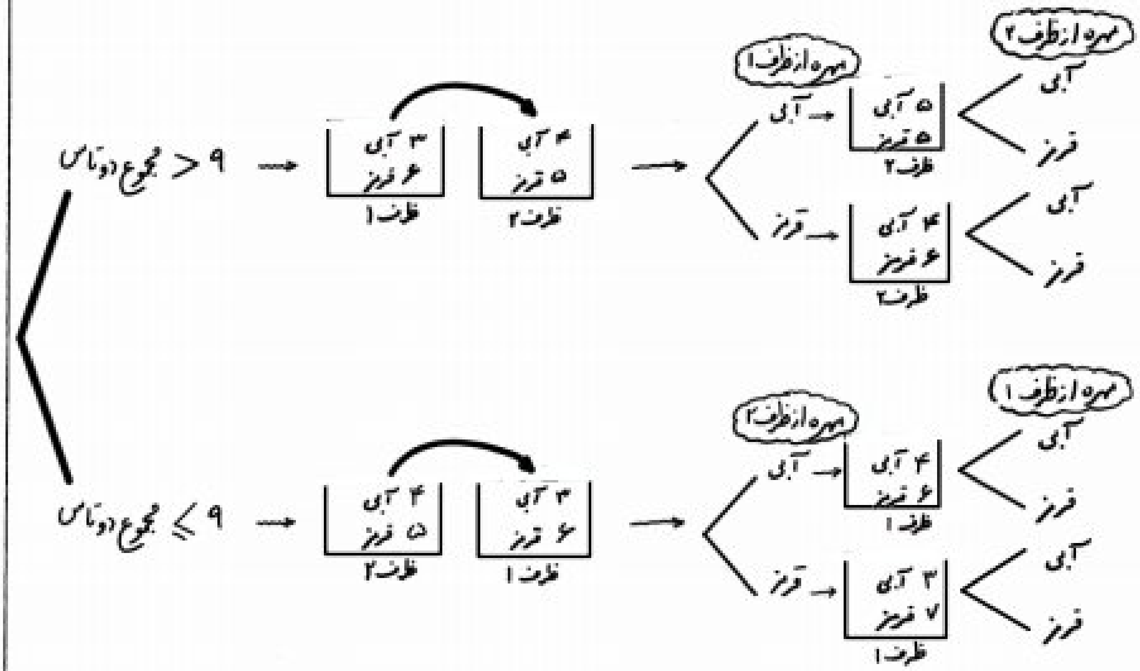


سراسری ۹۰ تجربی خ ۱۴۰۲ — در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آنها دفترچه سلامت دارد؟ (جواب ۰/۶۶۹)

سراسری ۱۴۰۰ در ظرف اول ۳ مهره آبی و ۶ مهره قرمز و در ظرف دوم ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز قرار دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده از ۹ بیشتر باشد، به تصادف از ظرف اول یک مهره خارج کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهره‌ی بیشتر انتخاب می‌کنیم. احتمال این که مهره قرمز باشد، کدام است؟

۱) $\frac{157}{270}$ ۲) $\frac{165}{270}$

۳) $\frac{173}{270}$ ۴) $\frac{180}{270}$



سراسری ۱۴۰۰ خ
H.W

در ظرف اول ۳ مهره آبی و ۶ مهره قرمز و در ظرف دوم ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز قرار دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده ۷ یا ۱۰ باشد، به تصادف یک مهره از ظرف اول خارج کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهره بیشتر انتخاب می‌کنیم. احتمال این که این مهره آبی باشد کدام است؟

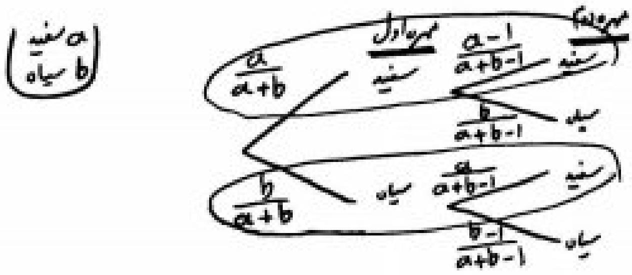
(گزینه ۲)

۱) $\frac{7}{18}$ ۲) $\frac{11}{30}$

۳) $\frac{19}{30}$ ۴) $\frac{11}{18}$

مسأله پولیا

کیسه‌ای شامل a مهرهٔ سفید و b مهرهٔ سیاه است. مهره‌ای به تصادف از کیسه بیرون می‌آوریم و بدون مشاهدهٔ رنگ آن کنار می‌گذاریم. سپس مهرهٔ دیگری از کیسه بیرون می‌آوریم. احتمال سفید بودن مهرهٔ دوم چقدر است؟



$$P(\text{دومی سفید}) = \frac{a}{a+b}\times\frac{a-1}{a+b-1} + \frac{b}{a+b}\times\frac{a}{a+b-1} = \frac{a(a-1)+ab}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{a(a-1+b)}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{a}{a+b}$$

$= P(\text{اولی سفید})$ ؟!

نتیجه:

سراسری ۶۲ و ۹۳ خ، ۹۶ خ — کیسه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. سه مهره به تصادف و همزمان از کیسه، بدون رؤیت خارج شده است. از چهار مهره باقی‌مانده، یک مهره خارج می‌کنیم. احتمال سفید بودن مهرهٔ آخری چقدر است؟

سراسری ۹۳ تجربی — در جعبه‌ای ۶ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سیاه وجود دارد. دو مهره متوالیاً و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهرهٔ خارج شده سفید است؟

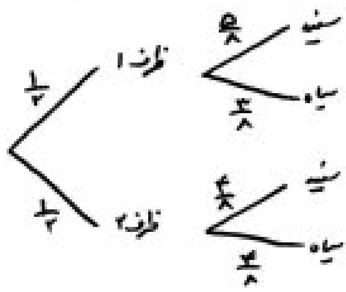
سراسری ۹۹ تجربی — در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است، ابتدا یک مهره را بدون رؤیت خارج می‌کنیم. پس از بین بقیهٔ مهره‌ها، ۲ مهره برمی‌داریم. با کدام احتمال هر دو مهرهٔ اخیر سفید است؟

تمرین ۴-۷ — کیسه‌ای شامل a مهرهٔ سفید و b مهرهٔ سیاه است. مهره‌ای به تصادف از کیسه خارج می‌نماییم و به جای آن، n مهره همرنگ با آن در کیسه قرار می‌دهیم. پس مهره‌ای از کیسه به طور تصادفی بیرون می‌آوریم. احتمال سفید بودن این مهره چقدر است؟ (جواب: $\frac{a}{a+b}$)

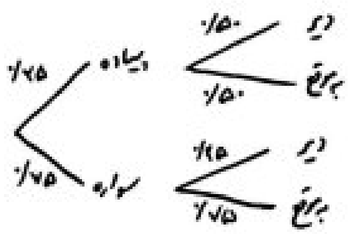
قاعدهٔ بیز

در برخی مسایل همانند مسایل احتمال کل، فضای نمونه به پیشامدهای افراز شده است، ولی نتیجهٔ آزمایش مشخص می‌باشد و با توجه به اینکه نتیجهٔ آزمایش مشخص می‌باشد، احتمال رخ داد یکی از افرازها مورد نظر است. یعنی مطلوب مسئله یک احتمال شرطی است. که برای یافتن آن نمودار درختی مسئله را رسم می‌کنیم. با توجه به شرط داده شده (نتیجهٔ آزمایش که مشخص است)، حالت‌های ممکن را روی نمودار درختی مشخص می‌کنیم و سپس به محاسبهٔ احتمال مطلوب می‌پردازیم. این روش قاعدهٔ بیز نامیده می‌شود.

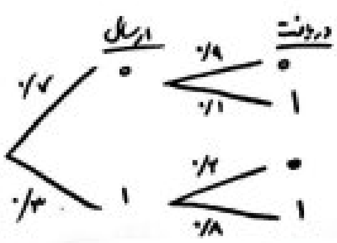
مثال : دو ظرف مشابه داریم. اولی شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و دومی شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه است. با چشم بسته از یکی از ظرف‌ها مهره‌ای خارج می‌کنیم. اگر این مهره سفید باشد، با کدام احتمال از ظرف اول خارج شده است؟



تمرین ۹۰-۹۳ : دانش‌آموزی در ۲۵ درصد موارد پیاده و در ۷۵ درصد موارد سواره به مدرسه می‌رود. اگر پیاده برود در ۵۰ درصد مواقع و اگر سواره برود در ۲۵ درصد مواقع دیر می‌رسد. اگر روزی دیر رسیده باشد، با کدام احتمال پیاده رفته است؟ (جواب : ۰/۴)

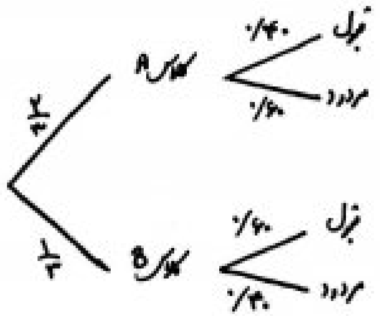


مثال : در یک دستگاه مخابره کنندهٔ فقط ۰ و ۱ با احتمال‌های به ترتیب ۰/۷ و ۰/۳ ارسال می‌شوند. چون خطا وجود دارد، احتمال آن که صفر ارسال شده همان صفر دریافت گردد برابر ۰/۹ و احتمال آن که یک ارسال شده همان یک دریافت گردد برابر ۰/۸ است. اگر در گیرنده صفر دریافت کرده باشیم، با کدام احتمال صفر نیز ارسال شده است؟



سراسری ریاضی: در یک آزمون از دو کلاس A و B ، ۴۰ درصد دانش آموزان کلاس A و ۶۰ درصد دانش آموزان کلاس B قبول شده‌اند. اگر تعداد دانش آموزان کلاس A دو برابر کلاس B باشد و فردی به تصادف از بین قبول شدگان امتحان انتخاب شود، تقریباً با کدام احتمال، این فرد از کلاس A است؟

۱) ۴۳٪ ۲) ۵۷٪
۳) ۶۱٪ ۴) ۶۳٪

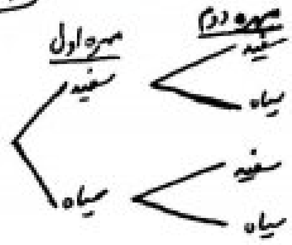


مثال: کیسه‌ای شامل ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. دو مهره پی در پی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم.

۶ سفید
۴ سیاه

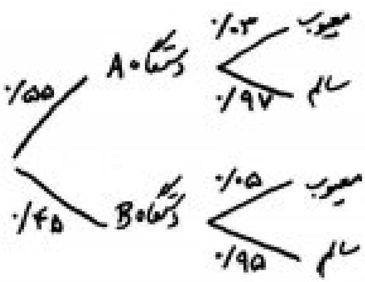
مهم

الف) با کدام احتمال مهره دوم سفید است؟ (سراسری ۹۹)



ب) اگر مهره دوم سفید باشد، با کدام احتمال مهره اول نیز سفید است؟

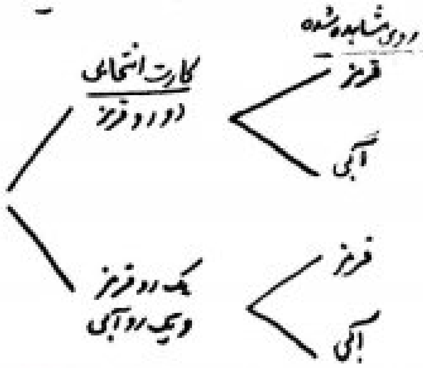
سراسری ۹۴ خ: در یک شرکت تولیدی، ۵۵ درصد کالا محصول دستگاه A با احتمال ۳ درصد معیوب و ۴۵ درصد آن محصول دستگاه B با احتمال ۵ درصد معیوب است. اگر یک کالا را به طور تصادفی انتخاب کنیم و بدانیم که معیوب است، با کدام احتمال این کالا محصول دستگاه A است؟



$$P(A \mid \text{معیوب}) = \frac{0/55 \times 0/03}{0/55 \times 0/03 + 0/45 \times 0/05}$$

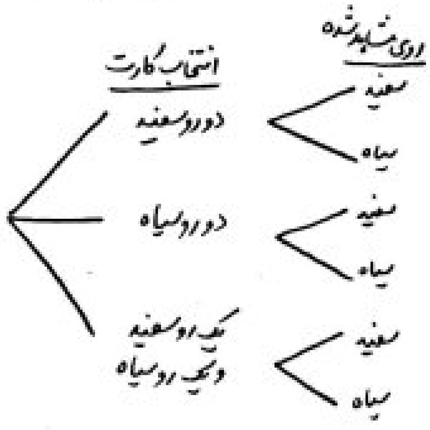
مثال: دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو قرمز و یک رو آبی است. کارتی به تصادف از این دسته برمی‌داریم و یک روی آن را می‌بینیم.

الف) احتمال این که آن رو قرمز باشد چقدر است؟

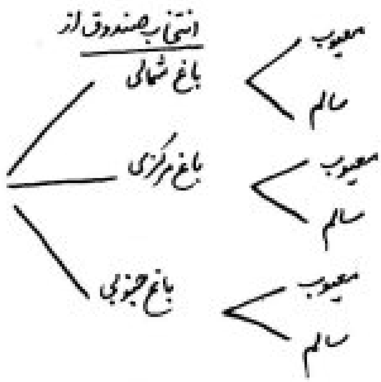


ب) اگر روی مشاهده شده قرمز باشد، با کدام احتمال روی دیگر کارت نیز قرمز است؟

مثال فرض کنید سه کارت داریم. اولی دو رو سفید، دومی دو رو سیاه و سومی یک رو سفید و یک رو سیاه است. کارتی به تصادف انتخاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم یک روی آن سفید است. احتمال این‌که هر دو روی آن سفید باشد چقدر است؟



تمرین H.W سه صندوق سیب یکسان از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم و به ترتیب ۱۰، ۵ و ۲۰ درصد معیوب‌اند. از یکی از صندوق‌ها یک سیب به تصادف برمی‌داریم.



الف) احتمال معیوب بودن سیب انتخابی کدام است؟
(جواب: $\frac{7}{60}$)

ب) اگر سیب انتخابی معیوب باشد، با کدام احتمال متعلق به باغ مرکزی است؟
(جواب: $\frac{1}{7}$)

مثال یک شرکت بیمه، مشتریان خود را به دو گروه "پرخطر" با احتمال ۰/۴ تصادف در سال و "کم‌خطر" با احتمال ۰/۲ تصادف در سال، تقسیم کرده است. فرض کنیم ۳۰ درصد مشتریان این شرکت، "پرخطر" می‌باشند. اگر فردی به تصادف از مشتریان این شرکت، که می‌دانیم در یک سال تصادف داشته است، انتخاب کنیم، احتمال این‌که در گروه پرخطر باشد، چقدر است؟

پیشامدهای مستقل

دو پیشامد را مستقل می‌گوییم هرگاه رخ دادن یکی در رخ دادن دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر نتیجه‌ی این دو پیشامد ربطی به هم ندارند. به عنوان مثال فرض کنید دو تاس سالم را با هم می‌اندازیم. واضح است که نتیجه‌ی تاس اول در نتیجه‌ی تاس دوم تأثیری ندارد و برعکس. به عبارت دیگر مستقل‌اند و مثلاً می‌توان گفت

بنابراین

دو پیشامد A و B از یک فضای نمونه مستقل‌اند اگر و تنها اگر

مثال: در پرتاب یک تاس سالم و یک سکه سالم

الف) اگر بدانیم تاس عدد ۶ آمده است، با کدام احتمال سکه «رو» می‌آید؟

ب) اگر بدانیم سکه «رو» آمده است، با کدام احتمال تاس عدد ۶ می‌آید؟

مثال یک سکه سالم را صدبار انداخته‌ایم، هر صد بار «رو» آمده است. احتمال آن که در پرتاب صد و یکم «رو» بیاید کدام است؟

* **نتیجه مهم**

$P(A\cap B)=P(A).P(B) \Longleftrightarrow$ A و B دو پیشامد مستقل‌اند

اثبات

مثال: در پرتاب یک تاس سالم و یک سکه سالم، احتمال آن که سکه «رو» و تاس ۶ بیاید کدام است؟

$P($سکه رو $\cap$ تاس ۶$) \overset{\text{مستقل}}{=} P($سکه رو$).P($تاس ۶$) =$

مثال در پرتاب دو تاس سالم با کدام احتمال هیچ کدام از اعداد ظاهر شده مضرب ۳ نیست؟

مثال در کارخانه‌ای دو دستگاه مستقل از هم کار می‌کنند. احتمال آن که هر یک از این دو دستگاه کار کند ۰/۴ است. احتمال آن که هر دو کار کنند کدام است؟

H.W (جواب: ۰/۱۶)

مثال: دو نفر به نام های A و B با احتمال های قبولی به ترتیب ۰/۷ و ۰/۸ در یک آزمون شرکت می کنند.

الف) احتمال آن که هر دو قبول شوند چقدر است؟

تجربی سراسری ۹۶ ب) احتمال آن که حداقل یکی قبول شود چقدر است؟

نتیجه:

سراسری ۹۸ خ تجربی: احتمال موفقیت فردی در یک آزمون مستقل، ۲ برابر احتمال موفقیت دوست وی است. احتمال موفقیت لااقل یکی از آن دو، $\frac{7}{9}$ است. احتمال موفقیت این فرد کدام است؟

تست: احتمال این که x یک مسأله ریاضی را حل کند $\frac{2}{3}$ و احتمال این که y همین مسأله را حل کند $\frac{3}{4}$ است. این مسأله را به هر دو می دهند تا حل کنند. احتمال این که این مسأله حل شود چقدر است؟

حل
$$P(x \cup y) \overset{\text{مستقل}}{=} P(x) + P(y) - P(x).P(y) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{11}{12}$$

سراسری ۹۶: دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه «رو» یا تاس ۶ ظاهر می شود؟

سراسری ۹۶ خ: یک سکه و دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال جمع عدد دو تاس بیشتر از ۴ یا سکه «رو» ظاهر شده است؟

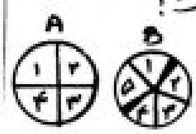
سراسری: برای رسیدن به مرحلهٔ نهایی مسابقات ورزشی لازم است تیم های شرکت کننده در دو دوره مسابقات مقدماتی شرکت نمایند. تیمی که در هر دو دوره بازنده شود به مرحله نهایی راه نمی یابد. اگر احتمال پیروزی در هر بازی برای تیمی ۰/۴ باشد، احتمال حضور این تیم در مرحلهٔ نهایی کدام است؟

سراسری ۹۳: در ظرفی ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در ظرف دیگر ۴ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه موجود است. به تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال چهار مهرهٔ خارج شده همرنگ اند؟

سراسری ۹۷ خ: سه سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم. احتمال این که لااقل یکی از پیشامدهای سکه یک رو یا عدد تاس زوج باشد کدام است؟ (جواب: $\frac{11}{16}$)

سراسری خ در ظرفی ۴ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۱ مهره سبز موجود است. در ظرف دیگر ۶ مهره سفید و ۲ مهره سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال رنگ این دو مهره متفاوت است؟

سراسری صفحه هر یک از دو عقربه‌ی A و B را به ترتیب به ۴ قطاع و ۵ قطاع مساوی با شماره‌های $\{1,2,3,4\}$ و $\{1,2,3,4,5\}$ تقسیم کرده‌ایم. عقربه‌های هر دو صفحه را می‌چرخانیم. احتمال این که هر دو عقربه روی ناحیه‌ی اعداد مساوی هم قرار بگیرند کدام است؟



حل: $P(\text{۱ روی A} \cap \text{۱ روی B}) \overset{\text{یا}}{+} P(\text{۲ روی A} \cap \text{۲ روی B}) \overset{\text{یا}}{+} P(\text{۳ روی A} \cap \text{۳ روی B}) \overset{\text{یا}}{+} P(\text{۴ روی A} \cap \text{۴ روی B})$

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$$

تست H.W روی تاسی ارقام ۱، ۲، ۲، ۳، ۳، ۳ نوشته شده است. در پرتاب ۲ بار این تاس، احتمال این که مجموع دو عدد رو شده برابر ۴ شود کدام است؟

(جواب: $\frac{5}{18}$)

سراسری ۹۹ خ در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A\cap B)=0/1$ و $P(A\cup B)=0/6$، با فرض $P(B')>P(B)$، احتمال وقوع پیشامد B کدام است؟

۱) ۰/۲
۲) ۰/۳
۳) ۰/۴
۴) ۰/۲۵

تست H.W برای دو پیشامد مستقل A و B از فضای نمونه‌ای S، اگر $P(A-B)=\frac{1}{3}$ و $P(B-A)=\frac{1}{6}$، آن‌گاه بیشترین مقدار $P(A\cup B)$ کدام است؟ (گزینه ۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{6}$

تذکر

$P(A \cap B) \neq P(A).P(B) \iff$ A و B دو پیشامد وابسته اند (نامستقل)

مثال‌هم: در آزمایش پرتاب دو تاس سالم باهم دو پیشامد { A : تاس اول عدد ۴ است. B : مجموع دو تاس برابر n است. } را در نظر می‌گیریم.

نشان دهید برای $n=7$ این دو پیشامد مستقل اند و برای $n=6$ وابسته اند.

حل:

$n(S) = 6^2 = 36$

$A = \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\} \to P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$n=7$: $B = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} \to P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$A \cap B = \{(4,3)\} \to P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A).P(B) \to$ مستقل ✓

$n=6$: $B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} \to P(B) = \frac{5}{36}$

$A \cap B = \{(4,2)\} \to P(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq P(A).P(B) \to$ وابسته ✓

سراسری اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند و $P(A).P(B) + P(A' \cup B') = 1$ باشد، آن‌گاه A و B نسبت به هم چگونه اند؟

۱) ناسازگار ۲) مستقل

۳) سازگار ۴) وابسته

تست H.W سکه‌ای همگن را سه بار متوالی می اندازیم. اگر A پیشامد رخ دادن "رو" در دو پرتاب اول، B پیشامد رخ دادن "پشت" در پرتاب سوم و C پیشامد رخ دادن دقیقاً" دو پشت در سه پرتاب، باشد، آن‌گاه دو پیشامد A و B نسبت به هم .... و دو پیشامد B و C نسبت به هم .... هستند.

(گزینه ۲)

۱) مستقل، مستقل ۲) مستقل، وابسته ۳) وابسته، مستقل ۴) وابسته، وابسته

تذکر ۱ متمم گیری استقلال پیشامدها را حفظ می‌کند. به عبارت دیگر

> **قضیه:** اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه S باشند، آن‌گاه
>
> الف) A' و B نیز مستقل‌اند.
>
> ب) A و B' نیز مستقل‌اند.
>
> پ) A' و B' نیز مستقل‌اند.
>
> (این قضیه قابل تعمیم است)

مثال: دو نفر تیرانداز به نام‌های A و B با احتمال‌های به ترتیب $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ هدفی را می‌زنند. اگر هر کدام فقط یک بار تیراندازی کنند، با کدام احتمال

الف) فقط A به هدف می‌زند؟

ب) فقط یکی به هدف می‌زند؟

پ) هیچ کدام به هدف نمی‌زنند؟

مثال (سراسری ۹۸) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(\overline{A\cap B}) = ۰/۶$ و $P(A\cap B') = ۰/۲$، آن‌گاه $P(A\cup B')$ چقدر است؟

مقایسه

دو پیشامد ناسازگار	دو پیشامد مستقل
با هم رخ نمی‌دهند $\leftrightarrow A\cap B = \phi$	می‌توانند با هم رخ بدهند $\leftrightarrow A\cap B \neq \phi$
$P(A\cap B) = 0$	اشتراک تبدیل به ضرب $\leftarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$
اجتماع تبدیل به جمع $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$	$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\cdot P(B)$
رخ دادن یکی، رخ ندادن دیگری را سبب می‌شود	رخ دادن یکی در رخ دادن دیگری تأثیری ندارد.

تذکر ۲ اگر دو پیشامد مستقل و ناسازگار باشند، آن‌گاه حداقل یکی نشدنی است.

اثبات

A و B دو پیشامد ناسازگارند $\rightarrow P(A\cap B) = 0$

A و B دو پیشامد مستقل‌اند $\rightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

$\Big\}\xrightarrow{\text{ناسازگار و مستقل}} P(A)\cdot P(B) = 0 \rightarrow \underbrace{P(A) = 0}_{\text{A نشدنی}}$ یا $\underbrace{P(B) = 0}_{\text{B نشدنی}}$

نتیجه مهم اگر دو پیشامد با احتمال‌های مثبت، ناسازگار باشند، آن‌گاه مستقل نیستند و اگر مستقل باشند، آن‌گاه ناسازگار نیستند. (این دو مفهوم ربطی به هم ندارند!!)

تذکر ۳ اگر n پیشامد A_1 ، A_2 ، ... ، A_n مستقل باشند، آنگاه

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n)$$

توجه کنید اگر تساوی بالا برقرار باشد، نمی‌توان گفت n پیشامد مستقل داریم (دو شرطی نیست). در حالت کلی :

* n پیشامد مستقل اند اگر و تنها اگر احتمال اشتراک هر تعداد از آنها با حاصل ضرب احتمال آنها برابر شود.

سوال سه تاس سالم را باهم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد رو شده مضرب ۳ نیستند؟

حل $P($ تاس اول مضرب ۳ نباشد $\cap \dots \cap$ تاس دوم $\cap \dots$ تاس سوم $) \overset{\text{مستقل}}{=} \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{8}{27}$ ✓

مثال : در یک کلاس ۱۰ نفری با کدام احتمال

الف) همگی در روز شنبه متولد شده‌اند؟

حل $P($ اولی شنبه $\cap$ دومی شنبه $\cap \dots \cap$ دهمی شنبه $) \overset{\text{مستقل}}{=} \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \dots \times \frac{1}{7} = (\frac{1}{7})^{10}$ ✓

ب) همگی در یک روز هفته متولد شده‌اند؟

$P($ همگی شنبه $) \overset{\text{یا}}{+} P($ همگی یکشنبه $) \overset{\text{یا}}{+} \dots \overset{\text{یا}}{+} P($ همگی جمعه $) = (\frac{1}{7})^{10} + (\frac{1}{7})^{10} + \dots + (\frac{1}{7})^{10} = 7 \times (\frac{1}{7})^{10} = (\frac{1}{7})^9$ ✓

سوال H.W اگر به طور تصادفی سه نفر از جامعه‌ای انتخاب شوند، با کدام احتمال فقط ماه تاریخ تولد هر سه یکسان است؟ (جواب: $(\frac{1}{12})^2$)

تست سه نفر به نام‌های A ، B و C با احتمال‌های قبولی به ترتیب ۵۰ ، ۶۰ و ۷۰ درصد در کنکور شرکت می‌کنند. با کدام احتمال حداقل یکی قبول می‌شود؟

سراسری ۹۷ H.W سه نفر مشغول رمزگشایی یک پیام هستند. احتمال موفقیت آنها به ترتیب $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}$ است. با کدام احتمال لااقل یکی موفق می‌شود؟ (جواب : $\frac{23}{24}$)

تست (سراسری ۹۹) در پرتاب سه تاس سالم احتمال آن که حداقل یک بار شش ظاهر شود، کدام است؟

حل $P($ حداقل یک بار ۶ $) \overset{\text{متمم}}{=} 1 - P($ هیچ بار ۶ $) = 1 - (\underset{\text{تاس اول غیره}}{\frac{5}{6}} \times \underset{\text{تاس دوم غیره}}{\frac{5}{6}} \times \underset{\text{تاس سوم غیره}}{\frac{5}{6}}) = \frac{91}{216}$ ✓

تست یک سکه را چند مرتبه پرتاب کنیم تا احتمال آمدن دست کم یک بار "رو" بیش از ۹۹ درصد باشد؟

۱) حداقل ۵ مرتبه
۲) حداقل ۷ مرتبه
۳) حداکثر ۵ مرتبه
۴) حداکثر ۷ مرتبه

سراسری ۹۰ انسانی در یک ظرف ۵ گوی قرمز با شماره‌های ۱ تا ۵ و چهار گوی آبی با شماره‌های ۱ تا ۴ قرار دارند. به طور تصادف یک گوی از هر رنگ خارج می‌کنیم. با کدام احتمال لااقل شماره‌ی یکی از آنها ۲ است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۳۵ ۴) ۰/۴ ✓

حل

$P($ لااقل شماره‌ی یکی ۲ $) \overset{\text{متمم}}{=} 1 - P($ هیچ کدام ۲ $)$

$= 1 - P($ آبی غیر ۲ $\cap$ قرمز غیر ۲ $) \overset{\text{مستقل}}{=} 1 - \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = 0/4$ ✓

سراسری احتمال آن که شخصی جواب پنج سؤال تست دوگزینه‌ای را به تصادف صحیح انتخاب کند چند برابر احتمال انتخاب به تصادف جواب صحیح پنج تست چهارگزینه‌ای است؟

تست دوگزینه‌ای $\xrightarrow{\text{احتمال جواب صحیح}} \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{چون مستقل اند}]{\text{پنج سؤال}} \left(\frac{1}{2}\right)^5$

تست چهارگزینه‌ای $\xrightarrow{\text{〃 〃}} \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{〃 〃}} \left(\frac{1}{4}\right)^5$

$\xrightarrow{\text{نسبت}} 2^5 = 32$ ✓

مثال احتمال این که روز تولد سه نفر

الف) در روزهای مختلف هفته باشند، چقدر است؟ (متمایز ها)

ب) همگی شبیه هم باشند چقدر است؟

ب) فقط دو نفر شبیه هم باشند چقدر است؟

ج) حداقل دو نفر شبیه هم باشند چقدر است؟

درس من حیرت است

مشق یک بشر

مشق خواب صبح

و جواب مسئلم که دلم میخواهد بدهم تا ندهد

بدهم تا نکوشه که آرام است کرد امیخواهد...

احتمال دوجمله‌ای (فرمول برنولی)

فرمول مهم

(آزمون برنولی: هر آزمایشی که دو نتیجه داشته باشد (موفقیت و شکست))

سه ویژگی دارد:
- تکرار n بار یک آزمایش دوحالته (آزمون برنولی) است (تعداد تکرارها مشخص است)
- دقیقاً x بار موفقیت است (و در نتیجه n−x بار شکست)
- معلوم نیست که موفقیت‌ها در کدام دفعات است و باید x موفقیت از n تکرار انتخاب شود.

مثال: یک تاس سالم را ۵ بار می‌اندازیم.

الف) احتمال این که (فقط) در بار اول، سوم و چهارم ۶ ظاهر شود چقدر است؟

ب) احتمال اینکه دقیقاً سه بار ۶ ظاهر شود چقدر است؟

مثال: تیرانداز با احتمال ۷۰٪ هدفی را می‌زند. اگر ۱۰ بار شلیک کند، با کدام احتمال ۷ بار به هدف می‌زند؟

سراسری: احتمال موفقیت در یک عمل جراحی $\frac{4}{5}$ است. اگر این عمل بر روی ۵ نفر صورت گیرد، با کدام احتمال جراحی ۴ نفر موفقیت‌آمیز است؟

سراسری تجربی: از نوعی بذر ۸۰ درصد آنها جوانه می‌زند. اگر سه بذر از این نوع کاشته شود، با کدام احتمال لااقل دو بذر جوانه می‌زند؟

$$\binom{3}{2}(0.8)^2\cdot(0.2)^1 + \binom{3}{3}(0.8)^3 = 0.896 \checkmark$$

سراسری: در ۱۰ بار پرتاب یک تاس سالم، با کدام احتمال ۶ بار عددی بزرگتر از ۳ ظاهر می‌شود؟

سراسری: در یک خانواده ده فرزندی با کدام احتمال حداکثر ۴ دختر وجود دارد؟

سراسری: در پرتاب ۴ سکه سالم با هم، احتمال این که فقط ۳ سکه رو یا فقط ۳ سکه پشت بیاید چقدر است؟

مثال: در یک آزمون با ۱۰ سؤال پنج گزینه‌ای، دانش‌آموزی به تمام سؤال‌ها به طور تصادفی پاسخ می‌دهد. احتمال این که

الف) تمام سؤال‌ها را صحیح جواب داده باشد چقدر است؟

ب) فقط به پنج سؤال اول پاسخ صحیح داده باشد، چقدر است؟

پ) نیمی از سؤال‌ها را پاسخ صحیح بدهد، چقدر است؟

سراسری در $2n$ بار پرتاب یک سکه سالم، احتمال مساوی بودن تعداد «رو»ها و «پشت»ها با افزایش n چه تغییری می‌کند؟

۱) افزایش می‌یابد.

۲) کاهش می‌یابد.

۳) متناوباً تغییر می‌کند.

۴) تغییری نمی‌کند.

تمرین ۱۴۰۲: در پرتاب چهار سکه‌ی سالم، اگر احتمال آمدن حداقل ۲ بار روی سکه را $P(A)$ و احتمال آمدن حداقل ۲ بار پشت سکه را $P(B)$ در نظر بگیریم، آن‌گاه $P(A\cap B')$ چقدر است؟

(جواب: $\frac{5}{16}$)

سراسری سکه‌ای سالم را پرتاب می‌کنیم، اگر «رو» بیاید تاس را می‌ریزیم و اگر «پشت» بیاید، ۳ سکه‌ی دیگر را باهم می‌اندازیم. احتمال این که دقیقاً یک سکه «رو» ظاهر شود کدام است؟

تمرین ۱۴۰۳: در یک خانواده ۴ فرزندی مطلوب است

الف) احتمال این که فرزند اول و آخر دختر باشد؟

ب) دو فرزند این خانواده دختر باشد؟

تمرین ۱۴۰۳: ۸۰ درصد افراد یک شهر باسوادند. اگر ۵ نفر از این شهر انتخاب کنیم، با کدام احتمال

الف) هر ۵ نفر بی‌سوادند؟

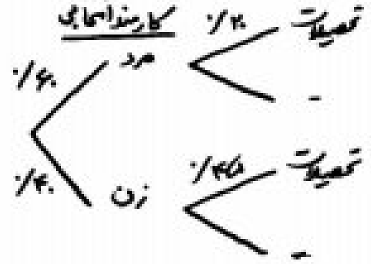
ب) فقط یکی بی‌سواد است؟

سراسری ۹۴ تجربی

در پرتاب یک سکه، اگر «رو» بیاید یک تیرانداز مجاز است ۵ تیر رها کند و اگر «پشت» بیاید، ۳ تیر رها می‌کند. می‌دانیم احتمال اصابت هر تیر رها شده $\frac{3}{5}$ است. با کدام احتمال فقط یک تیر اصابت می‌کند؟

سراسری ۹۳ خ تجربی

شصت درصد کارکنان سازمانی مرد و چهل درصد آنان زن هستند. می‌دانیم که ۲۰ درصد مردان و ۴۵ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر به تصادف ۲ نفر از بین آنها انتخاب شود، با کدام احتمال ۲ نفر آنها تحصیلات دانشگاهی دارند؟

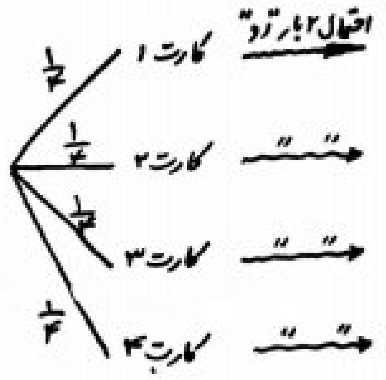


سراسری ۹۵ تجربی ۴۰۰

آزمایشی فقط دو نتیجه شکست و پیروزی دارد. احتمال پیروزی در هر بار $\frac{3}{4}$ است. در تکرار ۶ بار این آزمایش مستقل، احتمال ۴ پیروزی چند برابر احتمال ۳ پیروزی است؟

(جواب: $\frac{9}{4}$)

مثال از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴ کارتی به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار «رو» بیاید، با کدام احتمال کارت شمارهٔ ۳ انتخاب شده است؟

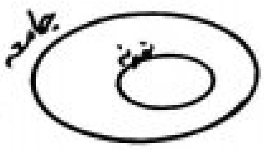


◀ **آمار:** مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

◀ **علم آمار:** مجموعهٔ روش هایی است شامل:

(۱) جمع آوری اعداد و ارقام ⇐ (۲) سازمان دهی و نمایش ⇐ (۳) تحلیل و تفسیر داده‌ها ⇐ (۴) نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب

واحد آماری: به هر یک از افراد یا اشیایی می‌گویند که داده‌های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گردآوری می‌شود.



جامعه (جامعه آماری): مجموعهٔ کل واحدهای آماری را می‌گویند.

* به تعداد عضوهای جامعه، اندازه (حجم) جامعه می‌گوییم.

نمونه (نمونه آماری): زیرمجموعه‌ای از جامعهٔ آماری است. (به دلیل زیاد بودن اندازهٔ جامعه و برای صرفه‌جویی در وقت و هزینه، زیرمجموعه‌ای از جامعه را در نظر می‌گیریم)

* به تعداد عضوهای نمونه، اندازه (حجم) نمونه می‌گوییم. اندازهٔ جامعه ≥ اندازهٔ نمونه

متغیر: هر ویژگی از اشیاء یا افراد، که در اعضای جامعه یکسان نیست و معمولاً از عضوی به عضو دیگر تغییر می‌کند را متغیر می‌گوییم.

* عدد یا عبارتی که به ویژگی یک عضو (متغیر) نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر (مشاهده) نامیده می‌شود.

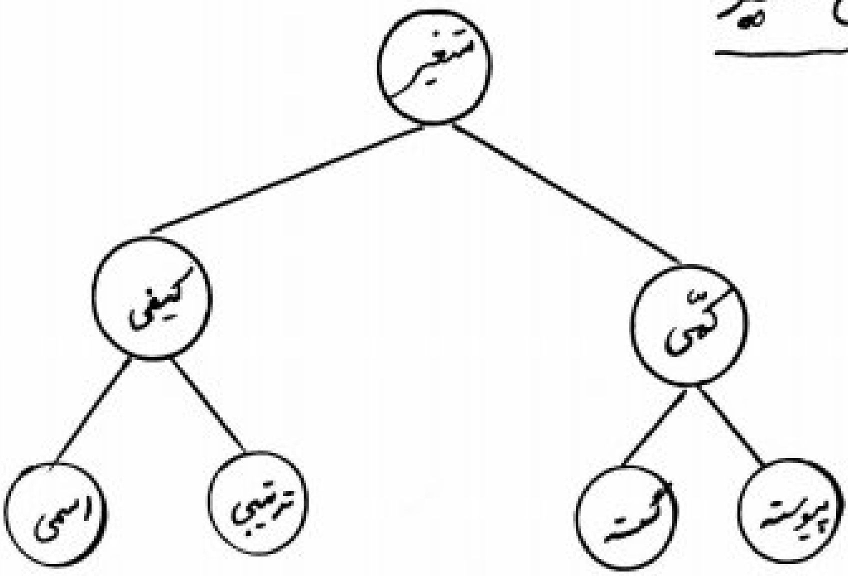
◀ **مثال:** ① برای بررسی کیفیت مرکبات استان مازندران، بخشی از مرکبات شهرستان بابل را مورد مطالعه قرار داده‌ایم و با عبارت‌های درجهٔ یک، درجهٔ دو و درجهٔ سه طبقه‌بندی نموده‌ایم.

② برای بررسی درصد بیکاری افراد ساکن در استان کردستان، از چند شهر این استان افرادی را مورد پرسش قرار دادیم و حدوداً درصد بیکاری در این استان ۳۵ به دست آمده است.

سرشماری: تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم. مزیت: اندازهٔ نمونه = اندازهٔ جامعه

معایب: ۱. وقت‌گیر بودن ۲. پرهزینه ۳. در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه ۴. از بین رفتن اعضای جامعه

انواع متغیر



مثال:

قد افراد کلاس (وزن) ←	دمای هوای اتاق در ساعات مختلف ←
تعداد دانش آموزان کلاس ←	سطح تحصیلات افراد جامعه ←
وضعیت تأهل افراد استخدامی ←	نژاد انسان های کره زمین ←
روزهای هفته ←	شماره پلاک اتومبیل ها در شهر تهران ←
نمره درس آمار و احتمال ←	مراحل پرورش ماهی ←
گروه خونی افراد ←	شدت بارندگی در فصل بهار امسال ←

آمار توصیفی: محاسبه پارامترها (ویژگی های) جامعه مورد مطالعه، با استفاده از سرشماری است که پس از گردآوری داده های کل جامعه، با ارائه روش هایی برای سازماندهی و توصیف داده ها، از طریق جدول های فراوانی، نمودارها، پارامترهای مرکزی و پارامترهای پراکندگی، به مطالعه جامعه می پردازد.

فراوانی

* **فراوانی یک داده** (فراوانی مطلق): تعداد دفعات مشاهدهٔ یک داده را می‌گوییم نماد f ← فراوانی دادهٔ i اُم f_i

مثال
۳, ۱, ۵, ۴, ۲, ۲, ۳, ۲, ۱, ۶ $\xrightarrow{\text{فراوانی داده ۲}}$ $f = ۳$

* **فراوانی نسبی یک داده** ← برابر است با $\boxed{\dfrac{\text{فراوانی داده}}{\text{تعداد کل داده‌ها}}}$

پس اگر تعداد کل داده‌های آماری برابر با n باشد (یعنی $n = f_1 + f_2 + \dots$) آنگاه

$$\dfrac{f_i}{n} = \text{فراوانی نسبی دادهٔ } i \text{ اُم}$$

در مثال بالا فراوانی نسبی دادهٔ ۲ برابر است با $\dfrac{۳}{۱۰}$ (زیرا تعداد کل داده‌ها $n = ۱۰$ است)

* **درصد فراوانی نسبی یک داده** ← برابر است با $\boxed{۱۰۰ \times \text{فراوانی نسبی داده}}$

در مثال بالا درصد فراوانی نسبی دادهٔ ۲ برابر است با $\dfrac{۳}{۱۰} \times ۱۰۰ = ۳۰$ درصد

* **جدول فراوانی** ← برای تنظیم و طبقه‌بندی داده‌ها
↓
برای هر نوع متغیری می‌توان تشکیل داد

داده	فراوانی	فراوانی نسبی	درصد فراوانی نسبی
x_1	f_1	$\dfrac{f_1}{n}$	$\dfrac{f_1}{n} \times ۱۰۰$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
مجموع	n	۱	٪۱۰۰

مثال: فرض کنید از ۳۰۰ دانش آموز یک دبیرستان، در مورد رشتهٔ ورزشی انتخابی آنها در زنگ تربیت بدنی پرسش به عمل آمده است.

رشته ورزشی	فراوانی	فراوانی نسبی	درصد فراوانی نسبی
والیبال	۸۰	$\dfrac{۸۰}{۳۰۰}$	$\dfrac{۸۰}{۳۰۰} \times ۱۰۰ = ٪۲۶/۶$
فوتبال	۹۰	$\dfrac{۹۰}{۳۰۰}$	$\dfrac{۹۰}{۳۰۰} \times ۱۰۰ = ٪۳۰$
بسکتبال	۶۵	$\dfrac{۶۵}{۳۰۰}$	$\dfrac{۶۵}{۳۰۰} \times ۱۰۰ = ٪۲۱/۷$
تنیس روی میز	۶۵	$\dfrac{۶۵}{۳۰۰}$	$\dfrac{۶۵}{۳۰۰} \times ۱۰۰ = ٪۲۱/۷$
مجموع	۳۰۰	۱	۱۰۰

دسته‌بندی داده‌ها ← زمانی که داده‌های جمع آوری شده زیاد و پراکنده اند!!

- به طور کلی عضوهای هر دسته، از نظر ویژگی مورد بررسی به یکدیگر شباهت دارند.
- در اکثر مواقع در مورد داده‌های مربوط به متغیر کمّی پیوسته، نیاز به دسته بندی داریم.

مرحله ۱: "دامنهٔ تغییرات" (Range)، یعنی اختلاف بزرگ‌ترین داده و کوچک‌ترین داده را می‌یابیم.

(دامنهٔ تغییرات را با R نشان می‌دهیم) $\boxed{R = x_{max} - x_{min}}$

مرحله ۲: با فرض این که تعداد دسته‌ها برابر k باشد، آن‌گاه طول هر دسته را (که با c نشان می‌دهیم) به صورت $C = \frac{R}{k}$ می‌یابیم.

مرحله ۳: از کوچک‌ترین داده شروع می‌کنیم و c تا c جلو می‌رویم و دسته‌ها را می‌نویسیم. در ساختن دسته‌ها، ابتدای تمام دسته‌ها را بسته و انتهای آن‌ها را باز در نظر می‌گیریم، به جز دستهٔ آخر که هر دو را بسته در نظر می‌گیریم.

مثال: فرض کنید قد بیست دانش آموز یک کلاس را اندازه‌گیری کرده‌ایم و نتایج زیر به دست آمده است:

$\underset{min}{۱۴۷}$ ، ۱۷۲ ، ۱۷۱ ، ۱۶۲ ، ۱۴۸ ، ۱۵۵ ، ۱۵۹ ، ۱۶۷ ، ۱۶۳ ، ۱۶۲

$\underset{max}{۱۷۹}$ ، ۱۵۲ ، ۱۷۱ ، ۱۷۰ ، ۱۷۵ ، ۱۶۴ ، ۱۵۹ ، ۱۵۸ ، ۱۵۱ ، ۱۴۹

اگر بخواهیم داده‌ها را در ۴ دسته تقسیم کنیم، داریم:

$$R = max - min = ۱۷۹ - ۱۴۷ = ۳۰ \xrightarrow{k=۴} C = \frac{۳۲}{۴} = ۸$$

پس داریم:

دسته‌ها	فراوانی	فراوانی نسبی	درصد فراوانی نسبی
[۱۴۷ , ۱۵۵)	۵	$\frac{۵}{۲۰}$	٪۲۵
[۱۵۵ , ۱۶۳)	۶	$\frac{۶}{۲۰}$	٪۳۰
[۱۶۳ , ۱۷۱)	۴	$\frac{۴}{۲۰}$	٪۲۰
[۱۷۱ , ۱۷۹]	۵	$\frac{۵}{۲۰}$	٪۲۵
مجموع	۲۰	۱	۱۰۰

* عدد پایین هر دسته را کران پایین و عدد بالای هر دسته را کران بالا می‌گوییم.

$[a , b)$ کران پایین ، کران بالا $\xrightarrow{\text{توجه}} C = b - a$

* مرکز (نشان یا نمایندهٔ) دسته: میانگین کران‌های بالا و پایین هر دسته را می‌گویند. (چون داده‌های هر دسته، با هم شباهت دارند، مرکز دسته نمایندهٔ تمام داده‌های آن دسته است)

* مرکز دسته لزوماً در بین داده‌ها نیست.

$$\text{دستهٔ iام}: [a , b) \xrightarrow{\text{مرکز دسته}} x_i = \frac{a+b}{۲}$$

نتیجه: اگر x_i مرکز دستهٔ iام و c طول هر دسته باشد، آن‌گاه:

$$a = \text{کران پایین دستهٔ iام} = x_i - \frac{c}{۲} \quad \text{و} \quad b = \text{کران بالای دستهٔ iام} = x_i + \frac{c}{۲}$$

سراسری ۹۰ ۸۰ داده آماری در ۷ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. اگر ۲۰ داده جدید به این جدول اضافه شود، فراوانی نسبی دستهٔ وسط تغییر نمی‌کند. نسبت افزایش داده‌های دستهٔ مذکور به فراوانی مطلق قبلی آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

سراسری در دسته‌بندی ۱۲۰ دادهٔ آماری در ۹ طبقه، دستهٔ اول به صورت [۲۲,۲۵) می‌باشد. می‌دانیم ۴۵ درصد داده‌ها کمتر از ۳۴ و فراوانی نسبی دستهٔ وسط ۰/۲ است. تعداد داده‌های کمتر از ۳۷ کدام است؟

۱) ۶۷ ۲) ۷۶

۳) ۷۸ ۴) ۸۴

تست $\frac{}{H.W}$ تعدادی دادهٔ آماری را در ۱۲ طبقه دسته‌بندی کرده‌ایم. کران پایین دستهٔ دوم ۷ و مرکز دستهٔ هشتم ۳۳ است. مرکز دستهٔ آخر کدام است؟

(گزینه ۱)

۱) ۴۹ ۲) ۴۷

۳) ۵۳ ۴) ۵۱

تست $\frac{}{H.W}$ با توجه به جدول مقابل حاصل $x-y+z-t$ کدام است؟

(گزینه ۲)

دسته‌ها	فراوانی	فراوانی نسبی	درصد فراوانی نسبی
[۳,۶)	x	t	
[۶,۹)	y		۴۰
[۹,۱۲]	۵		z
جمع	۲۵		

۱) ۱۰,۴ ۲) ۱۹,۶

۳) ۱۳,۲ ۴) ۱۱,۶

نمودارها ـــ برای نمایش و توصیف بهتر داده‌ها

الف) نمودار میله‌ای مناسب برای نمایش متغیرهای کمّی گسسته و متغیرهای کیفی

◁ خودِ داده‌ها یا شمارهٔ آنها روی محور افقی

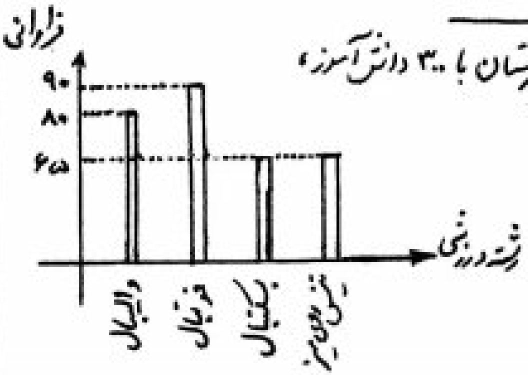
◁ فراوانی داده‌ها یا فراوانی نسبی داده‌ها روی محور عمودی (در برخی موارد می‌توان درصد فراوانی نسبی را قرار داد)

◁ ارتفاع هر میله، متناسب با فراوانی (فراوانی نسبی) هر داده

◁ میله‌ها تک‌بعدی فرض می‌شوند.

◁ ترتیب میله‌ها مهم نیست.

مثال: در مثال مربوط به رشته‌های ورزشی دانش‌آموزان یک دبیرستان با ۳۰۰ دانش‌آموز، نمودار میله‌ای به صورت مقابل است:

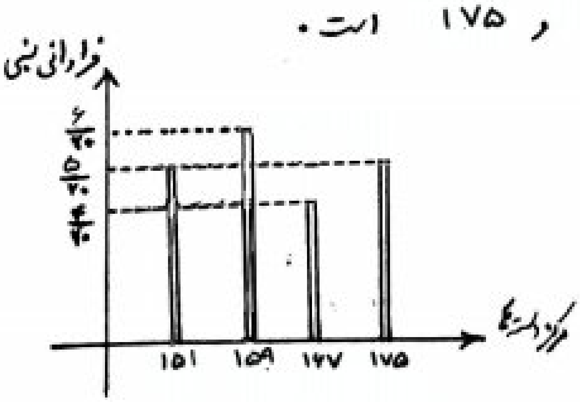


تذکر: برای رسم نمودار میله‌ای مربوط به داده‌های کمّی پیوسته از مرکز هر دسته به عنوان نمایندهٔ داده‌های آن دسته، روی محور افقی استفاده می‌کنیم.

مثال: برای رسم نمودار میله‌ای مثال مربوط به اندازه‌گیری قد بیست دانش‌آموز یک کلاس داریم:

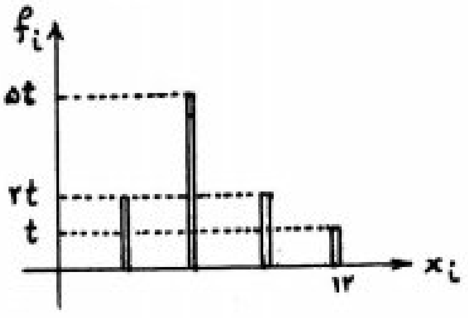
$$[۱۴۷, ۱۵۵) \xrightarrow{\text{مرکز دستهٔ اول}} \frac{۱۴۷+۱۵۵}{۲} = ۱۵۱$$

به همین ترتیب مرکز سه دستهٔ دیگر، ۱۵۹ ، ۱۶۷ و ۱۷۵ است.



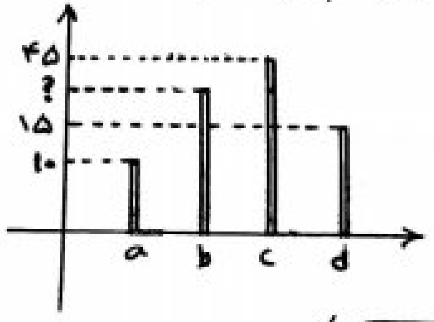
✱ **توجه:** روی محور عمودی، فراوانی، فراوانی نسبی یا درصد فراوانی نسبی داده قرار می‌گیرد.

تست در نمودار میله‌ای مقابل روی محور افقی، از مرکز هر دسته استفاده شده است. اگر طول دسته‌ها یکسان باشد، درصد فراوانی نسبی دستهٔ $[6, 10)$ کدام است؟



۱) ۱۰ ۲) ۲۰
۳) ۳۰ ۴) ۴۰

تست H.W نمودار میله‌ای ۷۰ داده آماری به صورت مقابل است. اگر محور قائم، درصد فراوانی نسبی باشد، آن‌گاه فراوانی مطلق دادهٔ b کدام است؟ (گزینه ۲)



۱) ۲۰ ۲) ۲۱
۳) ۳۰ ۴) ۳۱

پ) نمودار دایره‌ای مناسب برای نمایش متغیرهای کمی گسسته و متغیرهای کیفی

◁ از تقسیم یک دایره به قطاع‌هایی به نسبت فراوانی هر داده به دست می‌آید.

◁ اگر α_i زاویهٔ مرکزی قطاع مربوط به دادهٔ iاُم با فراوانی f_i باشد، آن‌گاه

$$\frac{\alpha_i}{360^\circ} = \frac{f_i}{n} \Rightarrow \alpha_i = \frac{f_i}{n} \times 360^\circ$$ (n تعداد کل داده‌هاست)

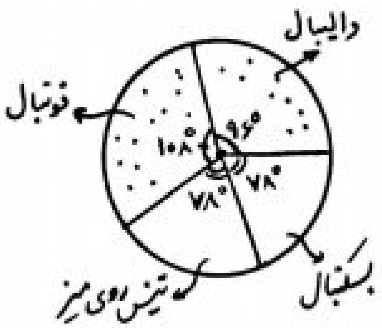
◁ در نمودار دایره‌ای، اندازه شعاع دایره مهم نیست.

◁ ترتیب قرار گرفتن قطاع‌ها اهمیتی ندارد.

◁ در کتاب درسی آمار و احتمال برای رسم نمودار دایره‌ای، ابتدا دایره را به ۱۰ قطاع مساوی (زاویهٔ مرکزی هر قطاع 36°) تقسیم می‌کند و لذا هر قطاع، ۱۰ درصد دایره است. سپس با توجه به فراوانی نسبی هر داده، مشخص می‌کند که تعداد قطاع‌های مربوط به هر داده، از ۱۰ قسمت مذکور چقدر است. در این روش اگر m تعداد قطاع‌های مربوط به دادهٔ iاُم با فراوانی f_i از ۱۰ قسمت مذکور باشد، آن‌گاه

$$\frac{f_i}{n} = \frac{m}{10} \Rightarrow m = \frac{f_i}{n} \times 10$$ (n تعداد کل داده‌هاست)

مثال: در مثال مربوط به رشته‌های ورزشی دانش آموزان یک دبیرستان با ۳۰۰ دانش آموز، نمودار دایره‌ای به صورت زیر است:



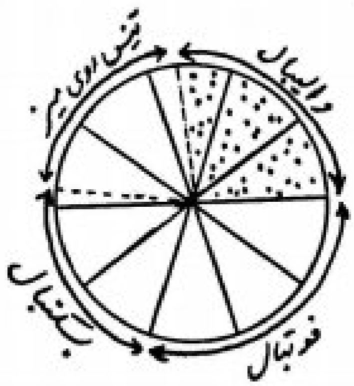
$$\alpha_V = \frac{80}{300} \times 360^\circ = 96^\circ$$

$$\alpha_F = \frac{90}{300} \times 360^\circ = 108^\circ$$

$$\alpha_B = \frac{65}{300} \times 360^\circ = 78^\circ$$

$$\alpha_T = \frac{65}{300} \times 360^\circ = 78^\circ$$

مطابق با روش کتاب درسی آمار و احتمال، نمودار دایره‌ای به صورت زیر است:



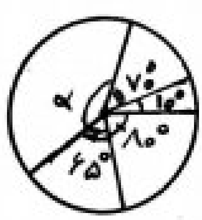
$$m_V = \frac{80}{300} \times 10 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$m_F = \frac{90}{300} \times 10 = 3$$

$$m_B = \frac{65}{300} \times 10 = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$$

$$m_T = \frac{65}{300} \times 10 = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$$

سراسری ۹۴ خ — تمرین: افراد یک جامعه به ۵ گروه سنی تقسیم شده‌اند، که نمودار دایره‌ای آنها با زاویهٔ مرکزی برحسب درجه رسم شده است. گروه سنی با زاویهٔ مرکزی α شامل چند درصد این جامعه است؟



۱) ۳۳ ۲) ۳۲٫۵
۳) ۳۶ ۴) ۳۷٫۵

سراسری ۹۱ خ — H.W: در جدول زیر، مرکز دسته با درصد فراوانی نسبی داده شده است. در نمودار دایره‌ای، زاویهٔ مربوط به بازهٔ $[25, 28)$ چند درجه است؟

مرکز دسته	۱۷٫۵	۲۰٫۵	۲۳٫۵	۲۶٫۵	۲۹٫۵
درصد فراوانی نسبی	۱۷	۲۰٫۵	۲۲	x	۱۸

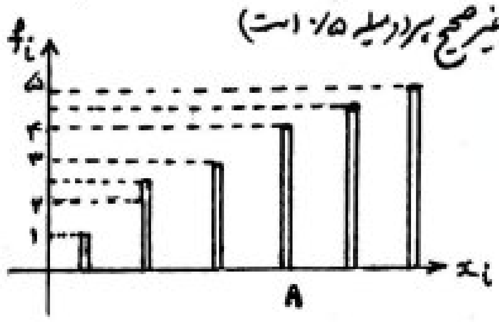
۱) ۷۲ ۲) ۸۱
۳) ۸۴ ۴) ۹۰

گزینهٔ ۲

تست: در نمودار دایره‌ای ۳۰ دادهٔ آماری دسته‌بندی شده، دستهٔ اول ۲ قطاع از ۱۰ قسمت مساوی را به خود اختصاص داده است. چند داده به داده‌های دستهٔ اول اضافه کنیم تا ۲٫۵ قطاع از ۱۰ قسمت دایره را شامل شود؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

سراسری ۹۰ تجربی در مقایسه سطح زیر کشت غلات در شش استان، نمودار میله‌ای مقابل رسم شده است. در نمودار دایره‌ای، زاویه مرکزی متناظر استان A چند درجه است؟ (قسمت غیر صحیح بردار میله ۰/۵ است)



۱) ۶۴ ۲) ۷۲
۳) ۸۰ ۴) ۹۶

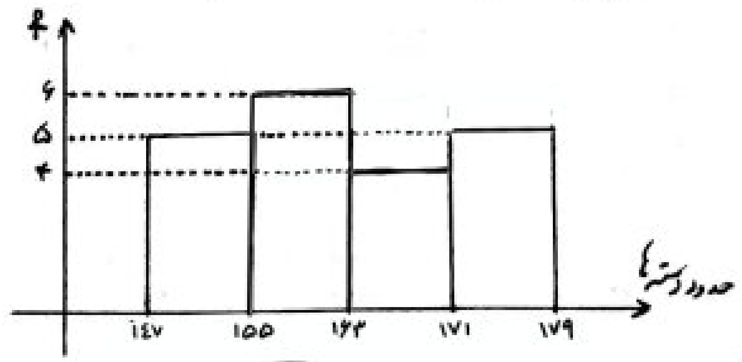
حل: $n = 1 + 2/5 + 3 + 4 + 4/5 + 5 = 20$

$$\rightarrow \alpha_A = \frac{f_A}{n} \times 360^\circ = \frac{4}{20} \times 360^\circ = 72^\circ$$ ✓

پ) نمودار بافت‌نگاشت (هیستوگرام) مناسب برای نمایش متغیرهای کمّی پیوسته

- حدود دسته‌ها یا بازه‌های پیوسته روی محور افقی
- فراوانی یا فراوانی نسبی یا درصد فراوانی نسبی هر دسته روی محور عمودی
- برای هر دسته یک مستطیل نمایش داده می‌شود که معمولاً ضلعی از مستطیل که روی محور افقی قرار می‌گیرد، برابر با طول دسته (C) و ضلع دیگر آن برابر با فراوانی (فراوانی نسبی) دسته (f_i یا $\frac{f_i}{n}$) است.

مثال: برای رسم نمودار بافت‌نگاشت مثال مربوط به اندازه‌گیری قد بیست دانش‌آموز یک کلاس داریم:



نکته: اگر طول دسته‌ها برابر با C و تعداد کل داده‌ها n باشد، آن‌گاه مجموع مساحت تمام مستطیل‌ها در نمودار بافت‌نگاشت (مساحت زیر نمودار) برابر است با nC.

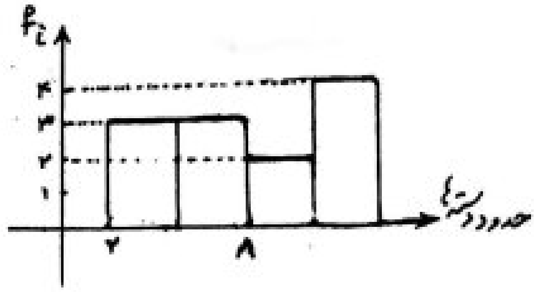
اثبات:

$$\underbrace{f_1 \times C}_{\text{مساحت مستطیل متناظر با دسته اول}} + \underbrace{f_2 \times C}_{\text{مساحت مستطیل متناظر با دسته دوم}} + \dots = (\underbrace{f_1 + f_2 + \dots}_{n}) \times C = nC$$

تست تعدادی دادهٔ آماری را در ۴ دسته قرار داده‌ایم. اگر نمودار بافت‌نگاشت مربوط به این ۴ دسته، به صورت مقابل باشد، در نمودار دایره‌ای این داده‌ها، زاویهٔ مرکزی قطاع دستهٔ چهارم چند درجه است؟

۱) ۶۰   ۲) ۸۱

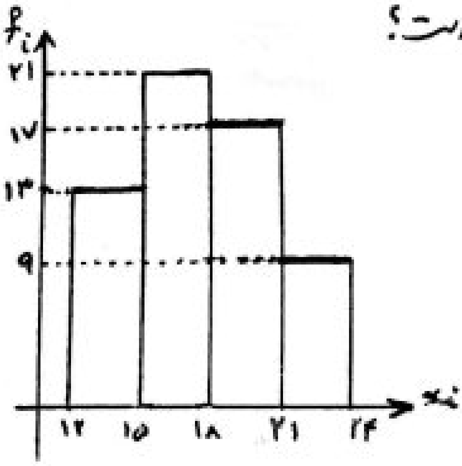
۳) ۱۲۰   ۴) ۱۶۲



سراسری ۹۵ تجربی از داده‌های آماری با نمودار بافت‌نگاشت زیر، سه دادهٔ ۱۴، ۱۶ و ۱۶ حذف شده است. در نمودار دایره‌ای داده‌های جدید، بزرگ‌ترین زاویهٔ مرکزی نظیر دسته‌ها، چند درجه است؟

۱) ۹۰   ۲) ۱۰۵

۳) ۱۲۰   ۴) ۱۳۵



تست H.W با اندازه‌گیری وزن دانش‌آموزان یک کلاس مشاهده‌های زیر حاصل شده است. اگر این داده‌ها را در ۵ طبقه دسته‌بندی کنیم و طول تمام دسته‌ها یکسان باشد، مساحت مستطیل دستهٔ ماقبل آخر در نمودار بافت‌نگاشت کدام است؟ (محور عمودی، فراوانی نسبی می‌باشد)

۵۰، ۵۲، ۵۴، ۵۷، ۵۹، ۶۲، ۶۳، ۶۳، ۶۵، ۶۶

۷۱، ۷۴، ۷۵، ۷۵، ۷۸، ۸۰، ۸۱، ۸۴، ۸۴، ۸۵

۱) ۰/۴   ۲) ۰/۸

۳) ۰/۷   ۴) ۱/۴

(گزینه ۴)

نشسته‌ام به در نگاه می‌کنم
دریچه آه می‌کشد
تو از کدام راه می‌رسی؟!

(ه.ا. سایه)

ت) نمودار چندبر فراوانی ← مناسب برای نمایش متغیرهای کمی پیوسته

◁ مرکز دسته‌ها روی محور افقی و فراوانی هر دسته روی محور عمودی در نظر گرفته می‌شود.

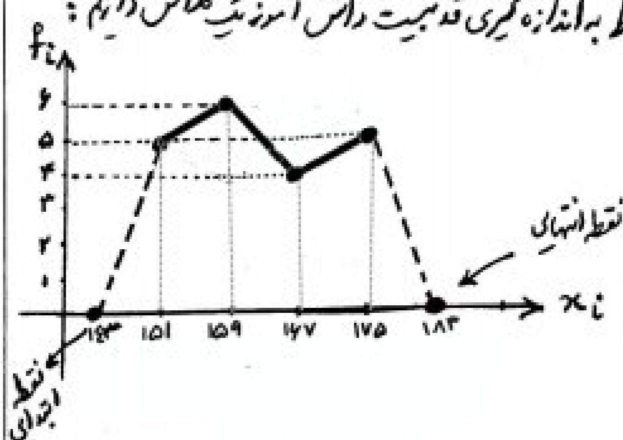
◁ نقاطی را در نظر می‌گیریم که طول آنها مرکز دسته و عرض آنها فراوانی همان دسته می‌باشد.

◁ از مرکز دستهٔ اول به اندازهٔ طول هر دسته (C)، به عقب می‌رویم و نقطهٔ ابتدایی را روی محور افقی (با فراوانی صفر) و از مرکز دستهٔ آخر نیز به اندازهٔ C به جلو رفته و نقطهٔ انتهایی را روی محور افقی (با فراوانی صفر) می‌یابیم. سپس نقطهٔ ابتدایی و نقاط مشخص شده در مرحلهٔ قبل و نقطهٔ انتهایی را با پاره‌خط به هم وصل می‌کنیم.

* در واقع، نمودار چندبر فراوانی، همان نمودار بافت‌نگاشت است، که وسط عرض بالای تمام مستطیل‌ها با نقاط ابتدا و انتهایی (که در بالا مشخص کردیم)، به طور متوالی به صورت خط شکسته به هم وصل شده‌اند.

* مساحت زیر نمودار چندبر فراوانی با مساحت زیر نمودار بافت‌نگاشت (مجموع مساحت‌های مستطیل‌ها) برابر است. ($S = n.C$)

مثال: برای رسم نمودار چندبر فراوانی مثال مربوط به اندازه‌گیری قد بیست دانش‌آموز یک کلاس داریم:



* توجه کنید مختصات هر نقطه به صورت زیر است:

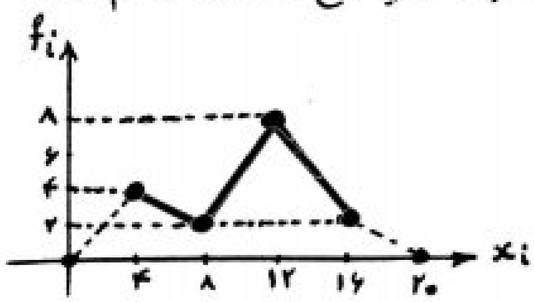
$$(x_i \, , \, f_i)$$

مرکز دسته — فراوانی دسته

تست: در نمودار چندبر فراوانی مقابل، پس از حذف داده‌های ۱۳ و ۱۷، زاویهٔ مرکزی قطاع متناظر با دستهٔ سوم در نمودار دایره‌ای چند درجه است؟

۱) ۲۴　　۲) ۴۸

۳) ۹۶　　۴) ۱۲۰



معیارهای گرایش به مرکز ← میانگین، میانه، مُد

الف) میانگین: برابر است با حاصل تقسیم مجموع داده‌ها بر تعداد آن‌ها ← نماد $\bar{x}$

(آن را متوسط داده‌ها نیز گویند)

داده‌ها: $x_1, x_2, \dots, x_n \xrightarrow{\text{میانگین}} \bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

بنابراین: $\boxed{x_1 + x_2 + \dots + x_n = n\bar{x}}$

* توجه: $x_{min} < \bar{x} < x_{max}$

تست: میانگین پنج داده آماری برابر ۱۷ است. اگر دو عدد ۱۰ و ۱۷ را به این داده‌ها اضافه کنیم، میانگین هفت داده جدید کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵٫۲

۳) ۱۶ ۴) ۱۷٫۲

---

* میانگین موزون (وزن‌دار) داده‌ها

هرگاه داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ دارای وزن (ضریب یا تکرار) های $w_1, w_2, \dots, w_n$ باشند، آن‌گاه برای محاسبهٔ میانگین داریم:

$$\bar{x}_w = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

هر داده در وزن (ضریب یا تکرار) خودش ضرب می‌شود و نتایج با هم جمع می‌گردد. سپس عدد حاصل را بر مجموع وزن‌ها (ضریب‌ها یا تکرارها) تقسیم می‌کنیم.

تست: درصدهای یک دانش‌آموز در یک آزمون در دروس عمومی به صورت جدول زیر است. اگر میانگین درصدهای این دانش‌آموز برابر ۳۰ باشد، درصد درس زبان انگلیسی کدام است؟

درس	ادبیات	عربی	دین و زندگی	زبان انگلیسی
درصد	۳۰	۲۰	۴۰	?
ضریب	۴	۲	۳	۲

۱) ۲۰ ۲) ۲۵

۳) ۳۰ ۴) ۳۵

تذکر ۱: هرگاه جدول فراوانی داشته باشیم، برای محاسبهٔ میانگین همانند میانگین موزون عمل می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots}{f_1 + f_2 + \cdots}$$

تذکر ۲: هرگاه جدول فراوانی نسبی داشته باشیم، برای محاسبهٔ میانگین داریم:

$$\bar{x} = \frac{f_1}{n} \times x_1 + \frac{f_2}{n} \times x_2 + \cdots$$

تذکر ۳: هرگاه داده‌ها به صورت دسته‌بندی شده باشند، برای محاسبهٔ میانگین، از مرکز هر دسته به عنوان نمایندهٔ آن دسته استفاده می‌کنیم.

تست: داده‌های آماری در ۴ دسته با فراوانی نسبی، در جدول زیر آمده‌اند. میانگین این داده‌ها کدام است؟

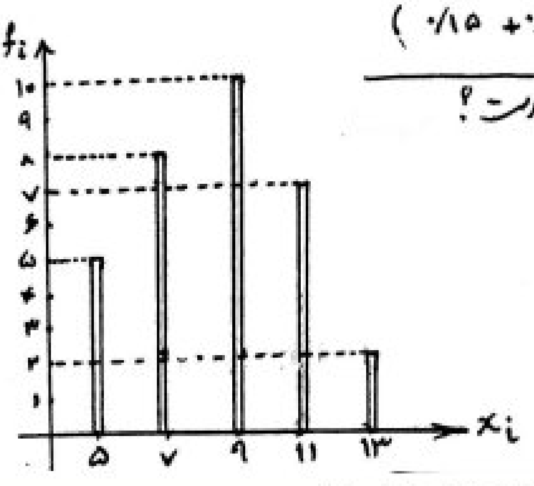
۱) ۱۶٫۴ ۲) ۱۸٫۴ ۳) ۱۶٫۸ ۴) ۱۸٫۸

حدود دسته	[۱۰-۱۴)	[۱۴,۱۸)	[۱۸,۲۲)	[۲۲,۲۶]
فراوانی نسبی	۰٫۱۵	۰٫۳	۰٫۲۵	a

مرکز دستهٔ اول، مرکز دستهٔ دوم، مرکز دستهٔ سوم، مرکز دستهٔ چهارم

$$\bar{x} = 0.15 \times 12 + 0.3 \times 16 + 0.25 \times 20 + \underbrace{0.3}_{a} \times 24 = 18.8 \checkmark$$

$$(0.15 + 0.3 + 0.25 + a = 1 \rightarrow a = 0.3)$$



سراسری ۹۵ خ (سراسری ۹۹) با توجه به نمودار میله‌ای مقابل، میانگین داده‌ها کدام است؟

۱) ۸٫۴۲ ۲) ۸٫۵۶ ۳) ۸٫۶۵ ۴) ۸٫۷۵

سراسری ۹۹ خ تفاضل میانه و میانگین...؟

تذکر ۴: مجموع تفاضل تمام داده‌ها از میانگین، همواره صفر است. یعنی

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \cdots + (x_n - \bar{x}) = (\underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}_{n\bar{x}}) - n\bar{x} = 0$$

تست: اگر اختلاف از میانگین داده‌های آماری به ترتیب ۲، ۳، ۴-، ۲٫۵، ۱- و $2a$ باشند، آن‌گاه a کدام است؟

۱) ۱٫۲۵ ۲) ۱٫۲۵- ۳) ۲٫۵ ۴) ۲٫۵-

سراسری خارج: در یک مطالعهٔ آماری، ۸۳ داده جمع‌آوری شده است. اگر توان دوم انحراف از میانگین داده‌ها برابر ۱ یا صفر باشد، حداقل چند داده با میانگین این داده‌ها برابر هستند؟

۱) صفر ۲) ۳۲ ۳) ۱ ۴) ۳۳

تذکر ۵ (ویژگی خطی میانگین) : هرگاه تمام داده‌ها را a برابر کنیم، سپس هر یک از داده‌ها را با عدد ثابت b جمع نماییم، میانگین داده‌های جدید نیز a برابر میانگین قبلی به اضافهٔ b می‌باشد. یعنی

داده‌ها : $x_1 , x_2 , \dots \xrightarrow{\text{میانگین}} \bar{x}$

داده‌های جدید : $ax_1+b , ax_2+b , \dots \xrightarrow{\text{میانگین}} a\bar{x}+b$

خلاصه: $\overline{ax+b} = a\bar{x}+b$

تست اگر میانگین داده‌های آماری $(3x_1+2), (3x_2+2), \dots, (3x_n+2)$ برابر ۲۶ باشد، آنگاه میانگین داده‌های $(2x_1-3), (2x_2-3), \dots, (2x_n-3)$ کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۱۳
۳) ۴۹ ۴) ۸۱

تذکر ۶ (محاسبهٔ سریع میانگین) : در مواقعی که داده‌های آماری، اعداد بزرگ می‌باشند، می‌توان از همهٔ داده‌ها عددی مانند k (که تا حد ممکن وسط داده‌ها می‌باشد) کم کرد و میانگین داده‌های جدید را محاسبه نمود. سپس به میانگین به‌دست آمده، k را می‌افزاییم.

سراسری ۹۲ تمام داده‌های مقابل را سه برابر کرده، سپس ۴۰ واحد از آن‌ها کم می‌کنیم، میانگین داده‌های جدید کدام است؟

$\boxed{80, 81, 85, 92, 94, 96, 97, 100, 100, 103, 104, 108}$

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۴۵
۳) ۲۵۰ ۴) ۲۵۵

سراسری ۹۱ تجربی میانگین ۵۰ دادهٔ دسته‌بندی شدهٔ زیر با روش سریع کدام است؟ (کنکور سراسری ۲)

x_i	۱۱۰	۱۱۶	۱۲۲	۱۲۸	۱۳۴
f_i	۵	۸	۱۵	۱۲	۱۰

۱) ۱۲۳٫۶۲ ۲) ۱۲۲٫۲۸
۳) ۱۲۴٫۰۲ ۴) ۱۲۴٫۰۶

سراسری ۹۸ نمرات ریاضی ۴۰ دانش‌آموز یک کلاس در جدول زیر آمده است. میانگین وزنی نمرات کدام است؟

x	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۷	۱۸
f	۵	۸	۷	۱۰	۶	۴

۱) ۱۴٫۲ ۲) ۱۴٫۲۵
۳) ۱۴٫۴ ۴) ۱۴٫۷۵

پ) میانه ← عددی است که تعداد داده‌های بزرگ‌تر از آن با تعداد داده‌های کوچک‌تر از آن برابر می‌باشد. به عبارت دیگر

عددِ وسط مجموعه‌ای از داده‌ها، که به صورت صعودی (از کوچک به بزرگ) مرتب شده‌اند، میانهٔ داده‌ها نامیده می‌شود و با نماد Q_2 نشان داده می‌شود.

* روش به دست آوردن میانه داده‌ها:

داده‌ها، به صورت صعودی (از کوچک به بزرگ) مرتب شود ⇐
- اگر تعداد داده‌ها فرد است ← میانه = عدد وسط
- اگر تعداد داده‌ها زوج است ← میانه = میانگین دو عدد وسط

◁ اگر تعداد داده‌ها n باشد،

- درحالتی که n عددی فرد است، میانه، دادهٔ $(\frac{n+1}{2})$ اُم است.
- درحالتی که n عددی زوج است، میانه، میانگین دو دادهٔ $(\frac{n}{2})$ اُم و $(\frac{n}{2}+1)$ اُم است.

مثال میانهٔ داده‌های زیر را بیابید.

الف) ۹, ۲۳, ۲۱, ۱۷, ۱۴, ۲۱, ۱۱ ← مرتب

ب) ۱۰, ۲۰, ۲۳, ۱۸, ۱۷, ۱۲ ← مرتب

◁ همان طور که مشاهده می‌شود، درحالتی که تعداد داده‌ها فرد است، میانه در بین داده‌ها است و درحالتی که تعداد داده‌ها زوج است، میانه لزوماً در بین داده‌ها نیست!

◁ میانه، نسبت به اندازهٔ داده‌های آماری (بزرگی یا کوچکی داده‌ها) بی‌تأثیر است.

◁ اگر فراوانی داده‌ها به یک نسبت کم یا زیاد شود، مثلاً نصف یا دو برابر شوند، میانه تغییر نمی‌کند.

◁ ویژگی خطی میانه: اگر تمام داده‌ها را در عدد ثابت a ضرب کنیم و سپس هر کدام را با مقدار ثابت b جمع نماییم، میانهٔ داده‌ها نیز در عدد a ضرب شده و با مقدار b جمع می‌شود.

سراسری ۹۷ خ – تجربی
اگر میانگین ۹ داده ۱۸، ۱۶، ۱۱، ۱۴، ۱۰، ۷، a، ۹ و ۲۰ برابر ۱۳ باشد، میانهٔ آنها کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱
۳) ۱۲ ۴) ۱۴

سراسری ۹۰ خ
در ۸۰ دادهٔ آماری دسته بندی شده، فراوانی نسبی دستهٔ اول ۰/۱۱۲۵ می باشد. اگر ۱۰ دادهٔ بزرگتر از میانه به آنها اضافه شود، فراوانی نسبی جدید در دستهٔ اول کدام است؟

۱) ۰/۱۰۲
۲) ۰/۱
۳) ...

سراسری ۹۸ خ – ۱۴۰۳
نمرات آمار ۵۰ دانش آموز یک کلاس در جدول مقابل آمده است. اختلاف میانگین وزنی نمرات از میانهٔ آنها کدام است؟ (۴ گزینه)

x	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۶	۱۸
f	۶	۹	۱۰	۱۲	۸	۵

۱) ۰/۲۸ ۲) ۰/۳۲
۳) ۰/۰۶ ۴) ۰/۳۸

چارک ها ⇐ پس از مرتب کردن داده به صورت صعودی،

داده ها را به چهار قسمت مساوی تقسیم بندی می کنند:

◁ میانهٔ کل داده ها را مشخص می کنیم، که همان چارک دوم است (Q_2).

◁ میانهٔ داده های کمتر از میانهٔ اصلی، چارک اول نامیده می شود (Q_1).

◁ میانهٔ داده های بیشتر از میانهٔ اصلی، چارک سوم نامیده می شود (Q_3).

٪۲۵ Q_1 ٪۲۵ Q_2 ٪۲۵ Q_3 ٪۲۵
(Q_2 = میانه)

مثال داده های ۴۲، ۷، ۱۱، ۳۲، ۲۵، ۱۹/۵، ۱۴، ۲۱/۵، ۲۵ و ۱۰/۵ را در نظر می گیریم. برای یافتن چارک ها، ابتدا این داده ها را به طور صعودی مرتب می کنیم:

۷، ۱۰/۵، ۱۱، ۱۴، ۱۹/۵، ۲۱/۵، ۲۵، ۲۵، ۳۲، ۴۲

$Q_1 = ۱۱$ ، $Q_2 = ۲۰/۵$ (میانگین ۱۹/۵ و ۲۱/۵) ، $Q_3 = ۲۵$

تست ۱۴۰۳
اگر چارک اول مجموعه ای از داده ها، میانگین داده های ۲۰ ام و ۲۱ ام باشد و چارک دوم در بین داده ها موجود باشد، چارک سوم کدام است؟ (۴ گزینه)

۱) دادهٔ ۶۱ ام ۲) میانگین داده های ۶۱ ام و ۶۲ ام
۳) دادهٔ ۶۲ ام ۴) میانگین داده های ۶۲ ام و ۶۳ ام

سراسری ۹۹ نرخ بیکاری یک کشور در ۱۰ سال گذشته به صورت زیر است. مقدار $\frac{Q_1+Q_3-2Q_2}{Q_3-Q_1}$ کدام است؟

۱) $-0/225$ ۲) $-0/125$

۳) $0/175$ ۴) $0/275$

۱۱٫۵ , ۱۲٫۸ , ۱۳٫۵ , ۱۱٫۲ , ۱۲٫۳ , ۱۰٫۶ , ۱۱٫۹ , ۱۰٫۶ , ۳۰٫۲ , ۱۲٫۷

توجه: اختلاف چارک اول و سوم داده‌ها را «دامنهٔ میان چارکی» می‌گوییم و با نماد IQR نشان می‌دهیم.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

توجه ۲: اگر داده‌ها به صورت دسته‌بندی باشند، برای یافتن چارک‌ها، از مرکز دسته‌ها استفاده می‌شود.

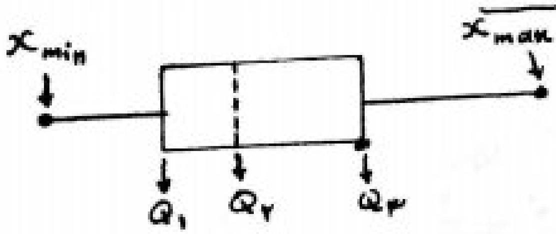
تست با توجه به جدول فراوانی مقابل، دامنهٔ میان چارکی این داده‌ها کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷

۳) ۶ ۴) ۵

حدود دسته	[۴,۸)	[۸,۱۲)	[۱۲,۱۶]
فراوانی	۵	۶	۴

نمودار جعبه‌ای



بر اساس پنج مقدار رسم می‌شود:

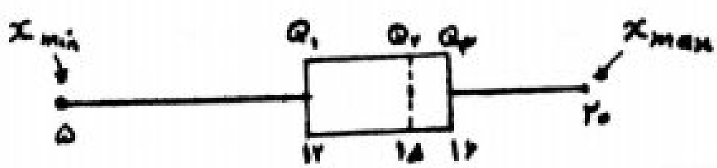
۱. کوچکترین داده ۲. چارک اول ۳. چارک دوم (میانه)

۴. چارک سوم ۵. بزرگترین داده

* محل قرار گرفتن میانه در جعبه، لزوماً وسط جعبه نیست و بستگی به داده‌های آماری دارد.

مثال: رسم نمودار جعبه‌ای برای داده‌های: ۱۳, ۱۶, ۱۲, ۱۶, ۱۵, ۱۴, ۱۵, ۲۰, ۱۰, ۱۸, ۵

مرتب ← ۵ , ۱۰ , $\underset{Q_1}{۱۲}$, ۱۳ , ۱۴ , $\underset{Q_2}{۱۵}$, ۱۵ , ۱۶ , $\underset{Q_3}{۱۶}$, ۱۸ , ۲۰



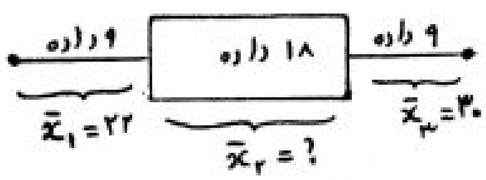
تست دامنهٔ تغییرات داده‌های زیر با دامنهٔ تغییرات داده‌های داخل و روی جعبه در نمودار جعبه‌ای چند واحد اختلاف دارند؟

۶۰، ۵۵، ۴۵، ۲۷، ۳۲، ۳۰، ۲۲، ۲۵، ۴، ۱، ۱۹، ۲۱، ۸، ۲۲

۱) ۴۵ ۲) ۴۶
۳) ۴۷ ۴) ۴۸

سراسری ۹۰ در نمودار جعبه‌ای ۳۶ دادهٔ آماری، میانگین داده‌های دو طرف جعبه، به طور جداگانه، به ترتیب ۲۲ و ۳۰ می‌باشد. اگر میانگین تمام داده‌ها ۲۷/۵ باشد، میانگین داده‌های داخل و روی جعبه کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۸/۵
۳) ۲۹ ۴) ۲۹/۵

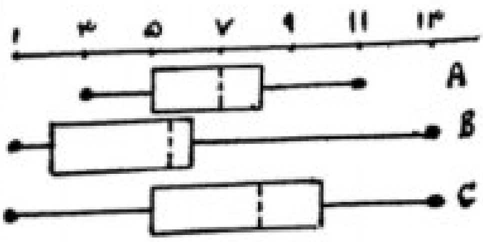


تست نمودار زیر، پرداخت حقوق کارمندان در سه شرکت A، B و C (برحسب میلیون تومان) می‌باشد.

الف) پرداخت حقوق در کدام شرکت بهتر است؟

ب) وضعیت پرداخت حقوق در کدام شرکت به هم نزدیک است؟

پ) در کدام شرکت اختلاف طبقاتی بیشتر است؟



پاسخ به سه سؤال فوق به صورت سه تایی مرتب (الف، ب، پ) کدام است؟

۱) (C ، B ، A) ۲) (B ، A ، C)
۳) (C ، A ، B) ۴) (A ، B ، C)

تجربی ۱۴۰۱ خ چارک دوم تعدادی دادهٔ آماری برابر ۳ است. قرینهٔ میانگین داده‌های کوچک‌تر از میانه، ۶ واحد کوچک‌تر از میانگین داده‌های بزرگ‌تر از میانه است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین داده‌ها کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴/۵
۳) ۳ ۴) ۱/۵

پ) مُد (نما) ← داده‌ای که بیشترین فراوانی را دارد.

◄ اگر دو داده، بیشترین فراوانی را داشته باشند، آن‌گاه این داده‌ها، دو مُد دارند.

◄ اگر همه داده‌ها فراوانی یکسانی داشته باشند، آن‌گاه این داده‌ها، مُد ندارند.

◄ هر تغییری روی داده‌ها اعمال شود، همان تغییر روی مُد نیز رخ می‌دهد.

مثال: مُد داده‌های زیر را تعیین کنید.

الف) ۹،۶،۸، ۸، ۱، ۹، ۸، ۷، ۲ ← مُد ← ۸

ب) ۳،۲،۳، ۵، ۱، ۴، ۴، ۴، ۳ ← مُد ← ۴،۳

پ) ۴،۴، ۳،۳، ۲،۲، ۱،۱ ← مُد ← ندارد

تست اگر داده‌های ۲، ۸، ۸، ۹، ۶، ۸، ۲، ۵، ۶ فاقد مُد باشند، آن‌گاه در نمودار جعبه ای این داده‌ها، میانگین داده‌های درون جعبه کدام است؟

۱) ۵٫۵ ۲) ۵٫۲۵

۳) ۶ ۴) ۷

سراسری ۹۴ خ در مجموعهٔ اعداد $\{x$، ۶۲، ۶۵، ۷۷، ۵۰، ۶۴، ۷۰، ۶۳$\}$، به ازای کدام مقدار x، شاخص‌های میانگین، مُد و میانه باهم برابرند؟

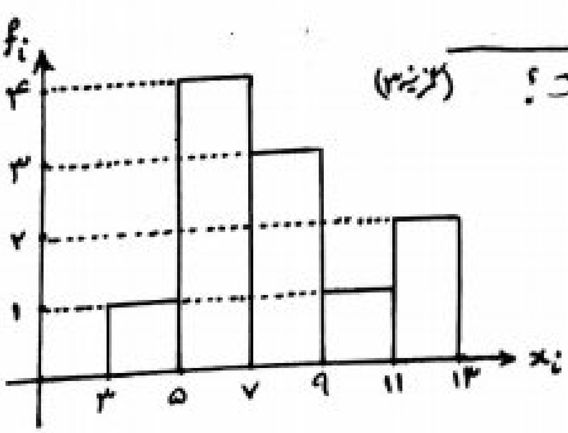
۱) ۶۳ ۲) ۶۵

۳) ۶۴ ۴) تهی

تست با توجه به نمودار بافت نگاشت مقابل، کدام نتیجه‌گیری درست است؟ (گزینه ۳)

۱) میانگین > مُد > میانه ۲) مُد > میانگین > میانه

۳) میانه > میانگین > مُد ۴) میانه > میانگین = مُد



دادهٔ دورافتاده ← تفاوت بسیار زیادی با سایر داده‌ها دارد و میانگین را تحت تأثیر قرار می‌دهد. اما روی میانه و مد تأثیری ندارد و یا تأثیر کمی دارد.

مثال:

الف) $9\ ,\ 12\ ,\ \underbrace{13\ ,\ 15}_{Q_2 = 14 \text{ میانه}}\ ,\ 15\ ,\ 50 \longrightarrow \bar{x} = \frac{9+12+13+15+15+50}{6} = 19$

دادهٔ دورافتاده: ۵۰

ب) $9\ ,\ 12\ ,\ 13\ ,\ 15\ ,\ 15 \longrightarrow \bar{x} = \frac{9+12+13+15+15}{5} = 12/8$

میانه $Q_2 = 13$

همان طور که ملاحظه می‌شود، با حذف دادهٔ دورافتاده، بیشترین تغییر روی میانگین رخ می‌دهد. میانه کمترین تغییر را دارد و مُد در هر دو گروه از داده‌ها ثابت است (عدد ۱۵).

نتیجه: برای انتخاب معیار بهتر، هرگاه دادهٔ دورافتاده وجود داشته باشد، به کار بردن میانه نسبت به میانگین ارجح‌تر است.

تست: درصد تورم در سال گذشته به طور ماه به ماه به صورت

۱۸ , ۴۰ , ۱۷ , ۱۳ , ۱۱/۸ , ۹ , ۹/۵ , ۱۲ , ۱۰ , ۱۰ , ۹ , ۸

اعلام شده است. برای بررسی آماری کدام شاخص پیشنهاد می‌شود؟

۱) مُد ۲) فراوانی
۳) میانه ۴) میانگین

تست ۱۴۰۳: یک شرکت بیمه برای تعیین حق بیمه شخص ثالث در سال آینده، خسارت‌های پرداخت شده در سال جاری را مورد بررسی قرار داده است. میانگین خسارت‌های پرداخت شده ۸۵ میلیون ریال، میانه آنها برابر با ۴۲/۲ میلیون ریال و مد آنها ۹۰ میلیون ریال است. این شرکت کدام شاخص را برای تعیین حق بیمه در سال آینده در نظر بگیرد تا ضرر نکند؟ (تجربی)

۱) مُد ۲) فراوانی
۳) میانه ۴) میانگین

معیارهای پراکندگی : ۱. دامنهٔ تغییرات ۲. واریانس ۳. انحراف معیار ۴. ضریب تغییرات

چرا معیارهای پراکندگی مورد نیاز است؟ به مثال زیر که میزان درآمد سه نفر را در سه جامعهٔ مختلف نشان می‌دهد، توجه کنید:

	جامعهٔ A	جامعهٔ B	جامعهٔ C
درآمد نفر اول	۳	۲/۵	۷
" " دوم	۳	۳	۱/۵
" " سوم	۳	۳/۵	۰/۵
میانگین	۳	۳	۳

در هر سه جامعه، میانگین درآمد سه نفر یکسان است. میانه در دو جامعهٔ A و B با میانگین برابر است و در جامعهٔ C برابر با عدد ۵ را است. هر سه جامعه فاقد مُد می‌باشند. بنابراین با معیارهای گرایش به مرکز نمی‌توان قضاوت درستی در مورد سه جامعهٔ مذکور داشت.

۱. دامنهٔ تغییرات

دامنهٔ تغییرات ← اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین مقدار داده را می‌گوییم.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

◁ اگر همه داده‌ها باهم برابر باشند، دامنهٔ تغییرات برابر صفر می‌شود و برعکس.

◁ اگر به تمام داده‌ها، یک عدد ثابت مانند b اضافه یا کم گردد، دامنهٔ تغییرات عوض نمی‌شود.

◁ اگر تمام داده‌ها، در عدد ثابت مانند a ضرب شوند، دامنهٔ تغییرات نیز در $|a|$ ضرب می‌شود.

◁ دامنهٔ تغییرات یک معیار سریع برای تعیین میزان پراکندگی داده‌هاست. به عبارت دیگر

هرچه دامنهٔ تغییرات داده‌ها زیاد باشد، پراکندگی داده‌ها زیاد است.

◁ دامنهٔ تغییرات فقط بزرگترین و کوچکترین داده را در نظر می‌گیرد، پس لزوماً معیار مناسبی برای پراکندگی داده‌ها نیست!!

تست: دامنهٔ تغییرات داده‌های $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ برابر ۱۷ است. دامنهٔ تغییرات داده‌های $-10a_i - 9$ به ازای $1 \le i \le 10$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۱۲- ۳) ۱۱۲ ۴) ۱۰۲

۲. **واریانس** ← میانگین مجذور مقادیر اختلاف از میانگین داده‌ها را می‌گوییم. نماد ← σ^2

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

◁ ویژگی مهم واریانس آن است که پراکندگی داده‌ها را با در نظر گرفتن تمام داده‌ها، مورد بررسی قرار می‌دهد.

◁ بررسی پراکندگی داده‌ها زمانی معنی پیدا می‌کند که هر یک از داده‌ها نسبت به یک مرکز مقایسه شوند.
(و بهترین معیار برای مرکز داده‌ها، همان میانگین داده‌ها است)

◁ برای یافتن واریانس داده‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مرحله۱: محاسبه میانگین کل داده‌ها　مرحله۲: محاسبهٔ اختلاف از میانگین برای هر داده
یعنی فاصله (تفاضل) هر داده از میانگین را می‌یابیم.

مرحله۳: محاسبهٔ "مربع" مقادیر به دست آمده از مرحلهٔ ۲

توجه کنید که می‌دانیم مجموع اختلاف از میانگین داده‌ها، همواره صفر است
و برای حل این مشکل، از توان دوم مقادیر اختلاف از میانگین کمک می‌گیریم

مرحله۴: محاسبهٔ میانگین مقادیر به دست آمده از مرحله ۳

(یعنی مجموع مربع‌های اختلاف از میانگین تمام داده‌ها را می‌یابیم و جواب را بر تعداد داده‌ها تقسیم می‌کنیم)

مثال: واریانس داده‌های ۸, ۱۴, ۲۰, ۱۶, ۸, ۱۲ را بیابید.

مرحله۱: $\bar{x} = \frac{12+8+16+20+14+8}{6} = 13 \xrightarrow{\text{مرحله۲}} \begin{cases} 12-13=-1 \;,\; 8-13=-5 \\ 16-13=3 \;,\; 20-13=7 \\ 14-13=1 \;,\; 8-13=-5 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{مرحله۳}} \begin{cases} (-1)^2=1 \;,\; (-5)^2=25 \\ 3^2=9 \;,\; 7^2=49 \\ 1^2=1 \;,\; (-5)^2=25 \end{cases} \xrightarrow{\text{مرحله۴}} \sigma^2 = \frac{1+25+9+49+1+25}{6} = 18{,}33$

سراسری ۱۴۰۱: میانگین شش دادهٔ آماری عددی طبیعی است و توان دوم انحراف از میانگین این داده‌ها، به صورت $9, a^2, 0, 9, b^2, 1$ است. اگر واریانس این داده‌ها برابر ۴ باشد، مقدار ab کدام است؟ $(a, b \in \mathbb{Z})$

۱) -۴　۲) ۴
۳) ۲　۴) -۲

تست در نمودار جعبه‌ای داده‌های ۹، ۱۸، ۱۹، ۱۸، ۱۲، ۱۵، ۱۵، ۱۵، ۱۱، ۱۵ واریانس داده‌های داخل و روی جعبه کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴٫۲۵
۳) ۳ ۴) ۳٫۷۵

حل

مرتب $\longrightarrow$ ۹ , ۱۱ , ۱۲ , ۱۵ , ۱۵ , ۱۵ , ۱۸ , ۱۸ , ۱۹

$Q_1 = \frac{11+12}{2} = 11.5$ $\quad Q_2$ $\quad Q_3 = \frac{18+18}{2} = 18$

واضح است که داده‌های داخل و روی جعبه عبارت‌اند از: ۱۲، ۱۵، ۱۵، ۱۵، ۱۸، ۱۸

و برای محاسبه واریانس این داده‌ها داریم:

$$\bar{x} = \frac{12+15+15+15+18+18}{6} = 15.5$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(12-15.5)^2 + 3(15-15.5)^2 + 2(18-15.5)^2}{6} = 4.25 \checkmark$$

تست ۸ داده آماری با میانگین ۱۵ و واریانس ۴ مفروض‌اند. اگر دو داده ۱۲ و ۱۸ به این داده‌ها افزوده شود در این صورت واریانس ۱۰ داده حاصل چه تغییری می‌کند؟

۱) یک واحد کم می‌شود. ۲) تغییری نمی‌کند. ۳) یک واحد زیاد می‌شود. ۴) دو واحد زیاد می‌شود.

حل

$$\begin{cases} \bar{x} = 15 \xrightarrow{n=8} x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 8 \times 15 = 120 \\ \sigma^2 = 4 \to \dfrac{(x_1-15)^2 + (x_2-15)^2 + \dots + (x_8-15)^2}{8} = 4 \end{cases}$$

$$\to (x_1-15)^2 + (x_2-15)^2 + \dots + (x_8-15)^2 = 32$$

از طرفی چون $15 = \frac{12+18}{2}$ ، پس با افزودن این دو داده جدید، میانگین ده داده حاصل نیز ۱۵ است. پس

$$\sigma^2_{\text{جدید}} = \frac{\overbrace{(x_1-15)^2 + (x_2-15)^2 + \dots + (x_8-15)^2}^{32} + (12-15)^2 + (18-15)^2}{10} = \frac{32+9+9}{10} = 5$$

پس واریانس ۱۰ داده حاصل، یک واحد افزایش می‌یابد.

نکته ۱: گاهی اوقات در مسأله، به جای داده‌ها، مجموع مربعات آنها به همراه میانگین یا مجموع داده‌ها و تعداد داده‌ها، مشخص است. در این صورت برای محاسبهٔ واریانس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

فرمول دوم واریانس

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

اثبات

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \dots + (x_n-\bar{x})^2}{n}$$

$$\overset{\text{اتحاد}}{=} \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - 2\bar{x}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + n\bar{x}^2}{n}$$

$$\overset{\text{تفکیک}}{=} \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - 2\bar{x}\underbrace{\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)}_{\bar{x}} + \bar{x}^2$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

سراسری ۹۲ میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۲ و واریانس آنها ۵ است. میانگین مساحت مربع‌ها کدام است؟

۱) ۱۲۴
۲) ۱۳۴
۳) ۱۴۹
۴) ۱۶۹

تست H.W اگر مجموع ۱۰ دادهٔ آماری ۴۰ و مجموع مربعات آنها ۲۰۰ باشد، واریانس این داده‌ها کدام است؟

(گزینه ۲)

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۱۶
۴) ۲۰

نکته ۲: اگر تمام داده‌ها با عدد ثابتی مانند b جمع شوند، واریانس آنها تغییری نمی‌کند.
اگر تمام داده‌ها در عدد ثابتی مانند a ضرب شوند، واریانس آنها، در مجذور آن عدد ثابت یعنی در a^2، ضرب می‌شود.

تست واریانس داده‌های $a+5, a+3, a+1, a-1$ چند برابر واریانس داده‌های $a+9, a+6, a+3, a, a-3$ است؟

۱) $\frac{3}{16}$ ۲) $\frac{5}{18}$
۳) $\frac{7}{20}$ ۴) $\frac{8}{21}$

راه‌تستی: واریانس n داده، که تشکیل یک تصاعد عددی (حسابی) با قدرنسبت d می‌دهند، برابر است با

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12}d^2}$$

در تست بالا:
- تصاعد حسابی در گروه اول داده‌ها: ۴ داده با قدرنسبت ۲ $\rightarrow \sigma_1^2 = \frac{4^2-1}{12}(2)^2 = 5$
- « « « دوم « : ۵ داده با قدرنسبت ۳ $\rightarrow \sigma_2^2 = \frac{5^2-1}{12}(3)^2 = 18$

$\xrightarrow{\text{نسبت}} \frac{5}{18}$ ✓

☺

◀ ریاضیات نشان می‌دهد که در طول یک سال
" اندکی بهتر یا بدتر بودن "
چگونه موفقیت یا شکست شما را رقم می‌زند.

$$\begin{cases} (1+0/01)^{365} = 37/8 \\ (1-0/01)^{365} = 0/03 \end{cases}$$

پس برای موفقیت کمی بیشتر تلاش کنیم. ☺

◁ نتیجه:

نکته ۳: اگر تمام داده‌ها با هم مساوی باشد، واریانس آنها صفر است و برعکس.

سراسری ۹۱: واریانس ۱۱ دادهٔ آماری صفر است. اگر داده‌های ۲۴، ۱۲ و ۲۶ به آن‌ها اضافه شود، میانگین داده‌ها تغییری نمی‌کند. واریانس ۱۴ دادهٔ حاصل کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۲

۳) ۱   ۴) صفر

نکته ۴: اگر داده‌های آماری دارای وزن یا فراوانی باشند، آن‌گاه واریانس آنها عبارت است از:

$$\sigma^2=\frac{f_1(x_1-\bar{x})^2+f_2(x_2-\bar{x})^2+\dots+f_n(x_n-\bar{x})^2}{f_1+f_2+\dots+f_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

* در حالت داده‌های موزون، به جای f از W و به جای $\bar{x}$ از $\bar{x}_w$ استفاده می‌شود.

سراسری ۹۴: اگر میانگین داده‌های دسته‌بندی شده، برابر ۱۶ باشد، با تعیین فراوانی دستهٔ چهارم، مقدار واریانس کدام است؟

۱) ۴٫۸۵   ۲) ۴٫۹۲

۳) ۵٫۵۵   ۴) ۵٫۷۴

نمایندهٔ دسته	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی	۵	۷	۱۰	α	۳

حل: از آن‌جایی که $\bar{x}=16$، پس اگر ۱۶ واحد از نمایندهٔ هر دسته کم کنیم، میانگین نیز ۱۶ واحد کم می‌شود و میانگین داده‌های جدید (یعنی اعداد ۴، ۲، ۰، ۲-، ۴-) برابر صفر می‌گردد (راه سریع)، داریم:

$$\frac{5\times(-4)+7\times(-2)+10(0)+\alpha\times(2)+3(4)}{5+7+10+\alpha+3}=0 \Rightarrow -22+2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=11$$

اکنون برای محاسبهٔ واریانس داریم:

$$\sigma^2=\frac{5(12-16)^2+7(14-16)^2+10(16-16)^2+11(18-16)^2+3(20-16)^2}{5+7+10+11+3}$$

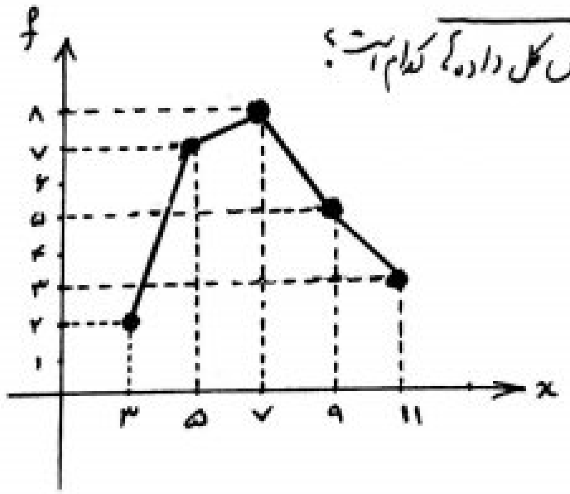
$$=\frac{5\times(-4)^2+7(-2)^2+10\times(0)+11(2)^2+3(4)^2}{36}=\frac{200}{36}=5{,}55 ✓$$

سراسری ۹۷ خ تجربی — در داده‌های آماری با جدول فراوانی زیر، مقدار واریانس با روش سریع کدام است؟

x	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱	۲۳
f	۶	۸	۷	۱۰	۹

۱) ۳٫۲۶ ۲) ۳٫۸۲
۳) ۷٫۳۲ ۴) ۷٫۶۴

سراسری ۹۵ — با توجه به نمودار چندبر فراوانی مقابل، واریانس کل داده‌ها کدام است؟



۱) ۴٫۵ ۲) ۴٫۸
۳) ۴٫۹۲ ۴) ۵٫۱۲

حل: واضح است که جدول فراوانی داده‌ها به صورت زیر است:

x	۳	۵	۷	۹	۱۱
f	۲	۷	۸	۵	۳

اکنون برای محاسبه واریانس داریم:

سراسری ۱۴۰۰ در جدول فراوانی داده‌های زیر، مقدار میانه برابر ۱۳٫۵ و اختلاف چارک اول و سوم ۱۷ است. به هر یک از داده‌های جدول، ۴۰ واحد اضافه می‌کنیم. واریانس جدول جدید کدام است؟

۱) ۷۱ ۲) ۷۱٫۵
۳) ۷۲ ۴) ۷۲٫۵

داده	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۲۸	۳۱	a
فراوانی	۳	۲	۶	۳	۲	۵	۱

سراسری ۱۴۰۰ خ ۱۴۰۳ جدول فراوانی داده‌های زیر مفروض اند. اگر مقدار میانه برابر ۱۴ باشد، واریانس داده‌ها کدام است؟

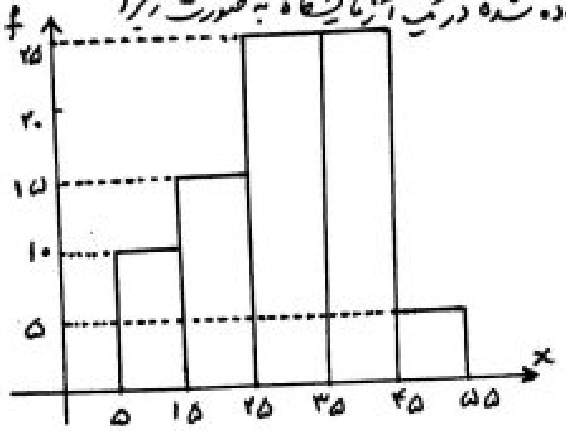
۱) ۵۴٫۸۶ ۲) ۵۵٫۰۳
۳) ۵۵٫۳۶ ۴) ۵۵٫۶۳

داده	۸	۱۲	۱۳	۱۴	۲۶	۲۷	۲۸	a
فراوانی	۳	۲	۶	۳	۱	۱	۵	۱

(گزینه ۳)

نکته ۵: برای محاسبهٔ واریانس داده‌های دسته‌بندی شده، در جدول فراوانی، از مرکز دسته‌ها استفاده می‌کنیم.

سراسری ۹۷ انسانی نمودار بافت‌نگاشت مربوط به طول ۸۰ گیاه پرورش داده شده در یک آزمایشگاه به صورت زیر است. واریانس طول این ۸۰ گیاه کدام است؟



۱) ۹۰ ۲) ۱۰۰
۳) ۱۲۰ ۴) ۱۲۵

حل: جدول فراوانی داده‌ها، با توجه به مرکز هر دسته، عبارت است از:

x_i	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
f_i	۱۰	۱۵	۲۵	۲۵	۵

اکنون برای محاسبهٔ واریانس این داده‌ها داریم:

نکته ۶: برای محاسبهٔ واریانس از روی فراوانی نسبی داده‌ها، داریم:

$$\sigma^2 = \frac{f_1}{n}(x_1-\bar{x})^2 + \frac{f_2}{n}(x_2-\bar{x})^2 + \dots + \frac{f_n}{n}(x_n-\bar{x})^2$$

سراسری ۹۳ جدول روبه‌رو فراوانی نسبی داده‌های دسته‌بندی شده است. با تعیین α، مقدار واریانس کدام است؟

مرکز دسته	۸	۱۲	۱۶	۲۰
فراوانی نسبی	۰/۱	۰/۲۵	۰/۲	α

۱) ۱۶/۵ ۲) ۱۶/۸
۳) ۱۷/۲ ۴) ۱۷/۶

حل:

می‌دانیم $0/1 + 0/25 + 0/2 + \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 0/45$

$$\bar{x} = 0/1 \times 8 + 0/25 \times 12 + 0/2 \times 16 + 0/45 \times 20 = 16$$

$$\sigma^2 = 0/1(8-16)^2 + 0/25(12-16)^2 + 0/2(16-16)^2 + 0/45(20-16)^2 = 17/6$$

۳. انحراف معیار ← جذر واریانس را می‌گویند ← نماد σ

(توجه کنید که چون واریانس به صورت واحد مربع بیان می‌شود، پس با جذر گرفتن از آن به عددی می‌رسیم که برحسب واحد داده‌ها باشد و نه مجذور آنها.)

بنابراین انحراف معیار برای n داده‌ی $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر است با:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}$$

(سایر نکات واریانس به همین ترتیب، با جذر گرفتن، برای انحراف معیار برقرارند)

نتیجه ۱: در نکات مربوط به واریانس دیدیم که

◁ اگر مقداری ثابت به همه داده‌ها اضافه شود، واریانس آنها تغییری نمی‌کند، پس انحراف معیار هم تغییری نمی‌کند.

◁ اگر مقدار ثابت مانند a در تمام داده‌ها ضرب شود، واریانس آنها در a^2 و انحراف معیار آنها در $|a|$ ضرب می‌شود.

نتیجه ۲: اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها، عددی کوچک باشد، به این معناست که پراکندگی داده‌ها حول میانگین آنها کم و در نتیجه داده‌ها به هم نزدیک‌ترند (جامعه یک‌دست می‌باشد و یا به عبارتی عادلانه‌تر است). اما اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها، عددی بزرگ باشد، بدین معناست که پراکندگی داده حول میانگین آنها زیاد و در نتیجه داده‌ها از هم دور می‌باشند (وجود اختلاف طبقاتی زیاد در جامعه!!)

تست: اگر انحراف معیار داده‌های $-\frac{1}{5}x_1+2, -\frac{1}{5}x_2+2, \dots, -\frac{1}{5}x_8+2$ برابر ۱,۴ باشد، آنگاه انحراف معیار داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_8$ کدام است؟

۱) ۷ ✓ ۲) ۲,۸

۳) ۳,۴ ۴) ۷

سراسری ۹۷ در جدول فراوانی داده‌های آماری زیر، انحراف معیار به روش سریع، کدام است؟

x	۲۷	۲۹	۳۱	۳۳	۳۵
f	۷	۱۰	۱۳	۱۱	۹

۱) ۲٫۶ ۲) ۲٫۷
۳) ۲٫۸ ۴) ۲٫۹

حل: ابتدا عدد ۳۱ (که در وسط داده‌ها قرار دارد) را از همه داده‌ها کم می‌کنیم. داریم:

x − ۳۱	−۴	−۲	۰	۲	۴
f	۷	۱۰	۱۳	۱۱	۹

$$\rightarrow \bar{x} = \frac{7\times(-4) + 10\times(-2) + 0 + 11\times 2 + 9\times 4}{7+10+13+11+9}$$

$$\rightarrow \bar{x} = 0/2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 =$$

سراسری ۹۶ یک جامعه با اندازهٔ ۱۲ و واریانس ۱۲٫۶ با جامعهٔ دیگری با اندازهٔ ۲۴ و واریانس ۷٫۲ تشکیل جامعه‌ای جدید می‌دهند. اگر میانگین این دو جامعه یکسان باشد، انحراف معیار جامعهٔ جدید کدام است؟

۱) ۲٫۹ ۲) ۳
۳) ۳٫۱ ۴) ۳٫۲

«نکته مهم»

اگر دو جامعه میانگین یکسان داشته باشند، درصورتی که اندازهٔ اولی n_1 و واریانس آن σ_1^2 و اندازهٔ دومی n_2 و واریانس آن σ_2^2 باشد، آن‌گاه واریانس جامعهٔ حاصل از ترکیب آنها برابر است با:

$$\frac{n_1\times\sigma_1^2 + n_2\times\sigma_2^2}{n_1+n_2}$$

(این نکته قابل تعمیم است)

تجربی ۱۴۰۱ ۹ دادهٔ آماری را در نظر بگیرید. اختلاف هشت دادهٔ آماری از میانگین برابر ۱+ یا ۱− و اختلاف یک داده از میانگین برابر صفر است. انحراف معیار این داده‌ها کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$
۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

تجربی ۱۴۰۱ خ انحراف معیار شش دادهٔ آماری ۲ و اختلاف آنها از میانگین برابر a، ۰، ۱−، b، ۱، ۳ است. اگر $a<0$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲
۳) ۳− ۴) ۲−

سراسری ۹۷ خ

شش داده آماری با میانگین ۱۲ و واریانس ۶ با ۹ داده دیگر با میانگین ۱۴ و واریانس ۴ ترکیب شده‌اند. انحراف معیار گروه جدید کدام است؟

۱) ۲٫۲ ۲) ۲٫۳

۳) ۲٫۴ ۴) ۲٫۵

سراسری ۹۳ تجربی H.W

در ۲۵ داده آماری، میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ می‌باشد. اگر داده‌های ناجور ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ از بین آنها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

(گزینه ۴)

۱) ۱۴٫۷۲ ۲) ۱۴٫۸۱

۳) ۱۵٫۳۳ ۴) ۱۶٫۶۶

۴. ضریب تغییرات ← حاصل تقسیم انحراف معیار داده‌ها بر میانگین داده‌ها است.

ضریب تغییرات را با C.V نشان می‌دهند.

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

◁ در حالتی که واریانس (انحراف معیار) دو جامعهٔ مورد مقایسه، یکسان باشد، میزان پراکندگی را براساس ضریب تغییرات بررسی می‌کنند.

◁ ضریب تغییرات، عبارت است از میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین.

◁ هرچقدر ضریب تغییرات کمتر باشد، میزان پراکندگی داده‌ها کمتر است و این موضوع در علم آمار مطلوب می‌باشد.

◁ از ضریب تغییرات، که معیاری بدون واحد می‌باشد، می‌توان برای مقایسه میزان پراکندگی دو یا چند جامعهٔ آماری که برحسب یک واحد نمی‌باشند، استفاده کرد. به عنوان مثال مقایسه پراکندگی داده‌های قد و داده‌های وزن افراد در یک کلاس.

◁ اگر تمام داده‌ها با عدد ثابت مثبتی مانند a جمع شوند، ضریب تغییرات کاهش می‌یابد. زیرا انحراف معیار تغییری نمی‌کند، اما میانگین به اندازهٔ a افزایش می‌یابد.
همچنین اگر تمام داده‌ها به اندازهٔ عدد ثابت مثبتی مانند a کم شوند، ضریب تغییرات افزایش می‌یابد.

◁ اگر تمام داده‌ها در عدد ثابت مثبتی مانند a ضرب شوند، ضریب تغییرات تغییر نمی‌کند اما اگر عدد ثابت a، منفی باشد، ضریب تغییرات، قرینه می‌گردد.

سراسری ۹۸ میزان بارندگی یک استان در ۱۰ سال گذشته به صورت زیر است. در نمایش نمودار جعبه‌ای، ضریب تغییرات داده‌های داخل جعبه کدام است؟ (۵۹ , ۳۹ , ۵۶ , ۴۶ , ۵۰ , ۵۴ , ۳۷ , ۴۲ , ۵۷ , ۳۲)

۱) ۰/۰۷ ۲) ۰/۰۹
۳) ۰/۱۲ ۴) ۰/۱۵

سراسری ۹۲ خ ۹۶ — در ۱۲ داده آماری، مجموع تمام داده‌ها ۷۲ و مجموع مجذورات آنها ۴۸۰ می‌باشد. ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{2}{9}$

۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{5}$

سراسری ۹۵ — داده‌های ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ = x_i مفروض است. ضریب تغییرات داده‌های $6 + 12x_i = y_i$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۴۸

۳) ۰/۵۲ ۴) ۰/۶

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3 \rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}} = \sqrt{2}$$

$$\rightarrow C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \xrightarrow{\text{برای داده‌های جدید}} (C.V)_{\text{جدید}} = \underline{\qquad}$$

سراسری ۹۳ — با توجه به جدول آماری دسته‌بندی شده روبه‌رو، مقدار ضریب تغییرات داده‌های x کدام است؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۰۸

۳) ۰/۱ ۴) ۰/۲

$x-44$	-3	-1	1	3	5
فراوانی	۴	۷	۵	۳	۱

حل: اگر میانگین داده‌های داده شده در جدول را بیابیم، آن‌گاه میانگین داده‌های x، ۴۴ واحد بیشتر است.

$$\text{میانگین داده‌های جدول} = \frac{4\times(-3)+7\times(-1)+5\times1+3\times3+1\times5}{4+7+5+3+1} = 0 \xrightarrow{+44} \bar{x} = 44$$

اما انحراف معیار داده‌های جدول با انحراف معیار داده‌های x، برابر است، پس

$$\sigma = \sqrt{\frac{4(-3)^2+7(-1)^2+5(1)^2+3(3)^2+1\times(5)^2}{20}} = \sqrt{5} \xrightarrow{\text{برای داده‌های } x} C.V = \frac{\sqrt{5}}{44} = \text{۰/۰۵}$$

$(\sqrt{5} \simeq 2{,}23)$

سراسری ۹۵ تجربی — میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات ۰/۲ محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

۱) ۲۲۹ ۲) ۲۳۲

۳) ۲۳۴ ۴) ۲۳۶

سراسری ۹۸ تجربی — در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند. میانگین نمرات مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۸۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ است. کدام گروه بهتر می‌باشد؟

سراسری ۹۳ خ ۹۸ خارج — نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به صورت مقابل است. دقت عمل کدام بیشتر است؟

A: ۱۵، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۹

B: ۱۲، ۱۴، ۱۷، ۱۴، ۱۷، ۱۸

۱) A ۲) B

۳) یکسان ۴) غیرقابل پیش‌بینی

حل:

$$\begin{cases} \bar{x}_A = \dfrac{15+14+15+16+17+19}{6} = 16 \\ \bar{x}_B = \dfrac{12+14+17+14+17+18}{6} = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_A^2 = \frac{(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2+(0)^2+(1)^2+(3)^2}{6} = \frac{16}{6} \quad , \quad \sigma_B^2 = \frac{(0)^2+(-2)^2+(1)^2+(-2)^2+(1)^2+(2)^2}{6} = \frac{14}{6}$$

پس $\sigma_B < \sigma_A$ و لذا $(C.V)_B < (C.V)_A$ ← دقت B بیشتره

آمار استنباطی: فرایند نتیجه‌گیری درباره پارامترهای جامعه بر اساس نمونه است.

به عبارت دیگر چون همواره دسترسی به کل جامعه (عمل سرشماری) به راحتی امکان پذیر نیست (زمان بر و پرهزینه است)، بنابراین با استفاده از نتایج نمونه‌ها، تجزیه و تحلیل داده‌های نمونه‌ها به کمک نظریه احتمال و تخمین، به تصمیماتی در مورد کل جامعه می‌توان دست یافت.

▷ آمارگیری: گردآوری داده‌ها به یکی از روش‌های ممکن.

▷ آمارگیر: کسی که آمارگیری را انجام می‌دهد.

روش‌های گردآوری داده‌ها

۱. مشاهده: گردآوری داده‌ها بدون نیاز به فرد پاسخگو (اگر به دقت زیادی نیاز باشد، مناسب نیست)

۲. پرسش‌نامه: مجموعه سؤالات از پیش تعیین شده که توسط تعدادی پاسخگو تکمیل می‌شود (بسیار مرسوم)

(هرچند اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمان بر است.)

▷ در ضمن سؤالات باید با هدف آمارگیری هماهنگ باشد. سؤالات تا حد ممکن ساده و واضح باشد و از مطرح کردن سؤالاتی که پاسخ دادن به آنها نوعی اکراه به همراه داشته باشد و یا سؤالاتی که نظر خاصی را القا می‌کنند، خودداری شود.

۳. مصاحبه: معمولاً بین دو نفر صورت می‌گیرد: یکی مصاحبه‌گر (همان آمارگیر) و دیگری مصاحبه‌شونده که پاسخگو است. از این روش بیشتر زمانی استفاده می‌شود که آمارگیر از همه پاسخ‌های ممکن اطلاع کافی ندارد. (هرچند ممکن است سؤالات در حین مصاحبه تغییر کنند)

۴. دادگان: شامل مجموعه‌ای از اطلاعات ذخیره شده است و داده‌ها از این مجموعه به دست می‌آیند.

(هرچند همیشه اطلاعات قبلی در اختیار نیست)

مثال: در هر یک از موضوعات زیر، روش بهتر برای گردآوری داده‌ها را مشخص کنید:

الف) میزان تأخیر پروازهای داخلی فرودگاه در سال گذشته ←

ب) نظر دانش‌آموزان در مورد کیفیت آزمون‌های برگزار شده در سال تحصیلی ←

پ) تعداد وسایل نقلیه عبوری از ساعت ۱۲ شب تا ۶ بامداد از اتوبان خاص ←

ت) بررسی راه کار بهبود الگوی تغذیهٔ مردم در سطح جامعه ←

ث) تحقیق در مورد تعداد ازدواج‌های ثبت شده در استان هرمزگان ←

ج) سرشماری نفوس و مسکن در ایران ←

چ) بررسی ساعت‌های خواب دانش‌آموزان کلاس ←

ح) میزان رضایت مشتریان بانک از نحوهٔ برخورد و رسیدگی به درخواست آنها ←

خ) سن همه دانش‌آموزان مدرسه برحسب ماه در پایهٔ دوازدهم ←

د) تعداد سرنشینان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر ←

ذ) بررسی میزان مطالعهٔ زنان خانه‌دار در کشور ←

پارامتر (پارامتر جامعه): یک مشخصهٔ عددی است که توصیف‌کنندهٔ جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند قابل محاسبه است. پارامتر جامعه به رغم ثابت بودن، مجهول است.

آماره (آمارهٔ نمونه): مشخصهٔ عددی است که توصیف‌کنندهٔ جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه به دست می‌آید. آماره‌ها از نمونه‌ای به نمونهٔ دیگر تغییر می‌کنند و از آنها برای تخمین پارامتر جامعه استفاده می‌شود.

مثال: در یک زمین کشاورزی با کشت هندوانه، وزن تک تک هندوانه‌ها را اندازه‌گیری می‌کنیم. این عمل ...... است و میانگین وزن همه هندوانه‌های قابل برداشت در این زمین، ...... می‌باشد (زیرا این عدد برای همه اعضای جامعه است). برای بررسی مزهٔ هندوانه‌ها، بخشی از کل هندوانه‌ها را بررسی می‌نماییم، که این بخش ...... نامیده می‌شود و نسبت تعداد هندوانه‌های دارای مزهٔ "خوب" در این بخش، یک .... است.

مثال: در هر یک از موارد زیر، مشخص کنید عددی که زیر آن خط کشیده شده است، پارامتر جامعه یا آماره نمونه است؟

الف) در یک دبیرستان، ۴۸٫۲ درصد دانش آموزان با دوچرخه به مدرسه می آیند.

ب) در یک دبیرستان، با بررسی نمونه ای از دانش آموزان پایه دوازدهم دریافته ایم که ۴۷ درصد آنها با دوچرخه می آیند.

پ) در یک نظرسنجی علمی، ۵۲ درصد از دانشمندان اروپایی مرکز تحقیقات بین المللی گفته اند که زمین در حال گرم شدن است.

ت) سخنگوی سازمان بیمه اعلام کرده است که نسبت همه زنانی که بیمه عمر دارند، برابر ۳۰ درصد است.

ث) مدیریت هتل دریافته است که از بین ۲۰ مهمان انتخابی، ۱۰ درصد آنها قصد سفر دوباره و اقامت در این هتل را دارند.

ج) در یک نظرسنجی، درباره مشاغل، ۱۲٫۵ درصد از افرادی که مورد سؤال قرار گرفته اند، بیکار بوده اند.

چ) نیروی انتظامی اعلام کرده است که تعداد سرقت های سال گذشته در شهر تهران، که شامل تلفن همراه بوده، برابر ۲۶۴۱ عدد است.

ح) در نمونه تصادفی از دندان پزشکان، ۸۰ درصد آنها یک خمیر دندان خاص را برای مسواک زدن توصیه می کنند.

خ) یک شرکت تولید کننده گوشی تلفن همراه، اعلام کرده است میانگین عمر همه محصولاتش، حداقل ۵ سال است.

نمونه گیری و روش های آن

نمونه گیری: فرایند انتخاب نمونه ای از یک جامعه، به منظور تعمیم اطلاعات آن بر جامعه

اگر جامعه آماری کوچک باشد، برای مطالعه آن از سرشماری استفاده می کنیم، ولی قبلاً دیدیم که سرشماری معایبی دارد و برای جامعه بزرگ، باید از طریق نمونه گیری بررسی را انجام دهیم.

الف) نمونه گیری غیراحتمالی: عضوهای جامعه، شانس مشخصی برای انتخاب شدن در نمونه ندارند.

روش ها:

۱. نمونه گیری در دسترس (راحت): عضوهای در دسترس در نمونه انتخاب می شوند.

۲. نمونه گیری غیرتصادفی: عامل شانس در نمونه نقشی ندارد.

۳. نمونه گیری قضاوتی: به سراغ اعضای خاصی از جامعه می رویم.

⋮

مثال: روش نمونه‌گیری در هر یک از بررسی‌های زیر را مشخص کنید.

الف) برای بررسی سلامت دهان و دندان به یک مرکز دندان پزشکی در محله خود مراجعه کرده‌ایم.

ب) برای بررسی از یک قفس بزرگ خرگوش‌های یک آزمایشگاه، بدون برنامه ریزی قبلی، خرگوش‌هایی را برداریم که دستمان به آنها می‌خورد.

پ) در مطالعاتی که در آنها فرایند سنجش برای شخصی که سنجیده می‌شود ناخوشایند یا دردسر آفرین است، داوطلبانی که حاضر به پاسخ به سؤالات ما در یک نظرسنجی می‌شوند، انتخاب می‌گردند.

ب) **نمونه‌گیری احتمالی:** نمونه‌گیری است که همهٔ واحدهای آماری، احتمالی معلوم برای انتخاب در نمونه داشته باشد و از روشی تصادفی برای انتخاب واحدهای نمونه استفاده شود.

روش‌ها: ۱. تصادفی ساده ۲. خوشه‌ای ۳. طبقه‌ای ۴. سامانمند (سیستماتیک)

---

۱. نمونه‌گیری تصادفی ساده

روشی از نمونه‌گیری است که در آن همهٔ واحدهای آماری برای انتخاب شدن در نمونه، احتمال یکسان دارند.

مثال: می‌خواهیم متوسط درآمد کارکنان یک مجتمع تجاری را محاسبه کنیم. فرض کنید در این مجتمع ۲۰ نفر کار می‌کنند. اگر اسامی این افراد را بر روی برگه‌های کوچک بنویسیم و ۷ اسم را به تصادف از بین آنها انتخاب کنیم، "نمونه‌گیری تصادفی ساده" انجام داده ایم. زیرا تمام افراد (همه واحدهای جامعه) احتمال برابر برای انتخاب شدن دارند.

* اشکال این روش: اگر اندازهٔ جامعه بزرگ باشد، یعنی تعداد واحدهای آماری زیاد باشند، دسترسی به فهرستی از اعضای جامعه و دسترسی به اعضای انتخابی دشوار و پرهزینه است.

نکته ۱: در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده، برای انتخاب یک نمونه با حجم n از یک جامعه با اندازه N، احتمال انتخاب هر کدام از نمونه‌های با اندازه n (که همگی شانس برابر برای انتخاب شدن دارند) برابر است با $\frac{1}{\binom{N}{n}}$.

مثال: می‌خواهیم از جامعه‌ای با اندازه ۴، یک نمونه ۲ عضوی انتخاب کنیم. احتمال انتخاب این نمونه چقدر است؟

نمونه ۲ عضوی	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,d\}$	$\{b,c\}$	$\{b,d\}$	$\{c,d\}$
احتمال	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

جواب $\Rightarrow \frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$

نکته ۲: «نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جای‌گذاری» ← هر واحد آماری فقط یک بار می‌تواند در نمونه بیاید.

* در این روش احتمال انتخاب برای اولین عضو برابر با $\frac{1}{N}$

برای دومین عضو برابر با $\frac{1}{N-1}$

⋮

برای nاُمین عضو برابر با $\frac{1}{N-n+1}$ است.

نکته ۳: «نمونه‌گیری تصادفی ساده با جای‌گذاری» ← هر واحد آماری می‌تواند بیش از یک بار در نمونه بیاید.

یعنی نمونه اول، پس از انتخاب شدن، به جامعه برگردانده می‌شود و شانس مجدد برای انتخاب در نمونه را دارد و این موضوع تا انتخاب nاُمین عضو ادامه دارد.

* در این روش احتمال انتخاب برای هر یک عضوهای نمونه از جامعه آماری برابر با $\frac{1}{N}$ است.

توجه ۱: در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جای‌گذاری، احتمال انتخاب نمونه‌ای به اندازه n برابر است با

$$\frac{1}{N} \times \frac{1}{N-1} \times \cdots \times \frac{1}{N-n+1} = \frac{(N-n)!}{N!}$$

توجه ۲: در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده با جای‌گذاری، احتمال انتخاب نمونه‌ای به اندازه n برابر است با

$$\frac{1}{N} \times \frac{1}{N} \times \cdots \times \frac{1}{N} = \frac{1}{N^n}$$

نتیجه: اگر اندازه جامعه بزرگ باشد ($N \to \infty$)، نمونه‌گیری تصادفی ساده در هر دو حالت بدون جای‌گذاری و با جای‌گذاری، مشابه یکدیگر فرض می‌شوند و احتمال انتخاب نمونه‌ای با اندازه n از جامعه‌ای با حجم N برابر با $\frac{1}{N^n}$ فرض می‌شود.

تست با روش نمونه‌گیری تصادفی ساده از یک کلاس ۲۵ نفری، افرادی را به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم.

الف) اگر از نمونه‌ی اول اطلاع نداشته باشیم، احتمال این که هر عضو، دومین عضو نمونه باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{625}$ ۲) $\frac{1}{25}$

۳) $\frac{1}{24}$ ۴) $\frac{1}{5}$

ب) اگر نمونه‌گیری بدون جای‌گذاری باشد و از نمونه‌ی اول خبر نداشته باشیم، هر عضو با کدام احتمال دومین عضو نمونه است؟

۱) $\frac{1}{625}$ ۲) $\frac{1}{600}$

۳) $\frac{1}{25}$ ۴) $\frac{1}{24}$

پ) اگر نمونه‌گیری بدون جای‌گذاری باشد و از نمونه‌ی اول خبر داشته باشیم، با کدام احتمال هر عضو، سومین عضو نمونه است؟

۱) $\frac{1}{625}$ ۲) $\frac{1}{25}$

۳) $\frac{1}{24}$ ۴) $\frac{1}{552}$

تست جامعه‌ی $\{a,b,c,d,e,f\}$ را در نظر می‌گیریم. اگر با روش نمونه‌گیری تصادفی ساده و با جای‌گذاری، عمل کنیم، با کدام احتمال a در نمونه‌ی اول و دوم نیست و در نمونه سوم ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{1}{216}$ ۲) $\frac{5}{216}$

۳) $\frac{25}{216}$ ۴) $\frac{125}{216}$

تست ۹۰ از جامعه‌ی $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$، نمونه‌ای ۴ عضوی به روش تصادفی ساده انتخاب می‌کنیم. نمونه‌های $\{a,b,e,f\}$ یا $\{b,d,f,g\}$ با چه احتمالی انتخاب می‌شوند؟ (گزینه ۳)

۱) $\frac{1}{70}$ ۲) $(\frac{1}{70})^2$

۳) $\frac{1}{35}$ ۴) $\frac{2}{35}$

چیزهایی که بهت آسیب زدند رو فراموش کن

اما درس‌هایی که بهت دادند رو از یاد نبر

۲. نمونه‌گیری خوشه‌ای

جامعه به خوشه (گروه) هایی تقسیم می‌شود. یعنی واحدهای نمونه‌گیری اولیه در جامعه گروه‌ها یا خوشه‌ها می‌باشند، که از آنها به تصادف چند خوشه انتخاب می‌گردد. سپس همهٔ واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب شده را به عنوان نمونه در نظر می‌گیرند. (به عبارت دیگر در هر خوشه انتخابی، سرشماری انجام می‌گیرد.)

مثال: در شهر کاشان قرار است از ۱۲۰ محلهٔ موجود، که هرکدام متشکل از ۵۰ خانوار می‌باشند، به سراغ ۱۵۰۰ خانوار برویم و از آنها در مورد نوع تغذیه فرزندانشان تحقیق کنیم. در این صورت، اگر هر محله را به عنوان یک خوشه در نظر بگیریم، باید از ۱۲۰ محلهٔ موجود تعداد ۳۰ محله را به تصادف انتخاب نماییم (روش نمونه‌گیری تصادفی ساده) و سپس از ۳۰ محله انتخابی هر ۵۰ خانوار آن را به عنوان نمونه در نظر بگیریم. در این صورت ($30\times 50=1500$) خانوار را برای آمارگیری در اختیار داریم.

نکته ۱: هرچه پراکندگی درون خوشه‌ها بیشتر باشد، یعنی ناهمگن‌تر باشند، نمونه‌گیری خوشه‌ای نتیجهٔ بهتری دارد. ولی در حالت کلی، خوشه‌ها باید شبیه هم باشند. یعنی تفاوت بین خوشه‌ها کم و تفاوت درون خوشه‌ها باید زیاد باشد.

نکته ۲: در روش نمونه‌گیری خوشه‌ای، احتمال انتخاب خوشه‌ها به عنوان واحدهای آماری، یکسان است. از آن جایی که پس از انتخاب هر خوشه، تمام عضوهای آن سرشماری می‌شوند (انتخاب می‌گردند در نمونه وجود دارند)، پس احتمال انتخاب واحدهای آماری برابر با احتمال انتخاب خوشه مربوطه به آن واحد است. پس احتمال انتخاب عضوها نیز یکسان می‌باشد. توجه کنید که احتمال انتخاب هر عضو، به تعداد عضوهای خوشهٔ مربوط به آن عضو ربطی ندارد و به تعداد کل خوشه‌ها بستگی دارد.

در مثال بالا احتمال انتخاب هر محله (خوشه) برابر با $\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$ و در نتیجه احتمال انتخاب هر خانوار از هر محلهٔ انتخاب شده نیز برابر با $\frac{1}{4}$ است.

* اشکال روش نمونه‌گیری خوشه‌ای: برآوردهایی با خطاهای زیاد را شامل می‌شود، زیرا اعضای هر خوشه انتخابی همواره شبیه هم هستند.

۳. نمونه‌گیری طبقه‌ای

جامعه به زیرجامعه‌های مجزا (که عضو مشترکی با هم ندارند) طبقه‌بندی می‌شود و یک نمونهٔ تصادفی ساده از هر طبقه انتخاب می‌شود. به عبارت دیگر

"جامعه از چند قسمت جداگانه (که با هم اشتراکی ندارند) تشکیل می‌شود و افراد یا اشیای هر قسمت دارای ویژگی یکسانی می‌باشند و در هر قسمت به طور جداگانه نمونه‌گیری تصادفی ساده انجام می‌شود."

مثال: کارشناسان حوزهٔ سلامت، قصد دارند در مورد وضعیت قد افراد جامعه بررسی آماری انجام دهند. برای این منظور افراد جامعه را به دو طبقهٔ مرد و زن تقسیم می‌کنند و از هر طبقه تعدادی را به عنوان نمونه (متناسب با حجم هر طبقه) به طور تصادفی (یعنی با روش نمونه‌گیری تصادفی ساده در هر طبقه) انتخاب می‌کنند.

نکتهٔ ۱: هرچه پراکندگی درون هر طبقه کمتر باشد، یعنی اعضا در ویژگی مورد نظر به هم نزدیک‌تر و همگن‌تر باشند، نمونه‌گیری طبقه‌ای نتیجهٔ بهتری دارد. (برعکس خوشه‌ای)
بنابراین در نمونه‌گیری طبقه‌ای تا آنجا که ممکن است تفاوت درون طبقه‌ها کم و تفاوت بین طبقه‌ها باید زیاد باشد.

نکتهٔ ۲: در روش نمونه‌گیری طبقه‌ای، احتمال انتخاب شدن عضوهای هر طبقه، در بین خودشان، یکسان است (یعنی داده‌های هر طبقه هم‌شانس‌اند)، اما از آن جایی که تعداد عضوهای انتخابی از هر طبقه، متناسب با حجم آن طبقه است، پس در حالت کلی شانس انتخاب عضوها یکسان نیست، مگر آن که تعداد عضوهای تمام طبقات یکسان باشند.

نکتهٔ ۳: اگر جامعه‌ای با اندازهٔ N را به m طبقهٔ با تعداد عضوهای $N_1, N_2, \ldots, N_m$ تقسیم‌بندی نماییم، تعداد عضوهای انتخابی از طبقهٔ i اُم $(1 \leq i \leq m)$ در یک نمونهٔ n عضوی برابر است با:

$$\frac{N_i}{N} \times n$$

* **اشکال روش نمونه‌گیری طبقه‌ای**: پرهزینه و زمان‌بر است، اما دقت نمونه‌گیری افزایش می‌یابد.

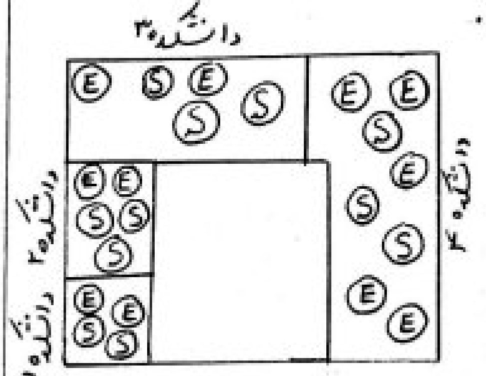
مثال: محله‌ای دارای ۲۵۰ خانوار است، که ۲۵، ۱۷۵ و ۵۰ خانوار به ترتیب درآمد کم، متوسط و زیاد دارند. با استفاده از روش نمونه‌گیری طبقه‌ای، نمونه‌ای به اندازه ۲۰ خانوار متناسب با درآمدهای مذکور مشخص کنید.

تعداد خانوارهای انتخابی از طبقه کم درآمدها $=$ $\dfrac{\text{تعداد خانوارهای طبقه کم درآمد}}{\text{تعداد کل خانوارها}}$ $\times$ اندازه نمونه $= \dfrac{25}{250}\times 20 = 2$

با درآمد متوسط " " " " $=$ $\dfrac{\text{تعداد خانوارهای طبقه متوسط}}{\text{تعداد کل خانوارها}}$ $\times$ اندازه نمونه $= \dfrac{175}{250}\times 20 = 14$

با درآمد زیاد " " " " $=$ $\dfrac{\text{تعداد خانوارهای طبقه با درآمد زیاد}}{\text{تعداد کل خانوارها}}$ $\times$ اندازه نمونه $= \dfrac{50}{250}\times 20 = 4$

تست در یک دانشگاه، ۴ دانشکده مختلف مطابق شکل وجود دارد. دانشجویان رشته‌های مهندسی را با حرف E و سایر دانشجویان را با حرف S نشان داده‌ایم.



اگر با روش نمونه‌گیری طبقه‌ای یک نمونه ۴ عضوی انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد همه عضوهای نمونه از دانشجویان رشته‌های مهندسی باشند؟

۱) $\frac{1}{20}$ ۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{32}$ ۴) $\frac{1}{8}$

تست از یک جامعه ۱۰۰ عضوی، نمونه‌ای با اندازه ۱۲ مورد نظر است. اگر جامعه را به ۴ بخش ۲۵ عضوی تقسیم کنیم و از هر کدام ۳ عضو انتخاب نماییم، روش نمونه‌گیری و احتمال انتخاب هر عضو جامعه کدام است؟

۱) خوشه‌ای، ۰/۱۲ ۲) خوشه‌ای، ۰/۰۳

۳) طبقه‌ای، ۰/۱۲ ۴) طبقه‌ای، ۰/۰۳

تست جامعه‌ای ۱۵۰ عضو دارد. اگر این جامعه را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم نماییم و تمام اعضای دو قسمت را به عنوان نمونه انتخاب کنیم، روش نمونه‌گیری و احتمال انتخاب هر عضو جامعه کدام است؟

۱) خوشه‌ای، $\frac{2}{15}$ ۲) خوشه‌ای، $\frac{1}{5}$

۳) طبقه‌ای، $\frac{2}{15}$ ۴) طبقه‌ای، $\frac{1}{5}$

۴. نمونه‌گیری سامان‌مند (سیستماتیک)

نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای است که در آن اندازهٔ طبقات با هم برابر است. فقط از طبقهٔ اول واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود و با همان روند از طبقات دیگر، این کار انجام می‌گیرد.

◁ برای انجام نمونه‌گیری سیستماتیک به روش زیر عمل می‌کنیم:

- ابتدا حجم جامعه را بر حجم نمونه تقسیم می‌کنیم و جزء صحیح این مقدار را K فرض می‌کنیم. $K = \left[\frac{N}{n}\right]$
- سپس یک عدد تصادفی بین ۱ تا K در نظر می‌گیریم. آن عدد تصادفی، شماره اولین عضو از طبقهٔ اول می‌باشد، که در نمونهٔ انتخابی قرار می‌گیرد.
- از شمارهٔ اولین عضو انتخابی، K تا K تا جلو می‌رویم و سایر عضوهای نمونه را مشخص می‌کنیم.

مثال: در یک دبیرستان با ۲۰۰ دانش‌آموز، نمونه‌ای با اندازهٔ ۲۰ مورد نظر است. در این صورت $۱۰ = \left[\frac{۲۰۰}{۲۰}\right] = K$. بین ۱ تا ۱۰، یک عدد دلخواه به تصادف انتخاب می‌کنیم. مثلاً ۷ پس از طبقهٔ اول عضو شماره ۷ انتخاب می‌شود. با افزودن عدد ۱۰ به ۷، عضو بعدی شماره ۱۷ از طبقهٔ دوم و ... است. بنابراین شمارهٔ عضوهای نمونهٔ مورد نظر عبارت‌اند از:

۷ , ۱۷ , ۲۷ , ۳۷ , ۴۷ , ۵۷ , ۶۷ , ۷۷ , ۸۷ , ۹۷

۱۰۷ , ۱۱۷ , ۱۲۷ , ۱۳۷ , ۱۴۷ , ۱۵۷ , ۱۶۷ , ۱۷۷ , ۱۸۷ , ۱۹۷

نکته ۱: در روش نمونه‌گیری سامان‌مند، برای انتخاب نمونه‌ای با n عضو (نمونه‌ای با اندازه یا حجم n)، ابتدا جامعه را به n طبقهٔ K عضوی تقسیم می‌کنیم. اگر شمارهٔ عضو انتخابی از گروه اول، a_1 باشد (که به صورت تصادفی انتخاب شده است)، آن‌گاه بقیهٔ عضوهای نمونه، به کمک فرمول تصاعد حسابی $a_n = a_1 + (n-1)K$ به دست می‌آیند.

نکته ۲: در روش نمونه‌گیری سامان‌مند، اگر جامعه به n گروه K عضوی طبقه‌بندی شده باشد، هر عضو جامعه، با احتمال $\frac{1}{K}$، در نمونه ظاهر می‌شود. پس تمام عضوها شانس برابر دارند.

✱ در واقع روش نمونه‌گیری سیستماتیک، تغییر شکل یافتهٔ روش نمونه‌گیری تصادفی ساده است. در صورتی که فهرستی از عضوهای جامعه در دسترس باشد، این روش بسیار سریع و مقرون به صرفه است.

تست از بین ۷۵ دانش‌آموز یک کلاس، که از شماره ۱ تا شماره ۷۵ فهرست شده‌اند، به روش سیستماتیک یک نمونهٔ ۵ نفری انتخاب می‌کنیم. اگر دانش‌آموز شماره ۶۲ عضو نمونه باشد، دومین عدد انتخابی در این نمونهٔ ۵ نفری کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷
۳) ۳۲ ۴) ۳۳

تست در یک سالن امتحانات، از بین افرادی که روی صندلی‌های شماره ۳ تا ۷۷ نشسته‌اند، قرار است به روش سامانمند، نمونه‌ای با احتمال $\frac{1}{5}$ انتخاب گردد. اگر صندلی شماره ۱۶ سومین عدد انتخاب شده در نمونهٔ مذکور باشد، آخرین عدد انتخابی در این نمونه کدام است؟

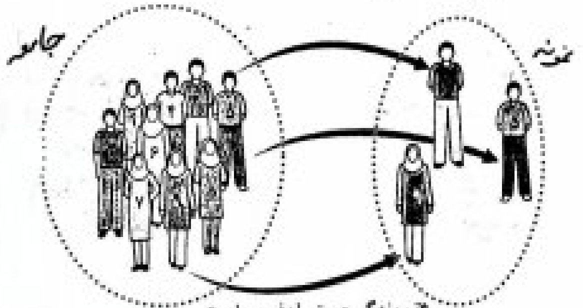
۱) ۲۶ ۲) ۳۶
۳) ۶۶ ۴) ۷۶

تست ۱۴۰۳ در یک بانک، جهت ارتقای خدمات رسانی به مشتریان، در یک روز از بین شماره‌های ۷ تا ۷۱، به روش سیستماتیک یک نمونهٔ ۵ نفری انتخاب می‌شود و از آن‌ها درخواست می‌نمایند با پر کردن پرسشنامه، بانک را در رسیدن به این هدف یاری کنند. اگر شماره ۱۷ اولین فرد انتخابی باشد، کدام شماره در بین افرادی که پرسش‌نامه را پر می‌کنند، وجود دارد؟

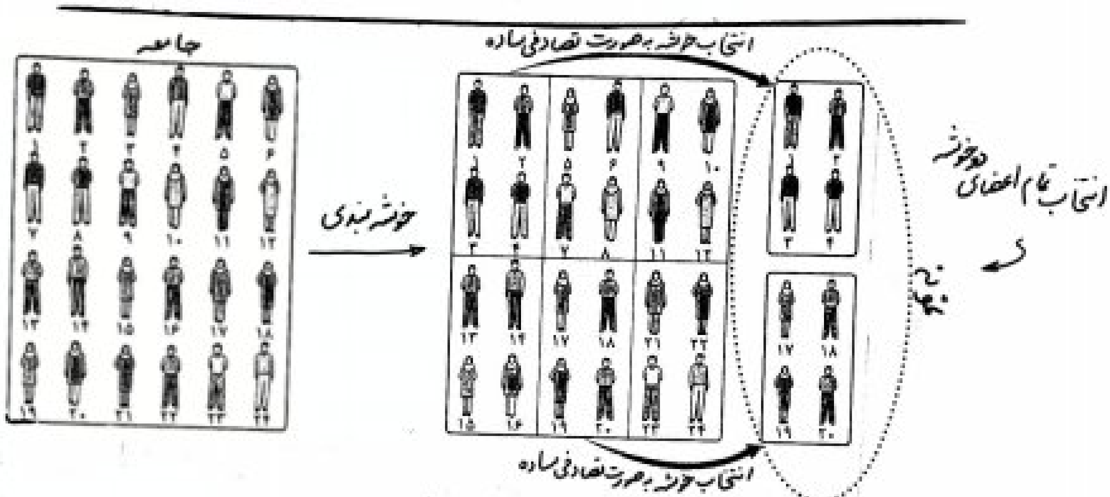
۱) ۵۶ ۲) ۴۲
۳) ۴۵ ۴) ۶۸

روش نمونه‌گیری	مزایا	معایب
تصادفی ساده	شانس انتخاب شدن برای همه اعضا مساوی است	عدم دسترسی مناسب به همهٔ واحدهای آماری در جامعه بزرگ (این روش هزینه زیاد دارد)
خوشه‌ای	کم هزینه و سریع	امکان ایجاد خطا به دلیل تنوع و بزرگی در خوشه‌ها
طبقه‌ای	اطمینان از انتخاب عضو از همه طبقات در نمونه	زمان‌بر و پرهزینه، واحدهای آماری لزوماً شانس برابر برای انتخاب ندارند.
سیستماتیک	شانس انتخاب اعضا یکسان، سریع و کم‌هزینه	بدون وجود یک فهرست از واحدهای آماری قابل انجام نیست.

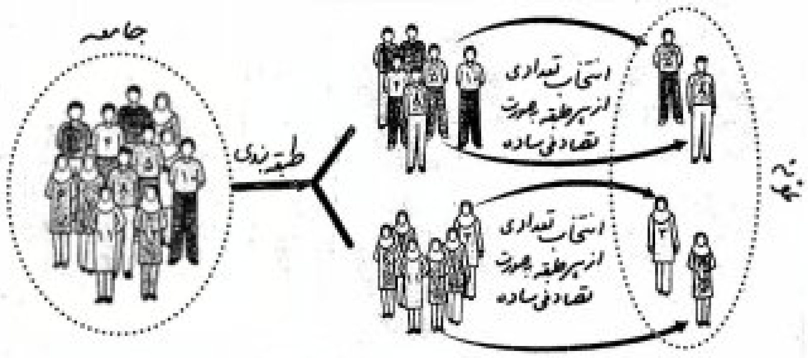
جمع بندی: در شکل های زیر، هر ۴ روش نمونه گیری احتمالی، به صورت یک جا نمایش داده شده



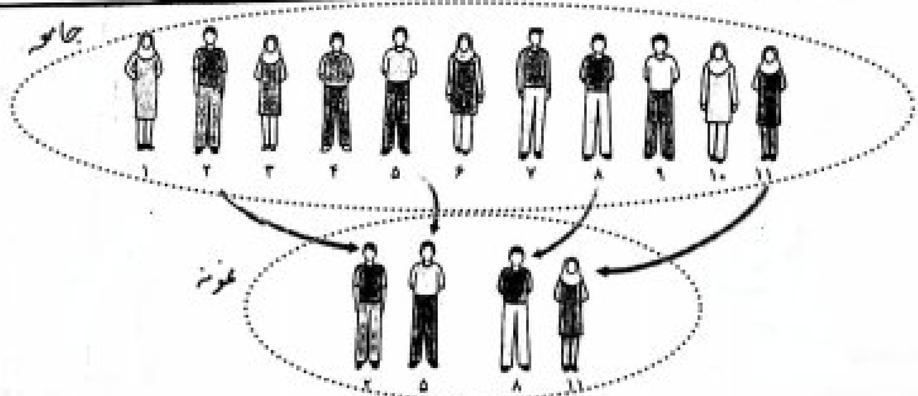
«نمونه‌گیری تصادفی ساده»



«نمونه‌گیری خوشه‌ای»



«نمونه‌گیری طبقه‌ای»



«نمونه‌گیری سیستماتیک»

سراسری ۱۴۰۰ — برای دانش آموزان یک شهر از مقطع ابتدایی تا کلاس دوازدهم، یک عدد پنج رقمی به صورت زیر اختصاص می یابد: دو رقم اول سمت راست نمایش پایهٔ تحصیلی (از ۰۱ تا ۱۲)، دو رقم دوم نمایش سن (از ۰۷ تا ۱۸) و رقم پنجم جنسیت (پسر ۱ و دختر ۲). سپس اعداد را به ترتیب صعودی در یک مجموعه قرار می دهیم. سن صدمین عضو مجموعه کدام است؟
(ممکن است عدد پنج رقمی مورد نظر به هیچ فردی اختصاص نیابد، ولی در محاسبه شمرده شود)

۱) ۱۳ ۲) ۱۴
۳) ۱۵ ۴) ۱۶

سراسری ۱۴۰۰ خ — H.W

برای یک مجموعهٔ ۱۰۰ نفری از شهروندان یک شهر یک کد شش رقمی به صورت زیر ساخته می شود: دو رقم سمت راست، سن شهروند (از ۵۱ تا ۸۵)، سه رقم بعدی تعداد افراد هم سن (۰۰۰ - ۱۰۰) و رقم ششم جنسیت (مرد ۱ و زن ۲) اختصاص می یابد. سپس کدهای به دست آمده را به ترتیب صعودی در یک مجموعه قرار می دهیم. سن مورد انتظار برای ده هزارمین عضو مجموعه کدام است؟ (اگرچه ممکن است شهروندی به آن اختصاص نیابد)

۱) ۱۵ ۲) ۱۶
۳) ۵۴ ۴) ۵۵

(گزینه ۴)

نکته: در جامعه‌ای به اندازهٔ N، احتمال انتخاب هر عضو جامعه در نمونه‌ای به اندازهٔ n برابر است با $\frac{n}{N}$.

توجه: این احتمال به روش نمونه‌گیری ربطی ندارد. به عبارت دیگر با هر یک از چهار روش نمونه‌گیری تصادفی ساده، خوشه‌ای، طبقه‌ای (به شرط آن که تعداد عضوهای طبقات برابر باشد) و سیستماتیک، این احتمال همواره $\frac{n}{N}$ می‌باشد.

مثال: فرض کنید جامعه‌ای از $N = 100$ عضو تشکیل شده و نمونه‌ای به اندازهٔ $n = 20$ از آن مورد نظر است.

(مطابق نکتهٔ بالا احتمال انتخاب هر عضو جامعه در نمونه، برابر با $\frac{20}{100} = 0/2$ می‌باشد)

حال بررسی می‌کنیم در هر یک حالت‌های زیر، احتمال انتخاب هر عضو جامعه در نمونه چقدر است؟

الف) از بین ۱۰۰ عضو جامعه، یک نمونه ۲۰ تایی به تصادف انتخاب شود.

◁ روش نمونه‌گیری در این حالت، تصادفی ساده است. از آن جایی که یک عضو خاص از جامعه، در نمونه است باید ۱۹ عضو دیگر، از ۹۹ عضو باقی‌مانده انتخاب شود (توجه کنید که فضای نمونه، $\binom{100}{20}$ عضو دارد)، پس احتمال انتخاب هر عضو جامعه، به عنوان نمونه در این حالت برابر است با:

$$P = \frac{\binom{99}{19}}{\binom{100}{20}} = \frac{\frac{99!}{19! \times 80!}}{\frac{100!}{20! \times 80!}} = \frac{\cancel{99!} \times \overset{20}{\cancel{20!}}}{\cancel{19!} \times \underset{100}{\cancel{100!}}} = \frac{20}{100} = 0/2$$

پ) جامعه به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شود و دو قسمت به عنوان نمونه انتخاب گردد.

◁ روش نمونه‌گیری در این حالت، خوشه‌ای است. ابتدا ۲ قسمت از ۱۰ قسمت انتخاب می‌شود که از هر قسمت، هر ۱۰ عضو آن انتخاب می‌گردد. پس فضای نمونه، $\binom{10}{2} = 45$ عضو دارد. از آن جایی که یک عضو خاص از جامعه، در نمونه است، پس خوشه مربوط به این عضو انتخاب شده است (ثابت) و باید یک خوشه دیگر از ۹ خوشهٔ باقی‌مانده انتخاب گردد.

پس احتمال انتخاب هر عضو جامعه، به عنوان نمونه، در این حالت برابر است با:

$$P = \frac{\binom{9}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5} = 0/2$$

پ) جامعه به دو قسمت ۵۰ تایی تقسیم شود و از هر قسمت نمونهٔ تصادفی ۱۰ تایی انتخاب گردد.

◁ روش نمونه‌گیری در این حالت، طبقه‌ای است. واضح است که فضای نمونه دارای $\binom{50}{10}\binom{50}{10}$ عضو است. از آن جایی که یک عضو خاص از جامعه، در نمونه است، پس از قسمت مربوط به آن عضو، باید ۹ عضو دیگر از ۴۹ عضو باقی‌مانده انتخاب گردد (توجه کنید که از قسمت دیگر همان ۱۰ عضو از ۵۰ عضو انتخاب می‌شود).

پس احتمال انتخاب هر عضو جامعه، به عنوان نمونه در این حالت برابر است با:

$$P=\frac{\binom{49}{9}\binom{50}{10}}{\binom{50}{10}\binom{50}{10}}=\frac{\frac{49!}{9!\times\cancel{40!}}}{\frac{50!}{10!\times\cancel{40!}}}=\frac{\overset{10}{\cancel{10!}}\times\cancel{49!}}{\cancel{9!}\times\underset{50}{\cancel{50!}}}=\frac{10}{50}=/2$$

ت) جامعه به تصادف به ۲۰ قسمت مساوی تقسیم شود و از قسمت اول دومین عضو به تصادف انتخاب گردد و از قسمت‌های بعدی نیز، دومین عضو انتخاب شود.

◁ روش نمونه‌گیری در این حالت، سیستماتیک است. چون هر یک از قسمت‌ها، دارای ۵ عضو می‌باشد، پس احتمال انتخاب هر عضو در هر قسمت (مثلاً احتمال انتخاب دومین عضو) برابر با $\frac{1}{5}$ است و احتمال انتخاب هر عضو هم شماره با عضو انتخابی در قسمت اول، برابر ۱ می‌باشد. پس احتمال انتخاب هر عضو جامعه، به عنوان نمونه، در این حالت برابر است با:

$$P=\frac{1}{5}\times1\times1\times\dots\times1=\frac{1}{5}=/2$$

از لذت عشق کس خبر نشد

آن لحظه خبر شد که دیوانه شد

مثال: در هر یک از موارد زیر، روش نمونه‌گیری را مشخص کنید:

الف) در کلاسی با ۶۰ دانش آموز، که در شش ردیف ۱۰ نفری نشسته اند، می‌خواهیم نمونه‌ای ۱۰ تایی از دانش آموزان انتخاب کنیم. برای این منظور یک تاس سالم را پرتاب می‌کنیم و با توجه به عدد ظاهر شده از تاس، تمام دانش آموزان ردیف هم شماره با عدد تاس را انتخاب می‌کنیم.

ب) یک کارخانه تولید آبمیوه، ۴ خط تولید برای مصنوع آبمیوه دارد. بازرس اداره بهداشت، برای تحقیق در مورد کیفیت آبمیوه‌ها، از هر خط تولید تعدادی آبمیوه به تصادف انتخاب می‌کند.

پ) برای نظرسنجی درباره یک فیلم، در انتهای اکران از نفرات خروجی از سالن سینما پرسش به عمل می‌آید. پرسش‌ها از نفرات اول، چهارم، پنجم، نهم، دوازدهم، ... صورت پذیرفته است.

ت) یک شرکت کنترل کیفی، برای بررسی قطعات تولید شده در یک کارخانه، هر ۱۰۰۰ اُمین قطعه تولیدی را بررسی می‌کند.

ث) در یک کلاس با ۶۰ دانش آموز، که در شش ردیف ۱۰ نفری نشسته اند، می‌خواهیم نمونه‌ای ۶ تایی از دانش آموزان انتخاب کنیم. برای این منظور از هر ردیف، یک نفر را به تصادف انتخاب می‌نماییم.

ج) یک شرکت هواپیمایی به طور تصادفی یکی از پروازهای روزانه خود را انتخاب می‌کند و از تمام مسافران این پرواز در مورد رضایت‌مندی آنها از غذای داخل هواپیما سؤال می‌پرسد.

چ) برای بررسی نظر مردم در مورد افزایش قیمت بنزین، یک نمونه تصادفی از هر گروه سنی ۲۰-۴۰، ۲۵-۵۰، ۴۰-۶۵، ۵۰-۶۵ و ۶۵-۷۵ به نسبت جمعیت هر گروه به کل جمعیت جامعه، انتخاب می‌نماییم.

ح) در یک تحقیق علمی در مورد وزن افراد جامعه، تعدادی زن و تعدادی مرد، به نسبت جمعیت، انتخاب می‌گردد.

خ) برای بررسی میزان درآمد افراد جامعه، دولت تصمیم می‌گیرد به طور تصادفی، چند استان از کشور را انتخاب کند و از تمام ساکنین استان‌های انتخابی میزان درآمد آنها سؤال می‌شود.

د) در یک اداره، از بین ۴۵ کارمند، قرار است یک هیئت بازرسی ۷ نفره انتخاب گردد. برای این منظور اسامی کارمندان را روی برگه‌های مختلف می‌نویسند و برگه‌ها را داخل یک کیسه قرار می‌دهند و از ۷ نفر از مراجعین درخواست می‌کنند هر کدام یک برگه به تصادف از کیسه خارج کنند.

نمونه‌گیری اُریب

در روش‌های نمونه‌گیری، باید نمونهٔ انتخابی برای نتیجه‌گیری در مورد کل جامعه قابل استفاده باشد.
اگر نمونه‌گیری به گونه‌ای باشد که نمونهٔ انتخابی در برگیرندهٔ همهٔ ویژگی‌های جامعه باشد، یک نمونه‌گیری ایده‌آل است.

اگر یک روش نمونه‌گیری از نمونه‌گیری ایده‌آل فاصله بگیرد و به سمتی خاص انحراف پیدا کند می‌گوییم آن روش نمونه‌گیری اُریب است. آمارشناسان تلاش می‌کنند تا با شناسایی منابع تولید اُریبی، نمونه‌گیری‌ها را تا جایی که می‌توانند نااُریب کنند.

مثال: دلیل اُریب بودن هر یک از نمونه‌گیری‌های زیر را توضیح دهید.

الف) یک سازمان نظرسنجی، دربارهٔ نتایج انتخابات ریاست جمهوری یک کشور، که دو کاندیدای A و B دارد، از افراد یک استان پرسش به عمل می‌آورد و کاندیدای A را پیروز این رقابت معرفی می‌کند.

ب) سازمان سلامت اعلام کرده است ۴۲ درصد از زنان جامعه اضافه وزن دارند. این سازمان نمونه‌گیری را از بین زنان ۴۰-۲۵ سال انجام داده است.

پ) مدیر یک رستوران قصد دارد پنج نوع غذای جدید به منوی رستوران اضافه کند. برای این که نظر مشتریان خود را در مورد این کار بداند، از گارسون‌ها می‌خواهد در ۷ روز متوالی، از ۱۰ نفر اولی که برای ناهار به این رستوران می‌آیند، نظرسنجی نمایند.

ت) برای بررسی متوسط ساعت مطالعهٔ افراد در شهر تهران، از عضوهای چند کتابخانهٔ معروف شهر، نمونه‌گیری می‌شود.

ث) برای یافتن میانگین تعداد افراد خانوارها، به طور تصادفی از اشخاص سطح جامعه در مورد تعداد اعضای خانوادهٔ آن‌ها سؤال می‌شود.

برآورد (تخمین)

برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه

مقدار عددی حاصل از جای‌گذاری اعداد نمونهٔ تصادفی در آمارهٔ نظیر آن پارامتر را گویند.
به بیان دیگر مقدار عددی آماره را برآورد یا برآورد نقطه‌ای می‌نامند.

مثال فرض کنید یک شرکت تولید لیوان شیشه‌ای می‌خواهد تعداد لیوان‌هایی که در یک بسته قرار دهد متناسب با بُعد خانوارهای کشور (میانگین تعداد اعضای خانواده‌ها) مشخص کند. پس

◄ در این مثال بُعد خانوارهای کشور (میانگین تعداد اعضای خانواده‌ها)، پارامتر جامعه است.

از آن جایی که امکان سرشماری کل خانوارهای کشور برای این شرکت میسر نیست، لذا تصمیم می‌گیرد بُعد خانوارهای خریدارهای محصول خود را به وسیلهٔ نمونه‌گیری انجام دهد. مثلاً بُعد ۹ خانوار را به صورت زیر مشخص کرده است.

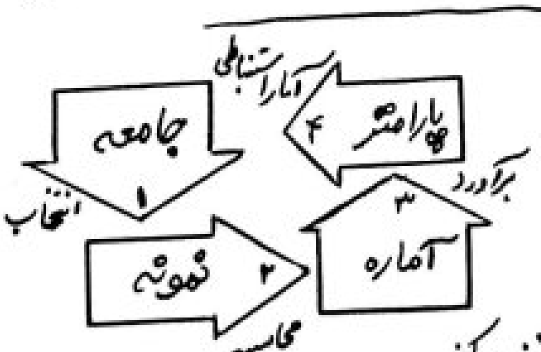
۲ , ۲ , ۵ , ۲ , ۵ , ۳ , ۳ , ۱ , ۴

واضح است که میانگین بُعد این ۹ خانوار $\frac{4+1+3+3+5+2+5+2+2}{9} = 3$ است.

در این صورت عدد ۳ برای بُعد خانوارها یک آماره (آمارهٔ نمونه) است.

حال اگر کارشناس این شرکت، از روی همین عدد، اعلام نماید که بُعد خانوارهای کشور، عدد ۳ می‌باشد، برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه را با عدد ۳ مشخص کرده است.

نتیجه: روند کلی برآورد نقطه‌ای به صورت مقابل است:



① پارامتر جامعه را، که می‌خواهیم برآورد کنیم، در نظر می‌گیریم.
② با انتخاب از جامعه (به کمک روش‌های نمونه‌گیری)، نمونه را مشخص می‌کنیم.
③ آمارهٔ متناظر با پارامتر جامعه را در نمونه می‌یابیم.
④ مقدار آمارهٔ نمونه را به عنوان برآورد پارامتر جامعه (برآورد نقطه‌ای) اعلام می‌کنیم.

نکته مهم: اگر پارامتر جامعه را میانگین جامعه در نظر بگیریم، آن‌گاه هر چقدر اندازه (حجم) نمونه را زیاد کنیم، برآورد میانگین نمونه (آماره) به میانگین جامعه (پارامتر) نزدیک می‌شود.

(در واقع با افزایش تعداد عضوهای نمونه، خطای برآورد نقطه‌ای کاهش می‌یابد.)

مثال: می‌خواهیم میانگین درآمد ماهیانه خانواده‌های یک کوچه را بیابیم (پارامتر جامعه). فرض کنید این کوچه از ۶ خانواده با درآمدهای ماهیانه به ترتیب ۹، ۲، ۵، ۳، ۱ و ۴ میلیون تومان تشکیل شده باشد. واضح است که میانگین درآمد ماهیانه خانواده‌های این کوچه (میانگین جامعه) برابر است با:

$$\mu = \frac{4+1+3+5+2+9}{6} = 4$$

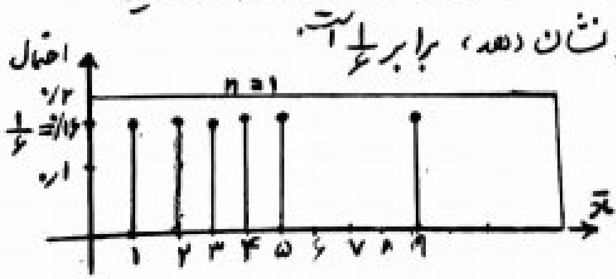
(میانگین جامعه را با μ نشان می‌دهند)

اکنون فرض کنید میانگین جامعه را نداریم و می‌خواهیم با انتخاب نمونه‌هایی به اندازه n از جامعه، میانگین جامعه را برآورد کنیم. داریم:

① اندازه نمونه $n=1$ است. تعداد نمونه‌های تک عضوی برابر با $\binom{6}{1}=6$ است.

نمونه	{۴}	{۱}	{۳}	{۵}	{۲}	{۹}
$\bar{x}$	۴	۱	۳	۵	۲	۹
احتمال	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

واضح است که آماره مورد بررسی (میانگین درآمد ماهیانه خانواده‌های کوچه مورد نظر)، در هر نمونه انتخابی، با عدد خود نمونه برابر است. یعنی با انتخاب نمونه تک عضوی ۴ (خانواده‌ای که درآمد ماهیانه ۴ میلیون دارد)، میانگین درآمد ماهیانه این نمونه، همان ۴ است. پس احتمال انتخاب نمونه‌ای تک عضوی که میانگین این نمونه، برآورد درستی از میانگین جامعه را نشان دهد، برابر $\frac{1}{6}$ است.



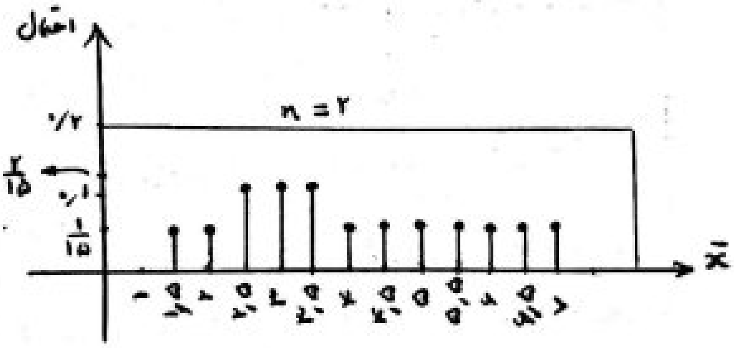
◁ برحسب مقادیر میانگین نمونه‌ها (محور افقی) و احتمال هر کدام (محور عمودی) نمودار میله‌ای رسم می‌شود.

② اندازهٔ نمونه $n=2$ است. تعداد نمونه‌های دوتایی برابر با $\binom{6}{2}=15$ است.

نمونه	{۱,۲}	{۱,۳}	{۱,۴} {۲,۳}	{۱,۵} {۲,۴}	{۱,۶} {۲,۵}	{۳,۵}	{۴,۵}	{۱,۹}	{۲,۹}	{۳,۹}	{۴,۹}	{۵,۹}
$\bar{x}$	۱٫۵	۲	۲٫۵	۳	۳٫۵	۴	۴٫۵	۵	۵٫۵	۶	۶٫۵	۷
احتمال	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

واضح است که آمارهٔ مورد بررسی (میانگین درآمد ماهیانهٔ خانوارهای کوچهٔ مورد نظر)، در هر نمونهٔ انتخابی، میانگین دو عدد همان نمونه است. به عنوان مثال با انتخاب نمونهٔ {۳,۵}، میانگین نمونه $4=\frac{3+5}{2}$ می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با انتخاب، نمونهٔ به اندازهٔ $n=2$، تعداد میانگین‌های بیشتری نزدیک به میانگین جامعه (عدد ۴) به دست می‌آید.

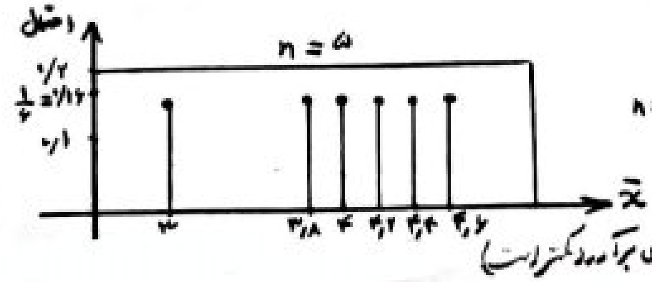
◁ نمودار میله‌ای:



③ اندازهٔ نمونه $n=5$ است. تعداد نمونه‌های ۵تایی برابر با $\binom{6}{5}=6$ است.

نمونه	{۱,۲,۳,۴,۵}	{۱,۲,۳,۴,۹}	{۱,۲,۳,۵,۹}	{۱,۲,۴,۵,۹}	{۱,۳,۴,۵,۹}	{۲,۳,۴,۵,۹}
$\bar{x}$	۳	۳٫۸	۴	۴٫۲	۴٫۴	۴٫۶
احتمال	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

واضح است که آمارهٔ مورد بررسی (میانگین درآمد ماهیانهٔ خانوارهای کوچهٔ مورد نظر)، در هر نمونهٔ انتخابی، میانگین ۵ عدد همان نمونه است. به عنوان مثال با انتخاب نمونهٔ {۱,۲,۳,۵,۹}، میانگین نمونه $4=\frac{1+2+3+5+9}{5}$ می‌باشد.



◁ نمودار میله‌ای: ارتفاع میله‌ها (احتمال هر نمونه) یکسان است و با حالت $n=1$ برابر است. اما میانگین نمونه‌ها (آماره) به میانگین جامعه (پارامتر) نزدیک‌تر می‌باشد (خطای برآورد کمتر است).

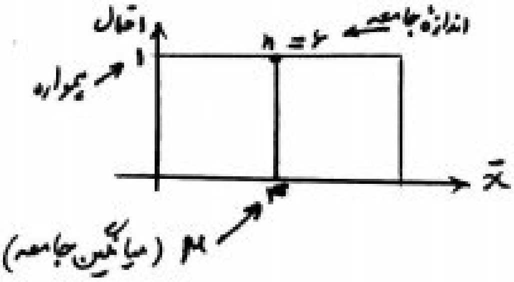
نتیجه: در یک جامعه با اندازهٔ n، احتمال رخ دادن میانگین نمونه‌های تک عضوی و احتمال رخ دادن میانگین نمونه‌های $(n-1)$ عضوی هر کدام برابر با $\frac{1}{n}$ است و لذا در نمودار میله‌ای هر دو، ارتفاع میله‌ها یکسان می‌باشد. اما در حالت $(n-1)$ عضوی، خطای برآورد میانگین به مراتب کمتر شده است.

---

۴) اندازهٔ نمونه $n=6$ است. تعداد نمونه برابر با $\binom{6}{6}=1$ است. در واقع اندازهٔ نمونه با اندازهٔ جامعه برابر است. پس میانگین نمونه با میانگین جامعه برابر می‌باشد و در نمودار میله‌ای فقط یک میله وجود دارد، که احتمال رخ دادن آن برابر ۱ است.

نمونه	{۱,۲,۳,۴,۵,۶}
$\bar{x}$	۴
احتمال	۱

نمودار میله‌ای:



تست) از جامعه‌ای ۶ عضوی با مقادیر ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷ نمونه‌ای به اندازه ۲ در نظر می‌گیریم. با کدام احتمال میانگین جامعه به درستی برآورد می‌شود؟

۱) $\frac{1}{15}$ ۲) $\frac{2}{5}$

۳) $\frac{4}{15}$ ۴) $\frac{1}{5}$

حل: ابتدا میانگین جامعه را می‌یابیم:

$$\mu=\frac{12+13+14+15+16+17}{6}=14.5$$

از طرفی تعداد نمونه‌های ۲ عضوی برابر با $\binom{6}{2}=15$ است. اکنون نمونه‌های ۲ عضوی با میانگین ۱۴/۵، که مطلوب سؤال می‌باشد (یعنی با میانگین جامعه برابر باشد و برآورد میانگین جامعه درست باشد) را می‌یابیم (توجه کنید که باید جمع دو عضو نمونه برابر با ۲۹ شود):

سراسری ۱۴۰۱ — از اعداد ۰ تا N، پنج عدد ۲، ۹، ۵، ۸ و ۱۱ به تصادف انتخاب شده‌اند. برآورد نقطه‌ای N به کمک میانگین کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲
۳) ۱۴ ۴) ۱۶

تست ۱۴۰۳ — با انتخاب نمونه‌ای به اندازهٔ ۳ از بین اعداد ۱، ۲، ...، ۶، چقدر احتمال دارد میانگین آمارهٔ نمونه برابر ۴ شود؟

(تمرین ۳)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲
۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۲۵

تست — با توجه به جدول مقابل، احتمال این که میانگین برآورد شده از جامعه، بیشتر از ۳/۵ باشد، کدام است؟

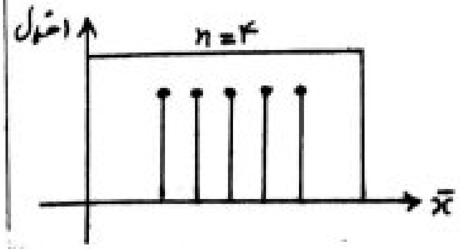
نمونه	A	B	C	D	E
$\bar{x}$	۲/۵	۳	۳/۵	۴	۴/۵
احتمال	۰/۱	2α	۰/۱	۰/۲	α

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴
۳) ۰/۵ ۴) ۰/۷

تست — در جامعه‌ای احتمال انتخاب نمونهٔ ۳ عضوی $\{x, y, z\}$ برابر $\frac{1}{35}$ است. احتمال انتخاب نمونهٔ $\{a, b\}$ در این جامعه چقدر است؟

۱) $\frac{1}{35}$ ۲) $\frac{3}{35}$
۳) $\frac{1}{21}$ ۴) $\frac{2}{21}$

تست — نمودار میله‌ای یک نمونه با اندازهٔ $n=4$ از یک جامعه به صورت مقابل است. احتمال انتخاب یک نمونهٔ ۳ عضوی از این جامعه کدام است؟



انحراف معیار برآورد میانگین (انحراف معیار میانگین نمونه‌ها)

انحراف معیار اعداد حاصل از میانگین برآورد شده توسط نمونه‌ها را می‌گوییم ← نماد $\sigma_{\bar{x}}$

مثال: در مثال مربوط به برآورد میانگین درآمد ماهیانهٔ خانوارهای کوچهٔ مورد بحث، دیدیم که مقادیر میانگین حاصل از نمونه‌های با اندازهٔ $n=5$ عبارت اند از:

$$۳ ,\ ۳/۸ ,\ ۴ ,\ ۴/۲ ,\ ۴/۴ ,\ ۴/۶$$

اکنون انحراف معیار این شش عدد را می‌یابیم:

- ابتدا میانگین این شش عدد را محاسبه می‌کنیم (میانگینِ میانگین‌های حاصل از نمونه‌ها)

$$\frac{۳+۳/۸+۴+۴/۲+۴/۴+۴/۶}{۶}=۴$$ (جالب است! همان میانگین جامعه است)

اکنون به محاسبهٔ انحراف معیار می‌پردازیم:

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{(۳-۴)^۲+(۳/۸-۴)^۲+(۴-۴)^۲+(۴/۲-۴)^۲+(۴/۴-۴)^۲+(۴/۶-۴)^۲}{۶}}\simeq ۰/۵۲$$

حال اگر همین عملیات را برای مقادیر میانگین حاصل از نمونه‌های با اندازهٔ $n=2$ انجام دهیم، انحراف معیار میانگین نمونه‌ها برابر با ۱/۲۳ به دست می‌آید. یعنی پراکندگی میانگین نمونه‌ها در حالتی که $n=2$ می‌باشد، نسبت به حالت $n=5$ بیشتر است. به عبارت دیگر

هرچقدر حجم (اندازهٔ) نمونه افزایش یابد، انحراف معیار میانگین کاهش پیدا می‌کند و در نتیجه برآورد دقیق‌تر می‌شود.

نکته مهم "ارتباط بین انحراف معیار جامعه و انحراف معیار میانگین نمونه‌ها"

اگر $\sigma_{\bar{x}}$ انحراف معیار برآورد میانگین (انحراف معیار میانگین نمونه‌ها)،
برای نمونه‌ای به اندازهٔ n از جامعه‌ای با انحراف معیار σ باشد،
آن‌گاه

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

* به کمک این رابطه می‌توان از انحراف معیار میانگین نمونه‌ها، به انحراف معیار جامعه رسید.
* انحراف معیار برآورد میانگین ($\sigma_{\bar{x}}$) با جذر اندازهٔ نمونه، نسبت عکس دارد.

یعنی اگر n_1 و n_2 اندازهٔ دو نمونه از یک جامعه و انحراف معیار برآورد میانگین برای هر کدام از این نمونه‌ها به ترتیب $(\sigma_{\bar{x}})_1$ و $(\sigma_{\bar{x}})_2$ باشد، آنگاه

$$\frac{(\sigma_{\bar{x}})_2}{(\sigma_{\bar{x}})_1} = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}$$

تست اگر واریانس جامعه‌ای ۹ باشد، اندازهٔ نمونه چقدر باشد تا انحراف معیار برآورد میانگین برابر ۰/۰۶ شود؟

۱) ۱۲۵ ۲) ۲۵۰
۳) ۱۲۵۰ ۴) ۲۵۰۰

تست واریانس جامعه‌ای ۶/۲۵ است. همه داده‌ها را ۲ برابر می‌کنیم و سپس نمونه‌ای با حجم ۱۴۴ در نظر بگیریم انحراف معیار میانگین نمونه‌ها کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۴۱
۳) ۰/۴۲ ۴) ۰/۴۳

سراسری ۱۴۰۱ برای برآورد میانگین در یک جامعه از دو نمونهٔ تصادفی استفاده کرده‌ایم. اندازهٔ نمونهٔ دوم را طوری انتخاب می‌کنیم که انحراف معیار برآورد میانگین با نمونهٔ دوم، $\frac{2}{3}$ برابر مقدار محاسبه شده با نمونهٔ اول باشد. اندازهٔ نمونهٔ دوم چند برابر اندازهٔ نمونهٔ اول است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۲۵
۳) ۲/۷۵ ۴) ۳/۵

● برآورد بازه‌ای پارامتر جامعه

برآورد بازه‌ای پارامتر جامعه یا بازهٔ اطمینان پارامتر جامعه عبارت است از بازه‌ای عددی برای پارامتر به همراه یک درصد اطمینان که ضریب اطمینان نامیده می‌شود.

◁ در بحث برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه، در مورد میانگین جامعه، دریافتیم که در بسیاری از مواقع میانگین نمونه با میانگین جامعه برابر نیست و نمونه‌گیری و در نتیجه برآورد میانگین با خطا همراه است. برای رفع این مشکل از برآورد بازه‌ای استفاده می‌کنیم. برآورد بازه‌ای محدوده‌ای را نشان می‌دهد که پارامتر جامعه (مثلاً میانگین جامعه)، با یک ضریب اطمینانی، که با درصد بیان می‌شود، در آن بازه قرار دارد.

اگر $\bar{x}$ میانگین نمونه‌ای به اندازهٔ n از جامعه‌ای با انحراف معیار σ باشد، با اطمینان بیش از ۹۵ درصد، میانگین جامعه (μ) در بازهٔ زیر قرار دارد:

$$\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{یا} \quad \bar{x}-2\sigma_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x}+2\sigma_{\bar{x}}$$

به عبارت دیگر

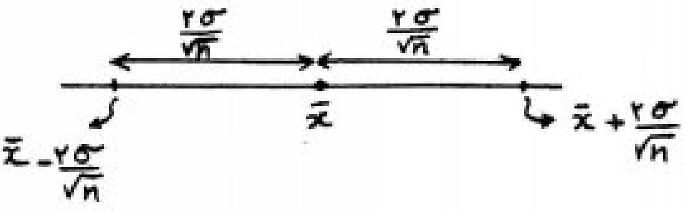
$$\boxed{\mu \in \left[\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad \text{یا} \quad \mu \in \left[\bar{x}-2\sigma_{\bar{x}} , \bar{x}+2\sigma_{\bar{x}}\right]}$$

نتیجه ۱: بازهٔ اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین جامعه را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$\boxed{|\mu-\bar{x}| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{\text{تعریف قدرمطلق}} -\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu-\bar{x} \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \xrightarrow{-(\bar{x})}$$

* عبارت $|\mu-\bar{x}|$ را میزان خطای برآورد نقطه‌ای میانگین را نشان می‌دهد.
* حداکثر خطای قابل قبول در محاسبهٔ میانگین جامعه، با استفاده از میانگین نمونه، برابر با $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ است.
* اگر اندازه نمونه، k برابر شود، حداکثر خطای قابل قبول برآورد، $\frac{1}{\sqrt{k}}$ برابر می‌شود.

نتیجه ۲: بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین، به صورت زیر روی یک محور، نمایش داده می‌شود:



بنابراین

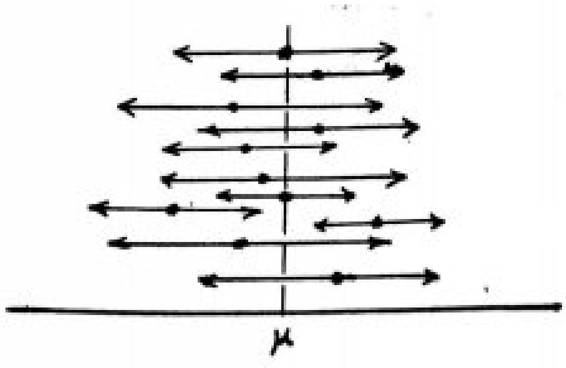
طول بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد برابر است با: $\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$

و مرکز این بازه همواره $\bar{x}$ است.

نتیجه ۳: منظور از بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد، آن است که در بیش از ۹۵ درصد موارد از نمونه‌گیری‌ها، بازه به دست آمده برای هر بار نمونه‌گیری، شامل میانگین جامعه است.
مثلاً اگر ۴۰ بار نمونه‌گیری صورت پذیرفته است، بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد، به ما می‌گوید که اگر بازه اطمینان هر بار نمونه‌گیری را (مطابق با نتیجه ۲) رسم کنیم، بیش از $38 = 40 \times 95\%$ مورد آنها، شامل میانگین جامعه اند. بازه‌هایی که شامل میانگین جامعه نمی‌باشند، خطای برآورد اند.

توجه: اگر در رابطه بازه اطمینان، به جای ضریب ۲، عدد بزرگتری قرار دهیم، برآورد بازه‌ای با اطمینان بیشتر (مثلاً بیش از ۹۶ درصد، بیش از ۹۷ درصد، ...) به دست می‌آید.

«هرچه ضریب اطمینان بیشتر شود، طول بازه اطمینان افزایش می‌یابد.»



تست در جامعه‌ای با انحراف معیار ۱٫۵، نمونه‌ای به اندازه‌ی ۴ با مقادیر ۱۱، ۴٫۵، ۲٫۵، ۲ انتخاب کرده‌ایم. بازه‌ی اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین این جامعه کدام است؟

۱) [۳, ۵] ۲) [۳, ۶]

۳) [۳٫۵, ۵٫۵] ۴) [۳٫۵, ۶٫۵]

حل: ابتدا میانگین نمونه را می‌یابیم:

$$\bar{x} = \frac{۲+۲٫۵+۴٫۵+۱۱}{۴} = ۵$$

پس:

تست اگر حداکثر خطای برآورد نقطه‌ای میانگین در نمونه‌ای به حجم ۴۰۰ برابر ۰٫۲۵ باشد، آنگاه واریانس جامعه کدام است؟

۱) ۲٫۲۵ ۲) ۲٫۵

۳) ۶٫۲۵ ۴) ۵٫۵

تست میانگین جامعه‌ای (با انحراف معیار ۴۰)، با اطمینان بیش از ۹۵ درصد در بازه‌ی [۱۵, ۳۵] برآورد شده است. تعداد عضوهای نمونه کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۳۲

۳) ۱۲۸ ۴) ۱۰۰

تست براساس نمونه‌ای به اندازه‌ی ۴۰۰ شاخص پوسیدگی دندان در سال ۱۳۹۶ برابر ۹ است (۳ تا دندان کشیده‌شده، ۳ تا پوسیده و ۳ تا پرشده). انحراف معیار این سه مورد به ترتیب ۲، ۱ و ۱٫۶ است. کران بالای بازه‌ی اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین این سه مورد کدام است؟

۱) ۳٫۲، ۳٫۱، ۳٫۱۶

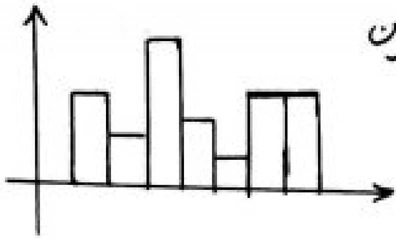
۲) ۳٫۱۶، ۳٫۱، ۳٫۲

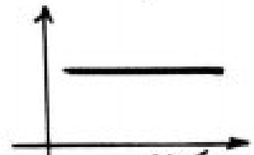
۳) ۳٫۱، ۳٫۱۶، ۳٫۲

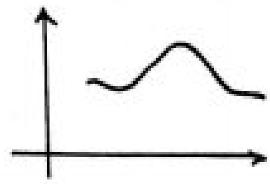
۴) ۳٫۱، ۳٫۲، ۳٫۱۶

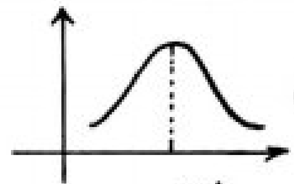
تست
۸۰ .W

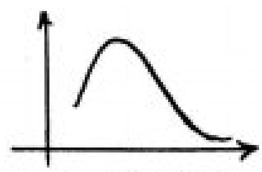
نمودار بافت نگاشت یک جامعه به صورت مقابل است. اگر از این جامعه ۲۰۰ بار نمونه‌گیری با حجم زیاد انجام دهیم، نمودار چندبر فراوانی برآورد میانگین به کدام است؟



۱) 
یکنواخت

۲) 

۳) 
نرمال

۴) 
چوله (نامتقارن)

نکته: اگر حجم نمونه زیاد باشد ($n\geq30$)، بدون توجه به نمودار جامعه، نمودار چندبر فراوانی برآورد میانگین، به صورت نرمال است.

(گزینه ۳)

اختیاری

تست
انحراف معیار درآمد افراد یک جامعه ۱٫۶ است. در یک نمونه به اندازهٔ ۴ از این جامعه، درآمدها به صورت ۳٫۵ ، ۳ ، ۴ و ۱٫۵ می‌باشد. خط فقر در این جامعه، با اطمینان بیش از ۹۵ درصد، در چه بازه‌ای قرار می‌گیرد؟

۱) [۲٫۳ , ۲۷]
۲) [۴٫۶ , ۱٫۴]
۳) [۹٫۲ , ۲٫۸]
۴) [۳٫۸ , ۲٫۲]

یاد باد سال‌ها که از راه دل حل سخن
گر دنیا ما جهان انجمن مشکل نشد

اساس علم ریاضی پایدار خواهد ماند
اگر سال‌ها عاشقانه حل شود