به نام آن که جان را فکرت آموخت

۱۴۰۲_۱۴۰۱

درس: هندسه ۳

مبحث:

دستگاه مختصات سه بعدی

بردار

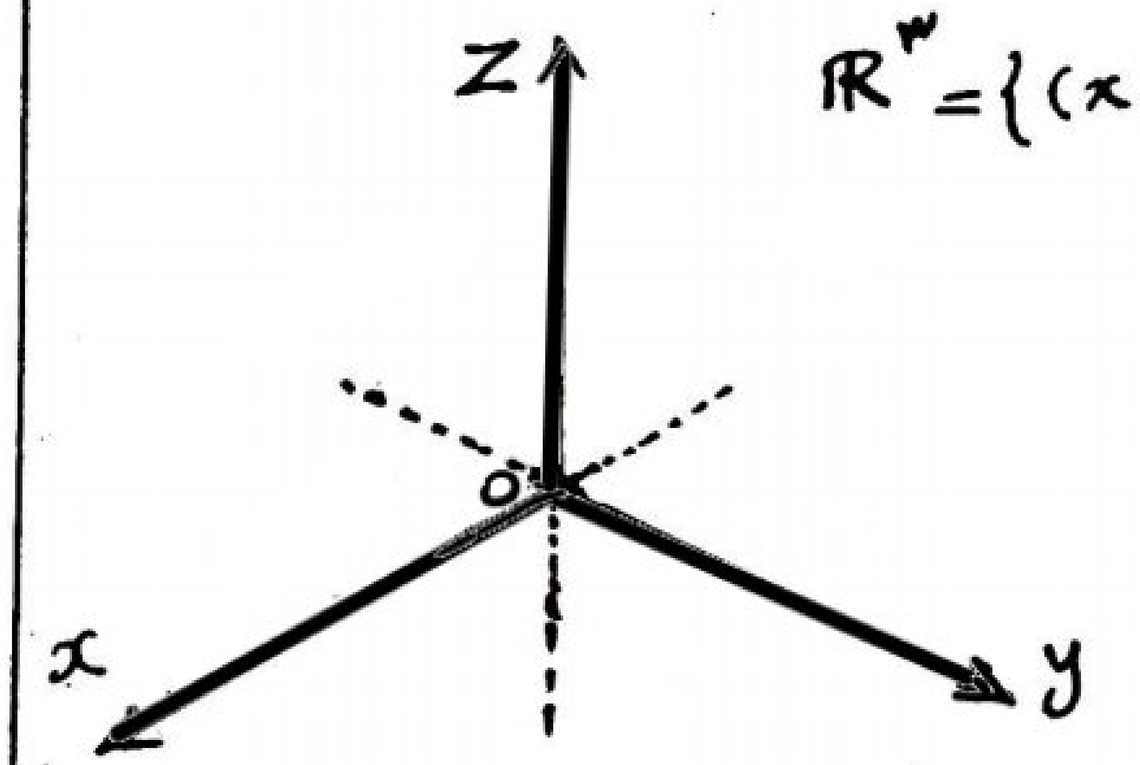
تنظیم: ترکمن

دستگاه مختصات سه بعدی (فضای $\mathbb{R}^3$)

EX

تشکیل شده از سه محور دو به دو عمود بر هم که در یک نقطه به نام مبدا مختصات هم‌رس اند و اگر مطابق قانون دست راست نام‌گذاری شود، آن را دستگاه راستگرد یا مستقیم می‌گوییم.

$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

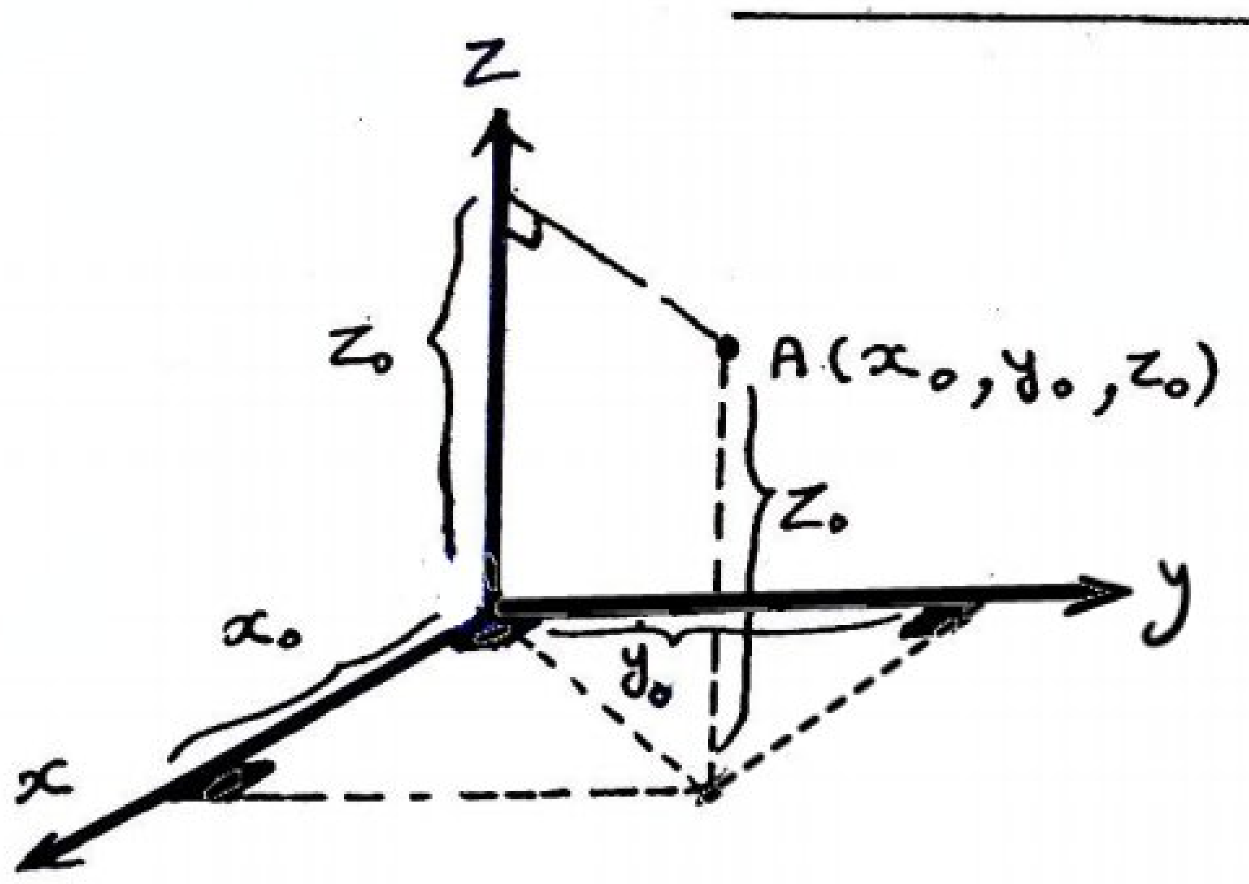


(قانون دست راست: اگر دست راست را از محور x ها به سمت محور y ها ببندیم، انگشت شست عمود بر دست جهت محور z ها را نشان می‌دهد)

تذکر : ۶۴

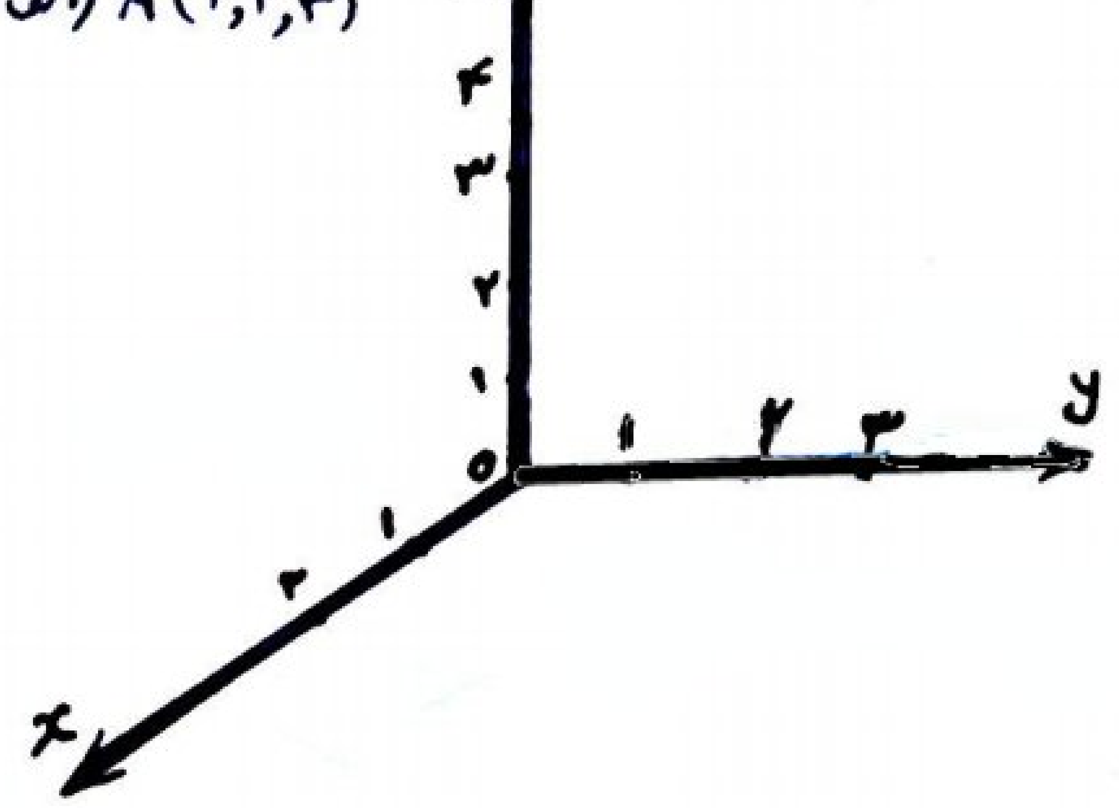
نمایش نقطه در دستگاه مختصات سه بعدی

EX یک سه‌تایی مرتب از اعداد حقیقی است.

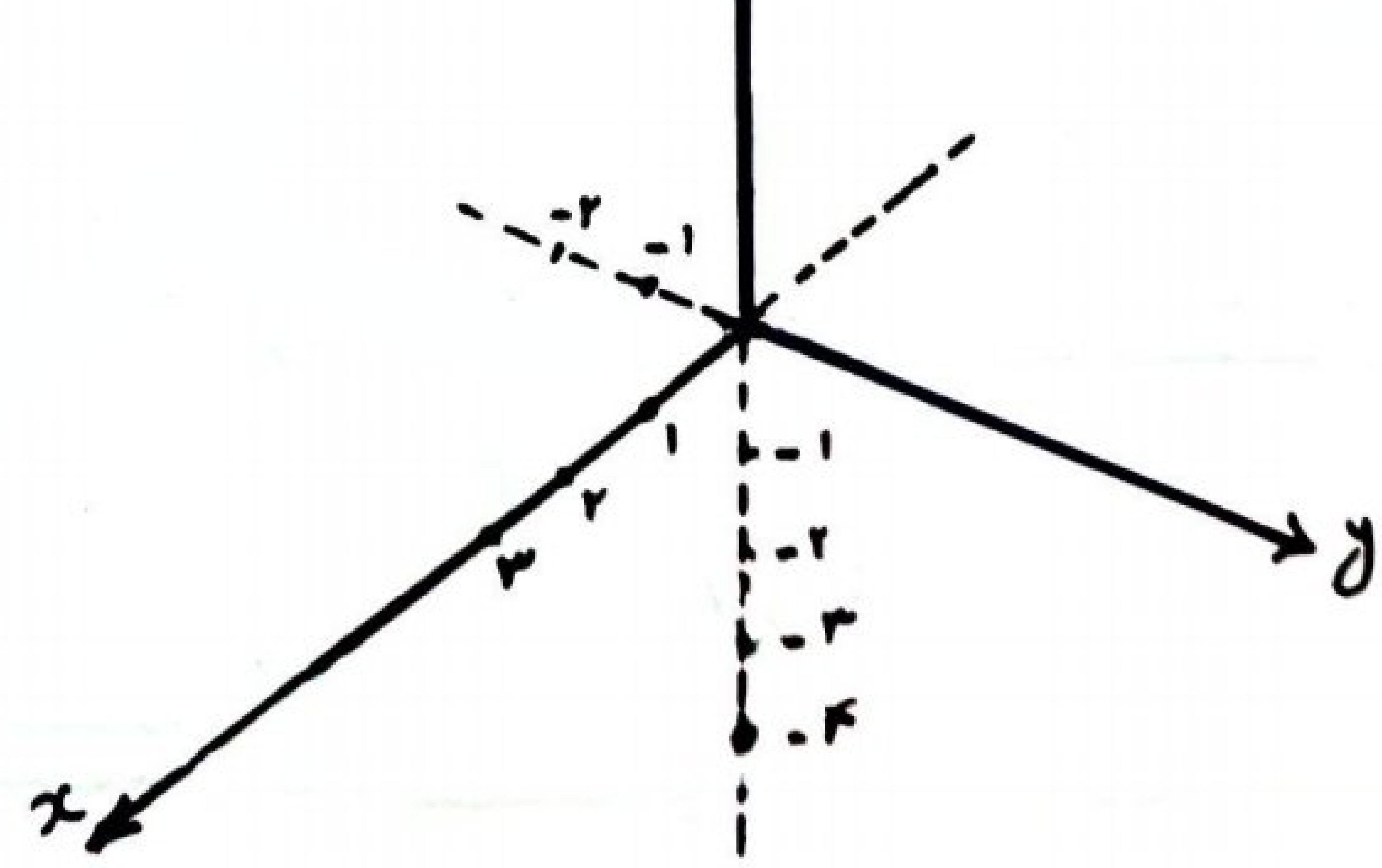


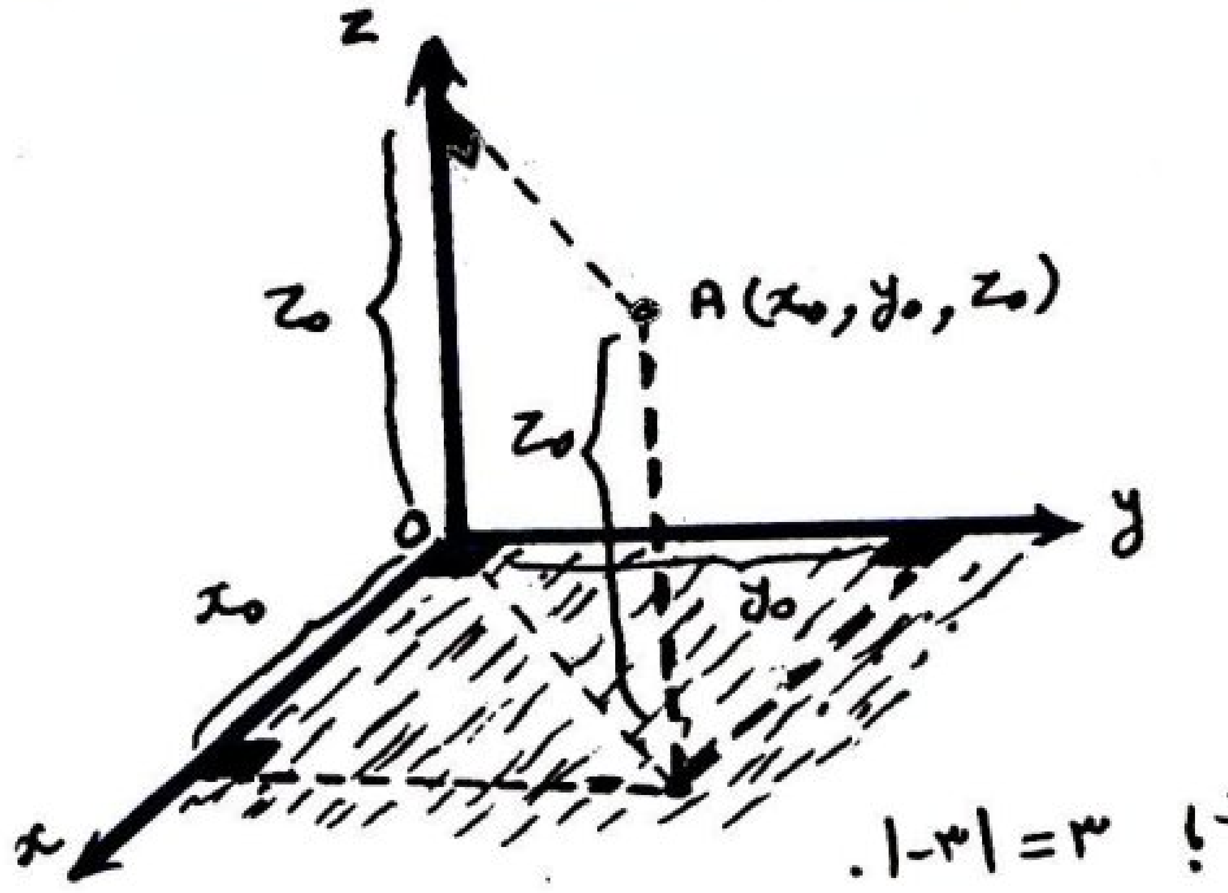
مثال: EX نمایش هر کدام از نقطه‌های داده شده

الف) A (۲,۳,۴)



ب) B (۳,-۲,-۴)





نکته ۱) فاصله نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$

الف) از صفحه xoy برابر است با $|z_0|$

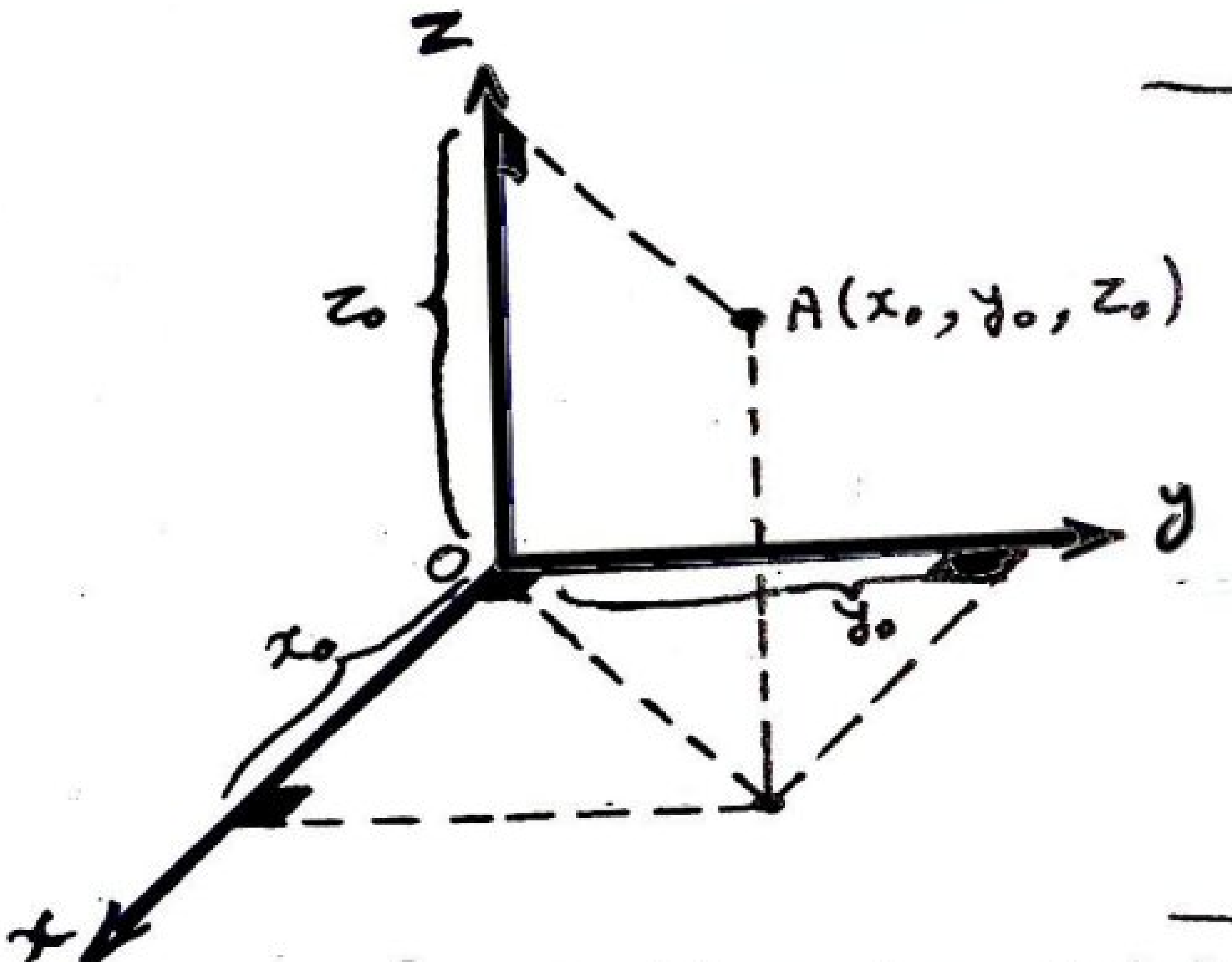
ب) از صفحه xoz برابر است با $|y_0|$

ج) از صفحه yoz برابر است با $|x_0|$

مثلاً فاصله نقطه $A(۲,-۳,۵)$ از صفحه xoz برابر است با $۳=|-۳|$.

تست چند نقطه در فضا وجود دارد که فاصله آن از صفحه‌های yoz، xoz و xoy به ترتیب ۲، ۰ و ۱ باشد؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۸



نکته ۲) فاصله نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$

الف) از محور oz برابر است با $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$

ب) از محور oy برابر است با $\sqrt{x_0^2+z_0^2}$

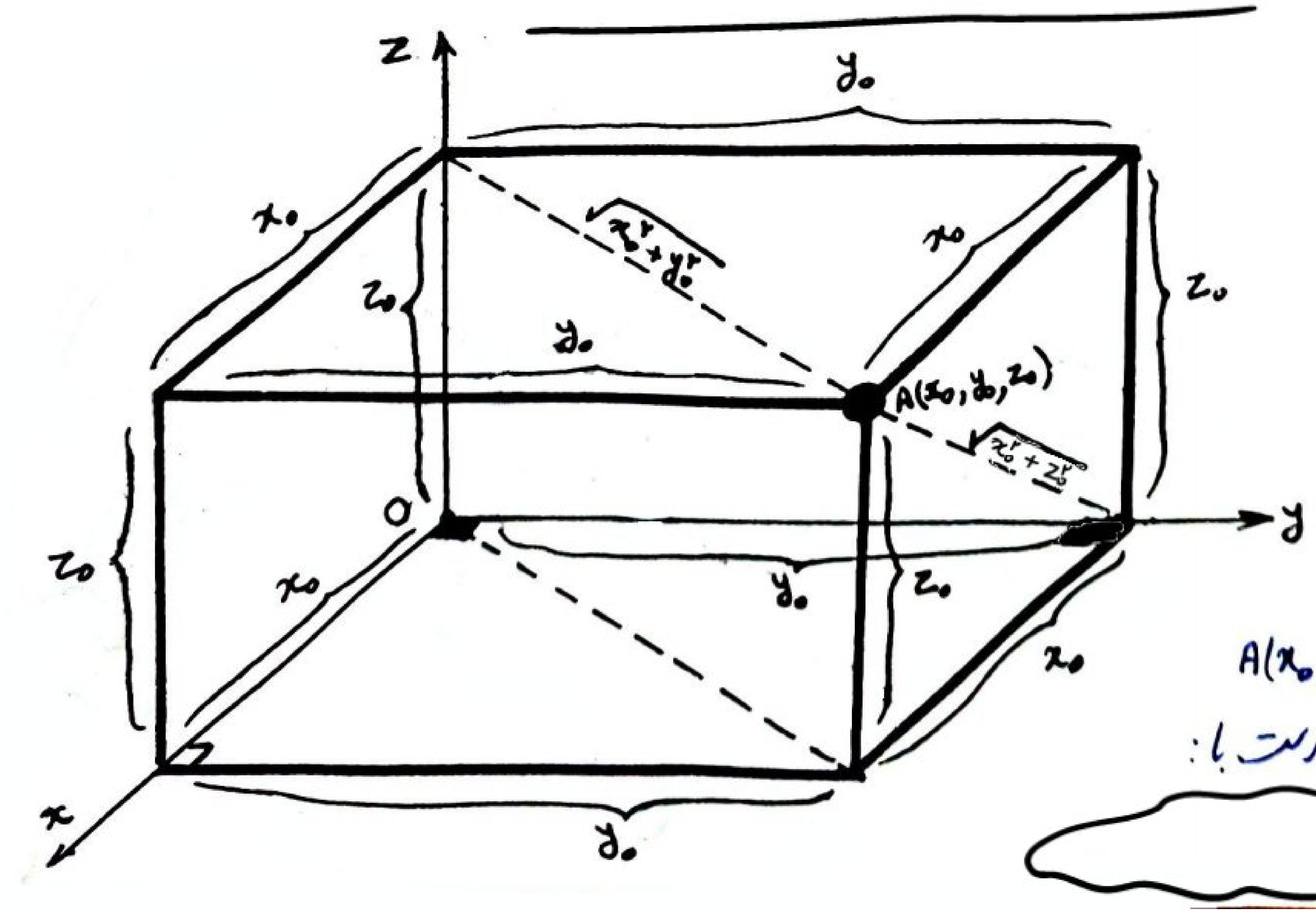
ج) از محور ox برابر است با $\sqrt{y_0^2+z_0^2}$

مثال فاصله نقطه $A(۱,۲,۳)$ از محور xها چقدر است؟

تست به ازای کدام مقدار m فاصله نقطه $A(m+1,2m,-3)$ از محور yها برابر $\sqrt{10}$ است؟

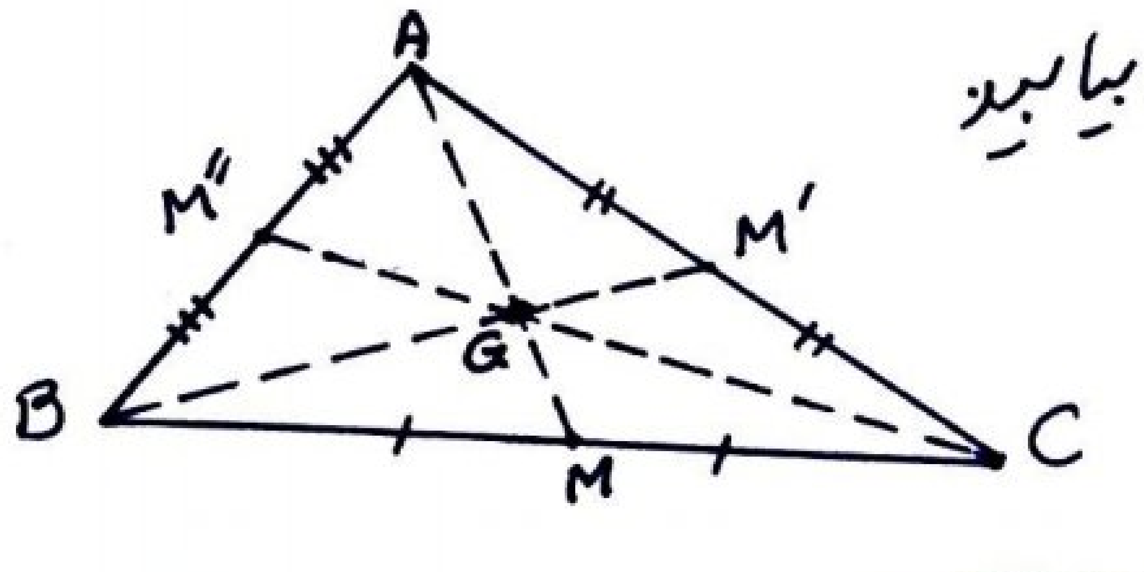
۱) ۰ و ۲　　۲) ۰ و ۲-
۳) ۱ و ۲　　۴) ۱ و ۲-

خلاصه نمایش نقطه



نکته ۳) فاصله نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

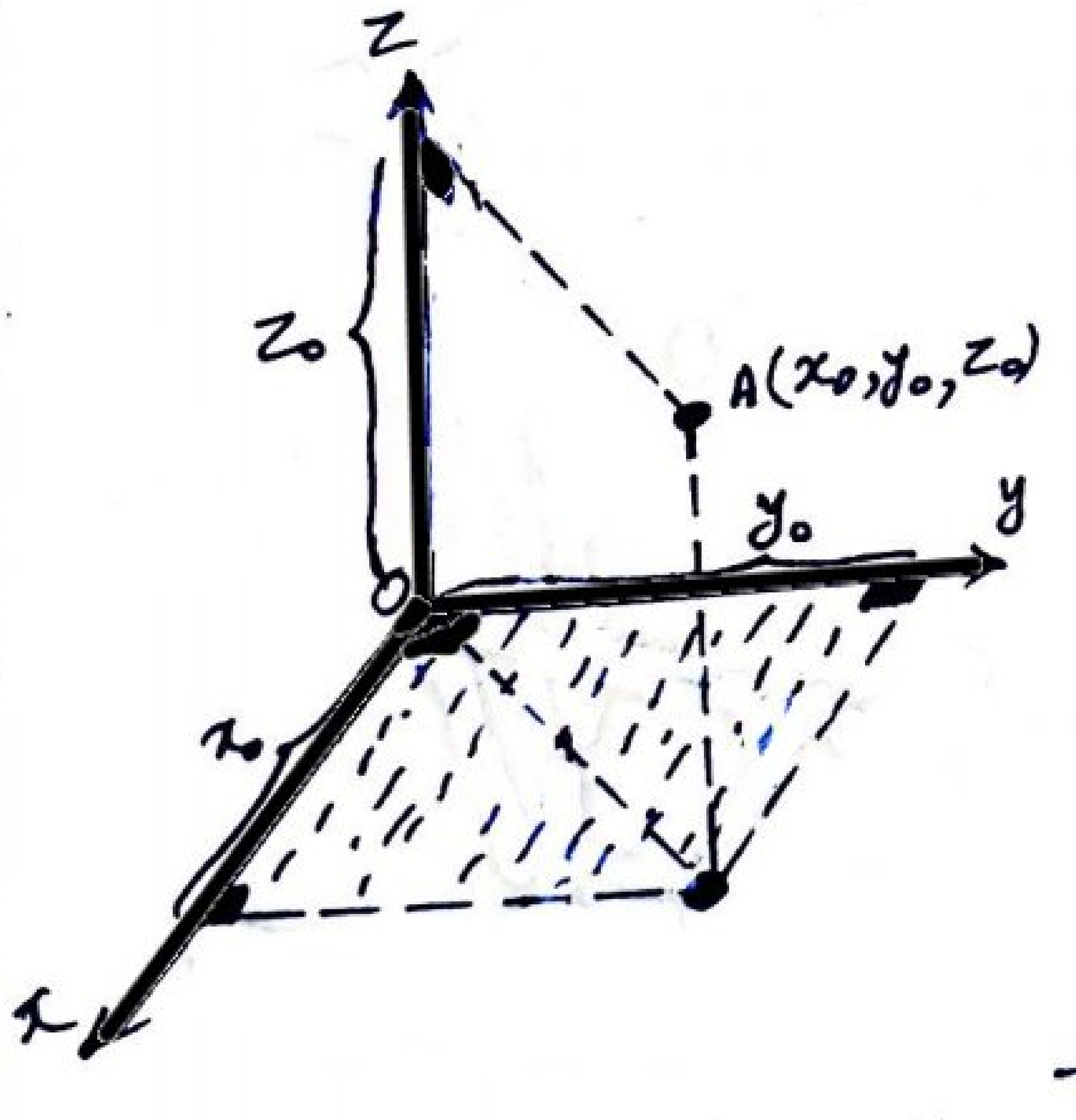
مثال: در مثلثی به رأس های $A(1,2,-2)$ ، $B(0,3,1)$ ، $C(2,1,4)$ ، فاصله نقطه همرسی میانه ها (مرکز ثقل) از مبدأ مختصات را بیابید.



نکته

تست: فاصله یک نقطه در فضا از سه محور x ها ، y ها و z ها به ترتیب $\sqrt{3}$ ، ۲ و $\sqrt{5}$ است. فاصله این نقطه از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{6}$ ۲) $\sqrt{7}$ ۳) $\sqrt{10}$ ۴) $\sqrt{12}$



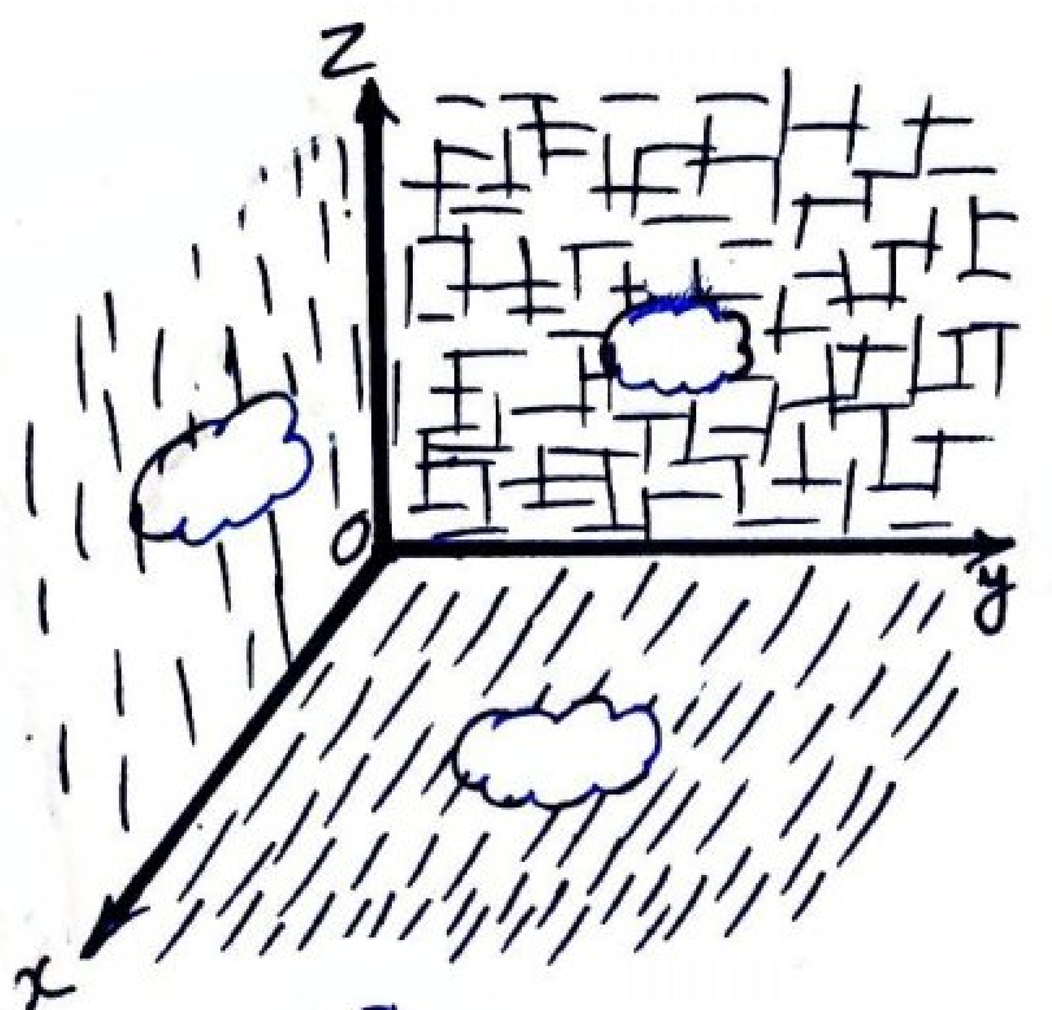
نکته ۴ مختصات تصویر قائم نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$

الف) روی صفحه xoy عبارت است از : $(x_0,y_0,0)$

ب) " " xoz " " : $(x_0,0,z_0)$

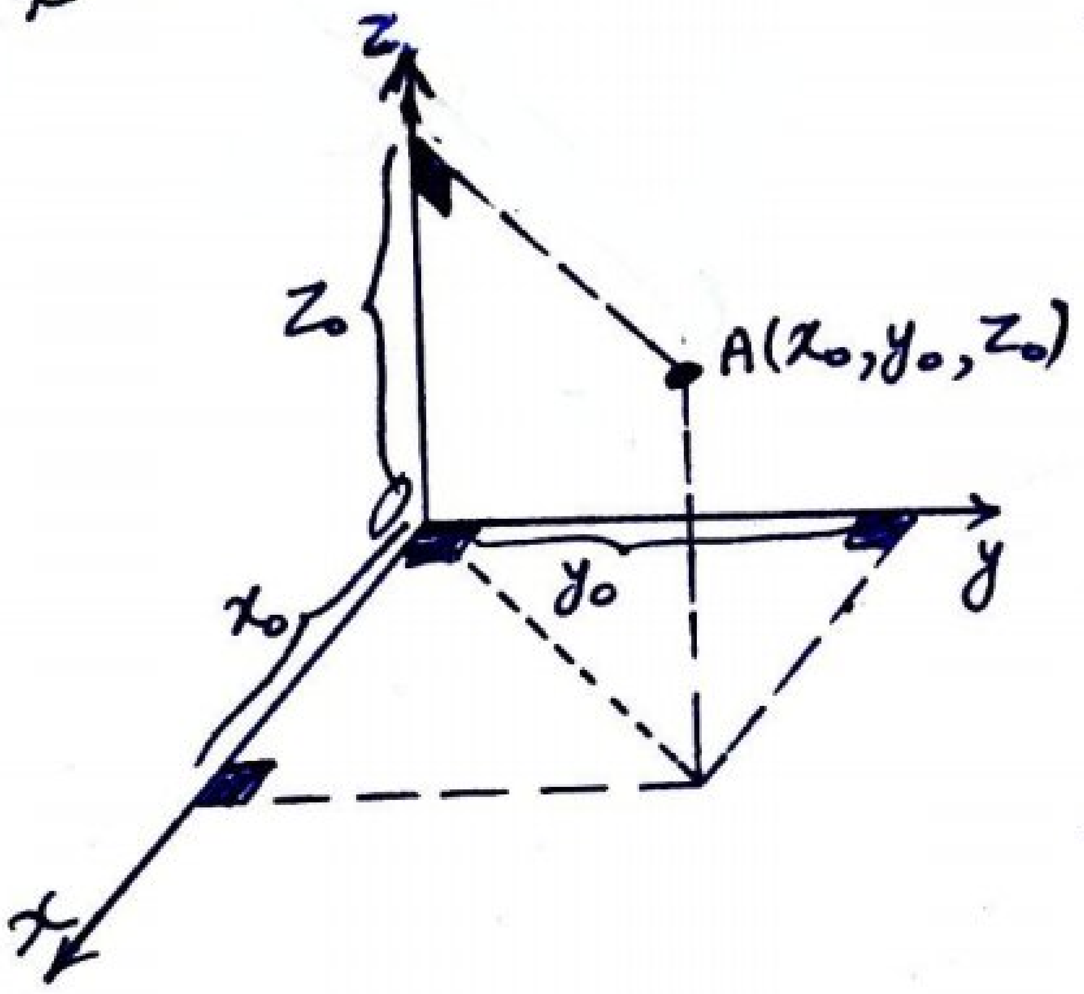
پ) " " yoz " " : $(0,y_0,z_0)$

مثال فاصله تصویر قائم نقطه $A(1,-3,2)$ روی صفحه xoz ، از مبدأ مختصات را بیابید.



نتیجه «معادلهٔ صفحات مختصات»
Ex

معادلهٔ صفحهٔ xoy عبارت است از :
" " xoz " " :
" " yoz " " :



نکته ۵) مختصات تصویر قائم نقطهٔ $A(x_0, y_0, z_0)$

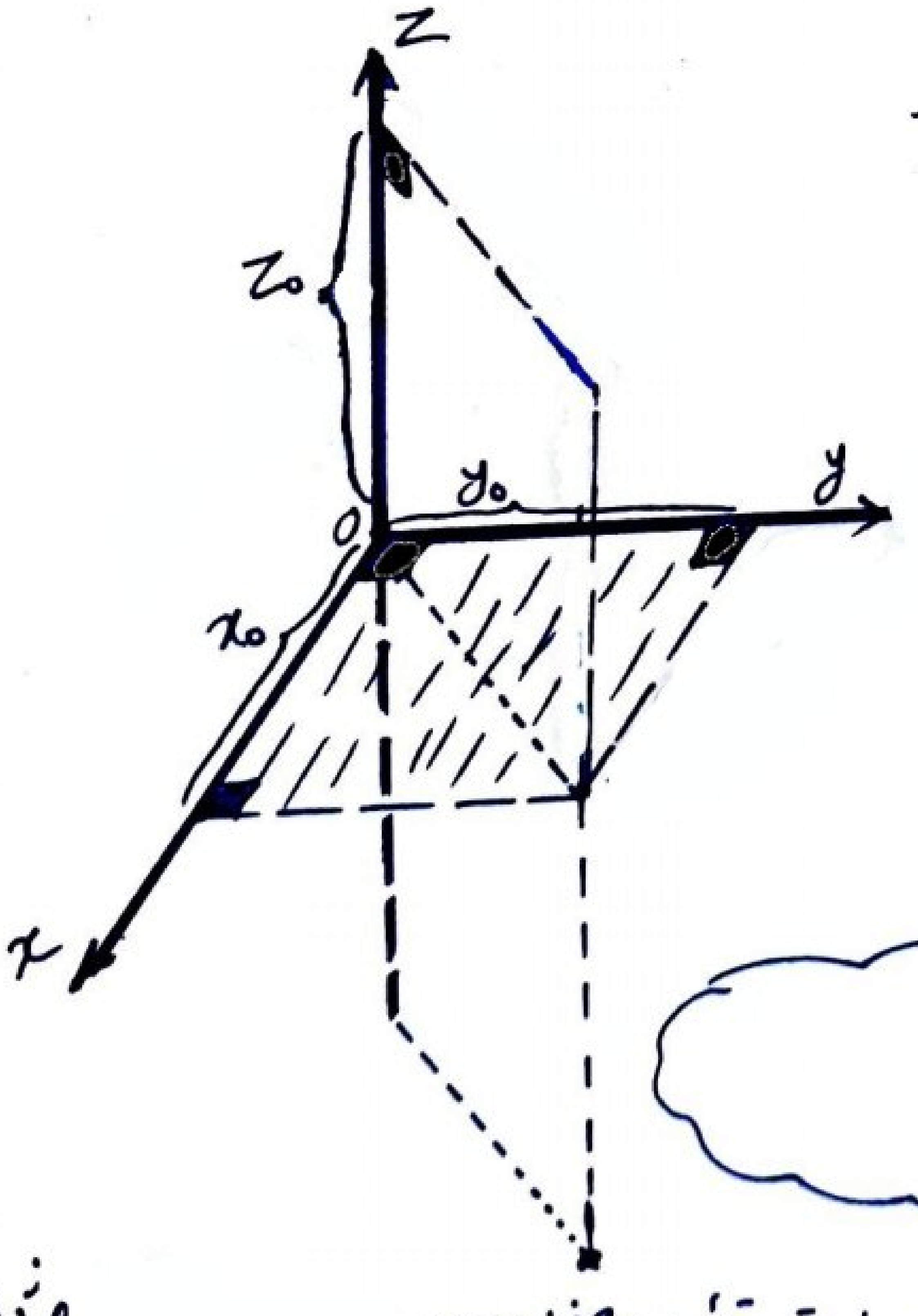
الف) روی محور oz عبارت است از : $(0, 0, z_0)$

ب) " " " oy " " " : $(0, y_0, 0)$

پ) " " " ox " " " : $(x_0, 0, 0)$

نتیجه : «معادلهٔ محورهای مختصات»
Ex

معادلهٔ محور zها عبارت است از :
" " yها " " " :
" " xها " " " :



نکته ۶) بازتاب (قرینهٔ) نقطهٔ $A(x_0, y_0, z_0)$

الف) نسبت به صفحهٔ xoy عبارت است از : $(x_0, y_0, -z_0)$

ب) " " " xoz " " " : $(x_0, -y_0, z_0)$

پ) " " " yoz " " " : $(-x_0, y_0, z_0)$

ت) " " محور oz " " " : $(-x_0, -y_0, z_0)$

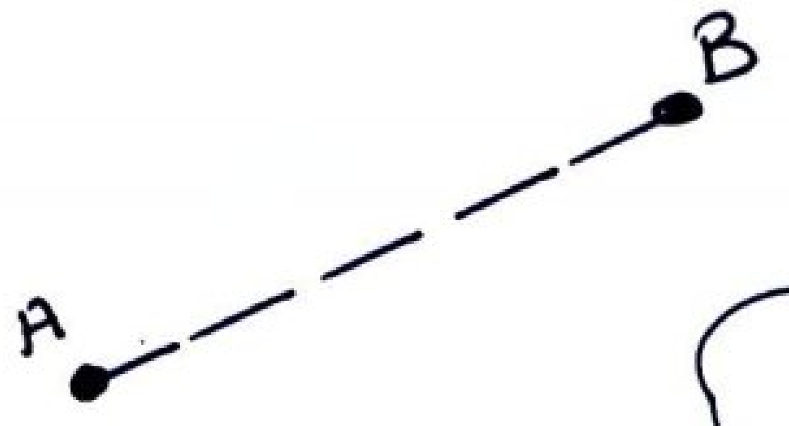
ث) " " " oy " " " : $(-x_0, y_0, -z_0)$

ج) " " " ox " " " : $(x_0, -y_0, -z_0)$

مثال)

	تصویر قائم روی صفحهٔ yoz	تصویر قائم روی محور oz	بازتاب نسبت به صفحهٔ xoz	بازتاب نسبت به محور oz
A(۱,۲,۳)				

فاصلهٔ دو نقطه در فضا (طول پاره‌خط)



$$|AB| = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$$

بنابراین الف) $|AB| \geq 0$ ب) $|AB|=|BA|$ پ) $|AB|=0 \Leftrightarrow A=B$ (انطباق)

تست Ex: اگر سه نقطهٔ $A(2,1,3)$ ، $B(3,0,5)$ و $C(5,-4,2)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، نوع مثلث کدام است؟

۱) متساوی الساقین ۲) متساوی الاضلاع ۳) قائم الزاویه ۴) قائم الزاویهٔ متساوی الساقین

$$\begin{cases} |AB| = \sqrt{(2-3)^2+(1-0)^2+(3-5)^2} = \sqrt{6} \\ |BC| = \sqrt{(3-5)^2+(0+4)^2+(5-2)^2} = \sqrt{29} \\ |AC| = \sqrt{(2-5)^2+(1+4)^2+(3-2)^2} = \sqrt{35} \end{cases} \Rightarrow$$

مثال: روی محور yها نقطه‌ای بیابید که از دو نقطهٔ $A(1,-3,7)$ و $B(5,7,-5)$ به یک فاصله باشد!

تست: دو نقطهٔ $A(a-1,2a+b,3a-2b)$ و $B(2c,b-c+1,4a+b)$ مفروض‌اند. اگر $|AB|=0$ ، حاصل $2a-3b-c$ کدام است؟

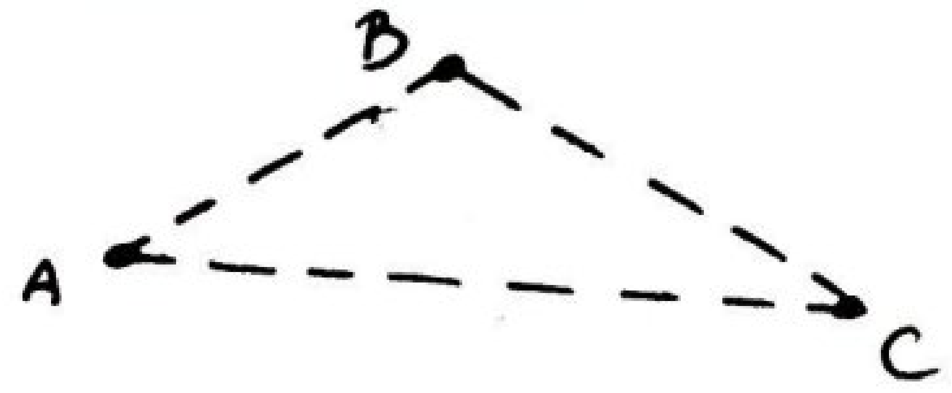
۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

یادآوری

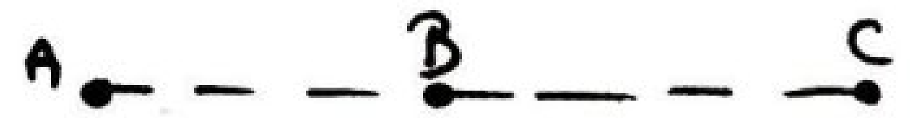
نامساوی مثلثی

برای سه نقطهٔ دلخواه A، B و C در فضا (صفحه) :



$$|AB| + |BC| > |AC|$$

* اگر سه نقطه روی یک امتداد باشند، آنگاه



(رابطهٔ شال) $|AB| + |BC| = |AC|$

تست دو نقطهٔ $A(2,-1,1)$ و $B(-1,-1,5)$ مفروض‌اند. چند نقطه مانند C در فضا وجود دارد که

الف) فاصله‌اش از A برابر ۲ و از B برابر ۳ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) هیچ ۴) بی‌شمار

ب) فاصله‌اش از A برابر ۶ و از B برابر ۱ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) هیچ ۴) بی‌شمار

پ) فاصله‌اش از A برابر ۲ و از B برابر ۱ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) هیچ ۴) بی‌شمار

ت) فاصله‌اش از A برابر ۳ و از B برابر ۴ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) هیچ ۴) بی‌شمار

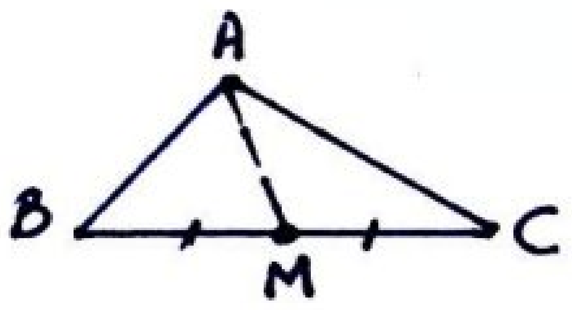
مختصات وسط یک پاره خط

میانگین $\longrightarrow$ $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$

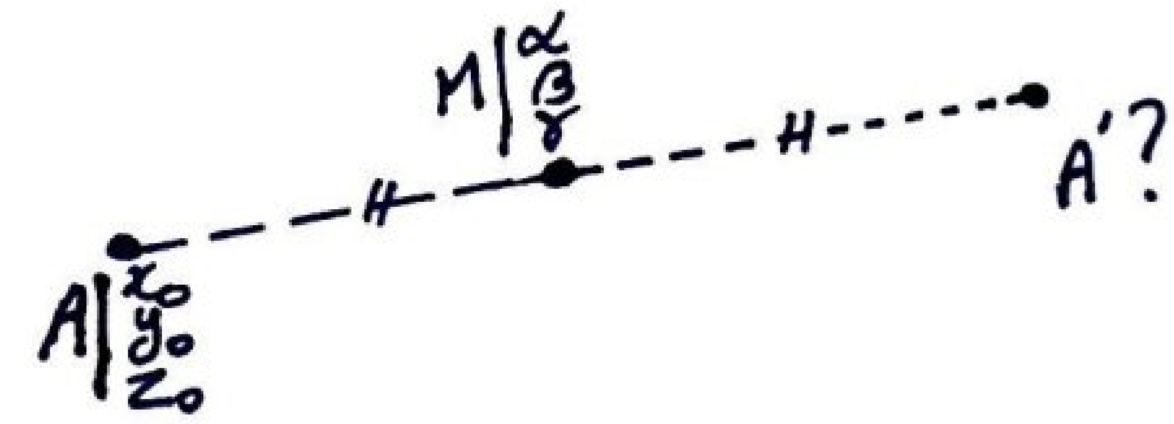
خلاصه $\longrightarrow$ $M=\frac{A+B}{2}$

تست / EX سه نقطهٔ $A(2,-1,4)$ ، $B(3,2,-6)$ و $C(-5,0,2)$ رأس‌های مثلث ABC می‌باشند. طول میانهٔ نظیر ضلع BC کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶
۳) ۷ ۴) ۸



نتیجه بازتاب نقطهٔ $A(x_0, y_0, z_0)$ نسبت به نقطهٔ $M(\alpha, \beta, \gamma)$ عبارت است از:

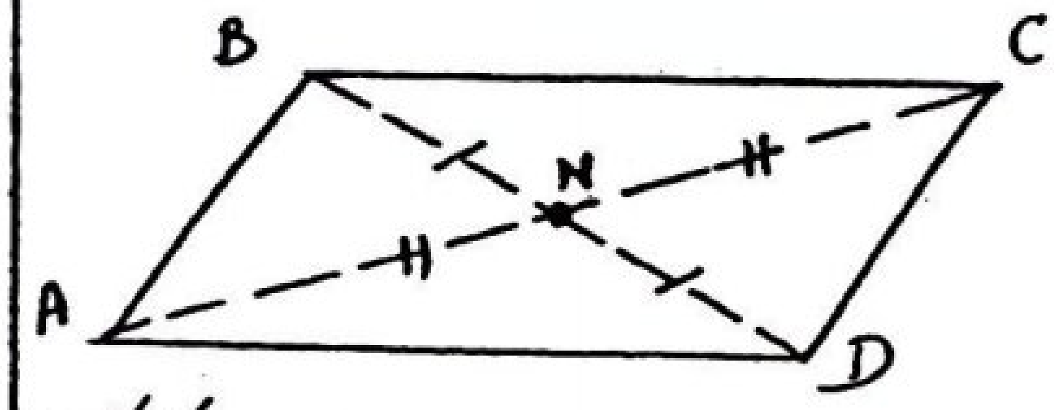


زیرا :

مثال بازتاب نقطهٔ $A(2,3,-4)$ نسبت به نقطهٔ $M(1,4,2)$ عبارت است از:

حالت خاص بازتاب نقطهٔ $A(x_0, y_0, z_0)$ نسبت به $\underbrace{\text{مبدأ مختصات}}_{\alpha=\beta=\gamma=0}$ عبارت است از: $(-x_0, -y_0, -z_0)$

نتیجه ۲: در متوازی الاضلاع ABCD همواره داریم:



$$\boxed{\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \\ z_A + z_C = z_B + z_D \end{cases}}$$

(یادآوری: در هر متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند)

زیرا

$$\left.\begin{array}{l} \text{نقطه N وسط پاره‌خط AC است} \Rightarrow N = \frac{A+C}{۲} \\ \text{" BD " " " "} \Rightarrow N = \frac{B+D}{۲} \end{array}\right\} \rightarrow A + C = B + D$$

مثال: اگر $A(۲,۳,۰)$، $B(-۱,۴,۲)$ و $C(۴,۳,۳)$ سه رأس متوالی متوازی الاضلاع ABCD باشند، مختصات رأس D را بیابید.

می‌دانیم $A + C = B + D$

$$\rightarrow \begin{cases} ۲ + ۴ = (-۱) + x_D \rightarrow x_D = ۷ \\ ۳ + ۳ = ۴ + y_D \rightarrow y_D = ۲ \\ ۰ + ۳ = ۲ + z_D \rightarrow z_D = ۱ \end{cases}$$

$$\rightarrow D(۷,۲,۱)$$

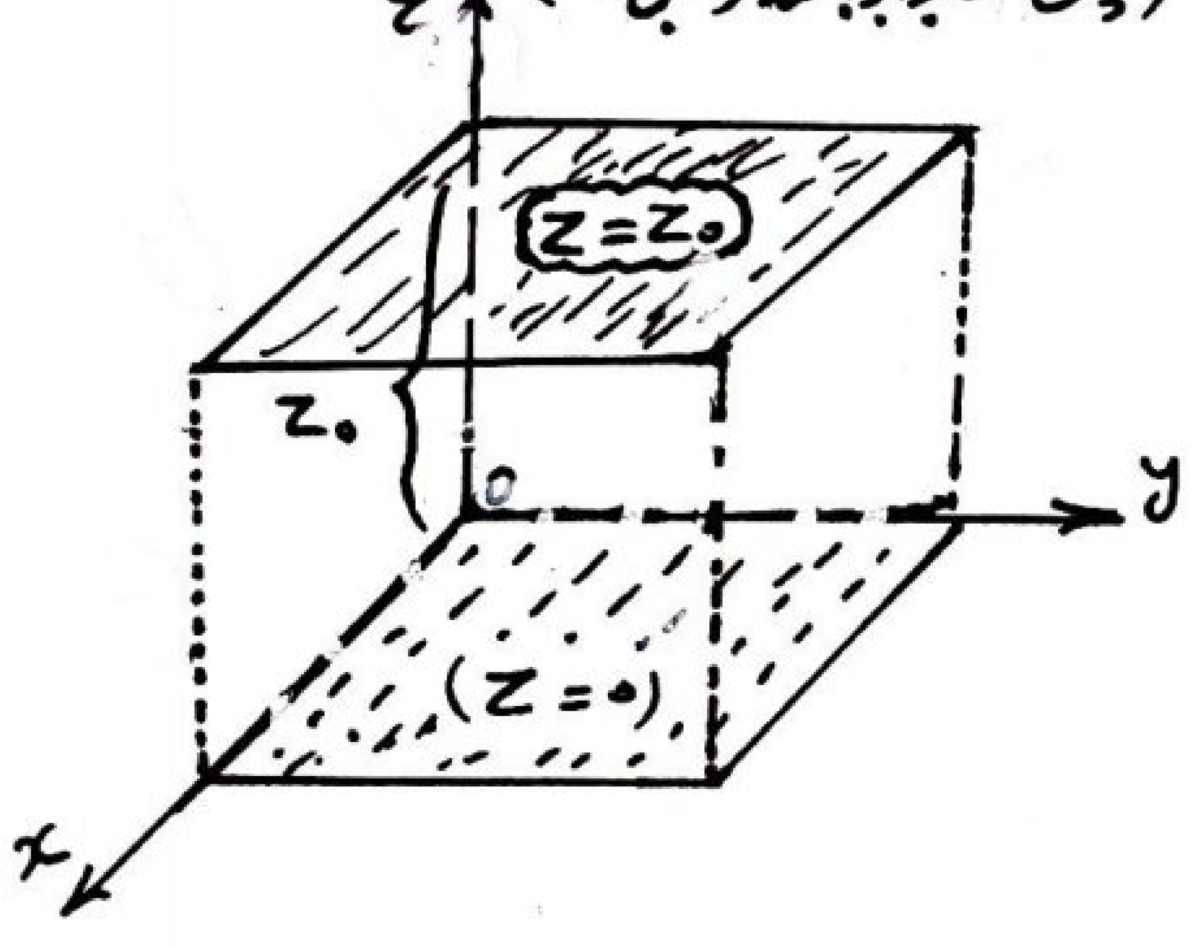
به رغم مدعیانی که منع عشق کنند
جمال چهرهٔ تو حجت موجه ماست

صفحه‌های موازی با صفحات مختصات (عمود بر محورهای مختصات)

* اگر صفحه‌ای موازی با یکی از صفحات مختصات باشد، آن‌گاه عمود بر محوری است که بر آن صفحهٔ مختصات عمود است.

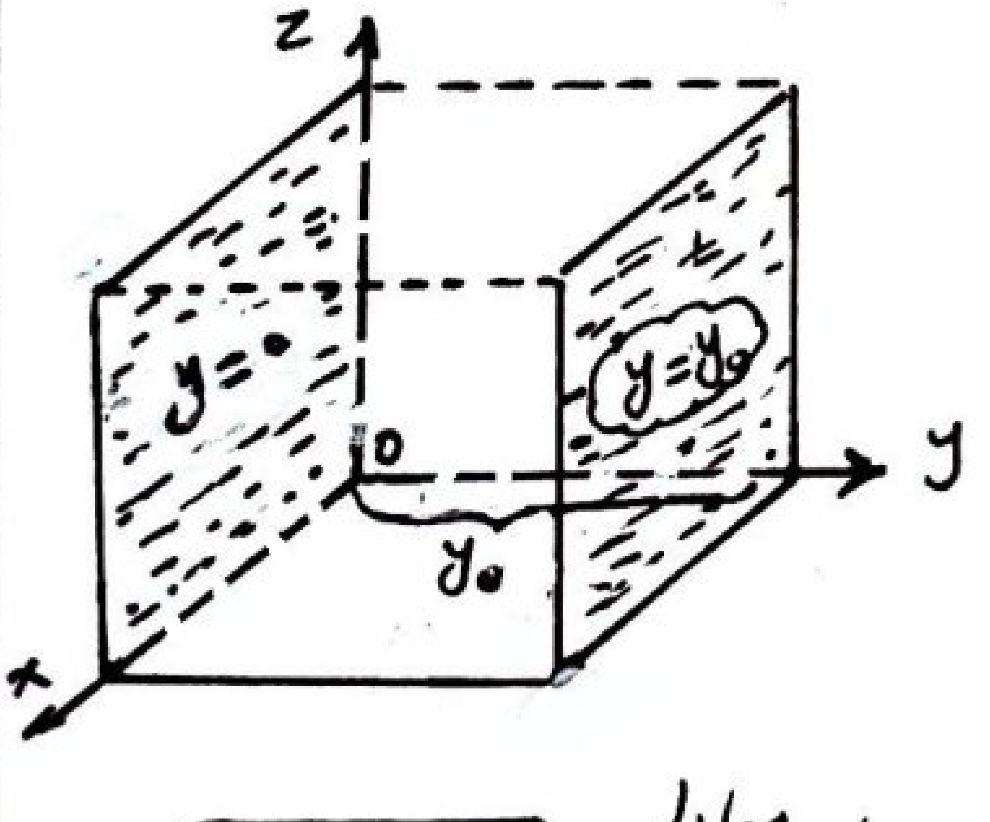
> اگر صفحه‌ای عمود بر یک محور مختصات باشد، در معادلهٔ آن صفحه، مؤلفهٔ هم نام با آن محور برابر با مقدار ثابتی است.

۱. صفحهٔ P موازی با صفحهٔ xoy $\xrightarrow[\text{صفحهٔ xoy است}]{\text{محور zها عمود بر}}$ صفحهٔ P عمود بر محور zها (پس z برابر با مقدار ثابتی است) $\xrightarrow{\text{معادله}}$ $\boxed{P: z = z_0}$



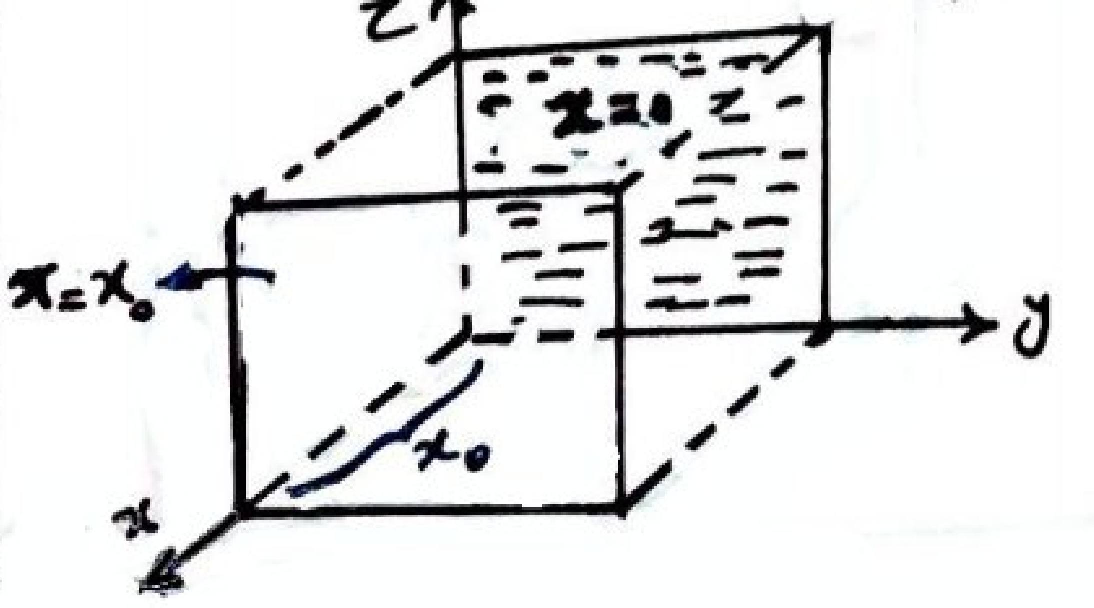
توجه: در صفحهٔ $P: z = z_0$، تمام نقاط دارای مؤلفهٔ z ثابت اند. اما x و y آنها هر مقدار دلخواه است.

۲. صفحهٔ P موازی با صفحهٔ xoz $\xrightarrow[\text{صفحهٔ xoz است}]{\text{محور yها عمود بر}}$ صفحهٔ P عمود بر محور yها (پس y برابر با مقدار ثابتی است) $\xrightarrow{\text{معادله}}$ $\boxed{P: y = y_0}$



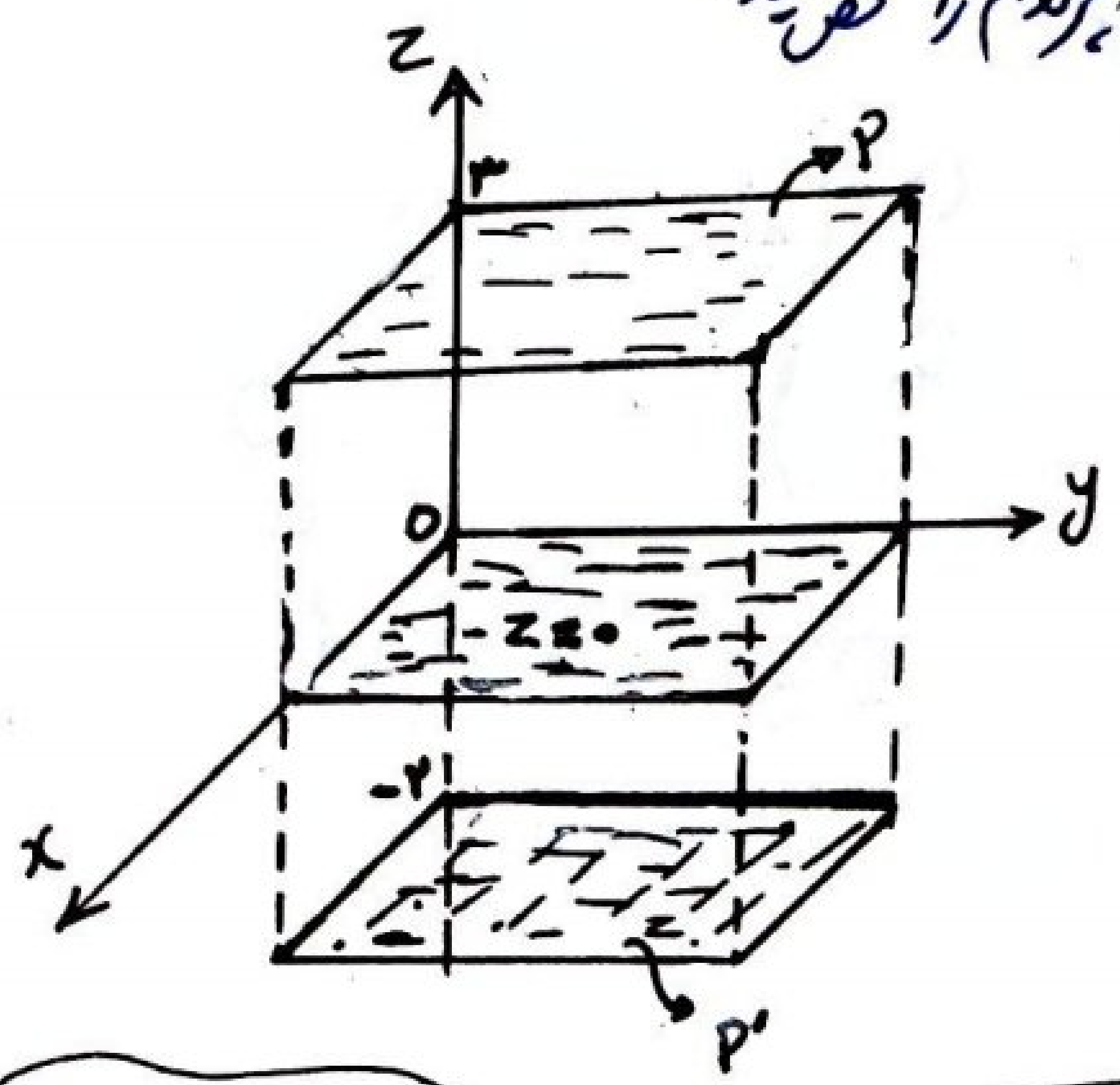
توجه: در صفحهٔ $P: y = y_0$، تمام نقاط دارای مؤلفهٔ y ثابت اند. اما x و z آنها هر مقدار دلخواه است.

۳. صفحهٔ P موازی با صفحهٔ yoz $\xrightarrow[\text{صفحهٔ yoz است}]{\text{محور xها عمود بر}}$ صفحهٔ P عمود بر محور xها (پس x برابر با مقدار ثابتی است) $\xrightarrow{\text{معادله}}$ $\boxed{P: x = x_0}$



توجه: در صفحهٔ $P: x = x_0$، تمام نقاط دارای مؤلفهٔ x ثابت اند. اما y و z آنها هر مقدار دلخواه است.

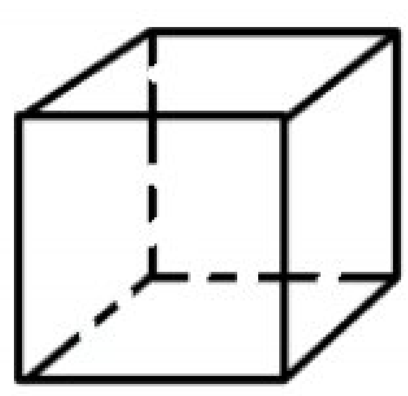
مثال EX : معادلهٔ دو صفحهٔ P و P' را بیابید و مختصات دو نقطه از هرکدام را مشخص کنید.



* فاصلهٔ این دو صفحه از یکدیگر چقدر است؟

نتیجه : فاصلهٔ بین دو صفحه، که هر دو عمود بر یک محور مختصات می‌باشند، برابر با قدر مطلق تفاضل مؤلفه‌های ثابت هر دو صفحه است.

تست EX : معادلهٔ صفحه‌های مربوط به دو وجه مقابل یک مکعب، به صورت $y^2=8$ است. مساحت کل این مکعب کدام است؟



۱) ۱۹۲   ۲) ۱۲۸

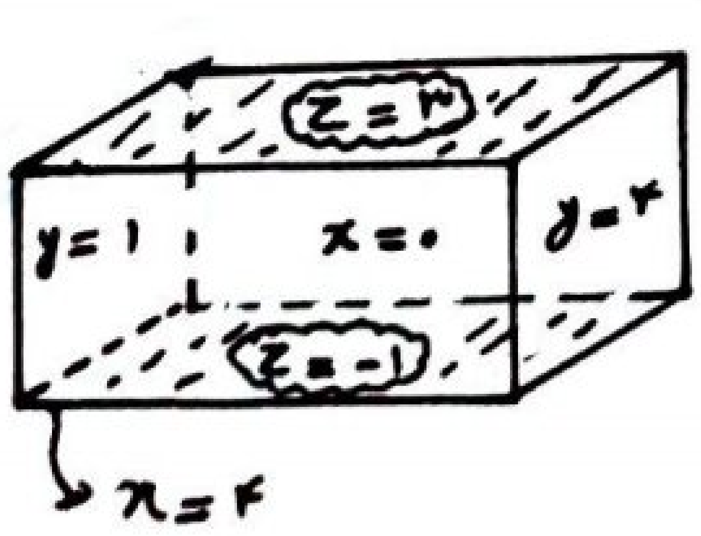
۳) ۶۴   ۴) ۳۲

تست : سه نقطهٔ A(۲, ۵, -۱)، B(۲, ۰, ۳) و C(۲, -۱, -۱) رأس‌های یک مثلث می‌باشند. این مثلث بر کدام صفحه واقع است؟

۱) P: $y=5$ ۲) P: $x=2$

۳) P: $z=3$ ۴) P: $z=-1$

تست EX : با توجه به معادلات مشخص شده برای صفحات هر یک از وجه‌های مکعب مستطیل مقابل، کدام نقطه روی هیچ کدام از وجوه این مکعب مستطیل قرار ندارد؟

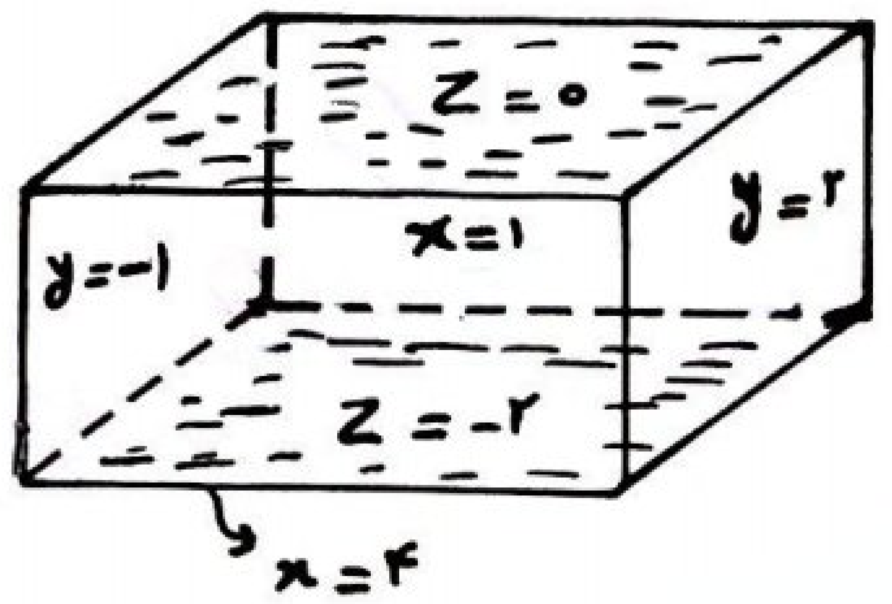


۱) (۳, ۱, ۲)   ۲) (۱, ۱, ۳)   ۳) (۲, -۱, -۱)   ۴) (۴, ۱, ۳)

معادلهٔ وجه بالایی : EX

معادلهٔ وجه جلویی : EX

مثال EX: اگر وجه‌های یک مکعب مستطیل بر صفحات به معادلات $x=1$، $x=4$، $y=-1$، $y=2$، $z=0$ و $z=-2$ واقع باشند، مختصات رأس‌های آن را مشخص کنید.



* معادله نقاط درون و روی مکعب مستطیل:
EX

* معادله نقاط درون مکعب مستطیل:
EX

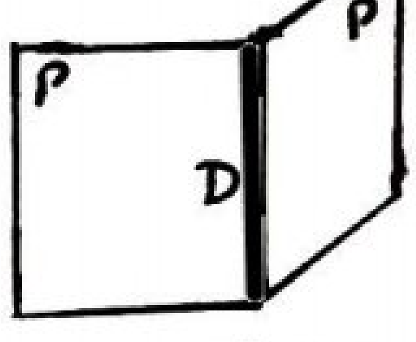
تست: معادله صفحه موازی با صفحه yoz و گذرا از نقطه $A(3,-1,4)$ کدام است؟

۱) $x=3$
۲) $y=-1$
۳) $z=4$
۴) $x=2$

نکته: معادله صفحه P، گذرا از نقطه A و
عمود بر محور x ها عبارت است از $x = x_A$
" " " y ها " " " $y = y_A$
" " " z ها " " " $z = z_A$

خط در فضا ← حاصل تقاطع دو صفحه متقاطع است.

(می‌دانیم اگر دو صفحه، متقاطع باشند، نقاط تقاطع آن‌ها، تشکیل یک خط در فضا می‌دهند که به آن فصل مشترک دو صفحه می‌گوییم)

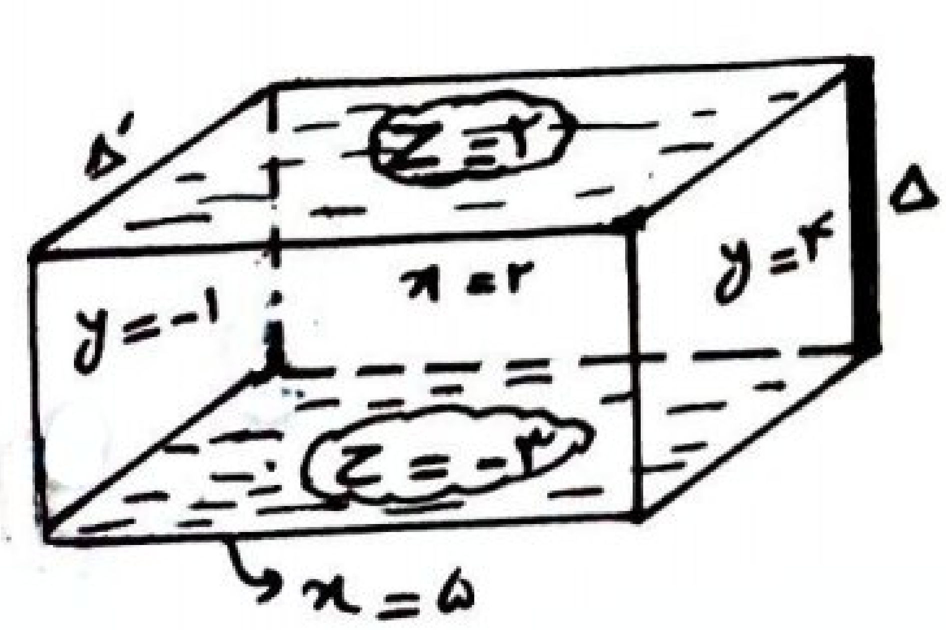


$P \cap P' = D$

◁ هر نقطه روی فصل مشترک دو صفحه متقاطع، در هر دو صفحه صدق می‌کند و برعکس.

مثال: فصل مشترک دو صفحه متقاطع $P: x=2$ و $P': z=4$، خط D به معادله $D: \begin{cases} x=2 \\ z=4 \end{cases}$ است.
(زیرا هر نقطه‌ای که متعلق به خط D باشد، هم در صفحه P و هم در صفحه P' صدق می‌کند و برعکس.)

مثال EX: در مکعب مستطیل مقابل، معادله یال Δ را بنویسید.

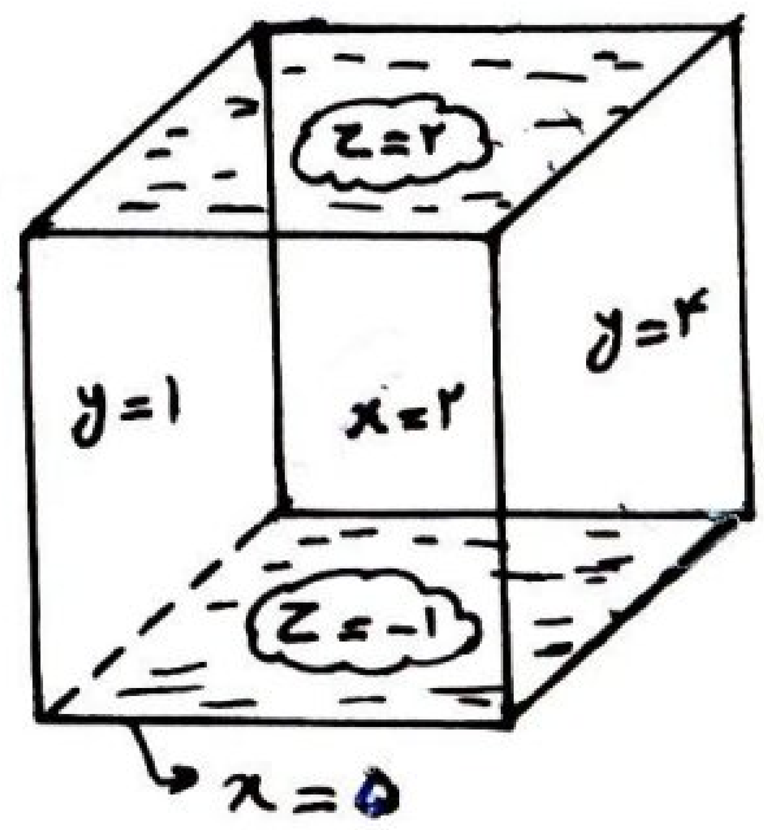


* معادله یال Δ' :
EX

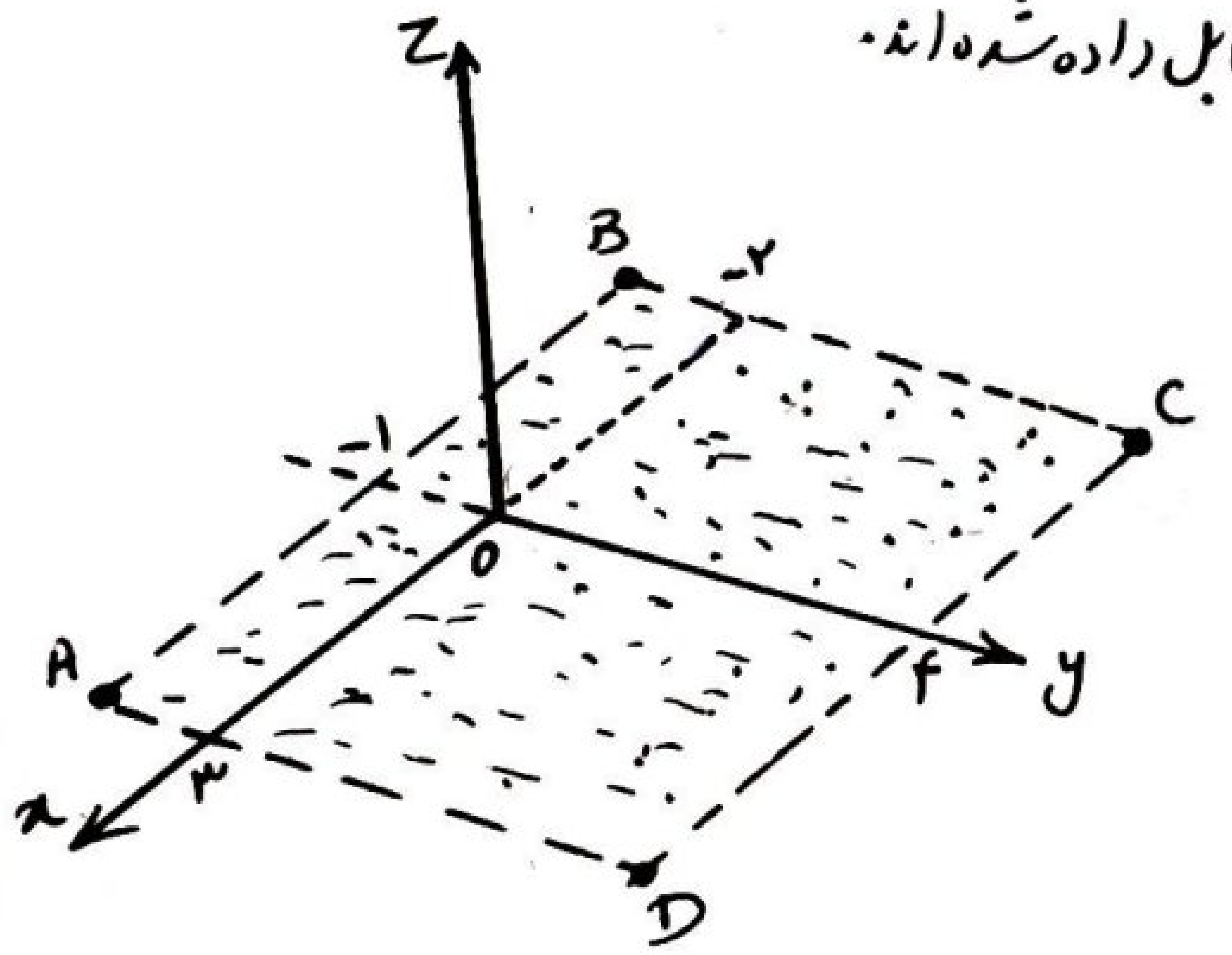
تست (EX) در مکعب شکل مقابل، کدام نقطه روی هیچ کدام از یال‌ها قرار ندارد؟

۱) $(2,4,3)$ ۲) $(3,4,2)$

۳) $(5,1,0)$ ۴) $(4,1,-1)$



مثال (EX) چهار نقطه A، B، C و D در دستگاه مختصات مقابل داده شده‌اند.
معادلات مشخص کننده‌ی چهارضلعی آن را بیابید.



خط‌های موازی با محورهای مختصات (عمود بر صفحات مختصات)

* اگر خطی موازی با یکی از محورهای مختصات باشد، آن‌گاه عمود بر صفحه‌ی مختصاتی است که آن محور بر آن عمود است.

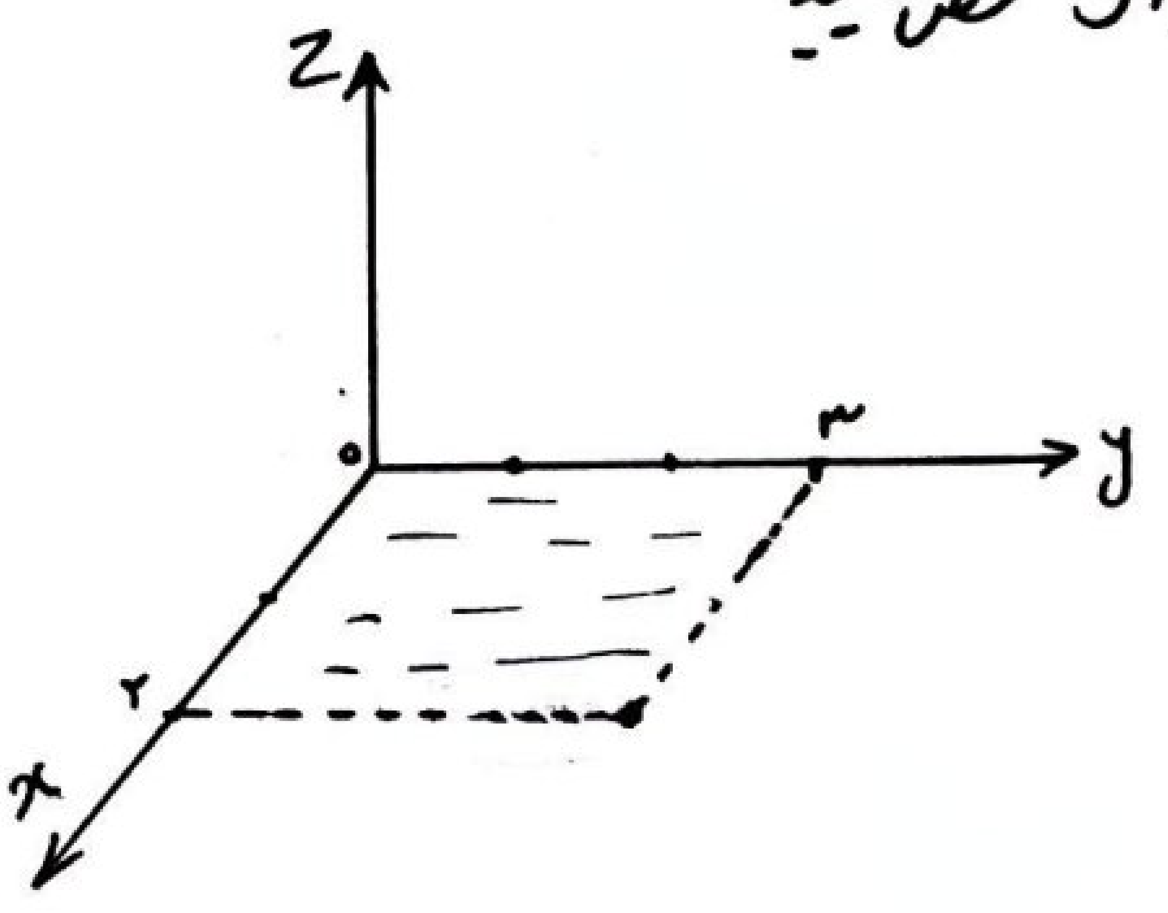
* اگر خطی عمود بر یک صفحه‌ی مختصات باشد، در معادله‌ی خط، مؤلفه‌های هم‌نام با آن صفحه برابر با مقداری ثابت‌اند.

① خط موازی با محور xها
↓
عمود بر صفحه‌ی yoz
↓
$$D:\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

② خط موازی با محور yها
↓
عمود بر صفحه‌ی xoz
↓
$$D:\begin{cases} x = x_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

③ خط موازی با محور zها
↓
عمود بر صفحه‌ی xoy
↓
$$D:\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

مثال EX خط $D:\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ را رسم کنید و دو نقطهٔ دلخواه از آن مشخص نمایید.



تست خط گذرا از نقطهٔ $A(2,1,-1)$ و عمود بر صفحهٔ yoz، از کدام نقطهٔ زیر می‌گذرد؟

۱) $(3,2,-1)$

۲) $(2,1,2)$

۳) $(1,1,-1)$

۴) $(1,2,-1)$

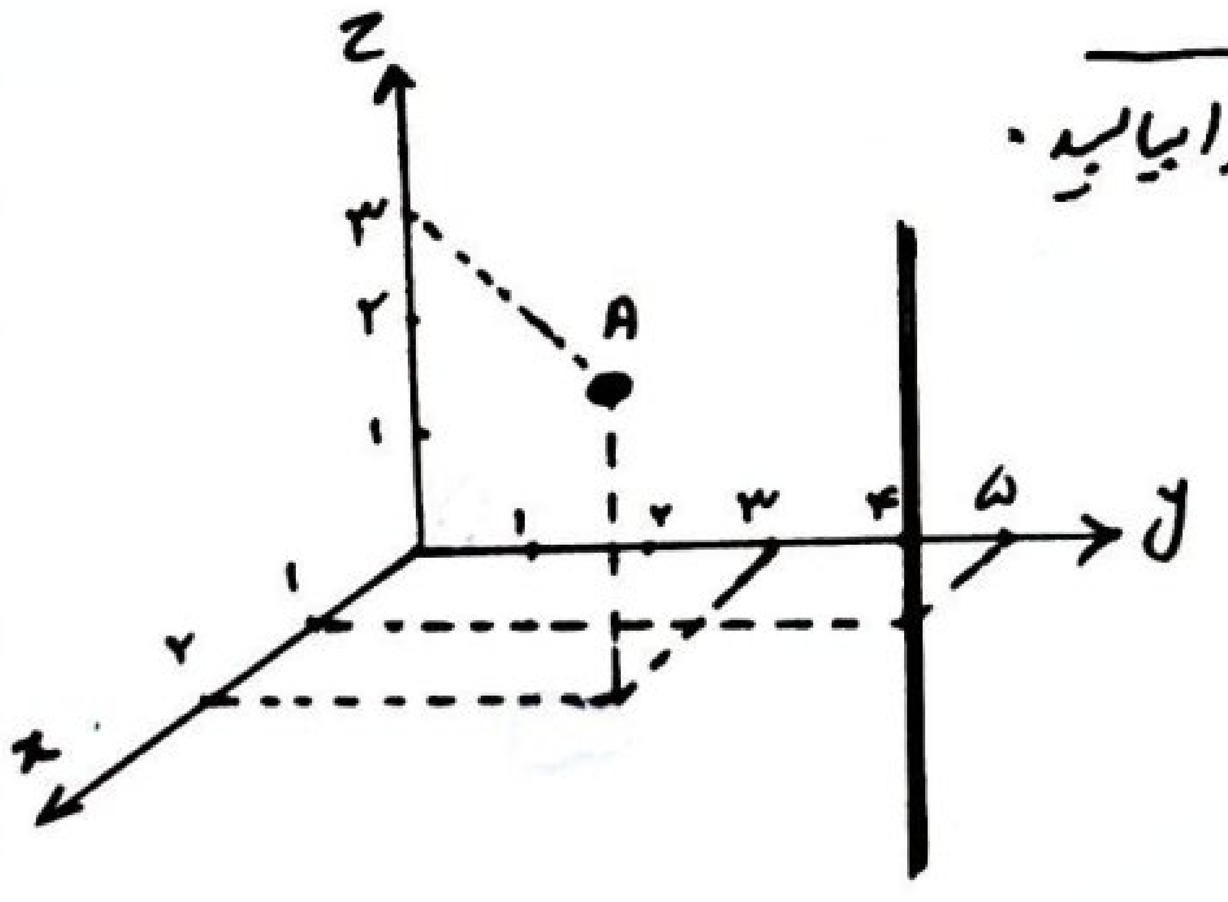
معادلهٔ خط گذرا از نقطهٔ A و عمود بر صفحهٔ xoy عبارت است از $D:\begin{cases} x=x_A \\ y=y_A \end{cases}$

" " " " yoz $D:\begin{cases} y=y_A \\ z=z_A \end{cases}$

" " " " xoz $D:\begin{cases} x=x_A \\ z=z_A \end{cases}$

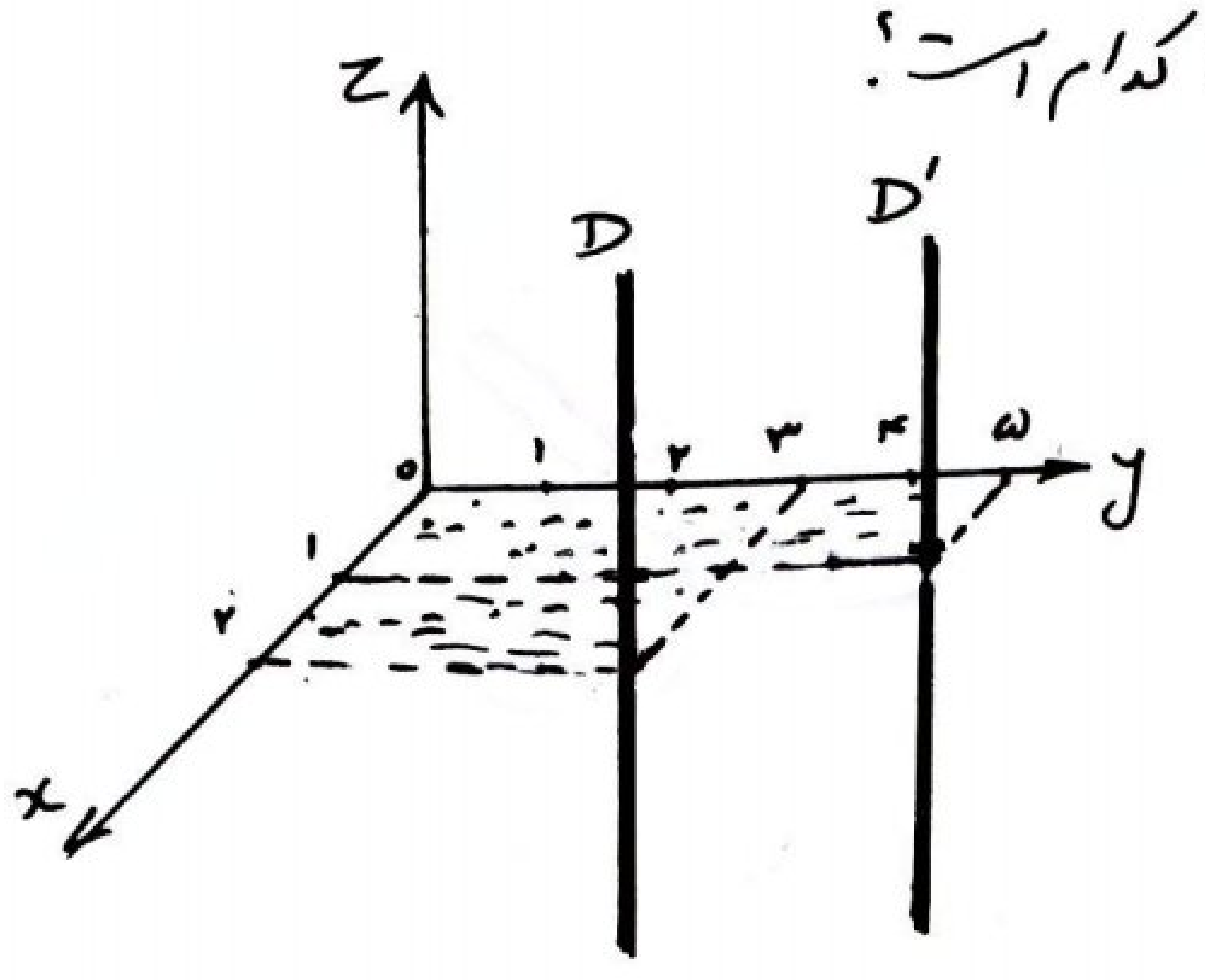
مثال معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $A(4,2,1)$ و موازی با محور ox کدام است؟

مثال فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,3,3)$ از خط $D:\begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$ را بیابید.



تست فاصله دو خط $D:\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ و $D':\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}$ کدام است؟

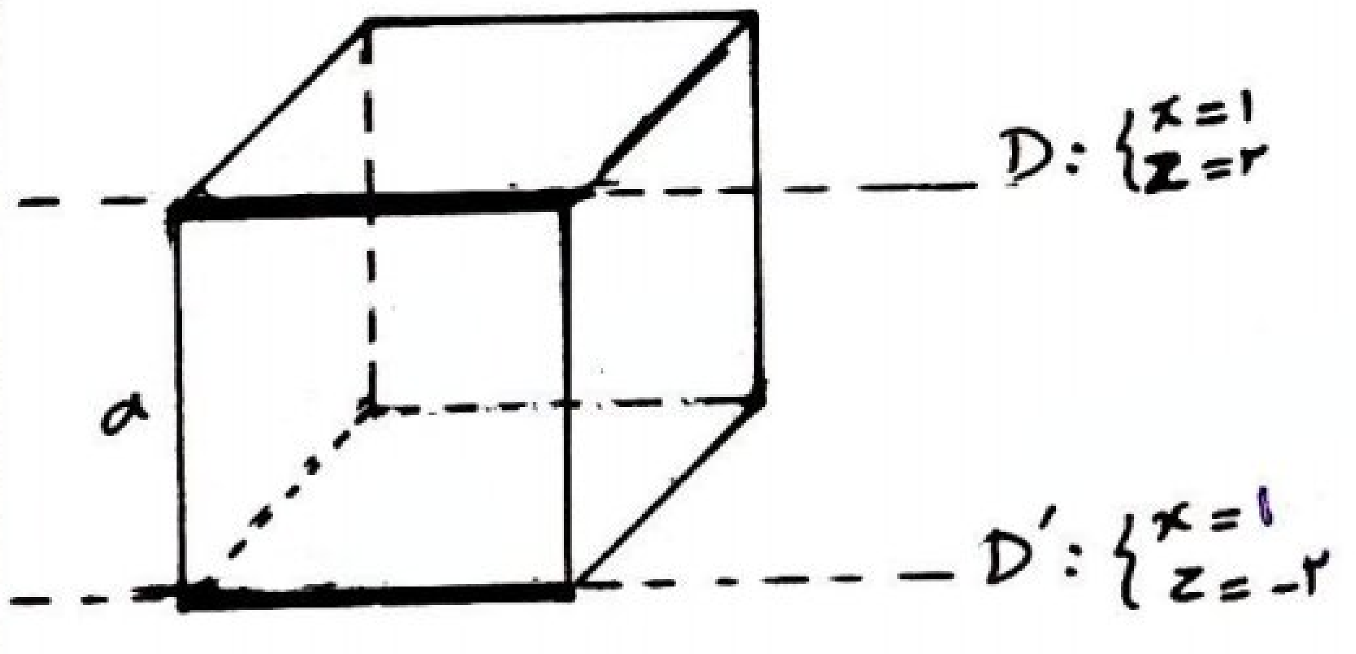
۱) ۲ ۲) ۳
۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{6}$



تست H.W اگر دو یال واقع در یک وجه مکعبی منطبق بر خطوط $D:\begin{cases}x=1\\z=2\end{cases}$ و $D':\begin{cases}x=1\\z=-2\end{cases}$ باشند، حجم این مکعب کدام است؟

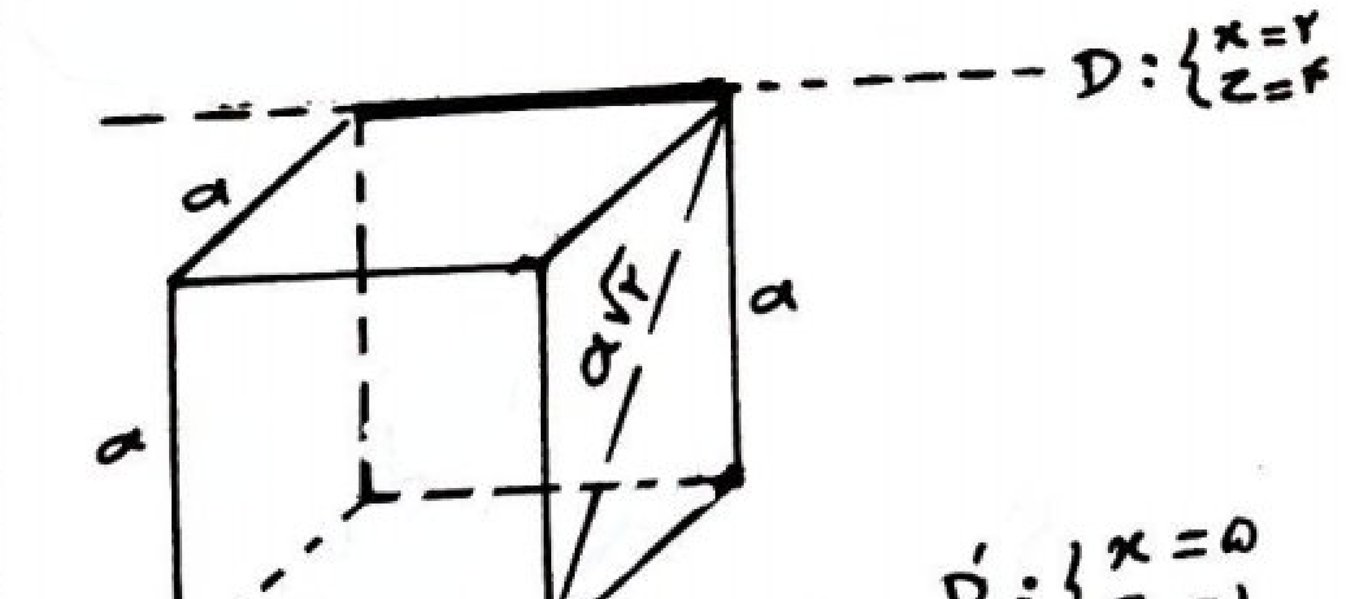
(گزینه ۱)

۱) ۶۴ ۲) ۲۷
۳) ۱۲۵ ۴) ۱۶۹



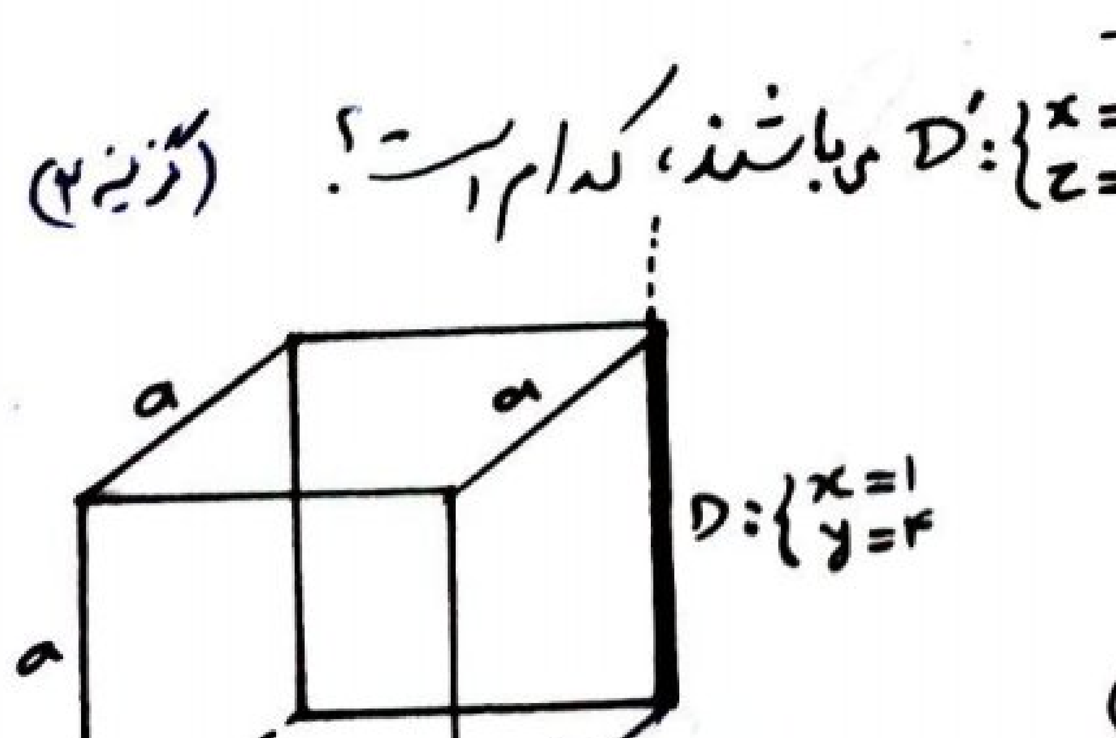
تست اگر دو یال غیرواقع بر یک وجه مکعبی منطبق بر خط‌های $D:\begin{cases}x=2\\z=4\end{cases}$ و $D':\begin{cases}x=5\\z=1\end{cases}$ باشند، اندازه قطر این مکعب کدام است؟

۱) $3\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$
۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۳



تست H.W حجم مکعبی که دو یال آن منطبق بر خطوط $D:\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$ و $D':\begin{cases}x=4\\z=-1\end{cases}$ می‌باشند، کدام است؟ (گزینه ۲)

۱) ۹ ۲) ۲۷
۳) ۶۴ ۴) ۳۲



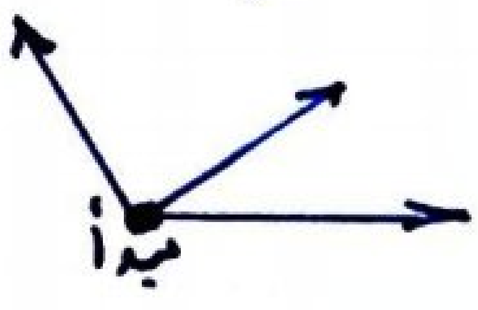
نکته (اخباری)

اگر دو خط متنافر، هر کدام عمود بر یکی از صفحات مختصات باشد، فاصله بین آنها با قدر مطلق تفاضل مؤلفه‌های هم‌نام دو خط برابر است.

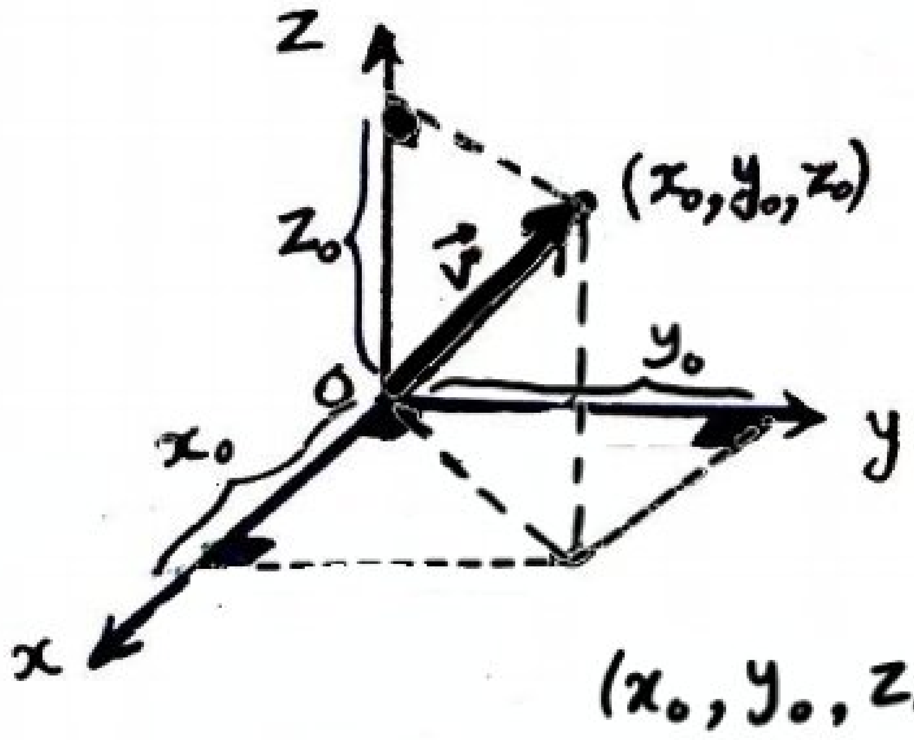
پیکان (پاره‌خط جهت‌دار)

سه ویژگی دارد : ① راستای مشخص (خطی که پاره‌خط جهت‌دار روی آن قرار دارد)
② جهت معین ③ اندازهٔ معلوم

بردار (Vector)



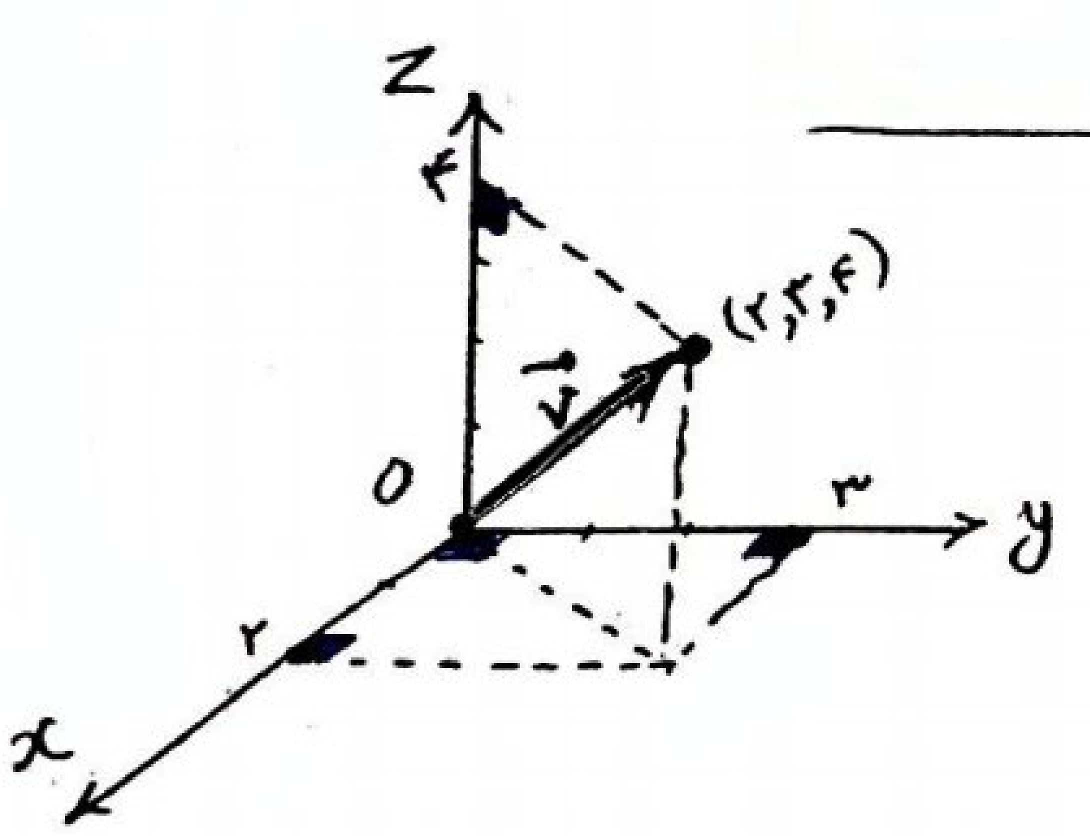
دیدگاه هندسی : پیکانی است که از یک مبدأ (فرضی شروع می‌شود.



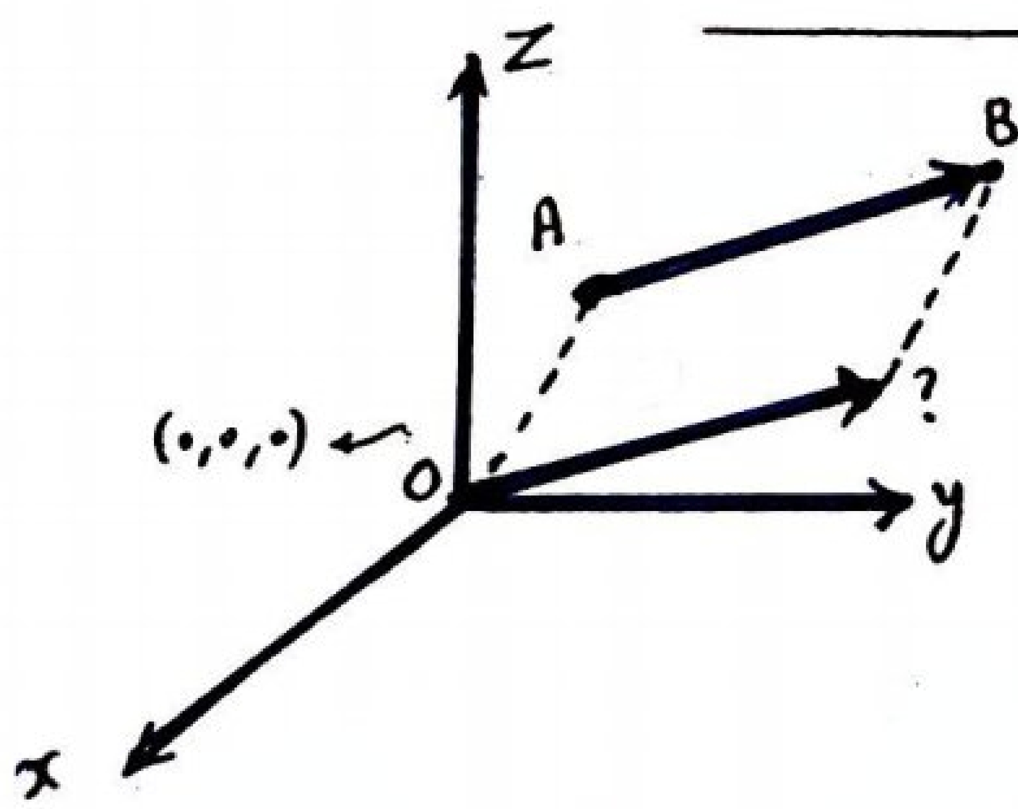
دیدگاه مختصاتی : بردار یک سه‌تایی مرتب از اعداد حقیقی است.
EX

$$\boxed{\vec{V} = (x_0, y_0, z_0)}$$

در واقع $\vec{V}$ ، برداری است که مبدأ مختصات را به نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) وصل می‌کند و در نتیجه :



مثال : نمایش بردار $\vec{V} = (۲, ۳, ۴)$
EX



بردار بین دو نقطهٔ دلخواه

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, \ y_B - y_A, \ z_B - z_A)$$

$$\vec{AB} = B - A$$

توجه : $\vec{AB} = -\vec{BA}$

مثال : $A(۲, ۵, -۱)$, $B(۳, ۱, ۲)$ $\Rightarrow \begin{cases} \vec{AB} = B - A = (۱, -۴, ۳) \\ \vec{BA} = A - B = (-۱, ۴, -۳) \end{cases}$

سراسری ۹۴ نقاط $A(5,-4,1)$ و $B(-1,2,4)$ و $O(0,0,0)$ مفروض هستند و $\vec{AM}=\frac{2}{3}\vec{AB}$، آنگاه مقدار $|\vec{OM}|$ کدام است؟

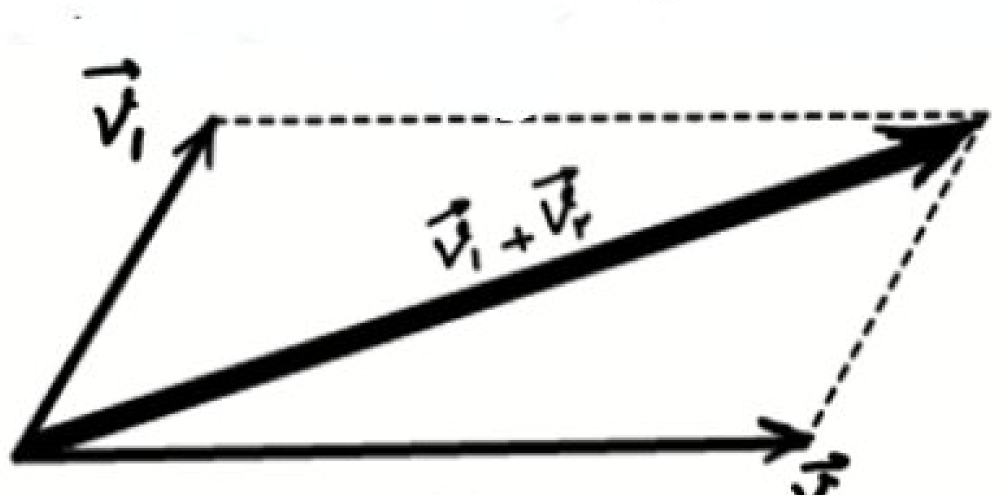
۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{11}$
۳) $\sqrt{13}$ ۴) $\sqrt{14}$

Ex (همسنگ بودن)

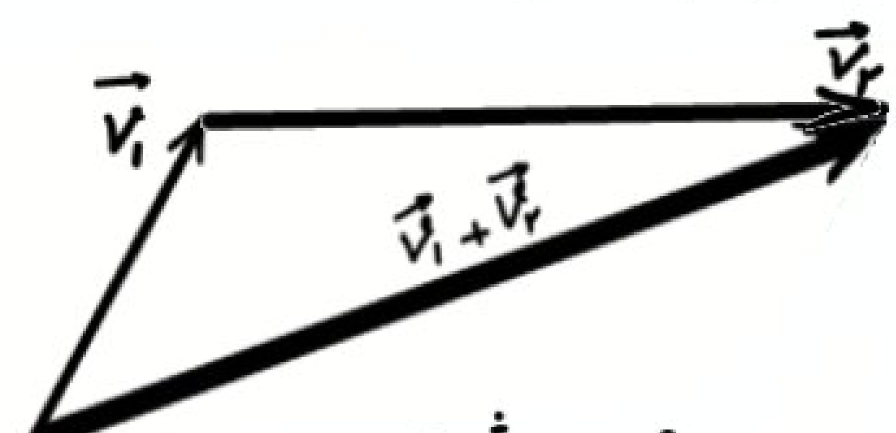
$$\begin{cases}\vec{V_1}=(x_1, y_1, z_1)\\ \vec{V_2}=(x_2, y_2, z_2)\end{cases}\qquad \vec{V_1}=\vec{V_2}\iff(x_1=x_2 \wedge y_1=y_2 \wedge z_1=z_2)$$

- دو بردار مساوی اند، اگر و تنها اگر مؤلفه‌های آن‌ها نظیر به نظیر برابر باشند.
- دو بردار همسنگ (هم ارز): هم راستا و هم جهت و هم اندازه اند.

جمع دو بردار **Ex** (قانون متوازی الاضلاع) ← اگر $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ دو بردار هم مبدا باشند، بردار $\vec{V_1}+\vec{V_2}$، قطر متوازی الاضلاع ساخته شده توسط دو بردار $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ می‌باشد، که با آن دو بردار، هم مبدا است.



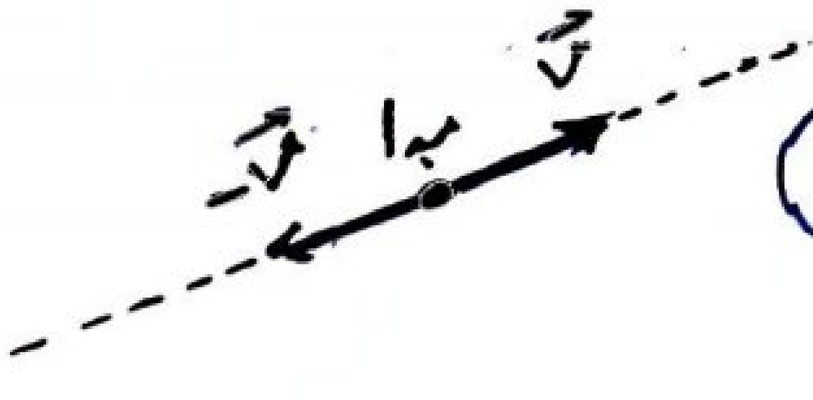
(قانون متوازی الاضلاع)



(قانون مثلث) ← اگر پیکان‌ها به دنبال هم باشند، یعنی ابتدای دومی، بر انتهای اولی منطبق باشد، بردار جمع، از ابتدای اولی به انتهای آخری است.

$$\text{اگر}\begin{cases}\vec{V_1}=(x_1, y_1, z_1)\\ \vec{V_2}=(x_2, y_2, z_2)\end{cases}\text{، آنگاه}\quad \vec{V_1}+\vec{V_2}=(x_1+x_2 , y_1+y_2 , z_1+z_2)$$

قرینه یک بردار **Ex** اگر $\vec{V}$ برداری دلخواه باشد، قرینه آن را با نماد $-\vec{V}$ نشان می‌دهیم که برداری هم راستا و هم اندازه با $\vec{V}$ است که در خلاف جهت $\vec{V}$ می‌باشد.



$$|\vec{V}|=|-\vec{V}|$$

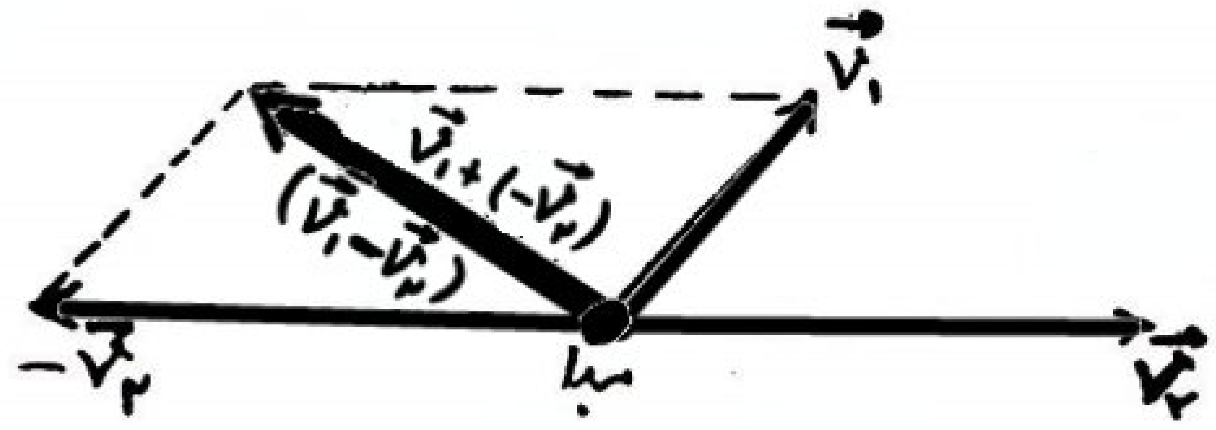
$$\vec{V}=(x_0 , y_0 , z_0)\iff-\vec{V}=(-x_0 , -y_0 , -z_0)$$

(قرینه نسبت به مبدا)

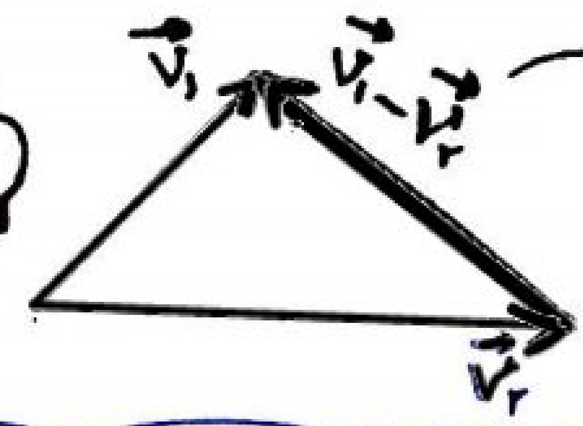
تفریق دو بردار

EX

قاعدهٔ کلی: $\vec{V_1}-\vec{V_2}=\vec{V_1}+(-\vec{V_2})$



⇓



از انتهای دومی به انتهای اولی

(پیکان تفریق)

$$\begin{cases}\vec{V_1}=(x_1,y_1,z_1)\\ \vec{V_2}=(x_2,y_2,z_2)\end{cases}\rightarrow \vec{V_1}-\vec{V_2}=(x_1-x_2\ ,\ y_1-y_2\ ,\ z_1-z_2)$$

تست

اگر $\vec{V_1}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{V_2}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ، حاصل $\dfrac{|\vec{V_1}-2\vec{V_2}|}{|\vec{V_1}+2\vec{V_2}|}$ کدام است؟

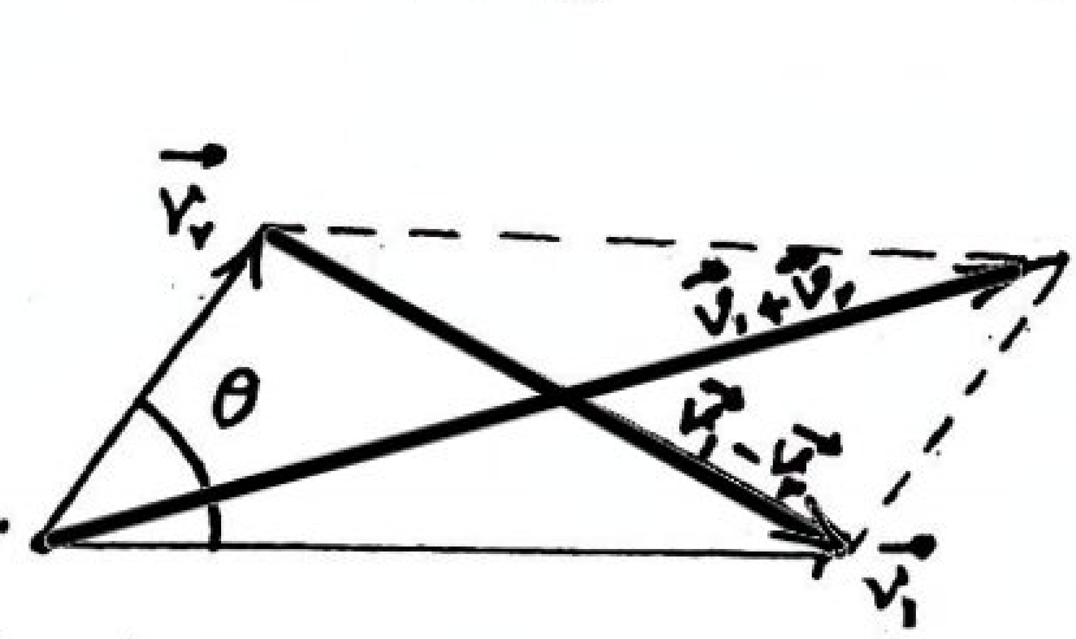
۱) $\sqrt{6}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

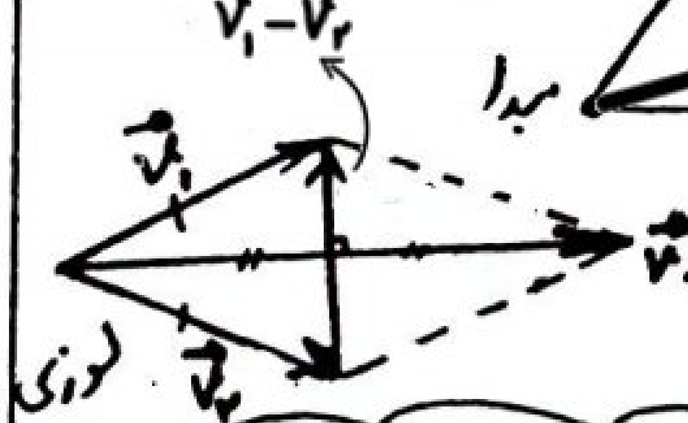
حل

$$\begin{cases}\vec{V_1}=(2,3,1)\\ \vec{V_2}=(1,-1,1)\rightarrow 2\vec{V_2}=(2,-2,2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\vec{V_1}-2\vec{V_2}=(2,3,1)-(2,-2,2)=(0,5,-1)\xrightarrow{\text{اندازه}}\sqrt{0+5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}\\ \vec{V_1}+2\vec{V_2}=(2,3,1)+(2,-2,2)=(4,1,3)\xrightarrow{\text{"}}\sqrt{4^2+1^2+3^2}=\sqrt{26}\end{cases}\ \xrightarrow{\text{نسبت}} 1\ ✓$$

__خلاصه__: جمع و تفریق دو بردار در یک متوازی الاضلاع قابل نمایش است:





$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ (حاده) $\iff |\vec{V_1}+\vec{V_2}|>|\vec{V_1}-\vec{V_2}|$

$\theta=\frac{\pi}{2} \overset{\vec{V_1}\perp\vec{V_2}}{\underset{\text{مستطیل}}{\iff}} |\vec{V_1}+\vec{V_2}|=|\vec{V_1}-\vec{V_2}|$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ (منفرجه) $\iff |\vec{V_1}+\vec{V_2}|<|\vec{V_1}-\vec{V_2}|$

*** حالت خاص: $(\vec{V_1}+\vec{V_2})\perp(\vec{V_1}-\vec{V_2}) \overset{\text{لوزی}}{\iff} |\vec{V_1}|=|\vec{V_2}|$

سراسری اگر بردار $\vec{a}=(m,2,-1)$ و $|\vec{b}|=\sqrt{41}$ ، دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{b}-\vec{a}$ عمود بر هم باشند، مقدار مثبت m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

سراسری دو بردار با تصویرهای $\vec{a}=(1,\alpha+1,2\alpha)$ و $\vec{b}=(2,0,-1)$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار α، بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ برهم عمودند؟

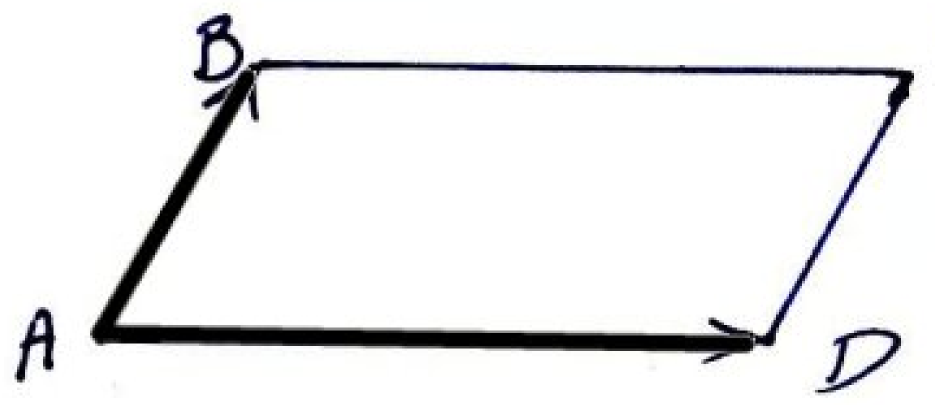
۱) ۰/۴ و ۱-　　۲) ۰/۶ و ۱-

۳) ۰/۴ و ۱　　۴) ۰/۶ و ۱

تست در متوازی‌الاضلاع ABCD، حاصل $\vec{AC}+\vec{BD}$ برابر با کدام بردار زیر است؟

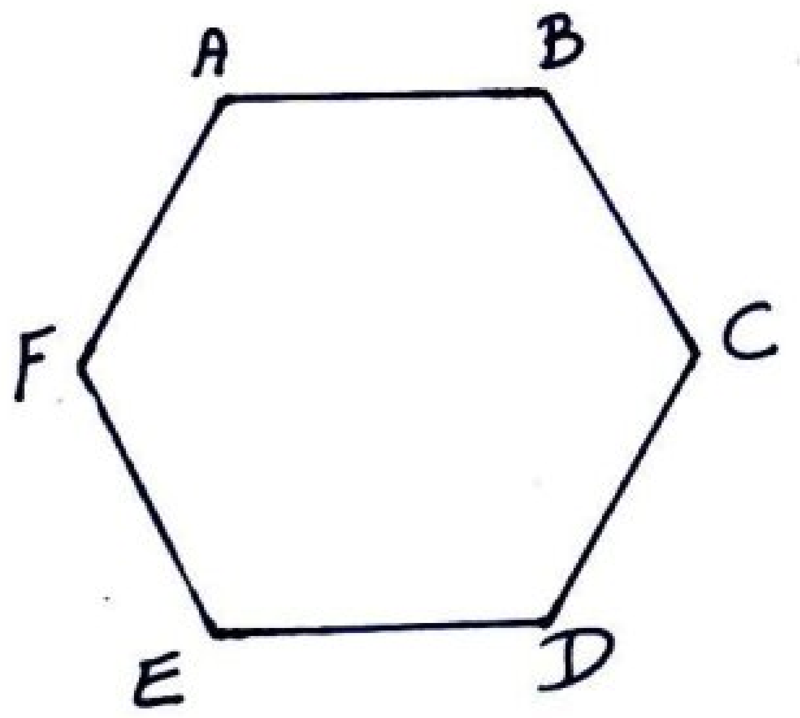
۱) $2\vec{AB}$　　۲) $2\vec{BC}$

۳) $\frac{1}{2}\vec{AB}$　　۴) $\frac{1}{2}\vec{BC}$

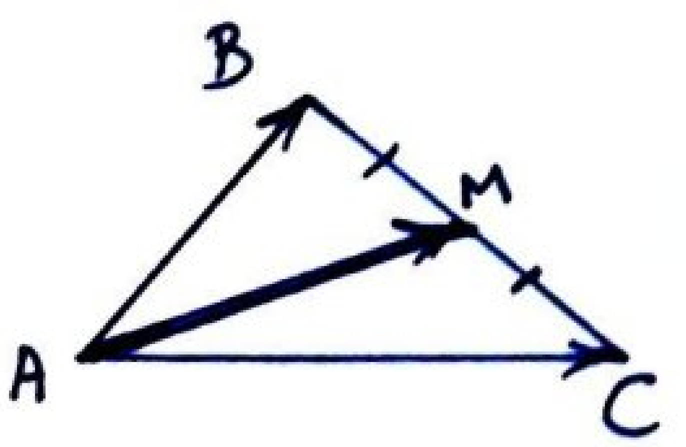


تست در شش‌ضلعی منتظم مقابل، حاصل $\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{EB}$، چند برابر بردار $\vec{AB}$ است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۴/۵



نکته در هر مثلث، بردار میانهٔ نظیر هر ضلع، با نصف مجموع برداری دو ضلع دیگر برابر است.



$$\vec{AM}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$$

زیرا:

ویژگی‌های جمع بردارها: Ex

۱) جابه‌جایی: $\vec{v}_1+\vec{v}_2=\vec{v}_2+\vec{v}_1$

۲) شرکت‌پذیری: $\vec{v}_1+(\vec{v}_2+\vec{v}_3)=(\vec{v}_1+\vec{v}_2)+\vec{v}_3$

۳) حذف‌پذیری: $\vec{v}_1+\vec{v}_2=\vec{v}_1+\vec{v}_3 \Leftrightarrow \vec{v}_2=\vec{v}_3$

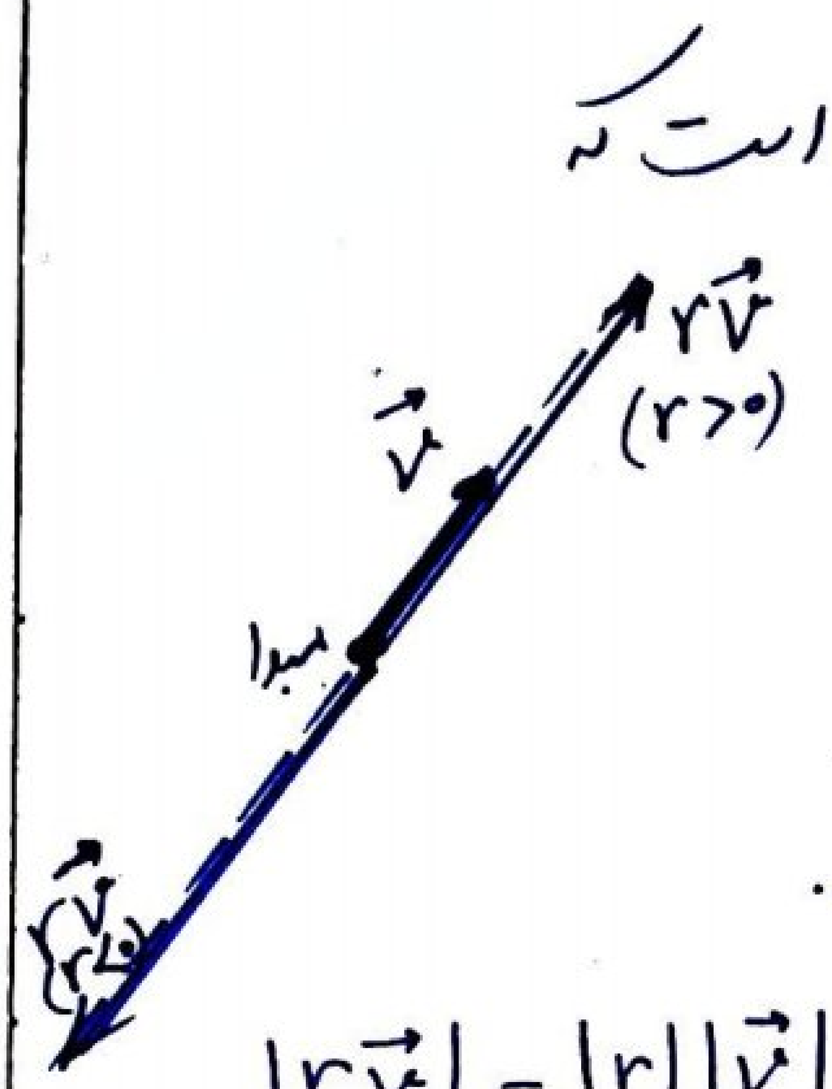
۴) وجود عضو بی‌اثر
$\vec{v}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}$

۵) وجود عضو قرینه
$\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$

ضرب یک عدد حقیقی در یک بردار

Ex

اگر $\vec{v}$ برداری دلخواه و r عددی حقیقی باشد، $r\vec{v}$ برداری است که



الف) راستای آن همان راستای $\vec{v}$ است

ب) جهت آن بستگی به علامت r دارد:

اگر $r>0$، هم‌جهت با $\vec{v}$ است.

اگر $r<0$، درخلاف جهت $\vec{v}$ است.

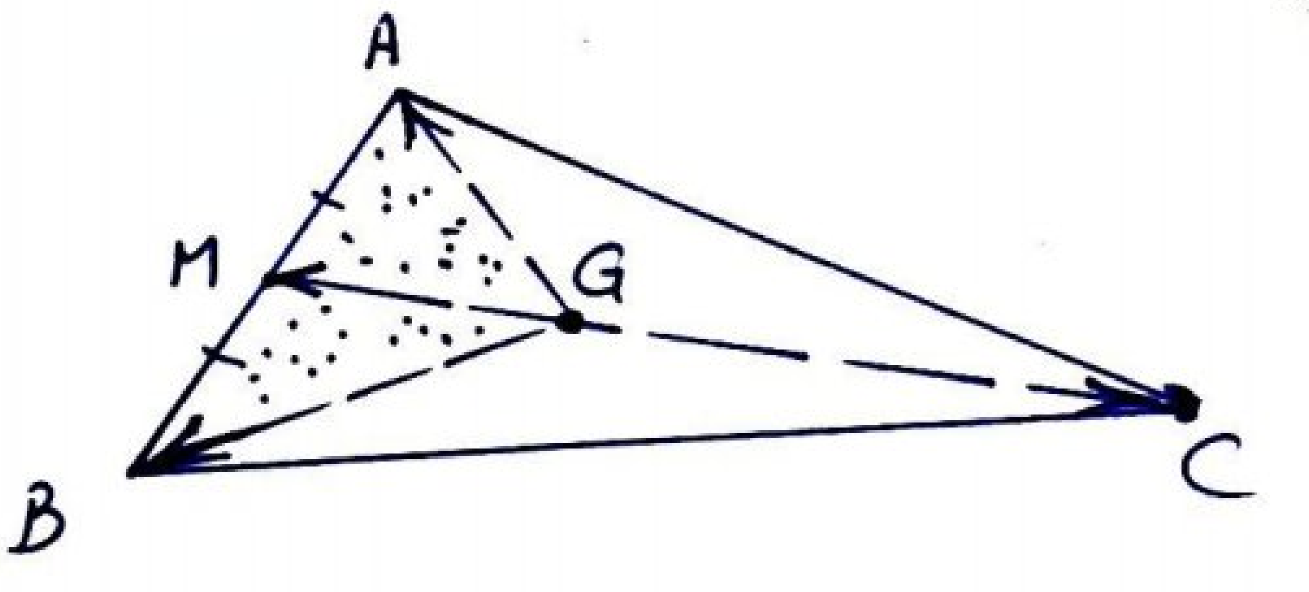
پ) اندازه آن $|r|$ برابر $|\vec{v}|$ است.

$$|r\vec{v}| = \underbrace{|r|}_{\text{قدر مطلق}}|\vec{v}|$$

$$\vec{v}=(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow r\vec{v}=(rx_0, ry_0, rz_0)$$

نکته: اگر G مرکز ثقل (نقطه هم‌رسی میانه‌ها) مثلث ABC باشد، آنگاه $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$

یادآوری: هر میانه مثلث در مرکز ثقل آن به نسبت ۱ و ۲ تقسیم می‌شود.



چند ویژگی

$(r, s \in \mathbb{R})$

1) $(rs)\vec{v} = r(s\vec{v}) = s(r\vec{v})$

2) $(r \pm s)\vec{v} = r\vec{v} \pm s\vec{v}$

3) $r(\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2) = r\vec{v}_1 \pm r\vec{v}_2$

4) $r\vec{v}_1 = r\vec{v}_2 \overset{r\neq 0}{\Longleftrightarrow} \vec{v}_1 = \vec{v}_2$

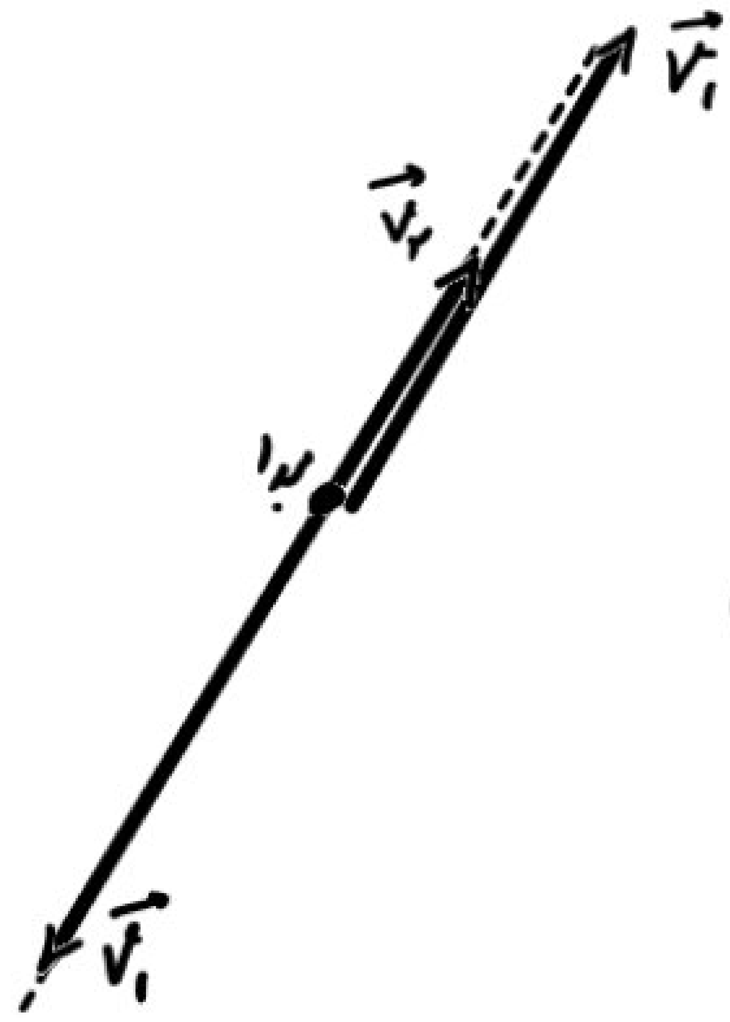
5) $r\vec{v} = \vec{0} \Longleftrightarrow (r=0 \ \vee \ \vec{v}=\vec{0})$

شرط توازی دو بردار (هم راستایی)

Ex

دو بردار موازی اند اگر و تنها اگر راستاهای یکسان داشته باشند (جهت و اندازه مهم نیست)

(راستاهای موازی یا منطبق)



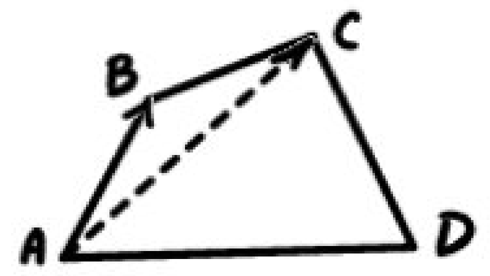
از طرفی می‌دانیم دو بردار $\vec{v}$ و $r\vec{v}$ موازی (هم راستا) هستند، پس: $(r \in \mathbb{R})$

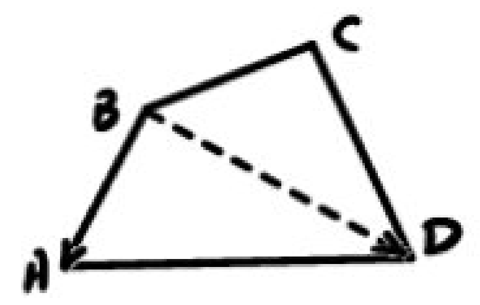
دو بردار موازی اند اگر و تنها اگر یکی مضرب دیگری باشد.

$$\vec{v_1} \parallel \vec{v_2} \overset{r \in \mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \vec{v_1} = r\vec{v_2}$$

سراسری در چهارضلعی ABCD، اگر $\vec{AB} - \vec{AC} = r(\vec{BA} - \vec{BD})$ باشد، آن‌گاه نوع چهارضلعی کدام است؟ $(r \in \mathbb{R},\ r \neq 0, 1, -1)$

۱) متوازی الاضلاع ۲) لوزی
۳) مستطیل ۴) ذوزنقه





نتیجه: اگر $\begin{cases} \vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1) \\ \vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2) \end{cases}$، آن‌گاه

Ex

$$\vec{v_1} \parallel \vec{v_2} \overset{r \in \mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \vec{v_1} = r\vec{v_2} \Longleftrightarrow (x_1, y_1, z_1) = (rx_2, ry_2, rz_2)$$

$$\Longleftrightarrow (x_1 = rx_2 \ ,\ y_1 = ry_2 \ ,\ z_1 = rz_2)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = r$$

دو بردار موازی اند اگر و تنها اگر نسبت مؤلفه‌های هم‌نام آن‌ها یکی باشد

$$\boxed{\vec{v_1} \parallel \vec{v_2} \Longleftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}}$$

مثلاً

مثال Ex: دو بردار $\vec{v}_1=(2\,,\,m+1\,,\,3n+1)$ و $\vec{v}_2=(-5\,,\,2m\,,\,2n+3)$ موازی اند. m و n را بیابید.

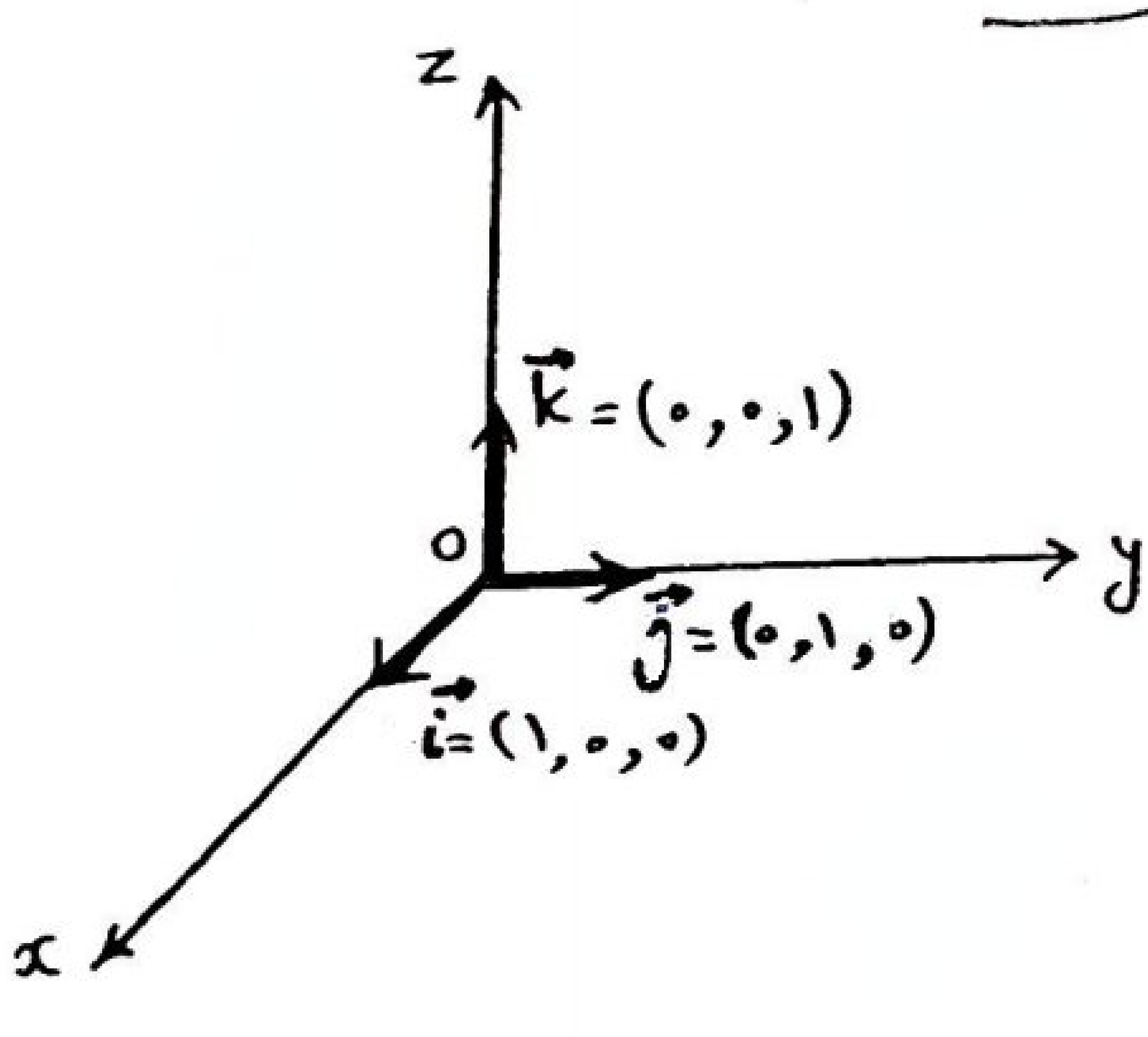
سراسری: به ازای کدام مقدار m ، بردار $\vec{a}=(1,2,m)$ را می‌توان به صورت مجموع دو بردار در راستاهای $(0,-1,2)$ و $(2,3,-1)$ نوشت؟

۱) $\frac{2}{3}$

۲) $\frac{3}{2}$

۳) $-\frac{2}{3}$

۴) $-\frac{3}{2}$



بردارهای پایه (بردارهای یکه محورهای مختصات)

Ex

$$\boxed{\vec{V}=(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{V}=(x_0,0,0)+(0,y_0,0)+(0,0,z_0)$$

$$\Rightarrow \vec{V}=x_0\underbrace{(1,0,0)}_{\vec{i}}+y_0\underbrace{(0,1,0)}_{\vec{j}}+z_0\underbrace{(0,0,1)}_{\vec{k}}$$

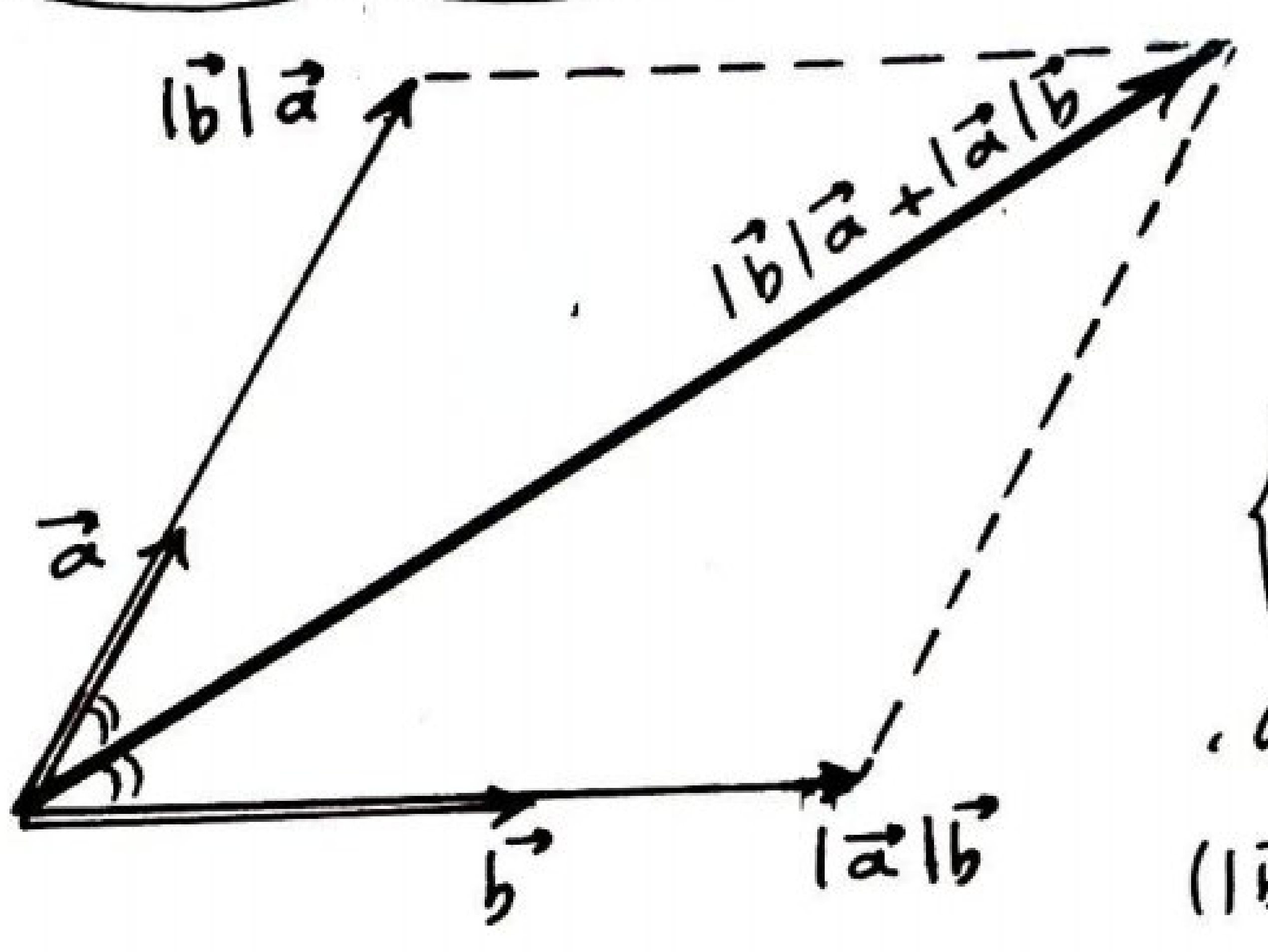
$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}}$$

توجه ▷

مثلاً

بردار نیمساز زاویه بین دو بردار

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیرصفر باشند، بردار نیمساز زاویه بین آنها عبارت است از



زیرا دو بردار $|\vec{b}|\vec{a}$ و $|\vec{a}|\vec{b}$ هم اندازه اند.

$$\begin{cases} \left||\vec{a}|\vec{b}\right| = |\vec{a}||\vec{b}| \\ \left||\vec{b}|\vec{a}\right| = |\vec{b}||\vec{a}| \end{cases}$$

پس متوازی الاضلاع ساخته شده توسط آنها، لوزی است و قطر لوزی (بردار $|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}$) نیمساز می باشد.

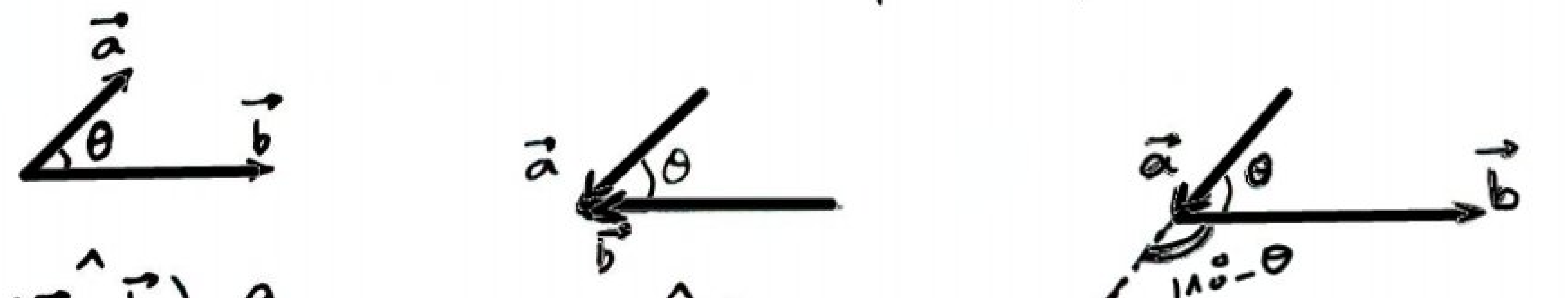
مثال بردار نیمساز زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $\vec{b}=(0,3,-4)$ را مشخص کنید.

تست اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیرصفر باشند، زاویهٔ بین دو بردار $\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ و $\left(|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}\right)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۴۵

۳) ۹۰ ۴) ۱۲۰

تذکر: زاویهٔ بین دو بردار در حالت هم مبدا یا هم انتها بودن در نظر گرفته می شود.



$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\theta$ $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\theta$ $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=180^\circ-\theta$

ضرب داخلی دو بردار (ضرب نقطه‌ای، عددی، اسکالر) Dot product

تعریف اگر $\begin{cases}\vec{V_1}=(x_1, y_1, z_1)\\ \vec{V_2}=(x_2, y_2, z_2)\end{cases}$ دو بردار باشند، ضرب داخلی آنها را با نماد $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}$ نشان می‌دهیم و عددی حقیقی است به صورت زیر:

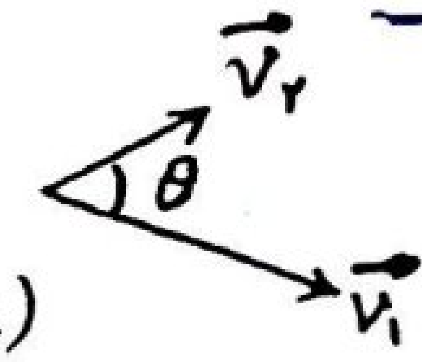
$$\boxed{\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}$$ → مجموع حاصل‌ضرب‌های مؤلفه‌های هم‌نام دو بردار

مثال: برای دو بردار $\begin{cases}\vec{V_1}=(2,-1,1)\\ \vec{V_2}=(0,3,-4)\end{cases}$ ضرب داخلی عبارت است از:

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=(2)(0)+(-1)(3)+(1)(-4)=-7$$

قضیه ضرب داخلی: اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ باشد، ضرب داخلی آنها عبارت است از:

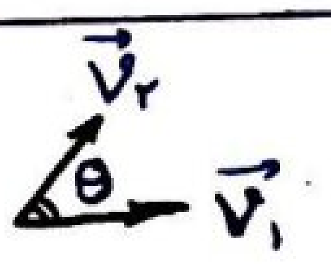
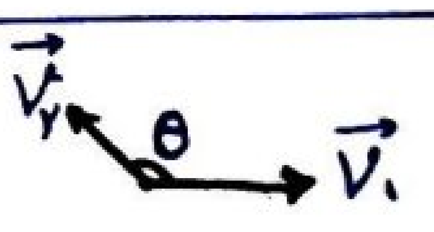
$$\boxed{\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=|\vec{V_1}||\vec{V_2}|\cos\theta}$$



$(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$

اثبات: صفحه ۷۷ کتاب درسی

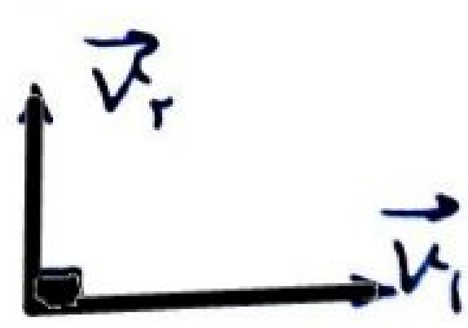
نتیجه ۱ علامت $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}$ حاده یا منفرجه بودن زاویه بین $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ را نشان می‌دهد.

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ حاده (تند) $\xleftrightarrow{\cos\theta>0}$ $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}>0$	
$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ منفرجه (باز) $\xleftrightarrow{\cos\theta<0}$ $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}<0$	

(در مثال بالا، زاویه بین دو بردار $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ منفرجه است.)

نتیجه ۲ «شرط عمود بودن دو بردار غیر صفر»

$$\vec{V_1}\perp\vec{V_2}\ \underset{\theta=\frac{\pi}{2}}{\overset{\cos\theta=0}{\Longleftrightarrow}}\ \vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=0$$



به عبارت دیگر دو بردار غیرصفر بر هم عمودند اگر و تنها اگر ضرب داخلی آنها برابر با صفر شود.

مثال: دو بردار $\begin{cases}\vec{V_1}=(1,1,-1)\\ \vec{V_2}=(1,2,3)\end{cases}$ بر هم عمودند زیرا

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=(1)(1)+(1)(2)+(-1)(3)=0\rightarrow\vec{V_1}\perp\vec{V_2}\ ✓$$

مثال (Ex): دو بردار $\vec{V_1}=(k,-3,2)$ و $\vec{V_2}=(2k,4k,5)$ برهم عمودند. k را بیابید. $(k\in\mathbb{R})$

$$\vec{V_1}\perp\vec{V_2}\longrightarrow\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=0\Rightarrow(k)(2k)+(-3)(4k)+(2)(5)=0$$

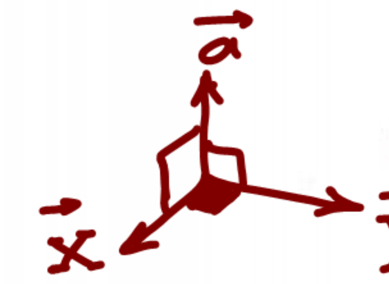
$$\xrightarrow{\div 2}k^2-6k+5=0\longrightarrow k=1,5\ \checkmark$$

سراسری: درکدام حالت حاصلضرب عددی (داخلی) بردار غیرصفر $\vec a$ در مجموع دو بردار غیرصفر $\vec x$ و $\vec y$ صفر نمی‌باشد؟

۱) بردار $\vec x$ قرینه‌ی بردار $\vec y$

$$\vec a\cdot(\underbrace{\vec x}_{-\vec y}+\vec y)=\vec a\cdot\vec O=\underset{(0,0,0)}{0}\quad(\text{غ ق ق})$$

۲) سه بردار دو به دو عمود برهم

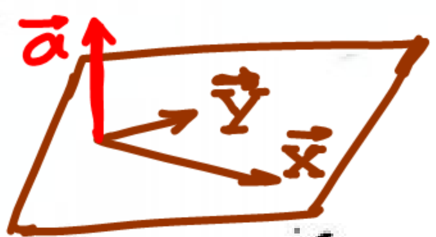


$$\vec a\cdot(\vec x+\vec y)=\underbrace{\vec a\cdot\vec x}_{0}+\underbrace{\vec a\cdot\vec y}_{0}=0\quad(\text{غ ق ق})$$

۳) بردار $\vec a$ فقط بر یکی از دو بردار $\vec x$ یا $\vec y$ عمود ($\vec a\perp\vec y$ ، $\vec a\perp\vec x$)

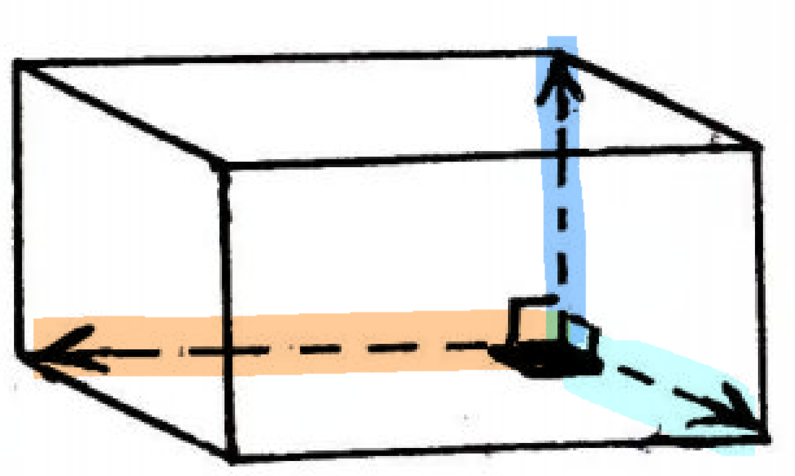
$$\vec a\cdot(\vec x+\vec y)=\underbrace{\vec a\cdot\vec x}_{0}+\underbrace{\vec a\cdot\vec y}_{\text{غیرصفر}}\neq 0\ \checkmark$$

۴) بردار $\vec a$ بر صفحه‌ی دو بردار $\vec x$ و $\vec y$ عمود



$$\longrightarrow\underbrace{(\vec a\perp\vec x\ \wedge\ \vec a\perp\vec y)}_{\text{شرایط گزینه ۲}}$$

سراسری خارج ۹۰ / ۹۳ خ: اگر سه بردار به تصاویر $(2,a,1)$ ، $(b,2,4)$ و $(2,1,c)$ یال‌های یک مکعب مستطیل باشند، حجم آن کدام است؟



۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۵

حل: چون سه بردار دو به دو برهم عمودند، پس

$$\begin{cases}(2,a,1)\cdot(b,2,4)=0\longrightarrow 2b+2a+4=0\longrightarrow a+b+2=0 & (1)\\(2,a,1)\cdot(2,1,c)=0\longrightarrow 4+a+c=0\longrightarrow \boxed{c=-a-4} & (*)\\(b,2,4)\cdot(2,1,c)=0\longrightarrow 2b+2+4c=0\longrightarrow b+2\boxed{c}+1=0 & (2)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*),(2)}\ b+2(\boxed{-a-4})+1=0\longrightarrow b-2a-7=0$$

$$(1)\longrightarrow b+a+2=0$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}a=-3,\ b=1\ \xrightarrow{(*)}\ c=-1$$

پس سه بردار به صورت زیر مشخص شده اند

$$\begin{cases}(2,-3,1)\xrightarrow{\text{اندازه}}\sqrt{14}=\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}\\(1,2,4)\xrightarrow{''}\sqrt{21}\\(2,1,-1)\xrightarrow{''}\sqrt{6}\end{cases}\xrightarrow{\text{حجم مکعب مستطیل}}\underbrace{\sqrt{14}}_{2\times7}\times\underbrace{\sqrt{21}}_{3\times7}\times\underbrace{\sqrt{6}}_{2\times3}=42\ \checkmark$$

$$\sqrt{2\times7\times3\times7\times2\times3}=\sqrt{2^2\times3^2\times7^2}$$

Ex
نتیجه ۳

ماکزیمم ضرب داخلی	$\theta = 0 \xLeftrightarrow{\cos\theta = 1} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \lvert\vec{v}_1\rvert\lvert\vec{v}_2\rvert$	مبدا $\vec{v}_1$ $\vec{v}_2$ (دو بردار موازی و هم جهت)
مینیمم ضرب داخلی	$\theta = \pi \xLeftrightarrow{\cos\theta = -1} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -\lvert\vec{v}_1\rvert\lvert\vec{v}_2\rvert$	$\vec{v}_2$ $\vec{v}_1$ (دو بردار موازی و غیرهم جهت)

$$-a \leq x \leq a \Leftrightarrow |x| \leq a$$

$$-|\vec{v}_1||\vec{v}_2| \leq \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \leq |\vec{v}_1||\vec{v}_2|$$

Ex
نتیجه ۴
برگرفته از نتیجه ۳

برای دو بردار دلخواه $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ همواره داریم "نامساوی کوشی-شوارتز"

$$\underbrace{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}_{\text{قدر مطلق}} \leq \underbrace{|\vec{v}_1|}_{\text{اندازه}}\underbrace{|\vec{v}_2|}_{\text{اندازه}} \quad \text{یا} \quad (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 \leq |\vec{v}_1|^2|\vec{v}_2|^2$$

Ex
اثبات

$$|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| \leq |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \xrightarrow{\text{تعریف قدر مطلق}} -|\vec{v}_1||\vec{v}_2| \leq \underbrace{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|\cos\theta}_{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2} \leq |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \xleftarrow{\times|\vec{v}_1||\vec{v}_2|} -1 \leq \cos\theta \leq 1$$

نتیجه

اگر $\begin{cases}\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)\\ \vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)\end{cases}$، آنگاه طبق نامساوی کوشی شوارتز داریم

$$|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2| \leq \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$$
(حفظ نشود!)

این نامساوی برای شش عدد حقیقی x_1، x_2، y_1، y_2، z_1 و z_2 همواره برقرار است.

تست برای سه عدد حقیقی x، y و z، اگر $\boxed{2x - 3y + 6z = 21}$ باشد، آن گاه کمترین مقدار عبارت $x^2+y^2+z^2$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۳ ۴) ۱۴

$$\min(x^2+y^2+z^2) = ?$$

جزو بحث

$$\vec{V}_1 = (x, y, z)$$
$$\vec{V}_2 = (2, -3, 6)$$

طوری ساخته می‌شود که اگر در $\vec{V}_1$ ضرب داخلی شود، عبارت فرض مسئله به دست آید.

نامساوی کوشی-شوارتز: $|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| \leq |\vec{v}_1||\vec{v}_2|$

$$\underbrace{|2x - 3y + 6z|}_{\cancel{21}\ 3} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}\underbrace{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}_{\cancel{7}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 9 \leq x^2+y^2+z^2 \rightarrow \min(x^2+y^2+z^2) = 9$$

تمرین H.W برای سه عدد حقیقی x ، y و z ، اگر $2x-3y+6z=\sqrt{7}$ ، آن‌گاه کمترین مقدار عبارت $4x^2+y^2+9z^2$ چقدر است؟

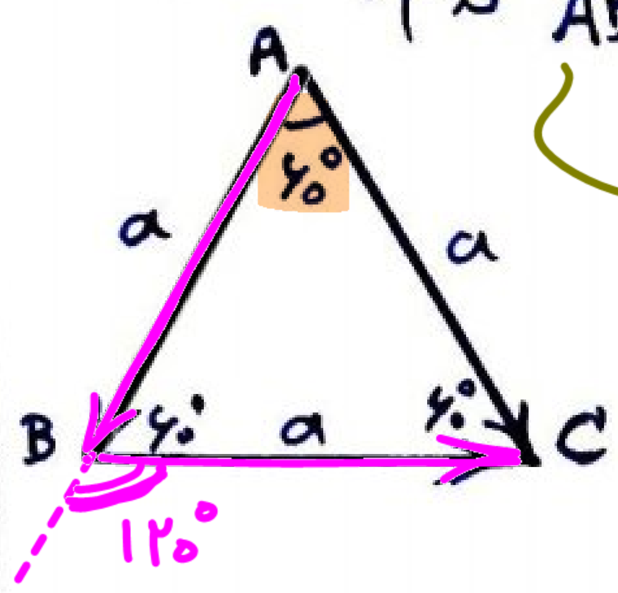
(جواب: $\frac{1}{4}$)

---

* چند تست ضرب داخلی در شکل‌های هندسی *

تست در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ، به ضلع a ، حاصل $\vec{AB}\cdot\vec{AC}+\vec{AB}\cdot\vec{BC}$ کدام است؟

۱) a^2 ۲) $-a^2$ ۳) $2a^2$ ۴) صفر

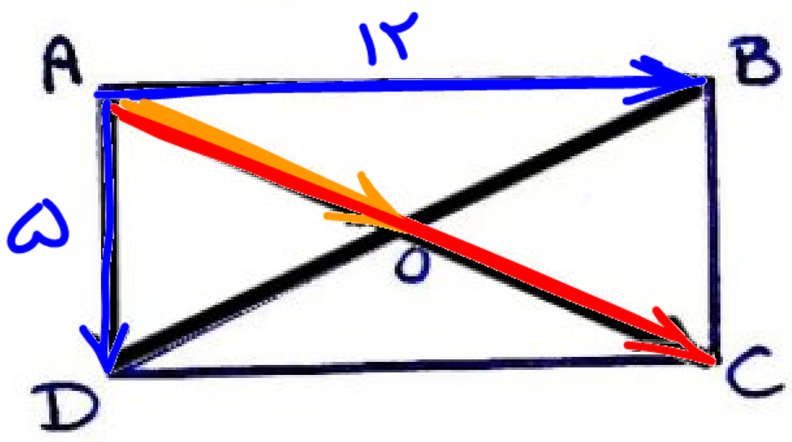


$$\underbrace{|\vec{AB}|}_{a}\underbrace{|\vec{AC}|}_{a}\underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{|\vec{AB}|}_{a}\underbrace{|\vec{BC}|}_{a}\underbrace{\cos 120^\circ}_{-\frac{1}{2}}=0$$

تست در مستطیل $ABCD$ به اضلاع $AB=12$ و $BC=5$ ، نقطهٔ O نقطهٔ تلاقی قطرها است. حاصل عبارت $\vec{AO}\cdot\vec{AB}+\vec{AO}\cdot\vec{AD}$ کدام است؟

قطر $=13$

۱) $\frac{169}{2}$ ۲) ۹۷ ۳) ۱۶۹ ۴) $\frac{97}{2}$

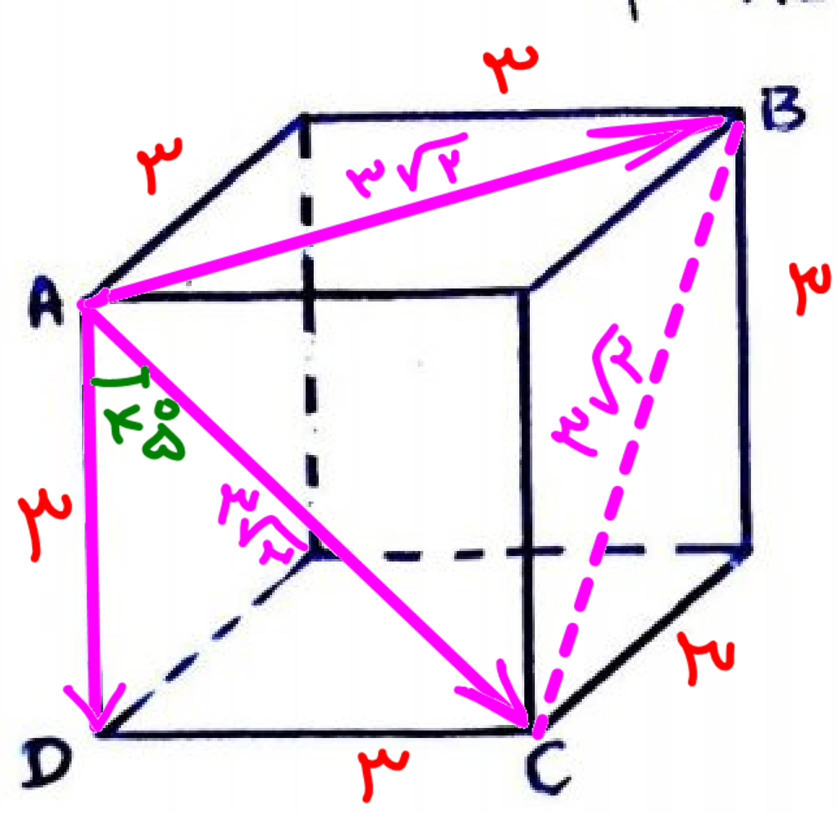


$$\text{جواب}=\vec{AO}\cdot(\underbrace{\vec{AB}+\vec{AD}}_{\vec{AC}})$$

$$=\underbrace{|\vec{AO}|}_{\frac{13}{2}}\underbrace{|\vec{AC}|}_{13}\underbrace{\cos 0}_{1}=\frac{169}{2}$$

تست در مکعب شکل مقابل به یال ۳ ، حاصل عبارت $\vec{AB}\cdot\vec{AC}+\vec{AC}\cdot\vec{AD}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) صفر

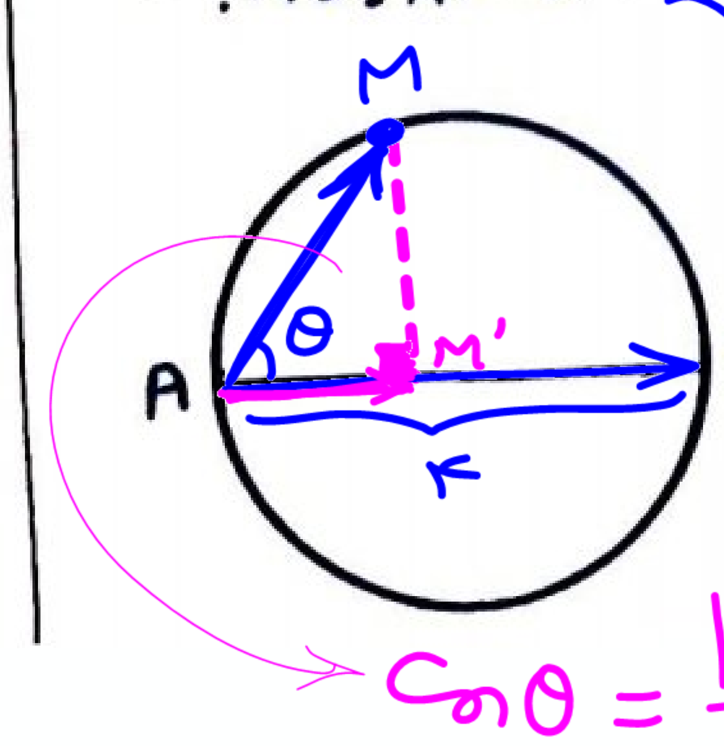


$\hat{ABC}$: متساوی‌الاضلاع

$$\text{جواب}=\underbrace{|\vec{AB}|}_{3\sqrt{2}}\underbrace{|\vec{AC}|}_{3\sqrt{2}}\underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{|\vec{AC}|}_{3\sqrt{2}}\underbrace{|\vec{AD}|}_{3}\underbrace{\cos 45^\circ}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}=18$$

تست در شکل مقابل $AB=4$ قطر دایره است. چند نقطه مانند M روی محیط دایره وجود دارد که $\vec{AB}\cdot\vec{AM}=32$ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار



$$\underbrace{|\vec{AB}|}_{\cancel{4}}\underbrace{|\vec{AM}|\cos\theta}_{|\vec{AM'}|}=\cancel{32}\ 8$$

$$\to |\vec{AM'}|=8 \quad \times$$

$$(|\vec{AM'}|\leq \underbrace{|\vec{AB}|}_{4})$$

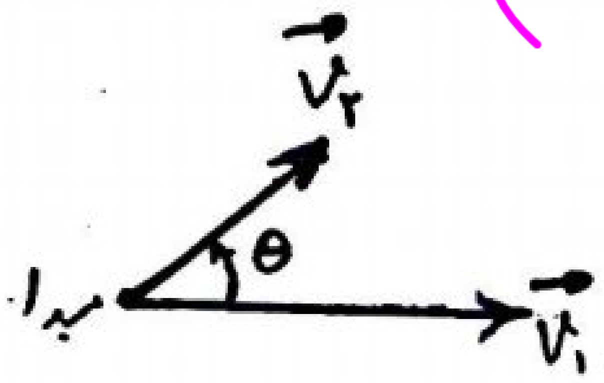
$$\cos\theta=\frac{|\vec{AM'}|}{|\vec{AM}|}$$

یافتن زاویهٔ بین دو بردار

$(\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=|\vec{V_1}||\vec{V_2}|\cos\theta)$

EX

اگر θ زاویهٔ بین دو بردار غیر صفر $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ باشد، آنگاه



$(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$

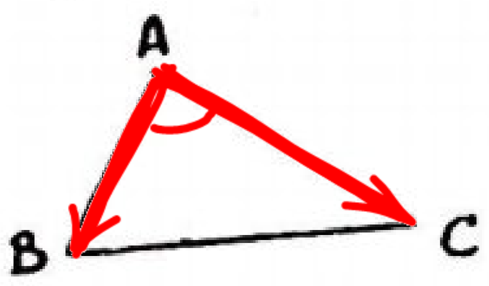
$$\boxed{\cos\theta=\frac{\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}}{|\vec{V_1}||\vec{V_2}|}}$$

مثال EX: زاویهٔ بین دو بردار $\begin{cases}\vec{V_1}=(1,-1,0)\\ \vec{V_2}=(0,1,-1)\end{cases}$ را بیابید.

$$\cos\theta=\frac{\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}}{|\vec{V_1}||\vec{V_2}|}=\frac{(1)(0)+(-1)(1)+(0)(-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0}\sqrt{0+1^2+(-1)^2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\rightarrow\theta=120^\circ$$

سراسری ۹۳: اگر $A(2,1,0)$، $B(3,-1,2)$ و $C(-1,1,3)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، $\cos\hat{A}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$



$\hat{A}=(\vec{AB},\vec{AC})=?$

$$\begin{cases}\vec{AB}=B-A=(1,-2,2)\\ \vec{AC}=C-A=(-3,0,3)\end{cases}$$

$$\cos\hat{A}=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|}=\frac{\overbrace{(1)(-3)+(-2)(0)+(2)(3)}^{3}}{\cancel{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\sqrt{(-3)^2+0+3^2}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

سراسری ۹۵: با فرض $\vec{a}=(3,m,5)$ و $\vec{b}=(3-m,7,0)$، به ازای یک مقدار m دو بردار $\vec{a}-\vec{b}$، $\vec{a}+\vec{b}$ بر هم عمود هستند. زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در این حالت چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

$$\boxed{(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})\overset{\text{لوزی}}{\Longleftrightarrow}|\vec{a}|=|\vec{b}|}$$

$$\sqrt{3^2+m^2+5^2}=\sqrt{(3-m)^2+7^2+0}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\cancel{9}+\cancel{m^2}+25=\cancel{9}-6m+\cancel{m^2}+49$$

$$\rightarrow m=4\rightarrow\begin{cases}\vec{a}=(3,4,5)\\ \vec{b}=(-1,7,0)\end{cases}\rightarrow\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{(3)(-1)+(4)(7)+(5)(0)}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}\sqrt{(-1)^2+7^2+0}}$$

$$\rightarrow\cos\theta=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}\rightarrow\theta=60^\circ$$

تست H.W: بر روی دو بردار $\vec{a}=3\vec{i}+3\vec{j}$ و $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ متوازی الاضلاع ساخته شده است. زاویهٔ بین دو قطر آن چند درجه است؟

۱) ۴۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۵۰

$$\begin{cases}\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}=(4,2,-2)\\ \vec{d'}=\vec{a}-\vec{b}=(2,4,2)\end{cases}\rightarrow\cos\theta=\frac{\vec{d}\cdot\vec{d'}}{|\vec{d}||\vec{d'}|}=\dots$$

(گزینه ۲)

زاویه‌های یک بردار با محورهای مختصات

زاویهٔ یک بردار با هر محور مختصات، همان زاویهٔ بردار $\vec v$ با بردار یکهٔ نظیر آن محور است.

اگر $\vec V=(x_0,y_0,z_0)$ ، آن‌گاه:

زاویهٔ بردار $\vec V$ با محور x = زاویهٔ بردار $\vec V$ با بردار $\vec i$ = $\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\vec V\cdot\vec i}{|\vec V||\underbrace{\vec i}_{1}|} = \dfrac{x_0}{|\vec V|}$ ، (x_0,y_0,z_0) ، $(1,0,0)$

زاویهٔ بردار $\vec V$ با محور y = زاویهٔ بردار $\vec V$ با بردار $\vec j$ = $\beta \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{\vec V\cdot\vec j}{|\vec V||\underbrace{\vec j}_{1}|} = \dfrac{y_0}{|\vec V|}$

زاویهٔ بردار $\vec V$ با محور z = زاویهٔ بردار $\vec V$ با بردار $\vec k$ = $\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \dfrac{\vec V\cdot\vec k}{|\vec V||\underbrace{\vec k}_{1}|} = \dfrac{z_0}{|\vec V|}$

مثال: زاویه‌های بردار $\vec V=(1,-1,0)$ با محورهای مختصات را بیابید. $\to |\vec V|=\sqrt2$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt2} = \dfrac{\sqrt2}{2} \to \alpha = 45^\circ$

$\cos\beta = \dfrac{-1}{\sqrt2} = -\dfrac{\sqrt2}{2} \to \beta = 135^\circ$ $\qquad \cos\gamma = \dfrac{0}{\sqrt2} = 0 \to \gamma = 90^\circ$

سراسری: اگر بردار $\vec a=(1,-1,m)$ با محور zها زاویهٔ ۴۵ درجه بسازد، کسینوس زاویهٔ این بردار با محور x کدام است؟

$\gamma = 45^\circ \to \cos\underbrace{\gamma}_{45^\circ} = \dfrac{m}{\sqrt{1^2+(-1)^2+m^2}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt2}{2} = \dfrac{m}{\sqrt{2+m^2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \dfrac{1}{2} = \dfrac{m^2}{2+m^2} \to m=\sqrt2$

$\to \vec a=(1,-1,\sqrt2) \xrightarrow{|\vec a|=2} \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ ✓ $\to \alpha = 60^\circ$ ✓

سراسری ۹۴: نقطهٔ O مبدأ مختصات و $\vec{OA} = 3\vec i+\vec j$ ، $\vec{OB}=-\vec i+5\vec j+4\vec k$ مفروض‌اند. اگر $\vec{AM} = -\frac{3}{4}\vec{AB}$ باشد، کسینوس زاویهٔ بردار $\vec{OM}$ با محور yها کدام است؟

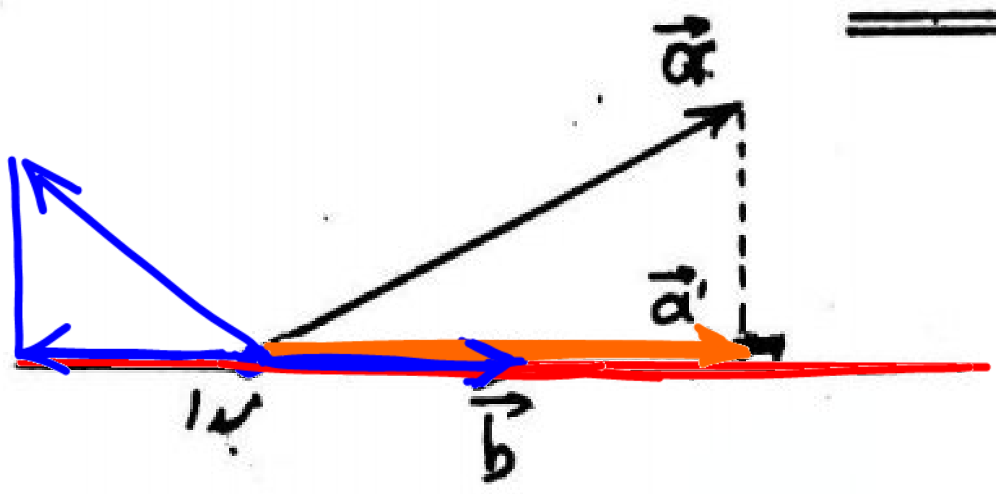
$\vec{OA} = 3\vec i+\vec j \to A(3,1,0)$ $\qquad \vec{OB} = -\vec i+5\vec j+4\vec k \to B(-1,5,4)$

$M-A = -\frac{3}{4}(B-A) \to M-A = -\frac{3}{4}B+\frac{3}{4}A \to M = -\frac34 B + \frac74 A \to M \begin{cases} -\frac34(-1)+\frac74(3)=6 \\ -\frac34(5)+\frac74(1)=-2 \\ -\frac34(4)+\frac74(0)=-3 \end{cases}$

$\to \vec{OM}=(6,-2,-3) \to \cos\beta = \dfrac{-2}{\sqrt{6^2+(-2)^2+(-3)^2}} = -\dfrac{2}{7}$ ✓

تست: بردار $\vec a=(-1,\alpha,1)$ با محور zها درفضا زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد. اگر $\vec b=(-\frac43,\frac23,\frac23)$ ، و زاویهٔ بردار $\vec a-\vec b$ با محور zها، θ باشد، مقدار $\cos\theta$ کدام است؟

یافتن بردار تصویر قائم یک بردار معلوم روی امتداد یک بردار معین دیگر

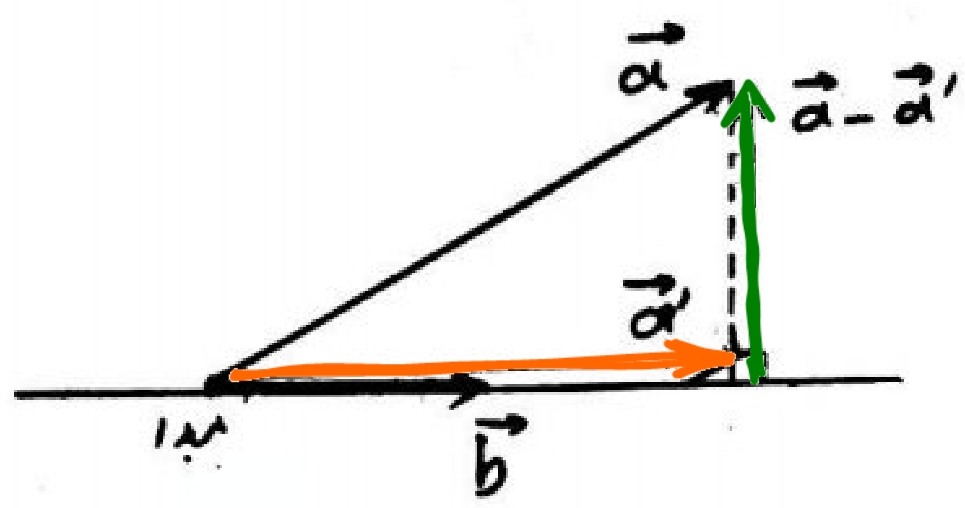


Ex

بردار تصویر قائم بردار معلوم $\vec a$ روی امتداد بردار معین $\vec b$،
بردار $\vec{a'}$ است و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\vec{a'} = \frac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec b|^2}\,\vec b}$$

عدد حقیقی



اثبات واضح است که دو بردار $\vec{a'}$ و $\vec b$ هم راستا می‌باشند، پس
عددی حقیقی مانند r وجود دارد که $\vec{a'} = r\vec b$

از طرفی، مطابق شکل، بردار تفاضل $\vec a - \vec{a'}$ بر راستای بردار $\vec b$ عمود است. پس:

$$(\vec a - \vec{a'}) \perp \vec b \Rightarrow (\vec a - \vec{a'})\cdot \vec b = 0 \Rightarrow \vec a\cdot\vec b - \vec{a'}\cdot\vec b = 0 \Rightarrow \vec a\cdot\vec b = \vec{a'}\cdot\vec b$$

$$\vec{a'} = r\vec b \qquad \vec a\cdot\vec b = r\vec b\cdot\vec b \Rightarrow r = \frac{\vec a\cdot\vec b}{\vec b\cdot\vec b} \Rightarrow r = \frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec b|^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a'} = r\vec b \Rightarrow \vec{a'} = \frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec b|^2}\,\vec b$$

سراسری Ex تصویر قائم بردار $\vec a = (0,-3,6)$ روی امتداد بردار $\vec b = (2,-1,-2)$ کدام است؟

$$\vec{a'} = \frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec b|^2}\,\vec b = \frac{(0)(2)+(-3)(-1)+(6)(-2)}{\left(\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\right)^2}\,\vec b = \frac{-9}{9}\,\vec b = -\vec b = (-2,1,2) \checkmark$$

مثال: Ex اگر $\vec a = (1,-3,4)$ ، $\vec b = (3,-4,2)$ و $\vec c = (-1,1,4)$ ، آنگاه تصویر قائم $\vec a$ بر امتداد $\vec b + \vec c$ را بیابید.

$$\vec d = \vec b + \vec c = (2,-3,6) \longrightarrow \vec{a'} = \frac{\vec a\cdot\vec d}{|\vec d|^2}\,\vec d = \frac{(1)(2)+(-3)(-3)+(4)(6)}{\left(\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}\right)^2}\,\vec d$$

$$\longrightarrow \vec{a'} = \frac{\cancel{35}^{\,5}}{\cancel{49}_{\,7}}\,\vec d = \left(\frac{10}{7}, -\frac{15}{7}, \frac{30}{7}\right) \checkmark$$

مثال: Ex ثابت کنید اگر دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec a$ بر امتداد بردار $\vec b$، برابر با خود $\vec a$ است.

$$\vec a \parallel \vec b \rightarrow \underset{(r\in\mathbb{R})}{\vec a = r\vec b} \rightarrow \vec{a'} = \frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec b|^2}\,\vec b = \frac{r\cancel{\vec b\cdot\vec b}}{\cancel{|\vec b|^2}}\,\vec b = r\vec b = \vec a \checkmark$$

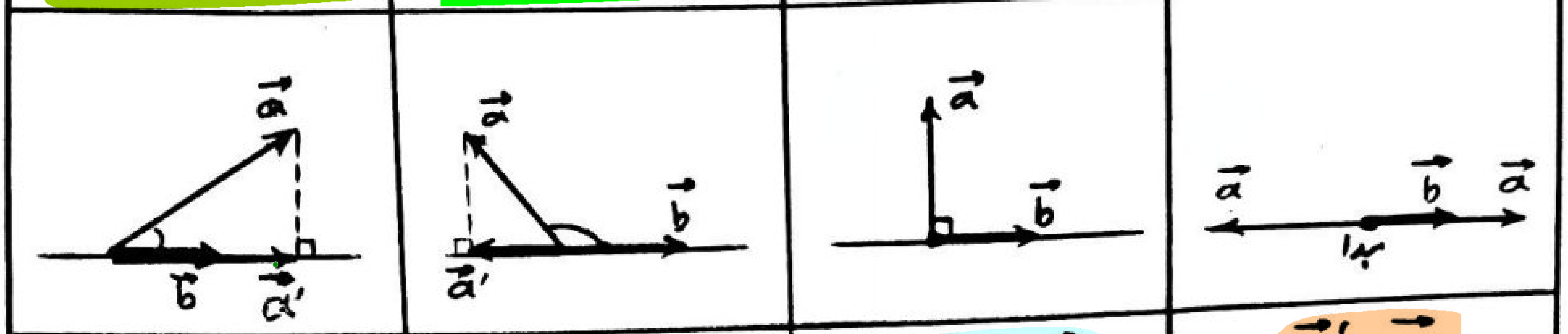
مثال: Ex ثابت کنید اگر دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر قائم یکی بر امتداد دیگری برابر با بردار صفر است.

$$\vec a \perp \vec b \Rightarrow \vec a\cdot\vec b = 0 \rightarrow \vec{a'} = \frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec b|^2}\,\vec b = 0\,\vec b = \vec 0 \checkmark$$

جمع‌بندی

EX

$(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0$ یا 180°	$(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 90^\circ$	$(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) =$ منفرجه	$(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) =$ حاده
$\vec{a}' = \vec{a}$	$\vec{a}' = \vec{0}$	$\vec{a}'$ و $\vec{b}$ در خلاف جهت اند	$\vec{a}'$, $\vec{b}$ هم جهت اند



توجه: زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{a}'$ همواره حاده است، پس: $\vec{a}\cdot\vec{a}' \geq 0$

یافتن طول بردار تصویر قائم

«طول» بردار تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$ برابر است با

$$\boxed{|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}}$$

اثبات:

$$|\vec{a}'| = \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}\right| = \frac{\overbrace{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}^{\text{قدرمطلق}}}{|\vec{b}|^{\cancel{2}}}|\cancel{\vec{b}}| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

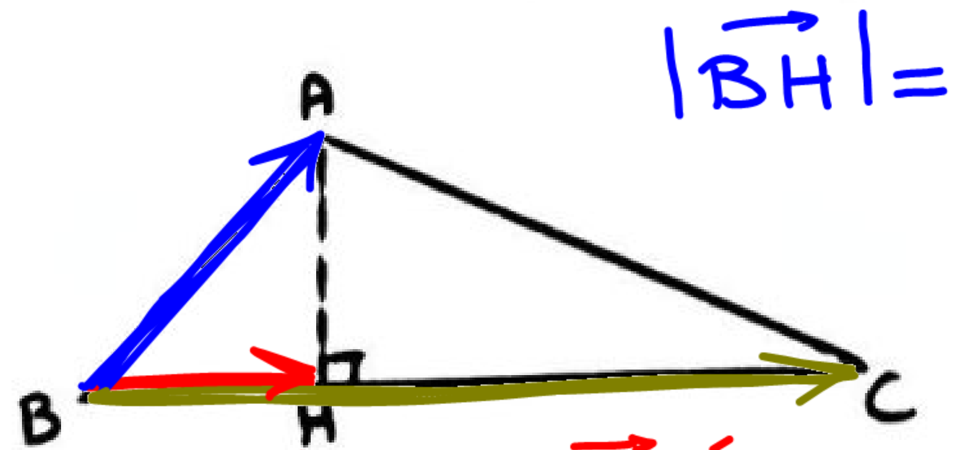
$r \in \mathbb{R}$

مثلاً: اندازهٔ بردار تصویر قائم بردار $\vec{a} = (2,3,1)$ روی امتداد بردار $\vec{b} = (1,2,2)$ برابر است با:

$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|(2)(1)+(3)(2)+(1)(2)|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{10}{3}$$

تست: سه نقطهٔ $A(1,-1,0)$، $B(0,2,1)$ و $C(1,2,-1)$ سه رأس مثلث ABC می‌باشند. اگر ارتفاع نظیر رأس A، ضلع BC را در نقطهٔ H قطع نماید، طول پاره‌خط BH کدام است؟

$$|\vec{BH}| = \frac{|\vec{BA}\cdot\vec{BC}|}{|\vec{BC}|} = \frac{(1)(1)+(-3)(0)+(-1)(-2)}{\sqrt{1^2+0+(-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$



$\vec{BH}$: بردار تصویر قائم $\vec{BA}$ روی امتداد $\vec{BC}$

$$\begin{cases} \vec{BA} = A - B = (1,-3,-1) \\ \vec{BC} = C - B = (1,0,-2) \end{cases}$$

تست: مجموع اندازه‌های بردارهای تصویر قائم بردار $\vec{a} = (2-\sqrt{6}, -1, 2+\sqrt{6})$ روی هر سه محور مختصات کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵
۳) $2\sqrt{6}$ ۴) $1+2\sqrt{6}$

ویژگی های مهم ضرب داخلی

EX

اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار و r و s دو عدد حقیقی باشند، آنگاه

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (جابه‌جایی)

2) $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\geq 0}$ $\quad \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\underbrace{\cos 0}_{1}=|\vec{a}|^2$ ✓

اثبات EX: $\vec{a}=(x,y,z)$ $\rightarrow \vec{a}\cdot\vec{a}=(x)(x)+(y)(y)+(z)(z)=x^2+y^2+z^2=|\vec{a}|^2$ ✓

$(|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

3) $(r\vec{a})\cdot(s\vec{b})=(rs)(\vec{a}\cdot\vec{b})$

4) $\begin{cases}\vec{a}\cdot(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}\pm\vec{a}\cdot\vec{c}\\(\vec{b}\pm\vec{c})\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{a}\pm\vec{c}\cdot\vec{a}\end{cases}$ (توزیع پذیری نسبت به جمع و تفریق)

5) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}\not\Rightarrow\vec{b}=\vec{c}$ (حذف پذیری ندارد) → تقسیم بر بردار وجود ندارد

اثبات ۵ EX: مثال نقض می آوریم:

$\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{k}$

$\underbrace{\underset{\vec{i}}{\vec{a}}\cdot\underset{\vec{j}}{\vec{b}}}_{0}=\underbrace{\underset{\vec{i}}{\vec{a}}\cdot\underset{\vec{k}}{\vec{c}}}_{0}$ اما $\underset{\vec{j}}{\vec{b}}\neq\underset{\vec{k}}{\vec{c}}$

تذکر ضرب داخلی برای بیش از دو بردار تعریف نمی‌شود و در نتیجه خاصیت شرکت پذیری ندارد.

$(\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{\text{عدد}})\underbrace{\vec{c}}_{\text{بردار}}$ → برداری موازی (هم راستا) با بردار $\vec{c}$

$\underbrace{\vec{a}}_{\text{بردار}}\cdot(\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{c}}_{\text{عدد}})$ بی معنی $(\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{\text{عدد}})\cdot\underbrace{\vec{c}}_{\text{بردار}}$

عدد در بردار ضرب نقطه‌ای نمی‌شود!!

مثال EX: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با اندازه‌های به ترتیب ۳ و ۲ با یکدیگر زاویهٔ ۶۰ درجه می سازند، حاصل عبارت $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})$ کدام است؟

$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})=2(\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{a}}_{|\vec{a}|^2})+6(\vec{a}\cdot\vec{b})-(\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{a}}_{\vec{a}\cdot\vec{b}})-3(\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{b}}_{|\vec{b}|^2})$

$5\vec{a}\cdot\vec{b}=5|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$

$=2(3)^2+5(3)(2)(\frac{1}{2})-3(2)^2=21$ ✓

تمرین H.W: اگر $|\vec{a}|=2$ ، $|\vec{b}|=3$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ ، حاصل $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}+\vec{b})$ چقدر است؟ (جواب: ۵۸)

سراسری اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 120° و $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$ باشد، آن‌گاه بردار مجموع هندسی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با بردار کوچکتر چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱) صفر ۲) 90° ۳) 60° ۴) 30°

$$\left((\vec{a}+\vec{b})\,\widehat{,}\,\vec{b}\right)=\theta \rightarrow \cos\theta=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}||\vec{b}|}=0 \rightarrow \boxed{\theta=90^\circ}$$

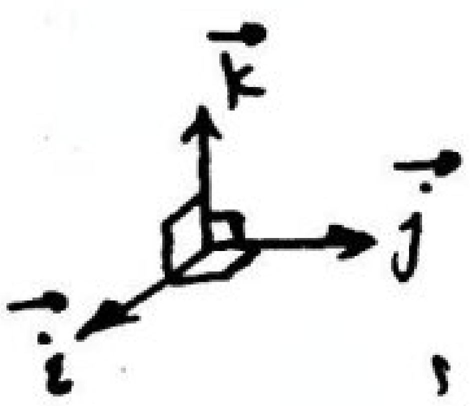
$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$=\underbrace{|\vec{a}|}_{\cancel{2}|\vec{b}|}|\vec{b}|\underbrace{\cos 120^\circ}_{-\frac{1}{\cancel{2}}}+|\vec{b}|^2=-|\vec{b}|^2+|\vec{b}|^2=0$$

مثال اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیرصفر متمایز باشند، از تساوی $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}\Longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=0\longrightarrow \underbrace{\vec{a}}_{\text{بردار}}\cdot(\underbrace{\vec{b}-\vec{c}}_{\text{بردار}})=0\Rightarrow \vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})$$

* یادآوری



$$\begin{cases}\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0\\ \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1\end{cases}$$

تست حاصل عبارت $4\vec{i}\cdot(\vec{j}-\vec{k})+2\vec{i}\cdot(\vec{i}+\vec{j})-3\vec{k}\cdot(\vec{j}+2\vec{k})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۴ ۴) -4

جواب $=4(\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{j}}_{0})-4(\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{k}}_{0})+2(\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{i}}_{1})+2(\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{j}}_{0})-3(\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{j}}_{0})-6(\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{k}}_{1})$

$=-4$

نکته اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه باشند، آن‌گاه

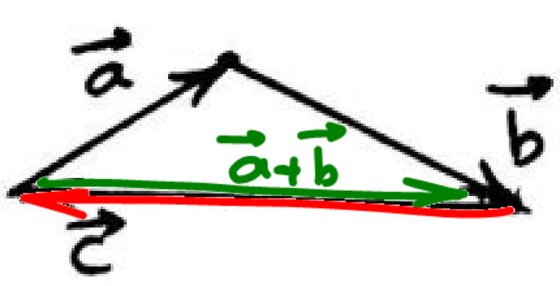
$$\boxed{\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2&=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}\\ |\vec{a}-\vec{b}|^2&=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\end{aligned}}$$ شبیه اتحاد

$$(\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|^2)$$

اثبات $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

سراسری در شکل مقابل بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ با اندازه‌های به ترتیب ۳، ۵ و ۶ داده شده‌اند. حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$$

$$\xrightarrow{\text{اندازه}} |\vec{a}+\vec{b}|=\underbrace{|-\vec{c}|}_{|\vec{c}|}$$

$$(\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c})$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{c}|^2\rightarrow 3^2+5^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=6^2\rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=1$$

تست دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با اندازه‌های به ترتیب ۱ و ۲ باهم زاویه ۶۰ درجه می‌سازند. حاصل $|2\vec{a}-\vec{b}|$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

$$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=|2\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2(2\vec{a})\cdot\vec{b}$$

$$=4|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-4(\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ})=4(1)^2+2^2-4(1)(2)(\tfrac{1}{2})=4$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |2\vec{a}-\vec{b}|=2$$

سراسری ۹۵ خ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با معلومات $|\vec{a}|=5$ ، $|\vec{b}|=7$ و $\vec{a}-\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ مفروض‌اند. تصویر قائم بردار $\vec{b}$ بر روی بردار $\vec{a}$ ، چند برابر بردار $\vec{a}$ است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۸ ۳) ۱,۲ ۴) ۱,۴

$$\vec{a}-\vec{b}=(2,1,-3)\longrightarrow|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان }2}\underbrace{|\vec{a}|^2}_{5^2}+\underbrace{|\vec{b}|^2}_{7^2}-2\vec{a}\cdot\vec{b}=14\longrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=30$$

$$\vec{b}'=\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{30}{5^2}\vec{a}=1{,}2\,\vec{a}$$

تمرین ۱۴۰۳ برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با اندازه‌های به ترتیب ۱ و ۲ ، اگر $|\vec{a}+2\vec{b}|=5$ ، آنگاه $|2\vec{a}+\vec{b}|$ چقدر است؟

(جواب: ۴)

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}=\underbrace{|\vec{a}|}_{2|\vec{b}|}|\vec{b}|\cancel{\cos 60^\circ}-|\vec{b}|^2=0\longrightarrow(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$$

$$|\vec{a}|=2|\vec{b}|$$

سراسری ۱۴۰۱ دو بردار که اندازهٔ یکی، دو برابر دیگری است، با هم زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازند. زاویهٔ بین بردار بزرگتر و تفاضل دو بردار، چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

$$(\widehat{\vec{a},(\vec{a}-\vec{b})})=\theta\rightarrow\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{a}-\vec{b}|}=\frac{3|\vec{b}|^{\cancel{2}}}{(2\cancel{|\vec{b}|})(\sqrt{3}\cancel{|\vec{b}|})}=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow\boxed{\theta=30^\circ}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}=\underbrace{|\vec{a}|^2}_{4|\vec{b}|^2}-\underbrace{|\vec{a}|}_{\cancel{2}|\vec{b}|}|\vec{b}|\cancel{\cos 60^\circ}=3|\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=\underbrace{|\vec{a}|^2}_{4|\vec{b}|^2}+|\vec{b}|^2-\cancel{2}\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{|\vec{a}||\vec{b}|\cancel{\cos 60^\circ}=2|\vec{b}|}=3|\vec{b}|^2\xrightarrow{\text{جذر}}|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}|\vec{b}|$$

نتیجه: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه باشند، آنگاه

$$\begin{cases}|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}\\|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\end{cases}$$

جمع: $\boxed{|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)}$

تفاضل: $\boxed{|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}}$

تست برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با اندازه‌های به ترتیب ۲ و ۳ ، اگر $|\vec{a}+\vec{b}|=4$ ، آنگاه $|\vec{a}-\vec{b}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $2\sqrt{2}$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$$

$$4^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(2^2+3^2)\longrightarrow|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{10}$$

تست اگر $|\vec{a}+\vec{b}|=5$ و $|\vec{a}-\vec{b}|=3$ ، آنگاه $\vec{a}\cdot\vec{b}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) صفر

$$\underbrace{|\vec{a}+\vec{b}|^2}_{5^2}-\underbrace{|\vec{a}-\vec{b}|^2}_{3^2}=4\vec{a}\cdot\vec{b}\longrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=4$$

نکته Ex برای سه بردار دلخواه $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ همواره داریم:

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$$

اثبات

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\cdots$$

سراسری Ex برای سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ با اندازه‌های به ترتیب ۳ ، ۴ و ۷ ، اگر $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ، آن‌گاه حاصل عبارت $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ کدام است؟

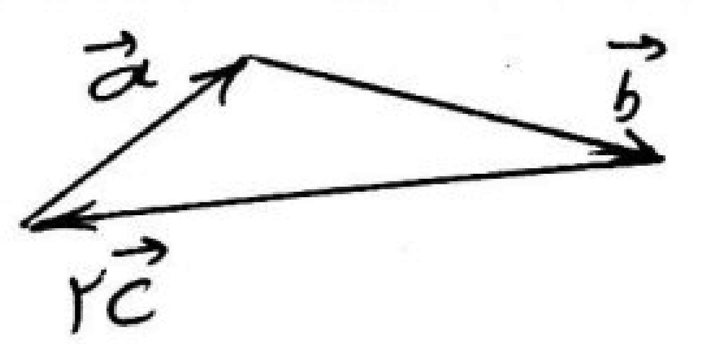
۱) -37 ✓ ۲) -19
۳) 37 ۴) 19

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=0 \xrightarrow{\text{توان ۲}} |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}}_{x})=0$$

$$\rightarrow 3^2+4^2+7^2+2x=0 \rightarrow \boxed{x=-37}$$

تست در شکل مقابل اگر $|\vec{a}|=2$ ، $|\vec{b}|=3$ ، حاصل $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ کدام است؟

۱) -13 ۲) $-6/5$
۳) 12 ۴) 6



$$\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0} \Longrightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\vec{c} \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\text{اندازه}} |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+\cancel{|\vec{c}|^2}+2(\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}}_{x})=\cancel{|\vec{c}|^2}$$

$$\rightarrow 2^2+3^2+2x=0 \rightarrow x=-6/5 \checkmark$$

تست H.W اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار دو به دو عمود بر هم و به طول‌های به ترتیب ۲ ، ۳ و ۶ باشند، آن‌گاه اندازه بردار $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ کدام است؟

(گزینه ۳)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

ضرب خارجی دو بردار (ضرب برداری)

تعریف (Ex) اگر $\begin{cases}\vec{V}_1=(x_1,y_1,z_1)\\ \vec{V}_2=(x_2,y_2,z_2)\end{cases}$ دو بردار دلخواه باشند، ضرب خارجی آنها را با نماد $\vec{V}_1\times\vec{V}_2$ نشان می‌دهیم و برداری است که به صورت زیر به دست می‌آید:

(بسط نسبت به سطر اول)

$$\vec{V}_1\times\vec{V}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \vec{V}_1\times\vec{V}_2=\left(\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right)$$

مثال (Ex) اگر $\vec{V}_1=(-1,2,-3)$ و $\vec{V}_2=(-2,2,1)$، آنگاه $\vec{V}_1\times\vec{V}_2$ ، $\vec{V}_2\times\vec{V}_1$ را بیابید.

$$\vec{V}_1\times\vec{V}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&2&-3\\-2&2&1\end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix}2&-3\\2&1\end{vmatrix}}_{8}\vec{i}-\underbrace{\begin{vmatrix}-1&-3\\-2&1\end{vmatrix}}_{-7}\vec{j}+\underbrace{\begin{vmatrix}-1&2\\-2&2\end{vmatrix}}_{2}\vec{k}=(8,7,2)\checkmark$$

$$\vec{V}_2\times\vec{V}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&2&1\\-1&2&-3\end{vmatrix}=\dots=(-8,-7,-2)$$

سراسری ۱۴۰۰ — بردار $\vec{a}=(-1,\alpha,1)$ با محور zها (در فضا) زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد. اگر $\vec{b}=(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},2)$ ، زاویهٔ بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ با محور zها، برابر θ باشد، مقدار $\cos\theta$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۲) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\gamma=45^\circ\rightarrow\cos\underbrace{\gamma}_{45^\circ}=\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+\alpha^2+1^2}}\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2+\alpha^2}}\rightarrow\alpha=0\rightarrow\vec{a}=(-1,0,1)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&0&1\\-\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1\\\frac{2}{3}&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&1\\-\frac{4}{3}&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&0\\-\frac{4}{3}&\frac{2}{3}\end{vmatrix}\vec{k}=(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(-\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{3})^2+(-\frac{2}{3})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\rightarrow\cos\theta=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\checkmark$$

سراسری ۹۳ — اگر $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$ ، $\vec{b}=3\vec{j}+2\vec{k}$ و $\vec{c}=4\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ ، آن‌گاه اندازهٔ تصویر بردار $\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})}_{\vec{d}}\times\vec{c}$ روی محور xها کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$\underbrace{\vec{a}\times\vec{b}}_{\vec{d}}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&0\\0&3&2\end{vmatrix}=(-4,-2,3)$$

$$\vec{d}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-4&-2&3\\4&1&-2\end{vmatrix}=(1,4,4)\xrightarrow{\text{تصویر روی محور } x}(1,0,0)\xrightarrow{\text{اندازه}}1\checkmark$$

ویژگی های ضرب خارجی بردارها

EX

اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار و r و s دو عدد حقیقی باشند، آن گاه

1) $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$ (جابه‌جایی ندارد)

* اگر دو سطر دترمینان جابه‌جا شوند، مقدار دترمینان قرینه می‌شود.

2) $\boxed{\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}}$ ضرب خارجی هر بردار در خودش برابر با بردار صفر است.

$$\vec{a}=(x,y,z) \Rightarrow \vec{a}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ x&y&z\\ x&y&z\end{vmatrix}=\vec{0}$$

(دو سطر دترمینان یکسان باشد، دترمینان صفر است)

3) $(r\vec{a})\times(s\vec{b})=(rs)(\vec{a}\times\vec{b})$

4) $\begin{cases}\vec{a}\times(\vec{b}\pm\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\pm(\vec{a}\times\vec{c})\\ (\vec{b}\pm\vec{c})\times\vec{a}=(\vec{b}\times\vec{a})\pm(\vec{c}\times\vec{a})\end{cases}$ (توزیع‌پذیری ضرب خارجی روی جمع و تفریق)

5) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c} \not\Rightarrow \vec{b}=\vec{c}$ (حذف پذیری ندارد)

اثبات ۵ / EX

$\vec{a}=(1,1,1)$ ، $\vec{b}=(2,2,2)$ ، $\vec{c}=(3,3,3)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 1&1&1\\ 2&2&2\end{vmatrix}=(0,0,0)=\vec{0} \qquad \vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 1&1&1\\ 3&3&3\end{vmatrix}=(0,0,0)=\vec{0}$$

پس $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$

تذکر ضرب خارجی برای بیش از دو بردار تعریف می‌شود، ولی خاصیت شرکت پذیری ندارد.

$$\underbrace{\underbrace{\vec{a}}_{\text{بردار}}\times(\underbrace{\vec{b}\times\vec{c}}_{\text{بردار}})}_{\text{بردار}} \neq \underbrace{(\underbrace{\vec{a}\times\vec{b}}_{\text{بردار}})\times\underbrace{\vec{c}}_{\text{بردار}}}_{\text{بردار}}$$

تست اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند و $|\vec{a}\times\vec{b}|=4$ ، اندازهٔ بردار $(\vec{a}+\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ۱۶

جواب $= \left|-(\vec{a}\times\vec{b})+3(\underbrace{\vec{b}\times\vec{a}}_{-(\vec{a}\times\vec{b})})\right| = \left|-4(\vec{a}\times\vec{b})\right| = 4\underbrace{|\vec{a}\times\vec{b}|}_{4} = 16$ ✓

تست اگر $2\vec{a}+\vec{b}=(1,4,2)$ و $\vec{a}+2\vec{b}=(2,2,1)$ ، اندازهٔ ضرب خارجی $\vec{a}\times\vec{b}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{3}$

$$(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 1&4&2\\ 2&2&1\end{vmatrix} \Rightarrow \underbrace{4(\vec{a}\times\vec{b})+(\underbrace{\vec{b}\times\vec{a}}_{-(\vec{a}\times\vec{b})})}_{3(\vec{a}\times\vec{b})}=(0,3,-6)$$

$$\xrightarrow{\div 3} \vec{a}\times\vec{b}=(0,1,-2) \longrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{0+1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$ ✓

مثال مهم
EX
ثابت کنید

برای سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ، اگر $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ، آن‌گاه $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0} \xrightarrow{\vec{a}\times} \underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{0}}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\underbrace{\vec{a}\times\vec{0}}_{\vec{0}} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=-\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})}_{-(\vec{c}\times\vec{a})}=\vec{c}\times\vec{a}$$

$$\xrightarrow{\vec{b}\times} \underbrace{\vec{b}\times\vec{a}}_{-(\vec{a}\times\vec{b})}+\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{0}}+\vec{b}\times\vec{c}=\underbrace{\vec{b}\times\vec{0}}_{\vec{0}} \Rightarrow \vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$$

تعبیر هندسی ضرب خارجی

قضیه:
EX
اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند، آن‌گاه

ضرب داخلی و خارجی روی هم توزیع نمی‌شوند

$$\underbrace{\underbrace{\vec{a}}_{\text{بردار}}.\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})}_{\text{بردار}}}_{\text{عدد}}=0 \quad , \quad \vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=0$$

(یادآوری: ضرب نقطه‌ای دو بردار زمانی صفر است که دو بردار بر هم عمود باشند)

اثبات

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\end{cases} \Longrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\left(a_2b_3-a_3b_2\ ,\ -(a_1b_3-a_3b_1)\ ,\ a_1b_2-a_2b_1\right)$$

$$\Rightarrow \vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=a_1(a_2b_3-a_3b_2)-a_2(a_1b_3-a_3b_1)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)$$
$$=a_1a_2b_3-a_1a_3b_2-a_2a_1b_3+a_2a_3b_1+a_3a_1b_2-a_3a_2b_1=0$$

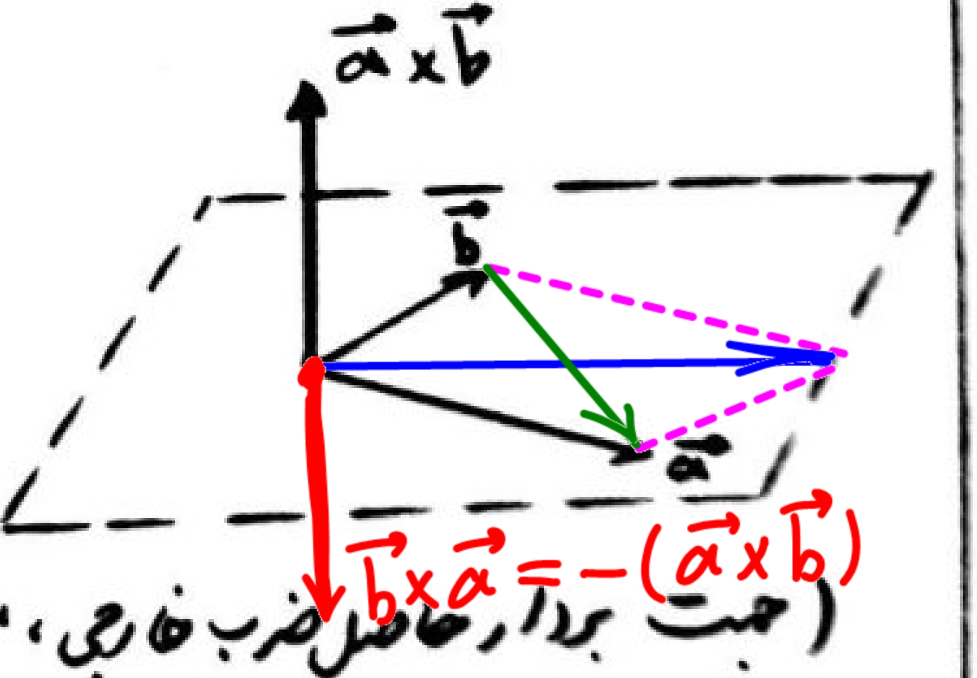
نتیجه مهم
EX

$$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a} \quad , \quad (\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}$$

بردار حاصل ضرب خارجی دو بردار، بر هر دو بردار و نیز بر صفحهٔ آن دو بردار عمود است.

و در نتیجه بر هر بردار هم صفحه با آن دو بردار، نظیر بردار جمع و بردار تفریق آن دو بردار، عمود است.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\perp(\vec{a}\pm\vec{b})$$



(جهت بردار حاصل ضرب خارجی، مطابق قانون دست راست است. یعنی اگر دست راست را از $\vec{a}$ به سمت $\vec{b}$ ببندیم، انگشت شست عمود بر دست، جهت بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را نشان می‌دهد.)

مسئله: دو بردار با مختصات $\vec{a}=(1,2,-1)$ و $\vec{b}=(2,4,m)$ مفروض اند. به ازای کدام مقادیر m ، حاصل $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})$ برابر صفر است؟

۱) ± 2 ۲) -2 ۳) هیچ مقدار ۴) هر مقدار حقیقی

$$(\vec{a}\times\vec{b})\perp(\vec{a}\pm\vec{b}) \Rightarrow (\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{a}\pm\vec{b})=0$$

همواره صفر است و به m بستگی ندارد $(\forall m\in\mathbb{R})$

سراسری Ex: بردار عمود بر دو بردار $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{b}=\vec{i}-\vec{k}$ کدام است؟

ضرب خارجی دو بردار یا مضارب آن

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=(-1,1,-1)=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\ \checkmark$$

تست: اگر بردار $\vec{a}=(x,y,z)$ بر بردارهای $\vec{b}=(1,-1,2)$ و $\vec{c}=(2,0,1)$ عمود باشد و $|\vec{a}|=2$ فرض شود، حاصل $x+y+z$ با مقدار مثبت کدام است؟

بردار $\vec{a}$ برابر با $(\vec{b}\times\vec{c})$ یا مضربی از آن است.

۱) $\frac{10}{\sqrt{14}}$ ۲) $\frac{12}{\sqrt{14}}$ ۳) $\frac{6}{\sqrt{14}}$ ۴) $\frac{8}{\sqrt{14}}$

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&2\\2&0&1\end{vmatrix}=(-1,3,2)\xrightarrow{r\in\mathbb{R}}\vec{a}=(\underbrace{-r}_{x},\underbrace{3r}_{y},\underbrace{2r}_{z})$$

$$|\vec{a}|=2\longrightarrow\sqrt{(-r)^2+(3r)^2+(2r)^2}=2\to r\sqrt{14}=2\to r=\frac{2}{\sqrt{14}}$$

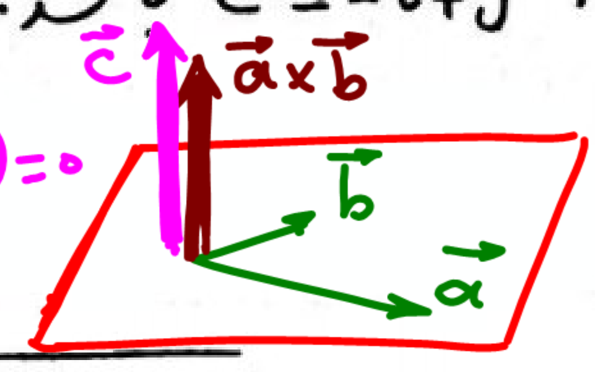
$$\text{جواب}=x+y+z=4r=\frac{8}{\sqrt{14}}\ \checkmark$$

سراسری خارج: بردارهای $\vec{a}=(-1,\alpha,2)$ و $\vec{b}=(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},2)$ در فضا مفروض‌اند. اگر بردار $(\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{r\in\mathbb{R}})(\vec{a}\times\vec{b})$ موازی بردار $\vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ باشد، α کدام است؟

برداری هم راستا با $(\vec{a}\times\vec{b})$

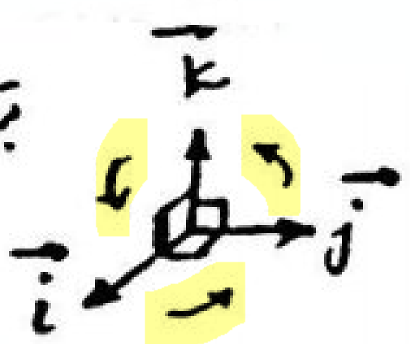
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) هیچ

$$\vec{c}\parallel(\vec{a}\times\vec{b})\to\begin{cases}\vec{c}\perp\vec{a}\Rightarrow\vec{c}\cdot\vec{a}=0\to(-1)(-1)+(1)(\alpha)+(-1)(2)=0\to\boxed{\alpha=1}\\\vec{c}\perp\vec{b}\end{cases}$$



ضرب خارجی بردارهای پایه Ex

تبدیل چرخشی



$$\vec{i}\times\vec{j}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=(0,0,1)=\vec{k}$$

$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$	$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$
$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$	$\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$
$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$	$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

- در جهت دایرهٔ مثلثاتی (پادساعت‌گرد)، حاصل ضرب هر دو بردار پایه، با بردار سوم برابر است.
- در خلاف جهت دایرهٔ مثلثاتی (ساعت‌گرد)، حاصل ضرب هر دو بردار پایه، با قرینهٔ بردار سوم برابر است.

مثال Ex: حاصل عبارت $2\vec{i}\times(\vec{j}+\vec{k})-\vec{j}\times(3\vec{i}+2\vec{k})+5\vec{k}\times(2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k})$ را بیابید.

$$\text{جواب}=2(\underbrace{\vec{i}\times\vec{j}}_{\vec{k}})+2(\underbrace{\vec{i}\times\vec{k}}_{-\vec{j}})-3(\underbrace{\vec{j}\times\vec{i}}_{-\vec{k}})-2(\underbrace{\vec{j}\times\vec{k}}_{\vec{i}})+10(\underbrace{\vec{k}\times\vec{i}}_{\vec{j}})-5(\underbrace{\vec{k}\times\vec{j}}_{-\vec{i}})=3\vec{i}+8\vec{j}+5\vec{k}$$

$$=(3,8,5)\ \checkmark$$

سراسری ۹۱: اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد باشند، حاصل $(\vec{i}\times(\underbrace{\vec{i}\times\vec{j}}_{\vec{k}}))\times\vec{k}$ کدام است؟

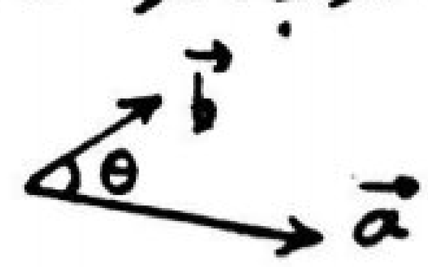
۱) صفر ۲) $-\vec{i}$ ۳) $\vec{j}$ ۴) $-\vec{k}$

$$\underbrace{\vec{i}\times\vec{k}}_{-\vec{j}}\ \to\ -(\underbrace{\vec{j}\times\vec{k}}_{\vec{i}})=-\vec{i}\ \checkmark$$

قضیه Ex: اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر θ باشد، آن‌گاه

$$\boxed{|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta}$$

(اثبات: صفحهٔ ۸۱ کتاب درسی)



مثال Ex: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار با اندازه‌های به ترتیب ۲ و ۳ باشند و زاویهٔ بین آن‌ها برابر ۳۰ درجه فرض شود، آن‌گاه اندازهٔ بردار $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$ را محاسبه کنید.

$$\text{جواب}=|-2(\vec{a}\times\vec{b})+(\underbrace{\vec{b}\times\vec{a}}_{-(\vec{a}\times\vec{b})})|=|-3(\vec{a}\times\vec{b})|=3|\vec{a}\times\vec{b}|=3|\vec{a}||\vec{b}|\sin30^\circ$$

$$=3(2)(3)(\tfrac{1}{2})=9\ \checkmark$$

مثال Ex: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند به طوری که $|\vec{a}|=3$ و $|\vec{b}|=26$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$، آنگاه $\vec{a}.\vec{b}$ را محاسبه کنید.

$$\underbrace{|\vec{a}|}_{3}\underbrace{|\vec{b}|}_{26}\sin\theta=72 \rightarrow \sin\theta=\frac{72}{3\times26}=\frac{12}{13}\rightarrow \cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\pm\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\pm\frac{5}{13}\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=(3)(26)\left(\pm\frac{5}{13}\right)=\pm30 \checkmark$$

سراسری: زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کمتر از ۹۰ درجه است ($\cos\theta>0$). اگر $|\vec{a}|=6$، $|\vec{b}|=5$ و $|\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})|=18$، حاصل $\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})$ کدام است؟

۱) ۵۴
۲) ۵۶
۳) ۶۰
۴) ۶۴

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=18\rightarrow \underbrace{|\vec{a}|}_{6}\underbrace{|\vec{b}|}_{5}\sin\theta=18\rightarrow \sin\theta=\frac{3}{5}\rightarrow\cos\theta=\frac{4}{5}$$

$$\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$=6^2+(6)(5)\left(\frac{4}{5}\right)=60 \checkmark$$

نتیجه ۱: اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، آنگاه

$$\tan\theta=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{\vec{a}.\vec{b}} \Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=(\vec{a}.\vec{b})\tan\theta$$

زیرا
$$\begin{cases}|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\\ \vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\end{cases}\xrightarrow{\div}\dots$$

تست H.W: برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، اگر $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{3}(\vec{a}.\vec{b})$، آنگاه زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$
۲) $\frac{\pi}{3}$
۳) $\frac{\pi}{4}$
۴) $\frac{\pi}{2}$

نتیجه ۲ EX: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه باشند، آنگاه

EX

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}.\vec{b})^2=(|\vec{a}||\vec{b}|)^2$$

(اتحاد لاگرانژ)

اثبات:
$$\begin{cases}|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta\\ (\vec{a}.\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta\end{cases}\xrightarrow{+}|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}.\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(\underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}_{1})$$

به جنگ آمد و عالم کسی معشوق خیالی را
خدا از ما نگیرد نعمت آشفته‌حالی را

مرا در بر بگیر ای مهربان هر چند می‌دانم
کسی باور ندارد حرف‌های مست لاابالی را

(فاضل نظری)

نتیجه ۳
EX

مینیمم اندازه ضرب خارجی	$\theta = 0$ یا $180^\circ \xLeftrightarrow{\sin\theta=0} \lvert\vec a\times\vec b\rvert = 0$	دو بردار موازی
ماکزیمم اندازه ضرب خارجی	$\theta = 90^\circ \xLeftrightarrow{\sin\theta=1} \lvert\vec a\times\vec b\rvert = \lvert\vec a\rvert\lvert\vec b\rvert$	دو بردار عمود برهم

$$0 \le |\vec a\times\vec b| \le |\vec a||\vec b|$$

نتیجه ۴ شرط "توازی" دو بردار غیر صفر
EX

برای دو بردار غیر صفر $\vec a$ و $\vec b$ داریم:

$$\boxed{\vec a \parallel \vec b \Longleftrightarrow \vec a\times\vec b=\vec 0}$$

$$(\vec a\perp\vec b \Longleftrightarrow \vec a\cdot\vec b=0)$$

اثبات

$$\vec a\parallel\vec b \Leftrightarrow \theta=0 \text{ یا } \pi \Leftrightarrow \sin\theta=0 \Leftrightarrow |\vec a||\vec b|\sin\theta=0 \Leftrightarrow |\vec a\times\vec b|=0\Leftrightarrow \vec a\times\vec b=\vec 0$$

دو بردار غیر صفر موازی اند، اگر و تنها اگر ضرب خارجی آنها برابر با بردار صفر باشد.

مثال برای سه بردار غیر صفر و متمایز $\vec a$ ، $\vec b$ و $\vec c$ ، از تساوی $\vec a\times\vec b=\vec a\times\vec c$ چه نتیجه ای می توان گرفت؟

$$(\vec a\times\vec b)-(\vec a\times\vec c)=\vec 0 \Rightarrow \underbrace{\vec a}_{\text{بردار غیرصفر}}\times(\underbrace{\vec b-\vec c}_{\text{بردار غیرصفر}})=\vec 0 \Rightarrow \vec a\parallel(\vec b-\vec c)$$

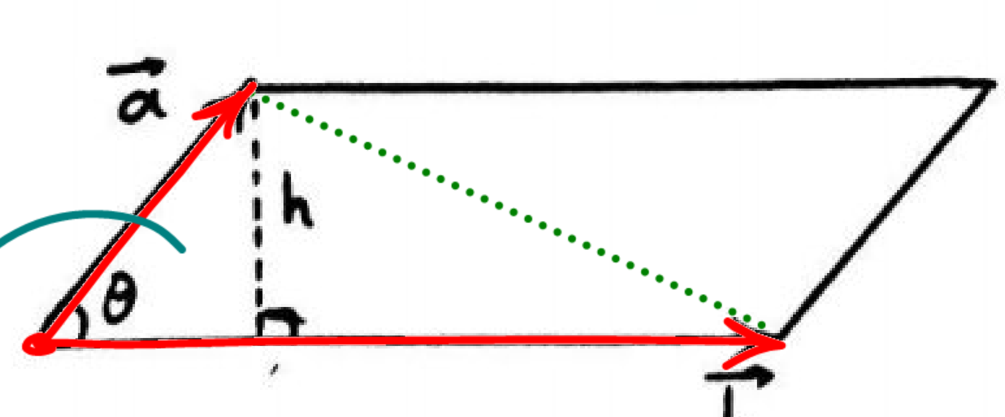
مثال (سراسری ۹۳) اگر $\vec a\times\vec b=\vec c\times\vec d$ و $\vec a\times\vec c=\vec b\times\vec d$ ، ثابت کنید دو بردار غیر صفر $\vec a-\vec d$ و $\vec b-\vec c$ موازی اند.

$$(\vec a-\vec d)\times(\vec b-\vec c)=(\vec a\times\vec b)-(\vec a\times\vec c)-\underbrace{(\vec d\times\vec b)}_{-(\vec b\times\vec d)}+\underbrace{(\vec d\times\vec c)}_{-(\vec c\times\vec d)}$$

$$=\cancel{(\vec a\times\vec b)}-\cancel{(\vec a\times\vec c)}+\cancel{(\vec b\times\vec d)}-\cancel{(\vec c\times\vec d)}=\vec 0\Rightarrow(\vec a-\vec d)\parallel(\vec b-\vec c)$$

نتیجه ۵ مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده توسط دو بردار هم مبدا $\vec a$ و $\vec b$ برابر است با $|\vec a\times\vec b|$
EX

پس مساحت مثلث ساخته شده توسط دو بردار هم مبدا $\vec a$ و $\vec b$ برابر است با $\frac{1}{2}|\vec a\times\vec b|$

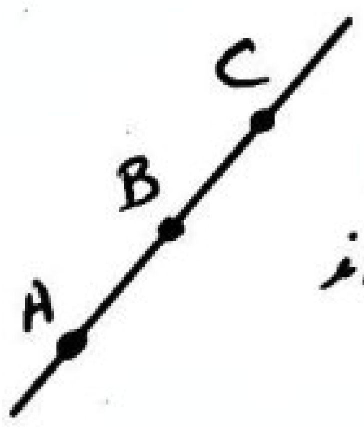


$$S=\underbrace{|h|}_{\text{ارتفاع}}\underbrace{|\vec b|}_{\text{قاعده}}=\underbrace{|\vec a|\sin\theta}_{|h|}|\vec b|=|\vec a||\vec b|\sin\theta=|\vec a\times\vec b|$$

$$\sin\theta=\frac{|h|}{|\vec a|}$$

شرط هم خط بودن سه نقطه (اختیاری)

سه نقطهٔ متمایز روی یک امتدادند (بر یک استقامت اند) هرگاه مساحت مثلث ساخته شده توسط آن ۳ برابر صفر شود.

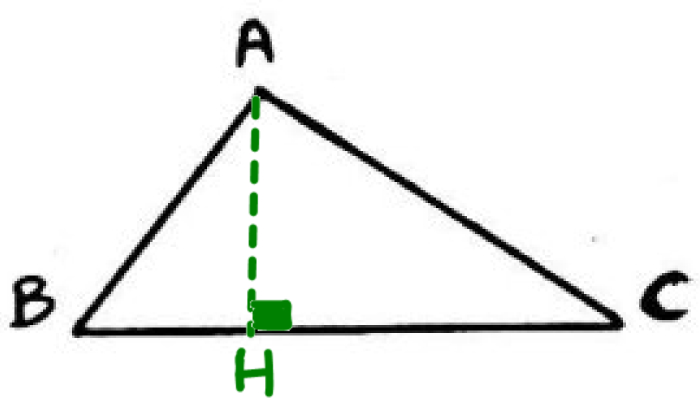


$$\text{سه نقطهٔ } A, B, C \text{ هم خط اند} \iff |\vec{AB} \times \vec{AC}| = 0 \iff \vec{AB} \parallel \vec{AC}$$

تمرین H.W آیا سه نقطهٔ $A(1,1,2)$، $B(0,3,-1)$ و $C(2,-3,-2)$ روی یک امتدادند؟

مثال EX سه نقطهٔ $A(0,1,-1)$، $B(1,2,-2)$ و $C(-1,1,-2)$ سه رأس مثلث ABC می باشند.

الف) مساحت مثلث ABC را بیابید. (سراسری)



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}|\vec{BA} \times \vec{BC}| = \frac{1}{2}|\vec{CA} \times \vec{CB}|$$

$$\begin{cases} \vec{BA} = A - B = (-1,-1,1) \\ \vec{BC} = C - B = (-2,-1,0) \end{cases} \rightarrow \vec{BA} \times \vec{BC} = (1,-2,-1)$$

$$\rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

ب) اندازهٔ ارتفاع AH را مشخص کنید. (سراسری خارج ۱۴۰۰)

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}|AH||BC|$$

به کمک ضرب خارجی

$$\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}|AH|(\sqrt{5}) \longrightarrow |AH| = \sqrt{\frac{6}{5}} = \sqrt{1/2}$$

تست در مثلث ABC، اگر $\vec{V} = (\underbrace{\vec{AB} + \vec{BC}}_{\vec{AC}}) \times (\vec{BC} + \vec{AC})$، آن گاه اندازهٔ $\vec{V}$ برحسب S (مساحت مثلث) کدام است؟

۱) S ۲) $2S$ ۳) $\frac{S}{2}$ ۴) $4S$

$$\vec{V} = \underbrace{\vec{AC}}_{-\vec{CA}} \times \underbrace{\vec{BC}}_{-\vec{CB}} \overset{\text{هم مبدا}}{=\!=} \vec{CA} \times \vec{CB} \xrightarrow{\text{اندازه}} |\vec{V}| = |\vec{CA} \times \vec{CB}| = 2S$$

تست H.W در مثلث ABC، اگر $\vec{V} = \vec{AB} \times \vec{AC} + \vec{BC} \times \vec{BA} + \vec{CA} \times \vec{BA}$، آن گاه اندازهٔ $\vec{V}$ برحسب S (مساحت مثلث) کدام است؟

۱) $2S$ ۲) $4S$ ۳) $6S$ ۴) S

(گزینه ۱)

سراسری EX

دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ به طول‌های ۳ و ۴ واحد با یکدیگر زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازند. مساحت مثلثی که بر روی دو بردار $\vec a-2\vec b$ و $3\vec a+2\vec b$ تولید شود کدام است؟

۱) ۲۴
۲) ۴۲
۳) ۳۶
۴) ۴۸

$$S_\Delta=\frac12\left|(\vec a-2\vec b)\times(3\vec a+2\vec b)\right|=\frac12\left|2(\vec a\times\vec b)-6(\underbrace{\vec b\times\vec a}_{-(\vec a\times\vec b)})\right|=4\left|\vec a\times\vec b\right|$$

$$=4\underbrace{|\vec a|}_{3}\underbrace{|\vec b|}_{4}\sin30^\circ=24 \checkmark$$

سراسری EX ۹۷ و ۸۴

اگر $\vec a=(1,-2,3)$ و $\vec b=(2,0,1)$، مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط دو بردار $2\vec a+5\vec b$ و $\vec a+3\vec b$ کدام است؟

۱) $2\sqrt3$
۲) $3\sqrt2$
۳) $3\sqrt5$
۴) $5\sqrt3$

$$S_{\square}=\left|(2\vec a+5\vec b)\times(\vec a+3\vec b)\right|=\left|6(\vec a\times\vec b)+5(\underbrace{\vec b\times\vec a}_{-(\vec a\times\vec b)})\right|$$

$$=\left|\vec a\times\vec b\right|=\sqrt{(-2)^2+5^2+4^2}=3\sqrt5 \checkmark$$

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\1&-2&3\\2&0&1\end{vmatrix}=(-2,5,4)$$

تست H.W

اگر $\vec d=(2,3,-1)$ و $\vec d'=(-1,4,2)$ قطرهای یک متوازی الاضلاع باشند، مساحت آن کدام است؟

(جواب: $\frac{\sqrt{230}}{2}$)

$$S_{\square}=\frac12\left|\vec d\times\vec d'\right|$$

سراسری

دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ به طول‌های ۵ و ۸ واحد مفروض‌اند. مساحت مثلث تولید شده توسط این دو بردار ۱۲ واحد.
اگر زاویهٔ بین دو بردار کمتر از قائمه باشد، اندازهٔ تفاضل دو بردار کدام است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۷/۵

$$S_\Delta=12\rightarrow\frac12\left|\vec a\times\vec b\right|=12\rightarrow\left|\vec a\times\vec b\right|=24\rightarrow\underbrace{|\vec a|}_{5}\underbrace{|\vec b|}_{8}\sin\theta=24$$

$$\rightarrow\sin\theta=\frac35\xrightarrow{\cos\theta>0}\cos\theta=\frac45\rightarrow\vec a\cdot\vec b=\underbrace{|\vec a|}_{5}\underbrace{|\vec b|}_{8}\underbrace{\cos\theta}_{\frac45}=32$$

$$|\vec a-\vec b|^2=|\vec a|^2+|\vec b|^2-2\vec a\cdot\vec b=5^2+\cancel{8^2-2(32)}=5^2\xrightarrow{\text{جذر}}|\vec a-\vec b|=5 \checkmark$$

تست H.W

اگر $|\vec a|=3$ و $|\vec b|=2$ و $\vec a\cdot\vec b=\frac{18}{5}$، مساحت مثلثی که روی دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ ساخته می‌شود کدام است؟

(گزینه ۴)

۱) $\frac{24}{5}$
۲) $\frac{12}{5}$
۳) $\frac{18}{5}$
۴) $\frac{9}{5}$

تست

دو نقطهٔ ثابت A و B در فضا مفروض‌اند. مکان هندسی نقطهٔ M در فضا به طوری که $|\vec{MA}\times\vec{MB}|=k$ باشد کدام است؟
(k عددی حقیقی و ثابت است)

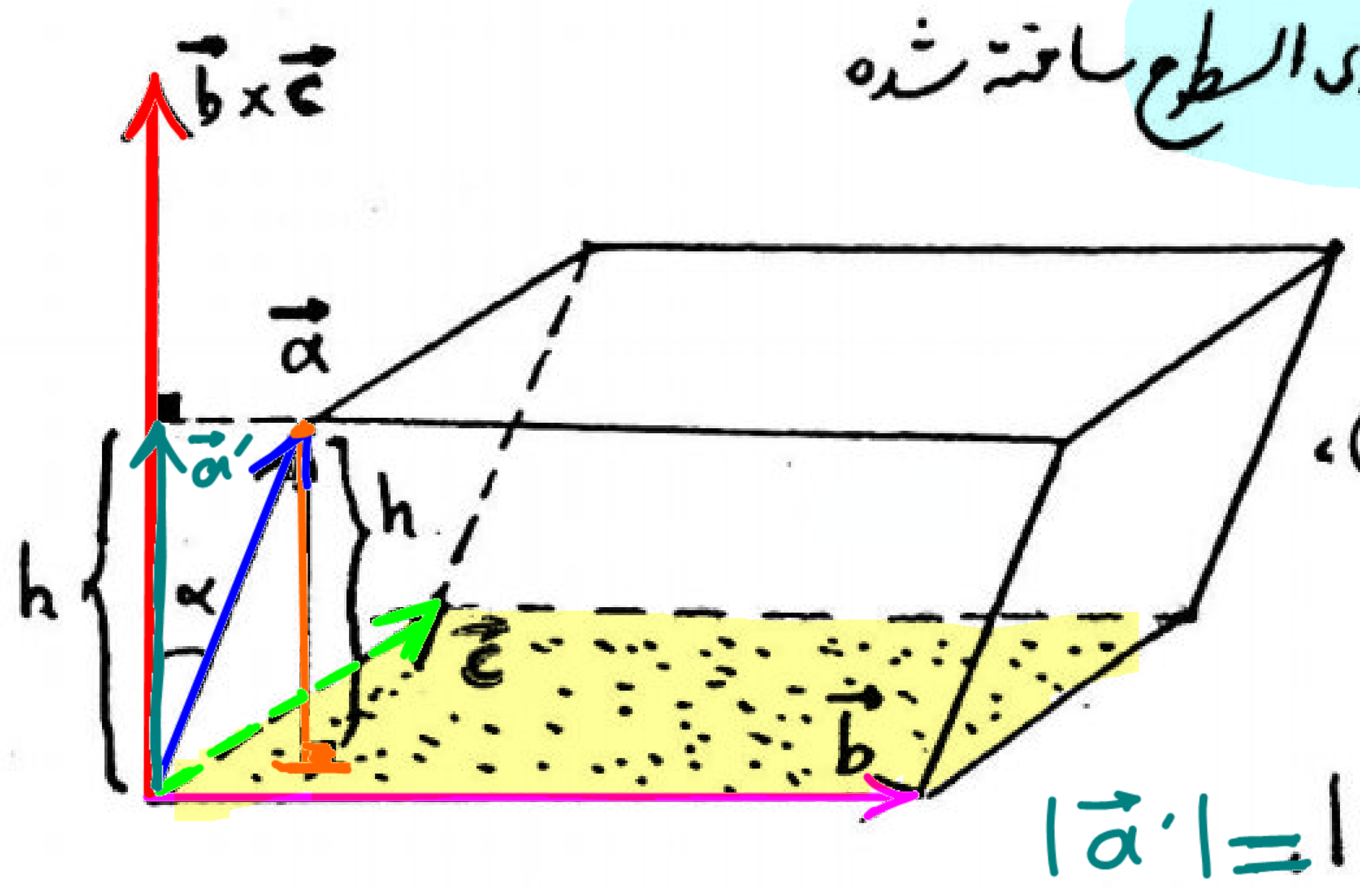
۱) دایره
۲) کره
۳) سطح مخروطی
۴) سطح استوانه‌ای

ضرب مختلط سه بردار (ضرب سه‌گانهٔ عددی)

EX

اگر $\vec a$ ، $\vec b$ و $\vec c$ سه بردار باشند، ضرب مختلط آن‌ها عبارت است از:
$$\underbrace{\underbrace{\vec a}_{\text{بردار}}\cdot\underbrace{(\vec b\times\vec c)}_{\text{بردار}}}_{\text{عدد}}$$

اکنون نشان می‌دهیم که قدرمطلق این عدد، حجم متوازی‌السطوح ساخته شده توسط سه بردار هم‌مبدا $\vec a$ ، $\vec b$ و $\vec c$ است.



با توجه به شکل درمی‌یابیم که ارتفاع متوازی‌السطوح (h)، با اندازهٔ تصویر قائم بردار $\vec a$ بر روی امتداد $\vec b\times\vec c$ برابر است. پس
$$|\vec a'|=|h|=\frac{|\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)|}{|\vec b\times\vec c|}$$

ازطرفی قاعدهٔ این متوازی‌السطوح یک متوازی‌الاضلاع است که توسط دو بردار $\vec b$ و $\vec c$ ساخته شده است. بنابراین

$$\text{حجم متوازی‌السطوح}=(\text{اندازه ارتفاع})(\text{مساحت قاعده})=|h||\vec b\times\vec c|=\frac{|\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)|}{\cancel{|\vec b\times\vec c|}}\cancel{|\vec b\times\vec c|}=|\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)|$$

نکته ۱ EX: اگر
$$\begin{cases}\vec a=(a_1,a_2,a_3)\\ \vec b=(b_1,b_2,b_3)\\ \vec c=(c_1,c_2,c_3)\end{cases}$$
، آنگاه
$$\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

* در محاسبهٔ حجم متوازی‌السطوح قدرمطلق می‌گذاریم و ترتیب بردارها اهمیتی ندارد.

مثال: EX حجم متوازی‌السطوح ساخته شده توسط سه بردار $\vec a=(1,-1,2)$ ، $\vec b=(3,0,-1)$ و $\vec c=(1,2,3)$ چقدر است؟

$$\text{حجم}=|\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)|=\left|\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}\right|=-(3)\underbrace{\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}}_{-7}-(-1)\underbrace{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}}_{3}=24 \checkmark$$

سراسری ۹۳، ۹۷ و خ ۹۸: دو بردار با تصاویر $\vec a=(1,-2,3)$ و $\vec b=(2,1,-1)$ مفروض اند. حجم متوازی‌السطوحی که بر روی سه بردار $\vec a$ ، $\vec b$ و $\underbrace{\vec a\times\vec b}_{\vec c}$ ساخته می‌شود، کدام است؟

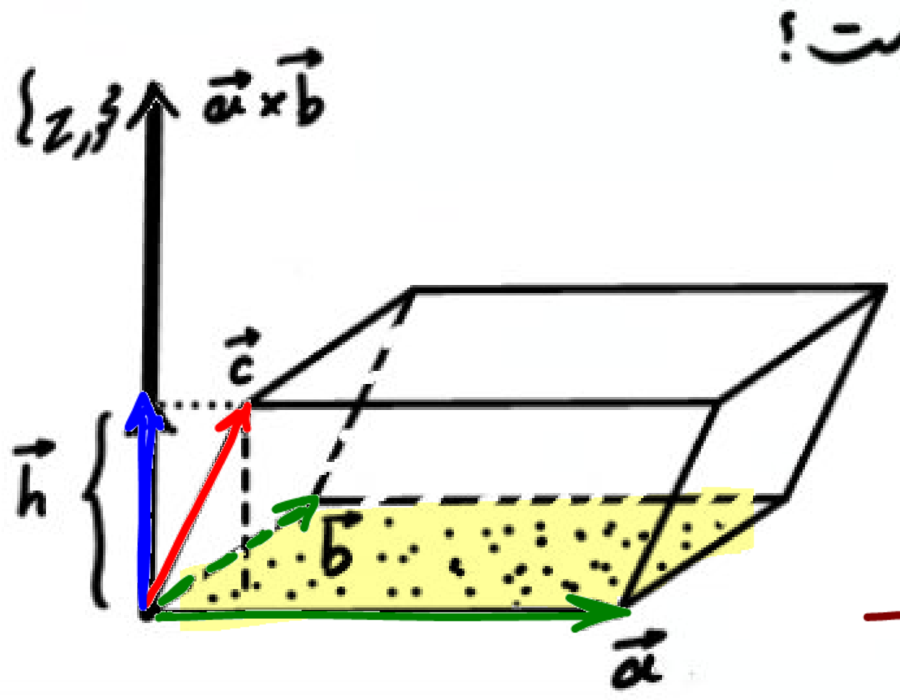
۱) ۵۴
۲) ۷۲
۳) ۷۵
۴) ۸۰

$$\vec c=\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-1,7,5)$$

$$\text{حجم}=|\vec c\cdot(\underbrace{\vec a\times\vec b}_{\vec c})|=|\vec c|^2=\left(\sqrt{(-1)^2+7^2+5^2}\right)^2=75 \checkmark$$

سراسری ۱۴۰۱ سه بردار $\vec{a}=(1,1,0)$ ، $\vec{b}=(-1,2,0)$ و $\vec{c}$ غیر واقع در یک صفحه و $\vec{h}=(x,y,4)$ بردار ارتفاع متوازی السطوح حاصل (واقع در صفحه xy) از این سه بردار است. اگر $\vec{a}.\vec{c}=1$ و $\vec{b}.\vec{c}=5$ باشد، اندازهٔ بردار $\vec{c}$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۴
۳) $\sqrt{19}$
۴) $\sqrt{21}$



$$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$$

$$\begin{cases}\vec{a}.\vec{c}=1 \Rightarrow (1)(c_1)+(1)(c_2)+(0)(c_3)=1\\ \vec{b}.\vec{c}=5 \Rightarrow (-1)(c_1)+(2)(c_2)+(0)(c_3)=5\end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases}c_1+c_2=1\\ -c_1+2c_2=5\end{cases} \rightarrow c_2=2 \ , \ c_1=-1 \rightarrow \vec{c}=(-1,2,c_3)$$

$c_3=4$ ← از روی شکل با بردار $\vec{h}$ ، هم ارتفاع است

$$|\vec{c}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}$$

سراسری بر روی سه بردار $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$ ، $\vec{b}=\vec{j}+3\vec{k}$ و $\vec{c}=4\vec{i}-\vec{k}$ یک متوازی السطوح ساخته شده است. اگر قاعدهٔ این متوازی السطوح را بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تشکیل دهند، ارتفاع این متوازی السطوح چند واحد است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\sqrt{3}$
۴) ۱٫۵

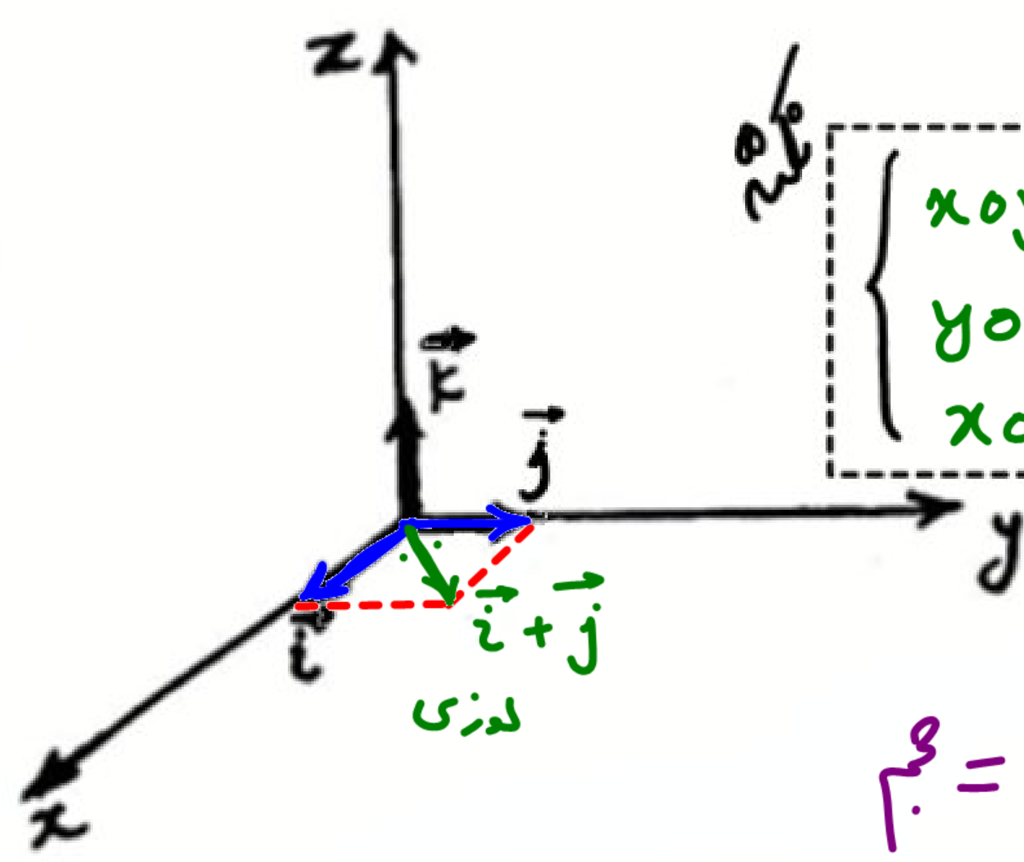
$$\text{حجم}=(\text{مساحت قاعده})(\text{ارتفاع}) \longrightarrow \text{ارتفاع}=\frac{\text{حجم}}{\text{مساحت قاعده}}=\frac{|\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})|}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\frac{|-14|}{7}=2$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-1&0\\0&1&3\end{vmatrix}=(-3,-6,2) \rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+2^2}=7$$

$$\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})=(4)(-3)+(0)(-6)+(-1)(2)=-14$$

سراسری حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار واقع بر نیمسازهای سه صفحه xoy ، yoz و xoz به ترتیب با طول‌های $\sqrt{2}$ ، $2\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ با مؤلفه‌های غیر منفی ساخته می‌شود چند واحد مکعب است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) $8\sqrt{2}$
۴) $16\sqrt{2}$



نکته

xoy بردار نیمساز صفحهٔ $=\vec{i}+\vec{j}=(1,1,0) \xrightarrow{\text{اندازه}} \sqrt{2} \rightarrow \vec{a}=(1,1,0)$

yoz 〃 〃 〃 $=\vec{j}+\vec{k}=(0,1,1) \xrightarrow{\text{〃}} \sqrt{2} \rightarrow \vec{b}=(0,2,2)$

xoz 〃 〃 〃 $=\vec{i}+\vec{k}=(1,0,1) \xrightarrow{\text{〃}} \sqrt{2} \rightarrow \vec{c}=(3,0,3)$

$$\text{حجم}=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=\left|\begin{vmatrix}1&1&0\\0&2&2\\3&0&3\end{vmatrix}\right|=12$$

نکته ۲) اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار دلخواه باشند، آنگاه

تبدیل چرخشی

$$\boxed{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}$$

حفظ نشود!

سراسری) اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیرصفر و غیرواقع در یک صفحه باشند، مقدار کدام گزینه با سایرین متفاوت است؟

۱) $\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})$ ۲) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ۳) $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$ ۴) $(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}$

ضرب داخلی جابجایی دارد

گ ۱: $\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})=\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})=\underbrace{\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})}_{\text{گ ۳}}=\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}}_{\text{گ ۴}}$

سراسری ۹۰) اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیرصفر باشند، خلاصه شده $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot((\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}-\vec{a}))$ کدام است؟

۱) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ۲) $2\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ۳) $3\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ۴) صفر

$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\left((\vec{b}\times\vec{c})-(\vec{b}\times\vec{a})-(\vec{c}\times\vec{a})\right)$

در ضرب مختلط، هرگاه بردار تکراری دیده شود، حاصل صفر است.

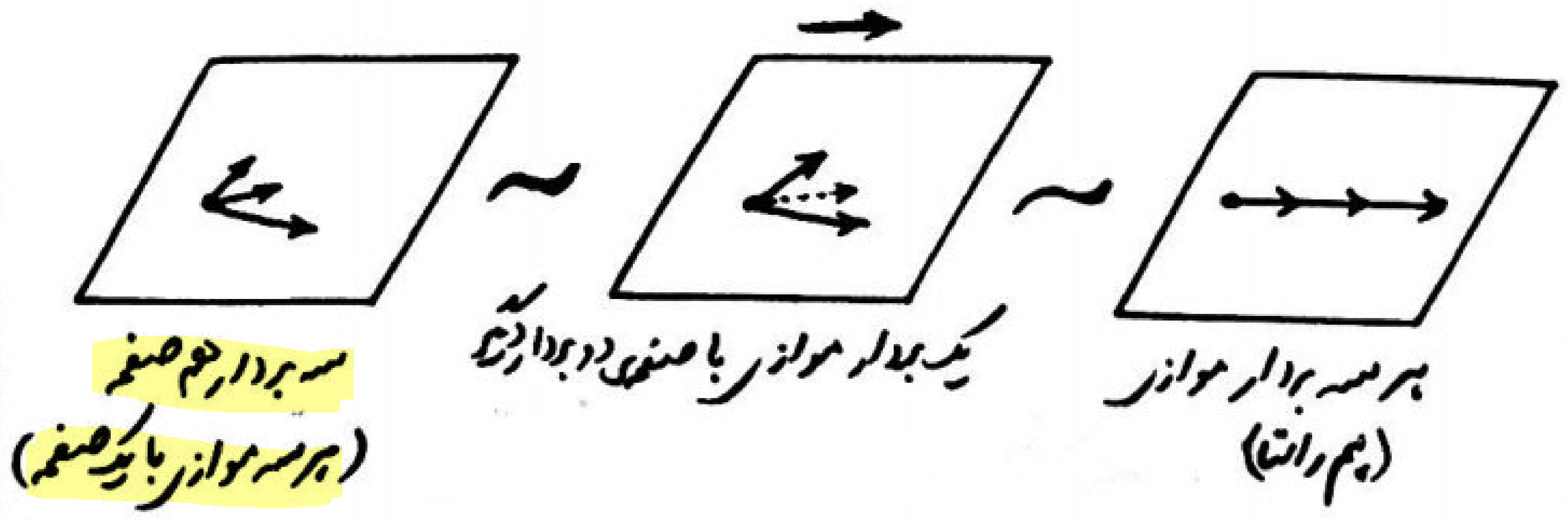
$=2\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})-2\underbrace{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})}_{0}-2\underbrace{\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})}_{0}-\underbrace{\vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}_{0}+\underbrace{\vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})}_{0}+\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$

$=2\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=3\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ✓

«شرط هم صفحه بودن سه بردار»

EX

آن است که ضرب مختلط سه بردار، (حجم متوازی السطوح ساخته شده توسط سه بردار) برابر صفر باشد.



$\Rightarrow$ در هر سه حالت حجم تولید شده صفر است.

به طور خلاصه

$\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار هم صفحه‌اند $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$ یا $\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=0$ یا ....

مثال (سراسری ۹۷ خ) اگر $(\vec a\times\vec b)+(\vec b\times\vec c)+(\vec c\times\vec a)=\vec 0$ ، آنگاه ثابت کنید سه بردار $\vec a$، $\vec b$ و $\vec c$ هم‌صفحه‌اند.

داخلی

$$\vec a\cdot \longrightarrow \underbrace{\vec a\cdot(\vec a\times\vec b)}_{0}+\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)+\underbrace{\vec a\cdot(\vec c\times\vec a)}_{0}=\underbrace{\vec a\cdot\vec 0}_{0}$$

$\longrightarrow \vec a\cdot(\vec b\times\vec c)=0 \longrightarrow$ سه بردار هم‌صفحه‌اند ✓

سراسری ۹۱ خ: بردارهای $\vec a$، $\vec b$ و $\vec c$ با شرط $(\vec a-\vec c)\times\vec b=\vec a\times\vec c$ مفروض‌اند. الزاماً کدام نتیجه‌گیری حاصل می‌شود؟

۱) $\vec a\cdot(\vec b\cdot\vec c)=0$ ۲) $\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)=0$ ۳) $\vec a\times(\vec b\times\vec c)=0$ ۴) هر سه بردار موازی‌اند.

فرض مسئله: $(\vec a\times\vec b)-\underbrace{(\vec c\times\vec b)}_{-(\vec b\times\vec c)}-\underbrace{(\vec a\times\vec c)}_{-(\vec c\times\vec a)}=\vec 0 \Longrightarrow (\vec a\times\vec b)+(\vec b\times\vec c)+(\vec c\times\vec a)=\vec 0$

$\vec a\cdot \longrightarrow \dots \longrightarrow \vec a\cdot(\vec b\times\vec c)=0$ ✓

سراسری ۹۸ EX: به ازای کدام مقدار m سه بردار $\vec a=(-1,2,3)$ ، $\vec b=(2,0,1)$ و $\vec c=(-4,m,5)$ هم‌صفحه‌اند؟

۱) ۴ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۳-

ضرب مختلط صفر است

$$\begin{vmatrix}-1&2&3\\ \boxed{2\quad 0\quad 1}&&\\-4&m&5\end{vmatrix}=0 \longrightarrow -(2)\underbrace{\begin{vmatrix}2&3\\m&5\end{vmatrix}}_{10-3m}-(1)\underbrace{\begin{vmatrix}-1&2\\-4&m\end{vmatrix}}_{-m+8}=0 \longrightarrow -28+7m=0 \longrightarrow \boxed{m=4}$$

تست: چند بردار به طول ۲ وجود دارد که بر هر سه بردار $\begin{cases}\vec a=(2,1,-1)\\ \vec b=(1,2,2)\\ \vec c=(0,-3,-5)\end{cases}$ عمود باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) بی‌شمار

بررسی می‌کنیم سه بردار داده شده، هم‌صفحه‌اند یا نه!!

$$\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)=\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&2&2\\0&-3&-5\end{vmatrix}=(2)\underbrace{\begin{vmatrix}2&2\\-3&-5\end{vmatrix}}_{-4}-(1)\underbrace{\begin{vmatrix}1&-1\\-3&-5\end{vmatrix}}_{-8}=0 \longrightarrow$$ سه بردار داده شده، هم‌صفحه‌اند

نکته ☺:

- اگر سه بردار هم‌صفحه باشند، دو بردار با طول معلوم و بی‌شمار بردار با طول نامعلوم عمود بر هر سه وجود دارد.
- اگر سه بردار هم‌صفحه نباشند، برداری عمود بر هر سه وجود ندارد.

سراسری: اگر $\vec a$، $\vec b$، $\vec c$ و $\vec d$ چهار بردار دلخواه باشند، آنگاه سه بردار $\vec a\times\vec d$ ، $\vec b\times\vec d$ و $\vec c\times\vec d$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱) موازی یک صفحه‌اند. ۲) موازی یکدیگرند.
۳) دو به دو عمود بر هم‌اند. ۴) مجموع آنها بردار صفر است.

می‌دانیم $\begin{cases}(\vec a\times\vec d)\perp\vec d\\(\vec b\times\vec d)\perp\vec d\\(\vec c\times\vec d)\perp\vec d\end{cases}$ یعنی بردار $\vec d$ ، بر هر سه بردار $\begin{cases}\vec a\times\vec d\\ \vec b\times\vec d\\ \vec c\times\vec d\end{cases}$ [عمود است]

$\Longrightarrow$ سه بردار $\begin{cases}\vec a\times\vec d\\ \vec b\times\vec d\\ \vec c\times\vec d\end{cases}$ هم‌صفحه‌اند / موازی با یک صفحه‌اند