

۴۴- در مثلث ABC داریم $\hat{A} = 2\hat{B}$ و $BC = 6$ و $AC = 4$ ، اندازه ضلع AB کدام است؟

۶ (۴)

۵/۵ (۳)

۵ (۲)

۴/۵ (۱)

۴۵- در مثلث ABC داریم: $AB = 9$ و $AC = 7$ و $\hat{A} = 2\hat{C}$ اندازه BC کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲/۵ (۲)

۱۲ (۱)

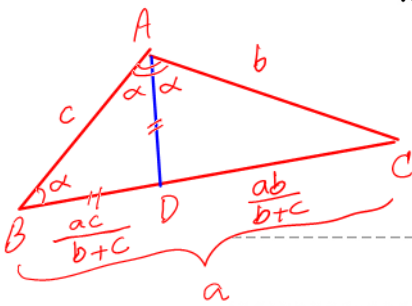
۴۶- در مثلث ABC داریم: $\hat{A} = 2\hat{B}$ کدام رابطه بین سه ضلع مثلث برقرار است؟

$b^2 = ac$ (۲)

$a^2 = bc$ (۱)

$a^2 - c^2 = bc$ (۴)

$a^2 - b^2 = bc$ (۳) ✓



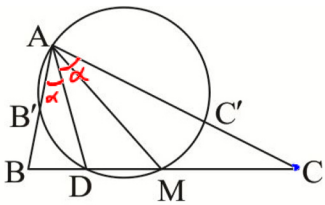
$\hat{A} = 2\hat{B}$ است $\Rightarrow BD = \frac{ac}{b+c} = AD$, $DC = \frac{ab}{b+c}$

$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$

$\frac{a^2 c^2}{(b+c)^2} = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} \Rightarrow \frac{a^2 c^2}{(b+c)^2} + \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = bc \Rightarrow \frac{a^2 (b+c)}{(b+c)^2} = b$

$\Rightarrow a^2 = b(b+c) \Rightarrow a^2 = b^2 + bc \Rightarrow a^2 - b^2 = bc$.

۴۷- در مثلث ABC، نقطه M وسط ضلع BC و AD نیمساز زاویه A است. دایره محیطی مثلث



ADM رسم شده است. نسبت $\frac{BB'}{CC'}$ برابر کدام است؟

$\frac{AB}{AC}$ (۲)
 $\frac{DB}{DM}$ (۴)

$BM = MC$

(۱) $\frac{AB'}{AC'}$ (۳)

رابط طولی در دایره

$$\left. \begin{aligned} BB' \times BA = BD \times BM \\ CC' \times CA = CM \times CD \end{aligned} \right\} (\div) \Rightarrow \frac{BB'}{CC'} \times \frac{BA}{CA} = \frac{BD}{CD} \times \frac{BM}{CM} \Rightarrow \frac{BB'}{CC'} = 1$$

نقطه نیمساز AD $\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$

۴۸- اضلاع مثلثی با اعداد ۲ و ۳ و ۴ متناسب است. نیمساز داخلی زاویه متوسط آن را رسم می‌کنیم

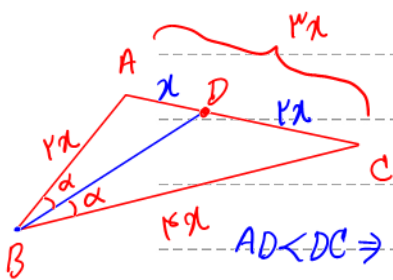
مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل، چند برابر مساحت اصلی است؟

$\frac{2}{5}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳) ✓

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{2}{9}$ (۱)



$BD \perp \hat{B} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2x}{3x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$

$AC = 3x \Rightarrow AD + DC = 3x \Rightarrow AD = x, DC = 2x$

$AD < DC \Rightarrow S(\triangle ABD) < S(\triangle BDC)$

$$\frac{S(\triangle ABD)}{S(\triangle ABC)} = \frac{\frac{1}{2} AD \times h}{\frac{1}{2} AC \times h} = \frac{AD}{AC} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$



سوالات تستی درس چهارم

رستور هرون \Rightarrow مثلث قائم الزاویه است $\Rightarrow 15^2 \neq 14^2 + 13^2$

$$P = \frac{1}{2}(13 + 14 + 15) = \frac{1}{2} \times 42 = 21$$

۴۹- در مثلثی به اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ طول ارتفاع وارد بر ضلع کوچکتر کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

$\frac{168}{13}$ (۲)

$\frac{167}{13}$ (۱)

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$$

$$= \sqrt{3 \times 7 \times 2^3 \times 7 \times 2 \times 3} = 3 \times 7 \times 2^2 = 84 \quad (\text{واحد مربع})$$

$$\frac{1}{2}(13 \times h_{13}) = S \Rightarrow h_{13} = \frac{2S}{13} = \frac{2 \times 84}{13} = \frac{168}{13}$$

۵۰- در مثلث ABC طول اضلاع AB, AC به ترتیب ۶ و ۴ و $\hat{B} + \hat{C} = 120^\circ$ است، مساحت مثلث

$$\hat{A} = 40^\circ$$

چقدر است؟

$6\sqrt{3}$ (۴)

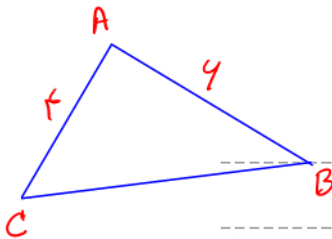
$3\sqrt{3}$ (۳)

$8\sqrt{3}$ (۲)

$10\sqrt{3}$ (۱)

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} (4 \times 6) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

(واحد مربع)



۵۱- مساحت مربعی به ضلع ۶ با مساحت متوازی الاضلاعی به اضلاع ۸ و ۹ برابر است، اندازه زاویه

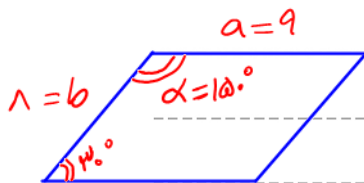
منفرجه متوازی الاضلاع کدام است؟

150° (۴)

135° (۳)

120° (۲)

105° (۱)



$$S = ab \sin \alpha = 9 \times 8 \times \sin \alpha = 72 \sin \alpha$$

$$S = a^2 = 4^2 = 36$$

$$\Rightarrow 36 = 72 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$$

$\alpha = 150^\circ$

۵۲- در مثلث متساوی الاضلاع، بر روی دو ضلع آن دو مربع ساخته شده است. مساحت مثلث رنگ شده،

$$360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 120^\circ$$

چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

۱ (۴) ✓

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

$$S_1 = \frac{1}{2} a \times a \times \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2} = 1$$

۵۳- در خارج یک مربع به ضلع ۲ واحد بر روی هر دو ضلع مجاور آن مثلث متساوی الاضلاع

ساخته شده است. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۴ (۴)

$2 + \sqrt{3}$ (۳) ✓

$2\sqrt{3}$ (۲)

$1 + \sqrt{3}$ (۱)

$$S(ABC) = S_1(\triangle AMC) + S_2(\triangle MBC) + S_3(\triangle ABM)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} (r \times r) \sin 150^\circ = 1$$

$$S_2 = \frac{1}{2} (r \times r) \sin 150^\circ = 1$$

$$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times r^2 = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S(ABC) = 2 + \sqrt{3}$$

۵۴- هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع به نسبت های ۱ و ۲ تقسیم شده است. مساحت مثلث رنگی، چند

برابر مساحت مثلث متساوی الاضلاع است؟

$\frac{1}{3}$ (۴) ✓

$\frac{4}{9}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

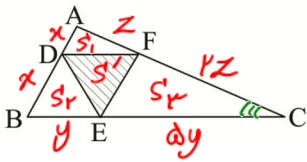
$\frac{1}{4}$ (۱)

$$S(\triangle ADE) = S(\triangle EFC) = S(\triangle BDF) = \frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} a \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\frac{S(\triangle DEF)}{S(\triangle ABC)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} (2a)^2 - 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right)}{\frac{\sqrt{3}}{4} (3a)^2} = \frac{3\sqrt{3} a^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{9\sqrt{3}}{4} a^2} = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{9\sqrt{3}}{4} a^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

۵۵- در شکل مقابل $AF = FC$, $BE = EC$, $AD = DB$ است. مساحت مثلث DEF چه

کسری از مساحت مثلث ABC است؟



$$\frac{S_r}{S} = \frac{\frac{1}{2}xy \sin \hat{B}}{\frac{1}{2}(2x)(2y) \sin \hat{B}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{11}{26} \quad (2) \quad \frac{S_1}{S} = \frac{\frac{1}{2}xz \sin \hat{A}}{\frac{1}{2}(2x)(2z) \sin \hat{A}} = \frac{1}{4} \quad (1) \quad \checkmark$$

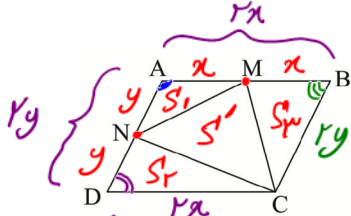
$$\frac{11}{23} \quad (4) \quad = \frac{1}{4} \quad \frac{7}{23} \quad (3)$$

$$\frac{S_r}{S} = \frac{\frac{1}{2}(dy)(2z) \sin \hat{C}}{\frac{1}{2}(4y)(2z) \sin \hat{C}} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{S - S_1 - S_r - S_r}{S} \quad \text{تقلیل} \quad \frac{S}{S} - \frac{S_1}{S} - \frac{S_r}{S} - \frac{S_r}{S} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{5}{9} = \frac{36 - 9 - 9 - 20}{36} = \frac{7}{36}$$

۵۶- در شکل مقابل نقاط N, M وسط اضلاع متوازی الاضلاع ABCD هستند. مساحت مثلث

CMN چند برابر مساحت متوازی الاضلاع است؟



$$\frac{S_r}{S} = \frac{\frac{1}{2}yx \sin \hat{B}}{(2y)(2x) \sin \hat{B}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{5} \quad (2) \quad \frac{S_1}{S} = \frac{\frac{1}{2}xy \sin \hat{A}}{(2x)(2y) \sin \hat{A}} = \frac{1}{4} \quad (1) \quad \frac{1}{2}$$

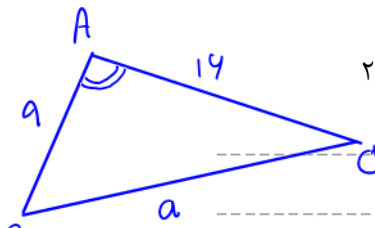
$$\frac{3}{8} \quad (4) \quad \checkmark \quad \frac{5}{8} \quad (3)$$

$$\frac{S_r}{S} = \frac{\frac{1}{2}x \times y \times \sin \hat{B}}{(2x)(2y) \sin \hat{B}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{S - S_1 - S_r - S_r}{S} = 1 - \frac{S_1}{S} - \frac{S_r}{S} - \frac{S_r}{S} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1 - 1 - 1 - 1}{4} = \frac{3}{4}$$

۵۷- مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد، برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. بزرگترین ضلع این مثلث

کدام است؟



۲۴ (۴)

۲۳ (۳) \checkmark

۲۲ (۲)

۲۱ (۱)

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} \Rightarrow 24\sqrt{5} = \frac{1}{2} \times 9 \times 14 \times \sin \hat{A}$$

$$\Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{2 \times 24\sqrt{5}}{3 \times 9 \times 14} = \frac{1}{3} \sqrt{5}$$

$$\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \hat{A} = 1 - \sin^2 \hat{A} = 1 - \left(\frac{1}{3} \sqrt{5}\right)^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow \cos \hat{A} = \pm \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$$

$$\text{با رقیب کینوس: } a^2 = 9^2 + 14^2 - 2(9 \times 14) \cos \hat{A} = 81 + 196 + 192 = 469 \Rightarrow a = \sqrt{469} = 22$$

$-\frac{2}{3}$

۵۸- در مثلثی اندازه‌های دو ضلع ۱۰ و ۱۵ واحد است. مجموع ارتفاع‌های وارد بر این دو ضلع برابر

ارتفاع ضلع سوم است. اندازه ضلع سوم کدام است؟

- ۸ (۴) ۷/۵ (۳) $c=?$ ۷ (۲) ۶ (۱) ✓

$h_a + h_b = h_c$ $S = \frac{1}{2} a \times h_a \Rightarrow rS = ah_a \Rightarrow h_a = \frac{rS}{a}$

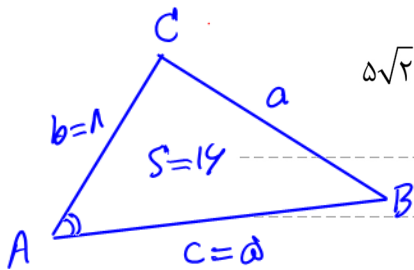
$$\frac{rS}{a} + \frac{rS}{b} = \frac{rS}{c} \xrightarrow{\div rS} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \right) \Rightarrow \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{3+2}{30} = \frac{5}{30} \Rightarrow c = \frac{30}{5} = 6 \Rightarrow \boxed{c=6}$$

۵۹- مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $b=8$ و $c=5$ باشد، اندازه ضلع متوسط

Min Max

کدام است؟



- $5\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{41}$ (۲) ✓ $\sqrt{39}$ (۱)

$$S = \frac{1}{2} AC \times AB \times \sin \hat{A} \Rightarrow 14 = \frac{1}{2} (5 \times 8) \sin \hat{A}$$

$$\Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} \quad \cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1 \Rightarrow \cos^2 \hat{A} = 1 - \frac{49}{100} = \frac{51}{100} = \frac{9}{100}$$

$$\Rightarrow \cos \hat{A} = \pm \sqrt{\frac{9}{100}} = \pm \frac{3}{10}$$

با فرض کسینوس: $a^2 = b^2 + c^2 - 2(bc \cos \hat{A})$

$$\cos \hat{A} = -\frac{3}{10} \Rightarrow a^2 = 4^2 + 5^2 + 16 = 41 \Rightarrow a = \sqrt{41}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{3}{10} \Rightarrow a^2 = 4^2 + 5^2 - 16 = 9 \Rightarrow a = \sqrt{9} = 3$$

۶۰- در مثلثی به اضلاع $c=8, b=6, a=4$ حاصل عبارت $\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_c}{h_b}$ کدام است؟ (h_a, h_b, h_c)

ارتفاع‌های نظیر اضلاع c, b, a هستند.

- $\frac{2}{3}$ (۴) ۲ (۳) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۱) ✓

$$\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_c}{h_b} = \frac{\frac{rS}{a}}{\frac{rS}{b}} + \frac{\frac{rS}{c}}{\frac{rS}{b}} = \frac{b}{a} + \frac{b}{c} = \frac{6}{4} + \frac{6}{8} = \frac{12+6}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

$h_a + h_b + h_c = ?$

۶۱- در مثلث ABC رابطه $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{6}{S}$ برقرار است. مجموع ارتفاع‌های این مثلث چقدر است؟

۱۲ (۴) ✓

۱۴ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

$$S = \frac{1}{r} ah_a \Rightarrow rs = ah_a \Rightarrow a = \frac{rs}{h_a}, b = \frac{rs}{h_b}, c = \frac{rs}{h_c}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{6}{S} \Rightarrow \frac{1}{\frac{rs}{h_a}} + \frac{1}{\frac{rs}{h_b}} + \frac{1}{\frac{rs}{h_c}} = \frac{6}{S} \Rightarrow \frac{h_a}{rs} + \frac{h_b}{rs} + \frac{h_c}{rs} = \frac{6}{S}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{rs} (h_a + h_b + h_c) = \frac{6}{S} \xrightarrow{\times S} h_a + h_b + h_c = 6 \times 2 = 12$$

۶۲- ارتفاع‌های مثلث با اعداد ۲ و $\frac{8}{3}$ و ۴ متناسب‌اند، اگر یکی از اضلاع این مثلث ۲ باشد، بیشترین

$$S = \frac{1}{r} ah_a \Rightarrow rs = ah_a \Rightarrow rs = \frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

مساحت این مثلث چقدر است؟

$\frac{2}{3}\sqrt{15}$ (۴)

$\frac{3}{2}\sqrt{15}$ (۳)

$\frac{4}{3}\sqrt{15}$ (۲)

$\frac{3}{4}\sqrt{15}$ (۱) ✓



مربوبه معکوس ارتفاع‌ها: $\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \frac{1}{r}$ مرتب $\rightarrow \frac{1}{r} < \frac{1}{r} < \frac{1}{r}$

$a < b + c \rightarrow \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \Rightarrow \begin{cases} b = r \\ c = r \end{cases} \xrightarrow{r \neq r + r} P = \frac{1}{r} (r + r + r) = \frac{9}{r}$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{\frac{9}{r}(\frac{9}{r}-r)(\frac{9}{r}-r)(\frac{9}{r}-r)} = \sqrt{\frac{9}{r} \times \frac{9}{r} \times \frac{9}{r} \times \frac{9}{r}} = \frac{9}{r} \sqrt{15}$$

۶۳- اگر سه ارتفاع مثلثی برابر ۳ و ۴ و ۶ باشند، مساحت این مثلث چقدر است؟

$\frac{3}{4}\sqrt{15}$ (۴)

$\frac{3}{3}\sqrt{15}$ (۳)

$\frac{3}{2}\sqrt{15}$ (۲) ✓

$\frac{3}{1}\sqrt{15}$ (۱)

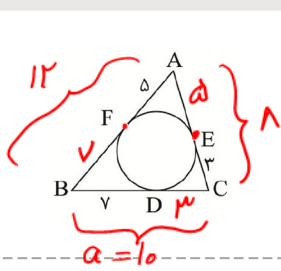
$$h_a = 3, h_b = 4, h_c = 6 \quad S = \frac{1}{r} ah_a \Rightarrow a = \frac{rs}{h_a} \xrightarrow{h_a = r} a = \frac{rs}{r}$$

$$b = \frac{rs}{h_b} \xrightarrow{h_b = r} b = \frac{rs}{r} = \frac{S}{r}, \quad c = \frac{rs}{h_c} \xrightarrow{h_c = 6} c = \frac{rs}{6} = \frac{S}{r}$$

$$P = \frac{1}{r} (a+b+c) = \frac{1}{r} \left(\frac{rs}{r} + \frac{S}{r} + \frac{S}{r} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{rs}{r} \right) = \frac{rs}{r}$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \Rightarrow S = \sqrt{\frac{rs}{r} \left(\frac{rs}{r} - \frac{rs}{r} \right) \left(\frac{rs}{r} - \frac{S}{r} \right) \left(\frac{rs}{r} - \frac{S}{r} \right)}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{r} \times \frac{1}{r} \sqrt{15} S^2 \Rightarrow rS = S \sqrt{15} \Rightarrow r = \sqrt{15} \Rightarrow S = \frac{rS}{\sqrt{15}} = \frac{r \sqrt{15}}{\sqrt{15}} = r \sqrt{15}$$



۶۴- در شکل مقابل، اندازه ارتفاع نظير رأس A کدام است؟ $h_a = ?$

۳√۷ (۲) ✓ $17^2 \neq 10^2 + 12^2$ $2\sqrt{7}$ (۱)

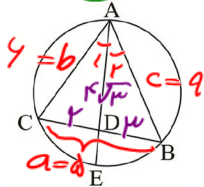
۵√۷ (۴) $P = \frac{1}{2}(17+10+12) = 19.5$ $4\sqrt{7}$ (۳)

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{19.5(19.5-10)(19.5-12)(19.5-17)}$$

$$= \sqrt{10 \times 9 \times 2 \times 2.5} = 10 \times 3\sqrt{7} = 15\sqrt{7}$$

$$S = \frac{1}{2} a h_a \Rightarrow 15\sqrt{7} = \frac{1}{2} \times 10 \times h_a \Rightarrow h_a = \frac{15\sqrt{7}}{5} = 3\sqrt{7}$$

۶۵- در شکل مقابل a=۵ و b=۶ و c=۹ و AD نیمساز زاویه A می باشد، اندازه AE چقدر است؟



AD نیمساز زاویه A است؟

۴/۵√۳ (۲) ✓ $CD = \frac{ab}{b+c} = \frac{6 \times 9}{9+6} = 2$ $4\sqrt{3}$ (۱)

۵/۵√۳ (۴) $DB = \frac{ac}{b+c} = \frac{5 \times 9}{9+6} = 3$ $5\sqrt{3}$ (۳)

$$AD^2 = AB \times AC - CD \times DB$$

$$= bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = bc \left(1 - \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \right) = 9 \times 6 \left(1 - \left(\frac{5}{15} \right)^2 \right) = ?$$

$\rightarrow AD^2 = 9 \times 6 - 4 = 48 \Rightarrow AD = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ $CD \times DB = AD \times DE$ $2 \times 3 = 4\sqrt{3} \times DE$

$AE = AD + DE = 4\sqrt{3} + \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{2} = 4.5\sqrt{3}$ $\Rightarrow DE = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

۶۶- در یک متوازی الاضلاع وسط دو ضلع مجاور را به هم وصل می کنیم. مساحت پنج ضلعی حاصل

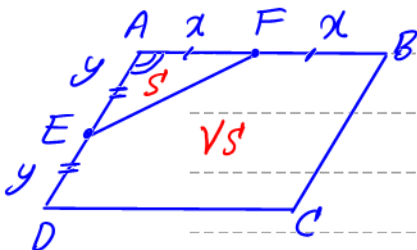
چند برابر مساحت مثلث ایجاد شده است؟

۸ (۴)

۷ (۳) ✓

۶ (۲)

۵ (۱)



$$\frac{S(\triangle AEF)}{S(\square ABCD)} = \frac{\frac{1}{2} xy \sin A}{(yx) \sin A} = \frac{1}{4}$$