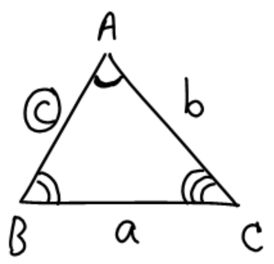
قضیهٔ کسینوس‌ها

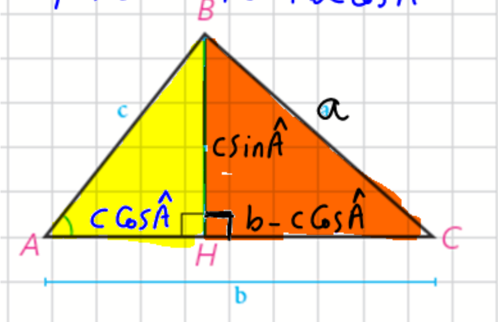


قضیهٔ کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازهٔ آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آنها: (حکم)

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A\ ,\quad b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$$

حالت اول) فرض کنیم مثلث ABC یک مثلث حاده‌الزاویه باشد پس $\hat{A}<90^\circ$. با توجه به شکل ارتفاع BH را رسم می‌کنیم در این صورت:

حکم) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$



$$\overset{\triangle}{ABH}:\ \sin\hat{A}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{BH}{\cancel{AB}\ c}\Rightarrow \boxed{BH=c\sin\hat{A}}$$

$$\cos\hat{A}=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{AH}{\cancel{AB}\ c}\Rightarrow \boxed{AH=c\cos\hat{A}}$$

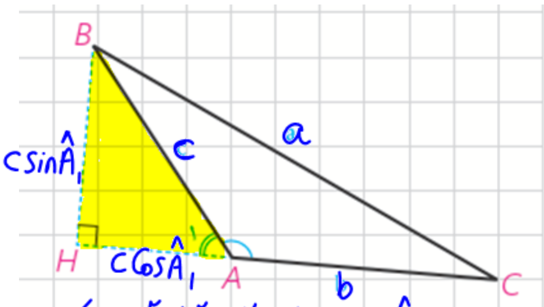
با توجه به شکل: $HC=AC-AH=b-c\cos\hat{A}\Rightarrow \boxed{HC=b-c\cos\hat{A}}$

$$\overset{\triangle}{BHC}:\ \hat{H}=90^\circ\Rightarrow a^2=(c\sin\hat{A})^2+(b-c\cos\hat{A})^2\Rightarrow a^2=c^2\sin^2\hat{A}+b^2-2bc\cos\hat{A}+c^2\cos^2\hat{A}$$

$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2\underbrace{(\sin^2\hat{A}+\cos^2\hat{A})}_{1}-2bc\cos\hat{A}\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}\ .\ ✓$$

حالت دوم) مثلث منفرجه‌الزاویه ABC را با فرض $\hat{A}>90^\circ$ درنظر بگیریم و از رأس B عمود BH را بر امتداد ضلع AC رسم می‌کنیم:

$$\hat{A}+\hat{A}_1=180^\circ\Rightarrow\begin{cases}\sin\hat{A}_1=\sin\hat{A}\\ \cos\hat{A}_1=-\cos\hat{A}\end{cases}\quad (*)$$



حکم) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$

$$\overset{\triangle}{ABH}:\ \begin{cases}\sin\hat{A}_1=\dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\dfrac{BH}{c}\Rightarrow \boxed{BH=c\sin\hat{A}_1}\\[2ex] \cos\hat{A}_1=\dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\dfrac{AH}{c}\Rightarrow \boxed{AH=c\cos\hat{A}_1}\end{cases}$$

با توجه به شکل: $HC=AH+AC\Rightarrow \boxed{HC=b+c\cos\hat{A}_1}$

$$\overset{\triangle}{BHC}:\ \hat{H}=90^\circ\xrightarrow{\text{فیثاغورس}}BC^2=BH^2+HC^2\Rightarrow a^2=(c\sin\hat{A}_1)^2+(b+c\cos\hat{A}_1)^2$$

$$\Rightarrow a^2=c^2\sin^2\hat{A}_1+b^2+2bc\cos\hat{A}_1+c^2\cos^2\hat{A}_1\Rightarrow a^2=b^2+c^2\underbrace{(\sin^2\hat{A}_1+\cos^2\hat{A}_1)}_{1}+2bc\cos\hat{A}_1$$

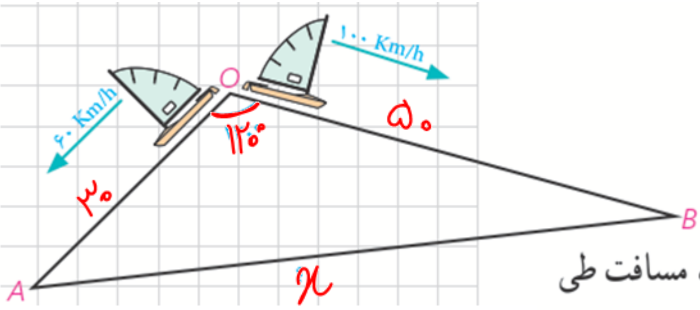
$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2+2bc\cos\hat{A}_1\xrightarrow{(*)}a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}.$$

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc.\cos\hat{A}$$

سؤال : در حالتی که زاویهٔ A قائمه باشد، این رابطه به چه صورت در می‌آید؟

$\hat{A}=۹۰^\circ \Rightarrow \cos\hat{A}=۰$

$\cos\hat{A}=۰ \longrightarrow a^۲=b^۲+c^۲$ (رابطه فیثاغورس)



مثال : دو قایق از یک نقطه در دریاچه‌ای با سرعت‌های ۶۰km/h و ۱۰۰km/h و با زاویهٔ °۱۲۰ از هم دور می‌شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟

حل : با توجه به نقطهٔ شروع دو قایق و سرعت‌های ثابت، نیم ساعت بعد، مسافت طی شده توسط هر قایق محاسبه می‌شود :

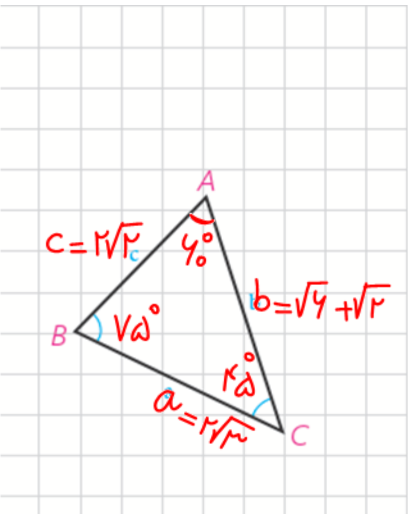
$OA=۶۰\times ۰/۵=۳۰$ و $OB=۱۰۰\times۰/۵=۵۰$

حال به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها می‌نویسیم :

$AB^۲=OA^۲+OB^۲-۲OA.OB.\cos۱۲۰^\circ$ و $\cos۱۲۰^\circ=-\frac{۱}{۲}=-\cos۶۰^\circ$

$AB^۲=۹۰۰+۲۵۰۰-\cancel{۲}\times۳۰\times۵۰\ (-\frac{۱}{\cancel{۲}})\ =۴۹۰۰ \Rightarrow AB=\sqrt{۴۹۰۰}$

$AB=۷۰km$



کار در کلاس

در مثلث ABC، $AB=۲\sqrt{۲}$ و $AC=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$

۱ــ طول ضلع BC را به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها به‌دست آورید.

$BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲\times AB\times AC\times\cos\hat{A} \Rightarrow$

$BC^۲=(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^۲+(۲\sqrt{۲})^۲-\cancel{۲}(۲\sqrt{۲})(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})\underbrace{\cos۶۰^\circ}_{\frac{۱}{\cancel{۲}}}$

$=۶+\cancel{۲\sqrt{۱۲}}+۲+۸-\cancel{۲\sqrt{۱۲}}-۴$

$BC^۲=۱۲$ و $BC=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳} \Rightarrow \boxed{BC=۲\sqrt{۳}}$

۲ــ اندازهٔ $\hat{C}$ را به کمک قضیهٔ سینوس‌ها به‌دست آورید و از آنجا اندازهٔ $\hat{B}$ را هم بیابید.

$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin\hat{A}} \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sin۶۰^\circ} \Rightarrow \sin C=\frac{۲\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۳}}$ و $\hat{C}=۴۵^\circ$ یا $\cancel{۱۳۵^\circ}$ ، $\sin\hat{C}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ، $\sin۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\Rightarrow \hat{B}=۱۸۰-(\hat{A}+\hat{C})=۱۸۰^\circ-(۶۰^\circ+۴۵^\circ)=۱۸۰^\circ-۱۰۵^\circ=۷۵^\circ$

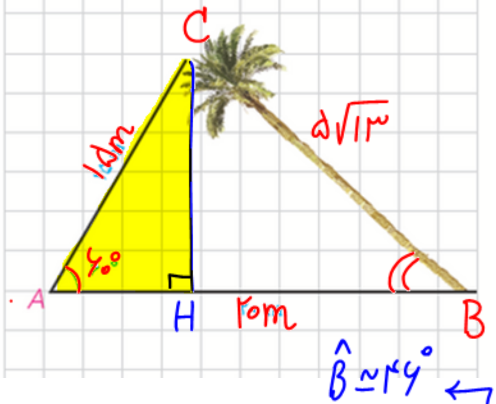
تمرین

۱ــ یک درخت کج از نقطهٔ A روی زمین، که در فاصلهٔ ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویهٔ °۶۰ دیده می‌شود. اگر فاصلهٔ A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است :

الف) طول درخت

ب) سینوس زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

پ) فاصلهٔ نوک درخت از زمین



$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB\times AC)\cos\hat{A}$

$BC^2 = 20^2 + 15^2 - 2(20\times 15)\underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}} = 400 + 225 - 300$

$\Rightarrow BC^2 = 325 = 13\times 25$

$\Rightarrow \boxed{BC = 5\sqrt{13}\ m}$

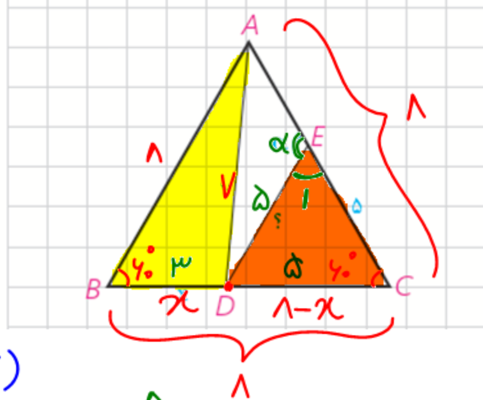
$\sin\hat B = ?$

ب) قضیه سینوس‌ها : $\frac{BC}{\sin\hat A} = \frac{AC}{\sin\hat B} \Rightarrow \frac{5\sqrt{13}}{\frac{\sqrt3}{2}} = \frac{15}{\sin\hat B} \Rightarrow \sin\hat B = \frac{\cancel{15}^{\,3}\times\frac{\sqrt3}{2}}{\cancel{5}\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt3}{2\sqrt{13}}\times\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{39}}{26} \simeq 0{,}72$

$\hat B \simeq 46^\circ$

پ) $\overset{\triangle}{AHC}$: $\sin\hat A = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{CH}{15} \Rightarrow CH = 15\times\frac{\sqrt3}{2} \simeq 12{,}99\ cm$

۲ــ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطهٔ D ، که به فاصلهٔ ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟(CD >BD) نقطهٔ E ، که به فاصلهٔ ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازهٔ زاویهٔ AED چند درجه است؟



$\overset{\triangle}{ABD}$: (قضیه کسینوس‌ها) $AD^2 = BD^2 + AB^2 - 2(BD\times AB)\cos\hat B$

$\Rightarrow 7^2 = x^2 + 8^2 - \cancel{2}(8x)\underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}} \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \xrightarrow[\text{جمع}=8]{\text{ضرب}=15} \begin{cases} x = 3 \\ x = 5\ (\text{غ ق ق}) \end{cases}$

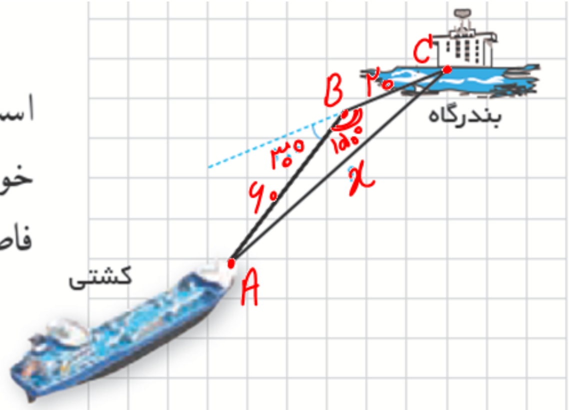
توجه : $\begin{cases} BD = x \\ CD = 8-x \end{cases} \xrightarrow{x=3} \boxed{\begin{cases} BD = 3 \\ CD = 5 \end{cases}}$

$CD = CE = 5 \xrightarrow{\hat C = 60^\circ}$ $\overset{\triangle}{CED}$ متساوی‌الاضلاع $\Rightarrow \boxed{DE = 5}$

$\hat E_1 = 60^\circ$

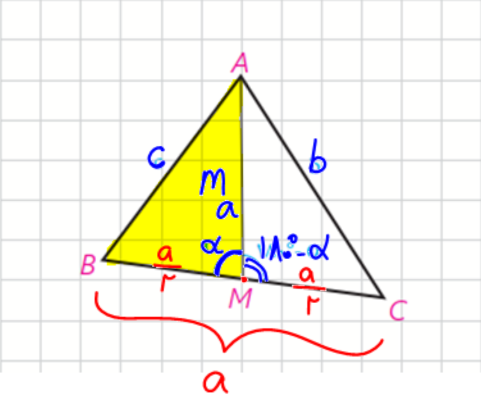
با توجه به شکل : $\hat{AED} = 180^\circ - \hat E_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \boxed{\alpha = 120^\circ}$

۳ــ یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با °۳۰ انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می گیرد. فاصلهٔ بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟ در مثلث ABC قضیه کسینوس‌ها را می‌نویسیم :



$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB\times BC)\cos\hat B$

$= 60^2 + 20^2 - \cancel{2}(60\times 20)\underbrace{\cos 150^\circ}_{-\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt3}{2}} = 3600 + 400 + 1200\sqrt3 = 4000 + 1200\sqrt3 \simeq 60{,}78\ Km$



۴ــ در مثلث ABC، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم ($MB = MC = \frac{a}{2}$). با نوشتن قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC، b^2 و c^2 را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad \text{(قضیهٔ میانه‌ها)}$$

در حالت خاص $\underbrace{AB=4}_{c=4}$ و $\underbrace{AC=6}_{b=6}$ و $\underbrace{BC=8}_{a=8}$، طول میانه AM را به‌دست آورید.

$\overset{\Delta}{AMB}$ (قضیه کسینوس‌ها): $c^2 = AM^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \cancel{2\left(AM \times \frac{a}{2}\right)\cos\alpha}$

$\overset{\Delta}{AMC}$ (قضیه کسینوس‌ها): $b^2 = AM^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \cancel{2\left(AM \times \frac{a}{2}\right)}\underbrace{\cos(180° - \alpha)}_{-\cos\alpha}$

$\xRightarrow{(+)} b^2 + c^2 = 2AM^2 + \cancel{2}\left(\frac{a^2}{\cancel{4}_{2}}\right)$

$\Rightarrow b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2}$

$6^2 + 4^2 = 2AM^2 + \frac{8^2}{2}$

$\Rightarrow 36 + 16 = 2AM^2 + \underbrace{\left(\frac{64}{2}\right)}_{32} \Rightarrow 20 = 2AM^2 \Rightarrow AM^2 = 10$

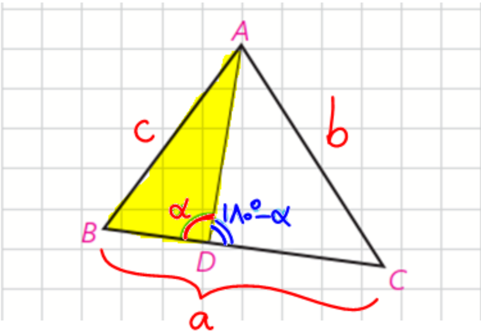
$\Rightarrow \boxed{AM = \sqrt{10}}$

$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$

$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$

$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$

ارتباط بین اندازه‌ی یک میانه با سه ضلع مثلث



۵ــ در مثلث ABC، نقطهٔ دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$AB^2 . DC + AC^2 . DB = AD^2 . BC + DB . DC . BC \quad \text{(قضیهٔ استوارت)}$$

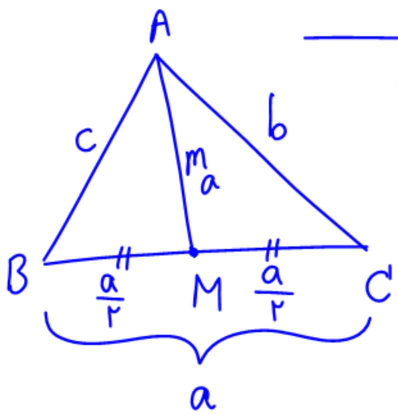
به کمک قضیهٔ استوارت، درستی قضیهٔ میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

$\overset{\Delta}{ABD}: AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2(AD \times DB)\cos\alpha \xrightarrow{\times DC} AB^2 \cdot DC = AD^2 \cdot DC + \underline{DB^2 \cdot DC} - \cancel{2(AD \times DB \times DC)\cos\alpha}$

$\overset{\Delta}{ADC}: AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2(AD \times DC)\underbrace{\cos(180° - \alpha)}_{-\cos\alpha} \xrightarrow{\times DB} AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot DB + \underline{DC^2 \cdot DB} + \cancel{2(AD \times DB \times DC)\cos\alpha}$

$(+)\Rightarrow$

$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2\overbrace{(DC + DB)}^{BC} + DB \cdot DC\overbrace{(DB + DC)}^{BC} \Rightarrow \boxed{AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC}$

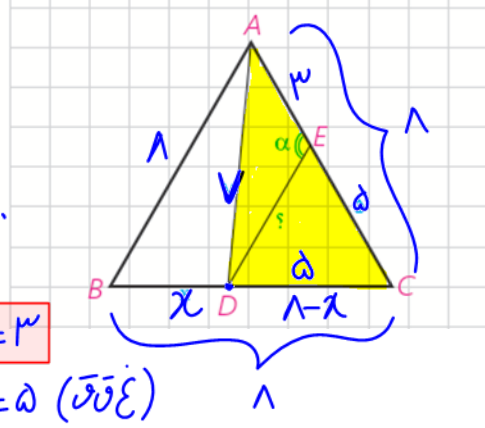


رابطه استوارت: $c^2\left(\frac{a}{2}\right) + b^2\left(\frac{a}{2}\right) = m_a^2 \cdot a + \left(\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times a\right)$

$\xrightarrow{\times \frac{2}{a}} c^2 + b^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow \boxed{b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \quad \text{(قضیه میانه‌ها)}}$

۲ــ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطهٔ D ، که به فاصلهٔ ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟(CD >BD) نقطهٔ E ، که به فاصلهٔ ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازهٔ زاویهٔ AED چند درجه است؟



رابطهٔ استوارت: $8^2(8-x)+8^2x=(7^2\times 8)+8x(8-x)$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow 8x^2-64x+120=0 \xrightarrow{\div 8} x^2-8x+15=0 \Rightarrow \begin{cases}\boxed{x=3}\\ x=5\ (\text{غ ق ق})\end{cases}$$

$$\overset{\triangle}{ADC}: 3(\overbrace{8-x}^{5})^2+(7^2\times 5)=8DE+(5\times 3\times 8)$$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow 8DE^2=200 \Rightarrow DE^2=25 \Rightarrow \boxed{DE=5}$$

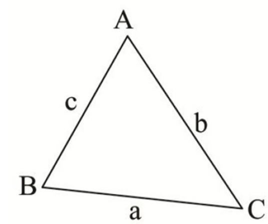
درس دوم: قضیه کسینوس‌ها

۱- در مثلث ABC روابط زیر موسوم به قضیه کسینوس‌ها برقرار است:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$



۲- به کمک روابط زیر می‌توان به کمک اندازه اضلاع مثلث، کسینوس تمام زوایا را پیدا کرد:

$$\cos\widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos\widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos\widehat{B} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

۳- به کمک اندازه اضلاع مثلث و قضیه کسینوس‌ها می‌توان نوع یک زاویه را مشخص کرد یعنی

$\widehat{A}$ منفرجه است. $\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$

$\widehat{A}$ قائمه است. $\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$\widehat{A}$ حاده است $\Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$

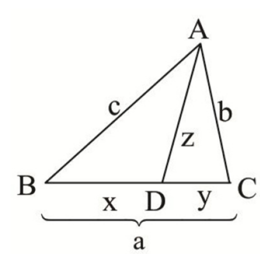
۴- در مثلث ABC بین اندازه اضلاع و اندازه میانه‌ها روابط زیر برقرار است:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}, a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}, a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

۵- در مثلث ABC اگر D نقطه دلخواهی روی ضلع BC باشد آنگاه رابطه زیر موسوم به رابطه استوارت برقرار است:

$$AB^2.DC + AC^2.DB = AD^2.BC + DB.DC.BC$$

به بیان دیگر $xb^2 + yc^2 = a(xy + z^2)$



سؤالات چهارگزینه‌ای درس دوم

۱۹- اگر در مثلثی $c = ۴, b = ۳, a = ۲$ باشد، حدود زاویه C کدام است؟

۱) $۹۰^\circ < \hat{C} < ۱۲۰^\circ$ ۲) $۱۲۰^\circ < \hat{C} < ۱۵۰^\circ$

۳) $۶۰^\circ < \hat{C} < ۹۰^\circ$ ۴) $۱۵۰^\circ < \hat{C} < ۱۸۰^\circ$

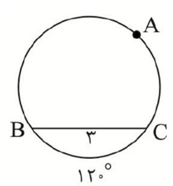
۲۰- اگر فاصله یک ناظر تا دو سر یک پل روی رودخانه ۲۰۰ و ۳۰۰ متر بوده و زاویه دید پل توسط دستگاه زاویه‌یاب ۶۰° اندازه گرفته‌شده باشد، طول پل چند متر است؟

۱) $۲۰۰\sqrt{۷}$ ۲) $۱۰۰\sqrt{۷}$ ۳) $۱۰۰\sqrt{۵}$ ۴) $۲۰۰\sqrt{۵}$

۲۱- در شکل مقابل، نقاط B و C ثابت و نقطه A بین این دو نقطه روی دایره در حال حرکت است. اگر در لحظه‌ای مساحت مثلث ABC برابر $\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$ شود، محیط این مثلث چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۸

۳) ۹ ۴) ۱۰



۲۲- در یک مثلث با اضلاع ۴و ۶ و ۸ طول کوچک‌ترین میانه کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $\sqrt{۷}$ ۳) $\sqrt{۸}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

۲۳- در مثلثی با طول ضلع‌های a و b و c رابطه $b^۲ + c^۲ = ۳a^۲$ بین ضلع‌ها برقرار است. اندازه میانه وارد بر ضلع a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}a$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}a$ ۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}a$

۲۴- در مثلثی به طول اضلاع ۱۳ و ۱۳ و ۱۰ واحد فاصله نقطه تلاقی میانه‌ها از دورترین رأس آن کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۵- در مثلث ABC اگر m_c, m_b, m_a به ترتیب ۴ و ۶ و ۹ باشند، اندازه ضلع a چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۲۱۸}$　　۲) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۲۱۸}$　　۳) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۱۱۸}$　　۴) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۱۱۸}$

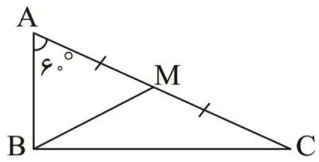
۲۶- در مثلث ABC $a = ۳$ و $b = ۵$ و مثلثی که اضلاعش میانه‌های مثلث ABC باشند، قائم‌الزاویه است. اگر m_c بزرگ‌ترین میانه مثلث باشد، طول ضلع c کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{۳۴}{۵}}$　　۲) $\sqrt{\frac{۳۳}{۵}}$　　۳) $\sqrt{\frac{۳۲}{۵}}$　　۴) $\sqrt{\frac{۳۱}{۵}}$

۲۷- مثلث ABC به اضلاع ۶و ۸ و ۱۲ را با یک تجانس به مرکز رأس B و نسبت $\frac{۱}{۲}$ بر مثلث $A'B'C'$ تصویر می‌کنیم. طول کوچک‌ترین میانه مثلث $A'B'C'$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۳}$　　۲) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۳}$　　۳) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۲}$　　۴) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$

۲۸- در مثلث ABC، میانه BM را رسم کرده‌ایم، اگر $b=۸$ و $c=۲$ و $\widehat{A}=۶۰^\circ$ باشند، شعاع دایره محیطی مثلث ABM چقدر است؟



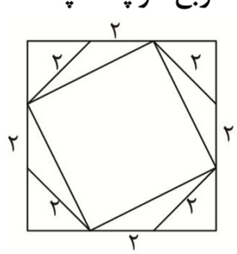
۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲

۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۲۹- مساحت دایره محیطی هشت‌ضلعی منتظم به ضلع ۲ کدام است؟

۱) $\pi(۲+\sqrt{۲})$ ۲) $۲\pi(۲+\sqrt{۲})$ ۳) $۴\pi(۱+\sqrt{۲})$ ۴) $۴\pi(۲+\sqrt{۲})$

۳۰- در شکل مقابل اندازه طول ضلع هشت‌ضلعی منتظم ۲ واحد است. مساحت مربع کوچک چند واحد مربع است؟



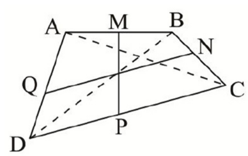
۱) $۴\left(۱+\sqrt{۲}\right)$ ۲) $۴\left(۲+\sqrt{۲}\right)$

۳) $۸\left(۱+\sqrt{۲}\right)$ ۴) $۸\left(۲+\sqrt{۲}\right)$

۳۱- در یک شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۲، وسط اضلاع را متوالی به هم وصل می‌کنیم تا یک شش‌ضلعی منتظم جدید حاصل شود، مساحت شش‌ضلعی جدید چقدر است؟

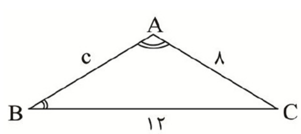
۱) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$

۳۲- در چهارضلعی ABCD نقاط Q,P,N,M وسط اضلاع هستند. اگر $AC^۲ + BD^۲ = ۳۰$ باشد، حاصل $MP^۲ + QN^۲$ چقدر است؟



۱) ۲۰ ۲) ۱۵
۳) ۱۰ ۴) ۵

۳۳- در شکل مقابل $\widehat{A} = ۲\widehat{B}$ اندازه ضلع AB کدام است؟



۱) ۸ ۲) ۱۴
۳) ۶ ۴) ۱۶

۳۴- اگر در مثلثی رابطه $b^۳ + c^۳ = a^۲(b+c)$ بین اضلاع برقرار باشد، اندازه زاویه $\widehat{A}$ چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۳۵- در مثلث ABC به اضلاع ۲ و ۳ و ۴ حاصل عبارت $\frac{\cos\widehat{C}}{c} + \frac{\cos\widehat{B}}{b} + \frac{\cos\widehat{A}}{a}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۴۸}$ ۲) $\frac{۲۹}{۴۸}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۴}$

۳۶- در کدام حالت، مثلث حاصل از اضلاع داده‌شده حاده الزاویه است؟

۱) ۹,۶,۱۲ ۲) ۱۳,۱۲,۵ ۳) ۱۱,۲,۹ ۴) ۹,۵,۱۰

$AC = 19$,

۳۷- در مثلث ABC، $AB = ۱۳$، $BC = ۲۲$ است. اگر M وسط ضلع BC باشد، قطر دایره محیطی مثلث ABM چقدر است؟

۱) $\frac{۱۴۳}{\sqrt{۱۰۵}}$ ۲) $\frac{۱۵۲}{\sqrt{۱۰۶}}$ ۳) $\frac{۱۴۳}{\sqrt{۱۰۶}}$ ۴) $\frac{۱۵۲}{\sqrt{۱۰۵}}$