

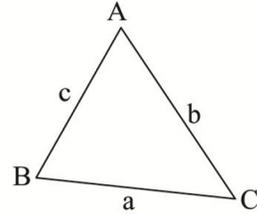
درس دوم: قضیه کسینوس‌ها

۱- در مثلث ABC روابط زیر موسوم به قضیه کسینوس‌ها برقرار است:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

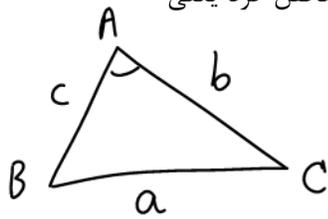
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$



۲- به کمک روابط زیر می‌توان به کمک اندازه اضلاع مثلث، کسینوس تمام زوایا را پیدا کرد:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

۳- به کمک اندازه اضلاع مثلث و قضیه کسینوس‌ها می‌توان نوع یک زاویه را مشخص کرد یعنی



$$a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow \hat{A} \text{ منفرجه است.}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \hat{A} \text{ قائمه است.}$$

$$a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow \hat{A} \text{ حاده است}$$

۴- در مثلث ABC بین اندازه اضلاع و اندازه میانه‌ها روابط زیر برقرار است:

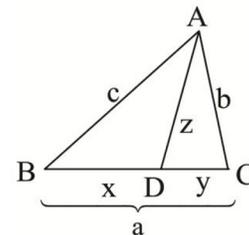
$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}, a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}, a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

۵- در مثلث ABC اگر D نقطه دلخواهی روی ضلع BC باشد آنگاه رابطه زیر موسوم به رابطه

استوارت برقرار است:

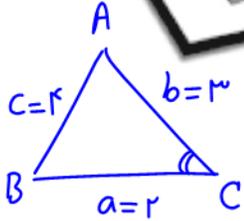
$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

$$xb^2 + yc^2 = a(xy + z^2) \text{ به بیان دیگر}$$





سوالات چهارگزینه‌ای درس دوم



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \Rightarrow 14 = 4 + 9 - 2(2 \times 3) \cos \hat{C}$$

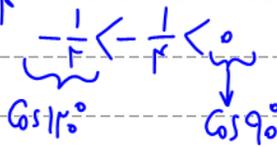
$$\Rightarrow 14 = 13 - 12 \cos \hat{C} \Rightarrow 12 \cos \hat{C} = -1$$

۱۹- اگر در مثلثی $c=4, b=3, a=2$ باشد، حدود زاویه C کدام است؟

$-\frac{1}{12} \leftarrow 12^\circ < \hat{C} < 15^\circ$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leftarrow 15^\circ < \hat{C} < 18^\circ$ (۴) -1
 $9^\circ < \hat{C} < 12^\circ$ (۱) ✓
 $6^\circ < \hat{C} < 9^\circ$ (۳)

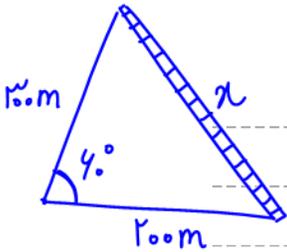
$$\Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{-1}{12} = -\frac{1}{12}$$

\hat{C} منفرجه است $\rightarrow 9^\circ < \hat{C} < 12^\circ$



۲۰- اگر فاصله یک ناظر تا دو سر یک پل روی رودخانه ۲۰۰ و ۳۰۰ متر بوده و زاویه دید پل توسط

دستگاه زاویه یاب 60° اندازه گرفته شده باشد، طول پل چند متر است؟



$200\sqrt{5}$ (۴) $100\sqrt{5}$ (۳) $100\sqrt{7}$ (۲) ✓ $200\sqrt{7}$ (۱)

$$x^2 = (200)^2 + (300)^2 - 2(200 \times 300) \cos 60^\circ = 40000 + 90000 - 60000 = 70000$$

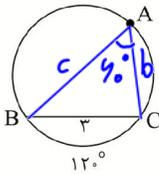
$$\Rightarrow x = \sqrt{70000} = 100\sqrt{7}$$

(روش درم‌تاب) $x^2 = 2^2 + 3^2 - 2(2 \times 3) \cos 60^\circ = 4 + 9 - 6 = 7 \Rightarrow x = \sqrt{7} \xrightarrow{\times 100} x = 100\sqrt{7}$

۲۱- در شکل مقابل، نقاط B و C ثابت و نقطه A بین این دو نقطه روی دایره در حال حرکت

$b+c+3=?$

است. اگر در لحظه‌ای مساحت مثلث ABC برابر $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ شود، محیط این مثلث چقدر است؟



$S(ABC) = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$
 $\frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} bc \sin 40^\circ$
 $\frac{9\sqrt{3}}{2} = bc \sin 40^\circ$

جواب شد $bc=9$

$$3^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 40^\circ \Rightarrow b^2 + c^2 - bc = 9$$

$$\rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = 9 + 2 \times 9 \Rightarrow (b+c)^2 = 34 \Rightarrow b+c = \sqrt{34}$$

محیط $\triangle ABC = (b+c) + 3 = \sqrt{34} + 3 = 9$

۲۲- در یک مثلث با اضلاع ۴ و ۶ و ۸ طول کوچک‌ترین میانه کدام است؟

- $\sqrt{10}$ (۴) ? $\sqrt{8}$ (۳) $\sqrt{7}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۱)

$a > b > c \rightarrow m_a < m_b < m_c$

نقطه کوچکترین میانه وارد بزرگترین ضلع مثلث است.

تفسیر میانه‌ها: $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow 36 + 14 = 2m_a^2 + \frac{4^2}{2} \Rightarrow 10 = 2m_a^2$
 $\Rightarrow m_a^2 = 5 \Rightarrow m_a = \sqrt{5}$

۲۳- در مثلثی با طول ضلع‌های a و b و c رابطه $b^2 + c^2 = 3a^2$ بین ضلع‌ها برقرار است. اندازه میانه وارد بر ضلع a کدام است؟

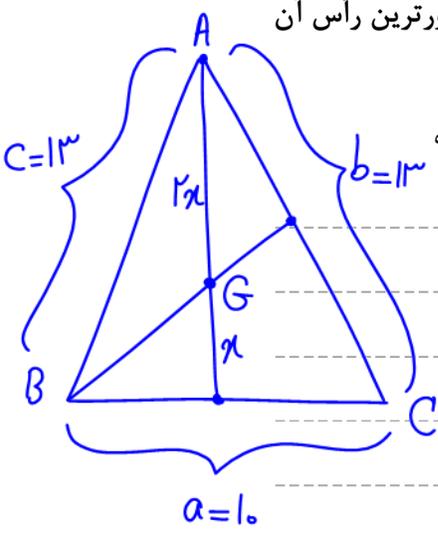
- $\frac{\sqrt{7}}{2}a$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{2}a$ (۳) ✓ $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ (۲) $\frac{1}{2}a$ (۱)

تفسیر میانه‌ها: $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow 3a^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \xrightarrow{\times 2}$

$6a^2 = 2m_a^2 + a^2 \Rightarrow 5a^2 = 2m_a^2 \Rightarrow m_a^2 = \frac{5a^2}{2} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{5}}{2}a$

۲۴- در مثلثی به طول اضلاع ۱۲ و ۱۳ و ۱۰ واحد فاصله نقطه تلاقی میانه‌ها از دورترین رأس آن کدام است؟

- $GA = ?$ ۹ (۴) ۸ (۳) $6\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{3}$ (۱)



نقطه تلاقی میانه‌ها، هر میانه را نسبت دو به یک تقسیم می‌کند.

تفسیر میانه‌ها: $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow 149 + 149 = 2m_a^2 + \frac{100}{2}$
 $\Rightarrow m_a^2 = 124 \Rightarrow m_a = 12$

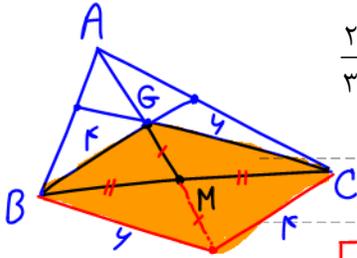
$GA = \frac{2}{3} \times 12 = 8$

$$a = \frac{r}{\sqrt{3}} \sqrt{r^2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}$$

$$m_a < m_b < m_c \Rightarrow a > b > c$$

۲۵- در مثلث ABC اگر m_c, m_b, m_a به ترتیب ۴ و ۶ و ۹ باشند، اندازه ضلع a چقدر است؟

$$\frac{2}{3}\sqrt{118} \quad (۴) \quad m_c \quad \frac{1}{3}\sqrt{118} \quad (۳) \quad m_a \quad \frac{2}{3}\sqrt{218} \quad (۲) \quad \frac{1}{3}\sqrt{218} \quad (۱)$$



$$m_a = 4 \Rightarrow GM = \frac{1}{3}m_a \Rightarrow GN = 2GM = \frac{2}{3}m_a = \frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow GN = \frac{8}{3}$$

BC = a : با توجه به شکل

$$GBNC' \Rightarrow r^2 + y^2 + r^2 + y^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + a^2$$

$$BG = \frac{2}{3}m_b = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

$$CG = \frac{2}{3}m_c = \frac{2}{3} \times 9 = 6$$

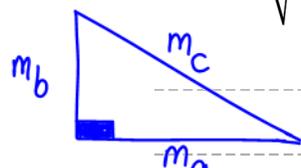
$$\Rightarrow 2(16 + y^2) = \frac{64}{9} + a^2 \Rightarrow 104 - \frac{64}{9} = a^2$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{936 - 64}{9} = \frac{872}{9} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{872}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{218}$$

۲۶- در مثلث ABC $a = 3$ و $b = 5$ و مثلی که اضلاعش میانهای مثلث ABC باشند، قائم الزویه است. اگر m_c بزرگترین میانیه مثلث باشد، طول ضلع c کدام است؟

$$m_c, m_b, m_a$$

$$\sqrt{\frac{31}{5}} \quad (۴) \quad \sqrt{\frac{32}{5}} \quad (۳) \quad \sqrt{\frac{33}{5}} \quad (۲) \quad \sqrt{\frac{34}{5}} \quad (۱) \quad \checkmark$$



$$a < b \Rightarrow m_a > m_b$$

$$m_c^2 = m_a^2 + m_b^2 \Rightarrow 2m_c^2 = 2m_a^2 + 2m_b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} + a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}$$

$$\Rightarrow -c^2 = c^2 - a^2 + c^2 - b^2 \Rightarrow ac^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2} \Rightarrow 2m_c^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}$$

$$2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$2m_b^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}$$

$$ac^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow ac^2 = 9 + 25 = 34$$

$$\Rightarrow ac^2 = 34 \Rightarrow c^2 = \frac{34}{a} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{34}{5}}$$

۲۷- مثلث ABC به اضلاع ۶ و ۸ و ۱۲ را با یک تجانس به مرکز رأس B و نسبت 1/3 بر مثلث

A'B'C' تصویر می کنیم. طول کوچکترین میانیه مثلث A'B'C' کدام است؟

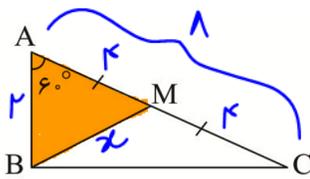
$$\frac{\sqrt{15}}{2} \quad (۴) \quad \frac{\sqrt{14}}{2} \quad (۳) \quad \frac{\sqrt{15}}{3} \quad (۲) \quad \frac{\sqrt{14}}{3} \quad (۱)$$

$$a = 4, b = 8, c = 12 \xrightarrow{k = \frac{1}{3}} a' = 4, b' = 8, c' = 12$$

$$a' < b' < c' \Rightarrow m_{a'} > m_{b'} > m_{c'}$$

$$a'^2 + b'^2 = 2m_{c'}^2 + \frac{c'^2}{2} \Rightarrow 16 + 64 = 2m_{c'}^2 + \frac{144}{2} \Rightarrow 80 = 2m_{c'}^2 + 72 \Rightarrow 8 = 2m_{c'}^2 \Rightarrow m_{c'} = \sqrt{\frac{4}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

۲۸- در مثلث ABC، میانه BM را رسم کرده‌ایم، اگر $b=8$ و $c=2$ و $\hat{A}=60^\circ$ باشند، شعاع دایره محیطی مثلث ABM چقدر است؟



$R=?$

۲ (۲) ✓

$\frac{3}{2}$ (۱)

۳ (۴)

$\frac{1}{2}$

$\frac{5}{2}$ (۳)

ΔABM (مقیاس کسینوس): $x^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \cos 60^\circ = 4 + 16 - 8 = 12$
 $\Rightarrow x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

ΔABM (مقیاس کسینوس): $2R = \frac{BM}{\sin \hat{A}} = \frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4 \Rightarrow 2R = 4 \Rightarrow R = 2$

۲۹- مساحت دایره محیطی هشت ضلعی منتظم به ضلع ۲ کدام است؟

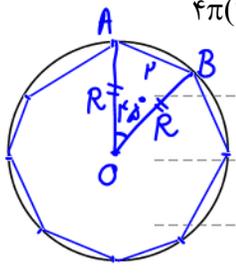
$4\pi(2+\sqrt{2})$ (۴)

$4\pi(1+\sqrt{2})$ (۳)

$2\pi(2+\sqrt{2})$ (۲) ✓

$\pi(2+\sqrt{2})$ (۱)

$S = \pi R^2$



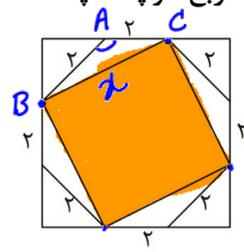
$\hat{AOB} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

ΔAOB (مقیاس کسینوس): $2^2 = R^2 + R^2 - 2(R \times R \times \cos 45^\circ) = 2R^2 - R^2\sqrt{2}$

$\Rightarrow 4 = R^2(2 - \sqrt{2}) \Rightarrow R^2 = \frac{4}{2 - \sqrt{2}} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{4(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = 2(2 + \sqrt{2})$

$\Rightarrow S = \pi R^2 = 2\pi(2 + \sqrt{2})$ (واحد مربع)

۳۰- در شکل مقابل اندازه طول ضلع هشت ضلعی منتظم ۲ واحد است. مساحت مربع کوچک چند واحد مربع است؟



$4(2+\sqrt{2})$ (۲) ✓

واحد مربع است؟

$4(1+\sqrt{2})$ (۱)

$8(2+\sqrt{2})$ (۴)

$8(1+\sqrt{2})$ (۳)

$\hat{BAC} = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} = \frac{6 \times 180^\circ}{8} = 135^\circ$

ΔBAC (مقیاس کسینوس): $S = x^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos 135^\circ = 4 + 4 + 2\sqrt{2}$

مساحت مربع

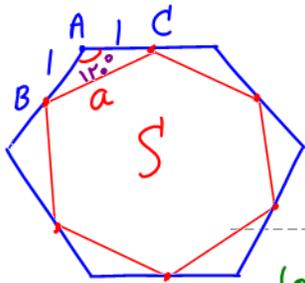
$-\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow S = 8 + 2\sqrt{2} = 2(4 + \sqrt{2})$

واحد مربع

۳۱- در یک شش ضلعی منتظم به ضلع ۲، وسط اضلاع را متوالی به هم وصل می‌کنیم تا یک

شش ضلعی منتظم جدید حاصل شود، مساحت شش ضلعی جدید چقدر است؟



$\frac{9\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (۳) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (۲) ✓ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (۱)

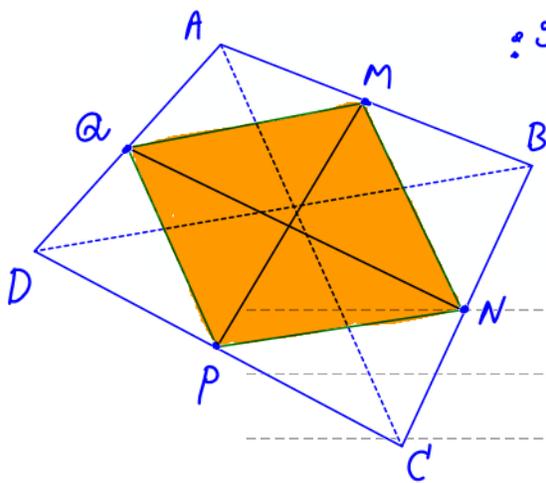
$\hat{BAC} = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} = \frac{4 \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$

$a^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1 \times 1 \times \cos 120^\circ) = 1 + 1 - 2(-\frac{1}{2}) = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow a^2 = 3$

$S = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 3 \right) = \frac{9}{2} \sqrt{3}$ (واحد مربع)

۳۲- در چهارضلعی ABCD نقاط Q, P, N, M وسط اضلاع هستند. اگر $AC^2 + BD^2 = 30$

باشد، حاصل $MP^2 + QN^2$ چقدر است؟ بنا بر قضیه میان خط در مثل:

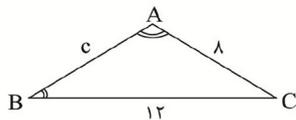


$\left. \begin{array}{l} 15 \text{ (۲)} \\ 5 \text{ (۴)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} MN = QP = \frac{AC}{2} \\ QM = NP = \frac{BD}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} 20 \text{ (۱)} \\ 10 \text{ (۳)} \end{array}$

$\square \Rightarrow MN^2 + NP^2 + AP^2 + QM^2 = MP^2 + QN^2$ (مساوی الاضلاع)

$= 2(MN^2 + QM^2) = 2 \left(\frac{AC^2 + BD^2}{4} \right) = \frac{30}{2} = 15$

۳۳- در شکل مقابل $\hat{A} = 2\hat{B}$ اندازه ضلع AB کدام است؟



- ۱۴ (۲) ۸ (۱)
 ۱۶ (۴) ۶ (۳)

۳۴- اگر در مثلثی رابطه $b^3 + c^3 = a^2(b + c)$ بین اضلاع برقرار باشد، اندازه زاویه \hat{A} چقدر است؟

$$\frac{\pi}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{6} \quad (۱)$$

۳۵- در مثلث ABC به اضلاع ۲ و ۳ و ۴ حاصل عبارت $\frac{\cos \hat{A}}{a} + \frac{\cos \hat{B}}{b} + \frac{\cos \hat{C}}{c}$ کدام است؟

$$\frac{11}{24} \quad (۴)$$

$$\frac{13}{24} \quad (۳)$$

$$\frac{29}{48} \quad (۲)$$

$$\frac{27}{48} \quad (۱)$$

۳۶- در کدام حالت، مثلث حاصل از اضلاع داده شده حاده الزاویه است؟

$$۹, ۵, ۱۰ \quad (۴)$$

$$۱۱, ۲, ۹ \quad (۳)$$

$$۱۳, ۱۲, ۵ \quad (۲)$$

$$۹, ۶, ۱۲ \quad (۱)$$

$AC = 19$

۳۷- در مثلث ABC ، $AB = 13$ ، $BC = 22$ است. اگر M وسط ضلع BC باشد، قطر دایره محیطی

مثلث ABM چقدر است؟

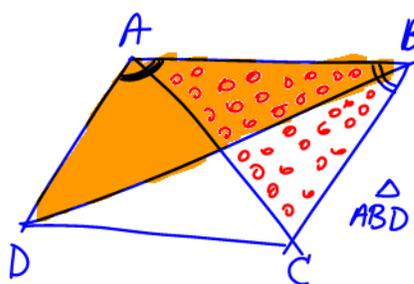
$\frac{152}{\sqrt{105}}$ (۴)

$\frac{143}{\sqrt{106}}$ (۳)

$\frac{152}{\sqrt{106}}$ (۲)

$\frac{143}{\sqrt{105}}$ (۱)

سند: ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع مجموع مربعات اضلاع برابر مجموع مربعات اقطار است.



$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$

$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \cos \hat{B} = -\cos \hat{A}$ (اثبات)

$\triangle ABD: BD^2 = AB^2 + DA^2 - 2(AB \times DA) \cos \hat{A}$

$\triangle ABC: AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB \times BC) \cos \hat{B}$

$\Rightarrow DA - \cos \hat{A} \quad \hat{A}$

$\Rightarrow BC - \cos \hat{B} \quad \hat{B}$

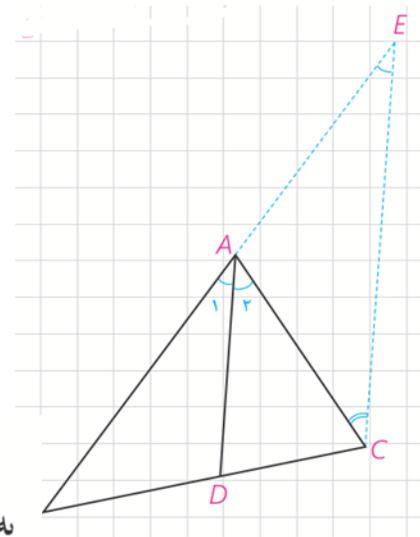
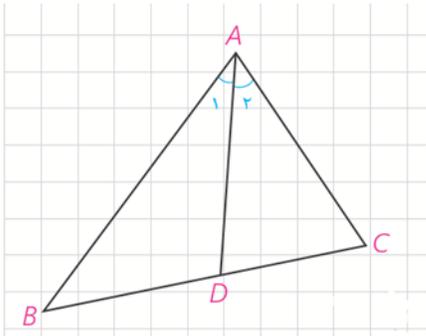
$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$

قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

قضیه ۱: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

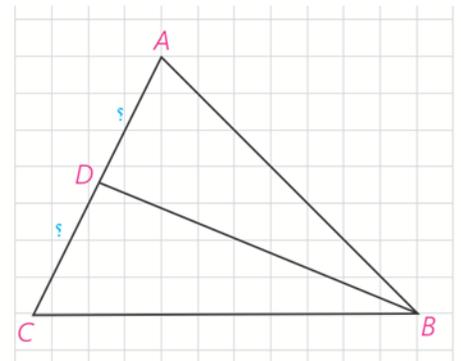
فرض: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

حکم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

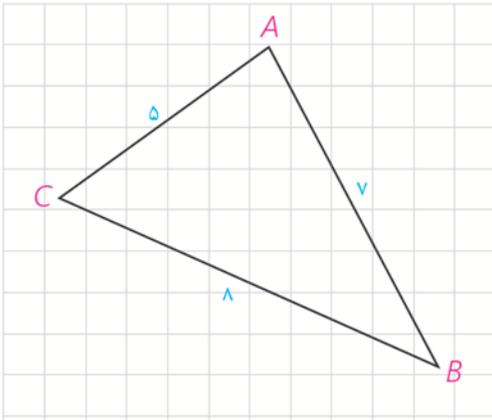


مثال: در مثلث ABC ، $AB=7$ ، $AC=5$ و $BC=8$ است. طول‌های دو قطعه‌ای را به دست آورید که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

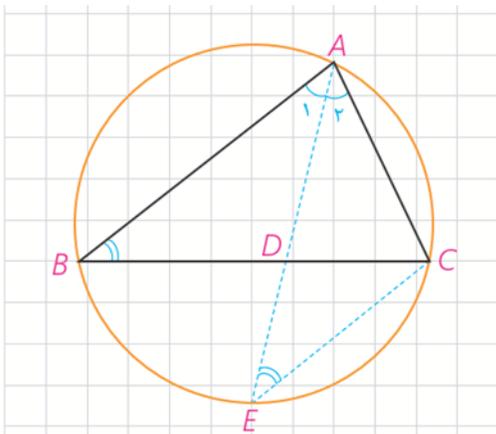
حل:



در شکل روبه‌رو نیمساز زاویه C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را به‌دست آورید که این نیمساز روی AB جدا می‌کند.



۲- محاسبه طول نیمسازهای زوایای داخلی مثلث



قضیه ۲: در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

مثال: در مثلث ABC ، $AB=3$ ، $AC=5$ و $BC=7$ است. طول نیمساز زاویه A را بیابید.

