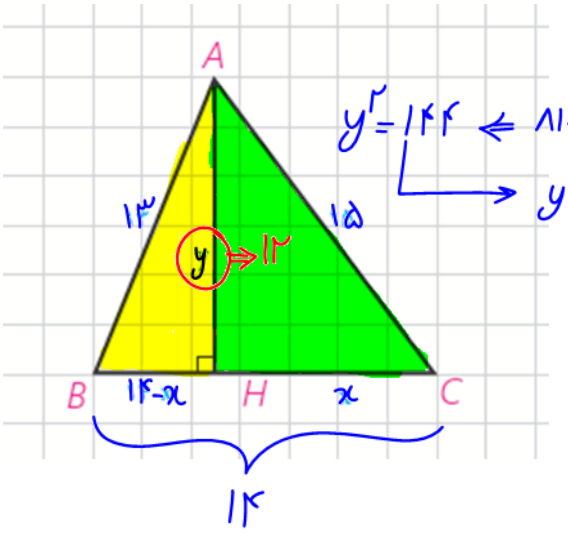
درس چهارم

قضیهٔ هرون (محاسبهٔ ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)

با مسئله زیر در کتاب هندسهٔ ۱ مواجه شدید :

در مثلث ABC با اضلاع ۱۳، ۱۴، ۱۵، ارتفاع AH رسم شده است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های AHB و AHC اندازه‌های x و y را به‌دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را نیز محاسبه کنید :



$y^2=144 \leftarrow 81+y^2=225 \leftarrow x=9$

$y=\sqrt{144}=12$

به عنوان یادآوری، مسئله را با هم حل می‌کنیم :

$$\left.\begin{matrix} CH^2+AH^2=AC^2 \\ BH^2+AH^2=AB^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=15^2=225 \\ (14-x)^2+y^2=13^2=169 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ -169 \\ \hline 56 \end{array}$$

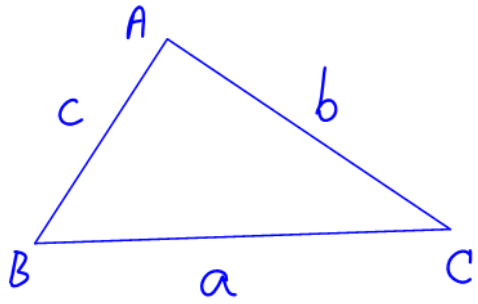
طرفین این دوتساوی را از هم کم می‌کنیم که با حذف y^2 معادله‌ای بر حسب x به دست می‌آید :

$$x^2-(14-x)^2=56 \Rightarrow x^2-196-x^2+28x=56 \rightarrow 28x=252$$

$$\Rightarrow x=\frac{252}{28}=9,\quad y=12 \quad , \quad S=\frac{1}{2}BC.AH=\frac{1}{2}\times 14\times 12=84$$

(واحد مساحت)

اگر همین روش را در حالت کلّی در مثلث ABC، که BC=a، AB=c و AC=b به کار ببریم، نتیجه می‌شود :



$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad \text{(دستور هرون)}$$

که در این دستور $P=\frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط مثلث است.

(اثبات کامل این دستور را می‌توانید در مجلهٔ ریاضی انتهای فصل ببینید.)

مثال : مساحت مثلث با اضلاع به طول‌های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ به کمک دستور هرون برابر است با :

$$P=\frac{1}{2}(13+14+15)=21$$

$$2P=13+14+15=42 \Rightarrow P=21$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \Rightarrow S=\sqrt{21\times 6\times 7\times 8}=\sqrt{7^2\times 3^2\times 2^4}=84$$

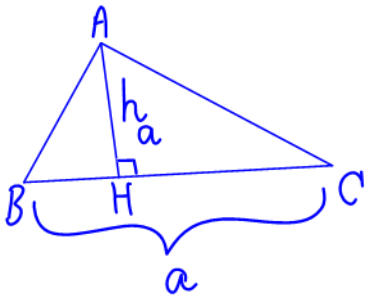
$21\times 6\times 7\times 8 = 7\times 3\times 2^2$

$21\times 6\times 7\times 8 = 3\times 7\times 2\times 3\times 2^3$

(واحد مربع)

و طول‌های سه ارتفاع مثلث نیز برابرند با :

$$h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2\times 84}{14}=12 \quad , \quad h_b=\cdots\cdots \quad , \quad h_c=\cdots\cdots$$

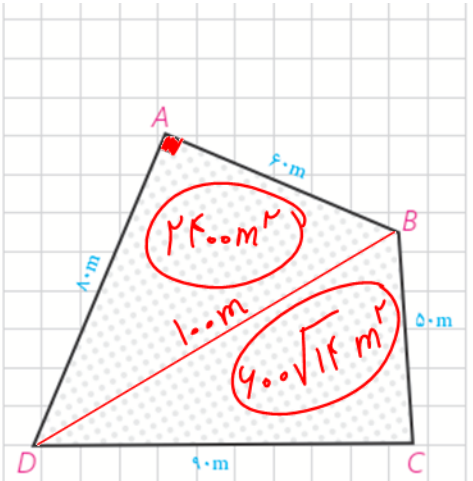


$$S=\frac{1}{2}BC\times AH \Rightarrow S=\frac{1}{2}a\times h_a \Rightarrow h_a=\frac{2S}{a}$$

$$h_b=\frac{2S}{b}=\frac{2\times 84}{15}=11/2 \quad , \quad h_c=\frac{2S}{c}=\frac{2\times 84}{13}=12/92$$

کار در کلاس

چهارضلعی ABCD یک مزرعهٔ کشاورزی را نشان می‌دهد که تنها دو ضلع آن بر هم عمودند. طول‌های اضلاع زمین به سادگی قابل اندازه‌گیری، و اندازه‌های آنها در شکل مشخص شده‌است. با انجام دادن مراحل زیر مساحت این زمین را به‌دست آورید :



الف) اگر B را به D وصل کنیم، طول BD را چگونه به‌دست می‌آورید؟

$\triangle ABD : \hat{A} = 90^\circ$

$\Rightarrow BD^2 = AB^2 + AD^2 = 60^2 + 80^2 = 10000 \Rightarrow BD = \sqrt{10000} = 100$

$3600 + 6400$

ب) مساحت مثلث ABD را چگونه به‌دست می‌آورید؟

$$S_{\triangle ABD} = \frac{AB \times AD}{2} = \frac{60 \times 80}{2} = 2400\ m^2$$

پ) مساحت مثلث CBD را به کمک دستور هرون به‌دست آورید.

$$P = \frac{50 + 90 + 100}{2} = 120 \quad , \quad S_{\triangle CBD} = \sqrt{120(120-100)(120-90)(120-50)}$$

$$= \sqrt{120 \times 20 \times 30 \times 70} = \sqrt{10^4 \times 3 \times 2^2 \times 2 \times 3 \times 7}$$

$$= 10^2 \times 3 \times 2\sqrt{14} = 600\sqrt{14}\ m^2$$

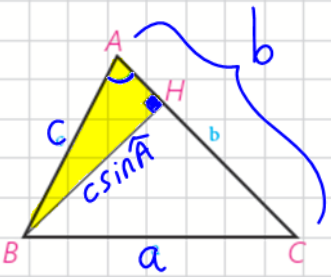
ت) مساحت زمین کشاورزی برابر است با :

$S = 2400 + 600\sqrt{14} \simeq 4685\ m^2$.

فعالیت

می‌خواهیم دستور دیگری برای محاسبهٔ مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی به‌دست آوریم.

۱ــ در مثلث ABC، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم.



$$\sin \hat{A} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = c \times \sin \hat{A}$$

($AB = c$)

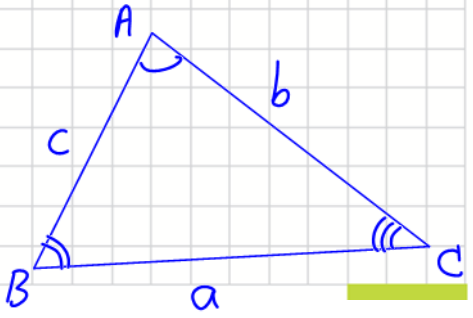
۲ــ مساحت مثلث ABC را به کمک ارتفاع BH بنویسید.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \times AC = \frac{1}{2} b \times c \sin \hat{A} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}.$$

نتیجه

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آنها:

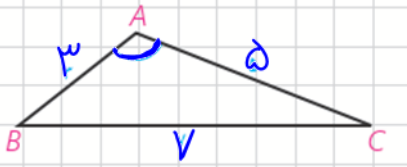
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc.\sin \hat{A} = \frac{1}{2} ab.\sin \hat{C} = \frac{1}{2} ac.\sin \hat{B}$$



کار در کلاس

$V^2 \neq 3^2 + 5^2$

۱ــ مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۷ مفروض است. مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون به‌دست آورید.



$$P = \frac{۳ + ۵ + ۷}{۲} = \frac{۱۵}{۲} \Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \cdots$$

$$S = \sqrt{\frac{۱۵}{۲}\left(\frac{۱۵}{۲}-۷\right)\left(\frac{۱۵}{۲}-۵\right)\left(\frac{۱۵}{۲}-۳\right)} = \sqrt{\frac{۱۵}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۲}\times\frac{۹}{۲}} = \frac{۱}{۴}\sqrt{۳\times۵\times۱\times۵\times۹} = \frac{۱۵}{۴}\sqrt{۳}$$

۲ــ مساحت مثلث را با استفاده از دستور $S = \frac{۱}{۲}AB.AC.\sin A$ بنویسید.

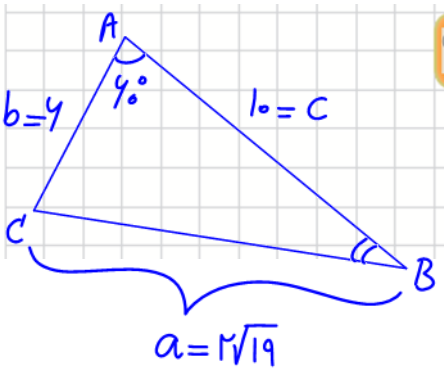
$$\frac{۱۵}{۴}\sqrt{۳} = \frac{۱}{۲}\times۳\times۵\times\sin\hat{A} \Rightarrow \sin\hat{A} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳ــ از مقایسهٔ نتایج ۱ و ۲، اندازهٔ زاویهٔ منفرجهٔ $\hat{A}$ را به‌دست آورید.

$\hat{A} = ۶۰^\circ$ یا ۱۲۰° ← $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$.

تمرین

۱ــ در مثلث ABC، $AB=۱۰$، $AC=۶$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$. الف) طول BC را به‌دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار sinB را پیدا کنید.



قضیهٔ کسینوس‌ها: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} = ۳۶ + ۱۰۰ - ۱۲۰\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۷۶ \Rightarrow a = \sqrt{۷۶}$

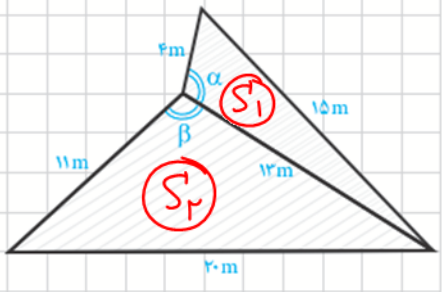
$\Rightarrow \boxed{a = ۲\sqrt{۱۹}}$

$$S = \frac{۱}{۲}AC\times AB\times\sin\hat{A} = \frac{۱}{۲}(۶\times۱۰)\sin۶۰^\circ = ۳۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳} \Rightarrow \boxed{S = ۱۵\sqrt{۳}\ \text{(واحد مربع)}}$$

قضیهٔ سینوس‌ها: $\frac{BC}{\sin\hat{A}} = \frac{AC}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۱۹}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۶}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \sin\hat{B} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۱۹}} = \frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸} \Rightarrow \boxed{\sin\hat{B} = \frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸}}$

۲ــ دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟

نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد. $(\alpha=\beta)$



$$P_1 = \frac{۴+۱۵+۱۳}{۲} = \frac{۳۲}{۲} = ۱۶$$

$$S_1 = \sqrt{۱۶(۱۶-۴)(۱۶-۱۳)(۱۶-۱۵)} = \sqrt{۱۶\times\underbrace{۱۲\times۳}_{۳۶}\times۱} = ۴\times۶ = ۲۴\ m^2$$

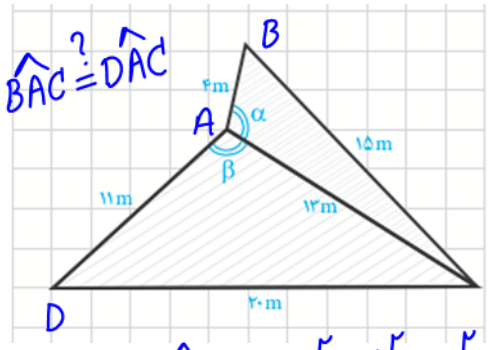
$$P_2 = \frac{۱۱+۱۳+۲۰}{۲} = \frac{۴۴}{۲} = ۲۲$$

$$S_2 = \sqrt{۲۲(۲۲-۱۱)(۲۲-۱۳)(۲۲-۲۰)} = \sqrt{\underbrace{۲۲\times۱۱}_{۲\times۱۱}\times۹\times۲} = ۱۱\times۲\times۳ = ۶۶\ m^2$$

$$S = S_1 + S_2 = ۲۴ + ۶۶ = ۹۰\ m^2.$$

۲ــ دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟

نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد.



$\hat{BAC} \overset{?}{=} \hat{DAC}$ $(\alpha=\beta)$

$ABC: 15^2 = 4^2 + 13^2 - 2(4\times13)\cos\alpha \Rightarrow 225 = 16+169-104\cos\alpha \Rightarrow 104\cos\alpha = -40$

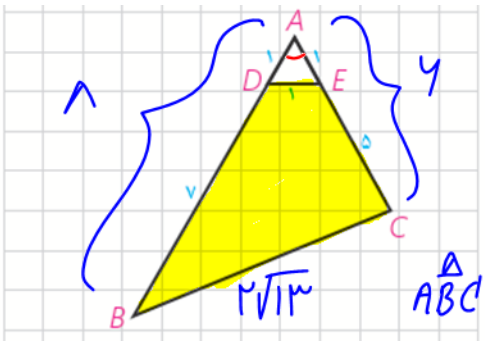
$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = -\frac{5}{13}}$ (I)

$ADC: 20^2 = 11^2 + 13^2 - 2(11\times13)\cos\beta \Rightarrow 400 = 121+169-286\cos\beta \Rightarrow 286\cos\beta = -110$

$\Rightarrow \cos\beta = -\frac{110}{286} \Rightarrow \boxed{\cos\beta = -\frac{5}{13}}$ (II)

(I), (II) $\Rightarrow \cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \alpha = \beta$

۴ــ در شکل مقابل، اولاً طول BC را به‌دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.



$\hat{A} = 60^\circ$ متساوی‌الاضلاع است $\Rightarrow \hat{ADE}$

ABC (قضیه کسینوس‌ها): $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB\times AC)\cos\hat{A}$

$\Rightarrow BC^2 = 8^2 + 7^2 - 2(8\times7)\cos60^\circ = 64+49-56 = 57 \Rightarrow BC = \sqrt{57} = 2\sqrt{13}$

$S(ADE) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$S(ABC) = \frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\hat{A} = \frac{1}{2}(8\times7)\sin60^\circ = 14\sqrt{3}$

$S(DECB) = S(ABC) - S(ADE)$

$= 14\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\left(14-\frac{1}{4}\right)$

$= \frac{55\sqrt{3}}{4}$ (واحد مربع)

۵ــ در شکل صفحه بعد AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است.

با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبهٔ طول نیمساز زاویهٔ A به‌دست آورید.

$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow$

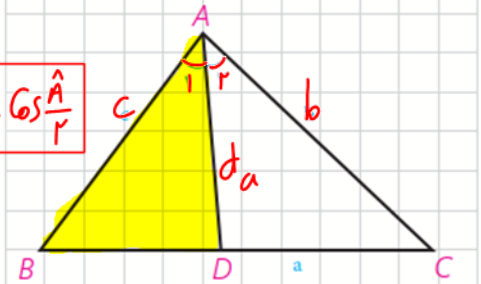
$\frac{1}{2}AB.AC.\sin\hat{A} = \frac{1}{2}AD\times AB\times\sin\frac{\hat{A}}{2} + \frac{1}{2}AD\times AC\times\sin\frac{\hat{A}}{2}$

$\times 2 \Rightarrow AB.AC.\sin\hat{A} = AD.\sin\frac{\hat{A}}{2}(AB+AC)$

یادآوری: $\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\alpha = \frac{\hat{A}}{2}$

$\sin\hat{A} = 2\sin\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2}$



$\Rightarrow AD = \frac{AB.AC.\sin\hat{A}}{(AB+AC)\sin\frac{\hat{A}}{2}} = \frac{2AB.AC.\sin\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2}}{(AB+AC)\sin\frac{\hat{A}}{2}}$

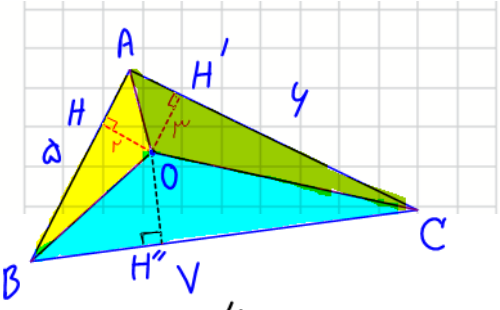
$\Rightarrow AD = \frac{2AB\times AC\times\cos\frac{\hat{A}}{2}}{AB+AC}$

(A نیمساز رأس) $d_a = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.

(حکم) $d_a = \frac{2bc\cos\frac{\hat{A}}{2}}{b+c}$

۶ــ در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصلهٔ ۲ و ۳ سانتی‌متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟

راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.



$$\begin{cases} P=\frac{۵+۶+۷}{۲}=\frac{۱۸}{۲}=۹ \\ S(\hat{ABC})=\sqrt{۹\times۴\times۳\times۲}=۳\times۲\sqrt{۶}=۶\sqrt{۶} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(\hat{OAB})=\frac{۱}{۲}AB\times OH=\frac{۱}{۲}\times۵\times۲=۵ \\ S(\hat{OAC})=\frac{۱}{۲}AC\times OH'=\frac{۱}{۲}\times۶\times۳=۹ \end{cases}$$

$$S(\hat{ABC})=S(\hat{OAB})+S(\hat{OAC})+S(\hat{OBC})$$

$$\Rightarrow ۶\sqrt{۶}=۵+۹+S(\hat{OBC}) \Rightarrow S(\hat{OBC})=۶\sqrt{۶}-۱۴$$

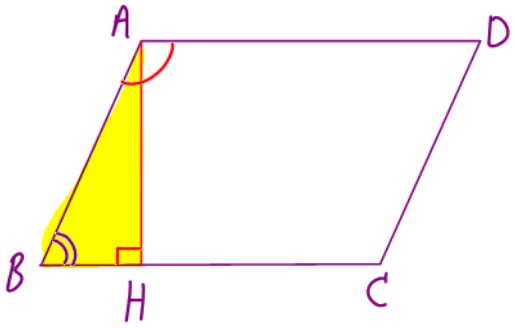
$$S(\hat{OBC})=\frac{۱}{۲}BC\times OH''$$

$$\Rightarrow ۶\sqrt{۶}-۲۸=\frac{۱}{۲}\times۷\times OH''$$

$$\Rightarrow ۱۲\sqrt{۶}-۱۴=۷OH'' \Rightarrow OH''=\frac{۱۲\sqrt{۶}-۲۸}{۷}$$

$$\simeq ۰/۲$$

۸ــ ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع.



$$S(\square ABCD)=BC\times AH$$

$$\hat{ABH}:\ \hat{H}=۹۰^\circ \Rightarrow \sin\hat{B}=\frac{AH}{AB} \Rightarrow AH=AB\times\sin\hat{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{S(\square ABCD)=BC\times AB\times\sin\hat{B}}$$

$$\boxed{S(\square ABCD)=AB\times AD\times\sin\hat{A}}$$

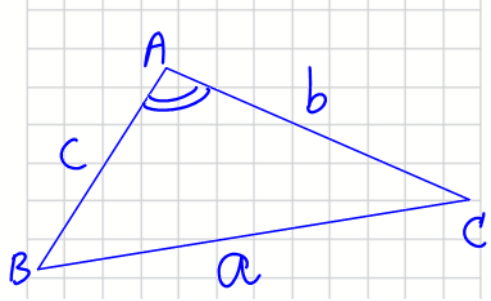
$$\hat{A}+\hat{B}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \sin\hat{A}=\sin\hat{B}$$

۹ــ به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC :

الف) $\hat{A}>90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2>b^2+c^2$

ب) $\hat{A}<90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2<b^2+c^2$

پ) $\hat{A}=90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2=b^2+c^2$



$\overset{\Delta}{ABC}$ (قضیه کسینوس‌ها): $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A} \Rightarrow 2bc\cos\hat{A}=b^2+c^2-a^2$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos\hat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

الف) $\hat{A}>90^\circ \Leftrightarrow \cos\hat{A}<0 \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}<0 \xleftrightarrow{2bc>0} b^2+c^2-a^2<0 \Leftrightarrow b^2+c^2<a^2$

ب) $\hat{A}<90^\circ \Leftrightarrow \cos\hat{A}>0 \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0 \xleftrightarrow{2bc>0} b^2+c^2-a^2>0 \Leftrightarrow b^2+c^2>a^2$

پ) $\hat{A}=90^\circ \Leftrightarrow \cos\hat{A}=0 \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=0 \xleftrightarrow{} b^2+c^2-a^2=0 \Leftrightarrow b^2+c^2=a^2$

۱۰ــ به کمک نتیجهٔ تمرین ۹، حاده(تند)، قائمه یا منفرجه(باز) بودن زاویهٔ A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید :

الف) $AB=10$, $AC=6$, $BC=9$

ب) $AB=8$, $AC=4$, $BC=9$

پ) $AB=8$, $AC=15$, $BC=17$

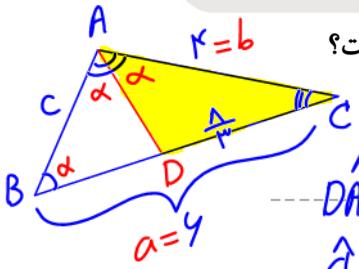
الف) $\left.\begin{cases} a=9 \longrightarrow a^2=81 \\ b=6 \\ c=10 \end{cases}\right\} \longrightarrow b^2+c^2=36+100=136 \Rightarrow a^2<b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A}<90^\circ$

ب) $\left.\begin{cases} a=9 \longrightarrow a^2=81 \\ b=4 \\ c=8 \end{cases}\right\} \longrightarrow b^2+c^2=16+64=80 \Rightarrow a^2>b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A}>90^\circ$

پ) $\left.\begin{cases} a=17 \longrightarrow a^2=289 \\ b=15 \\ c=8 \end{cases}\right\} \longrightarrow b^2+c^2=225+64=289 \Rightarrow a^2=b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A}=90^\circ$

۴۴- در مثلث ABC داریم $\hat{A}=2\hat{B}$ و $BC=6$ و $AC=4$، اندازه ضلع AB کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۵ ۳) ۵/۵ ۴) ۶



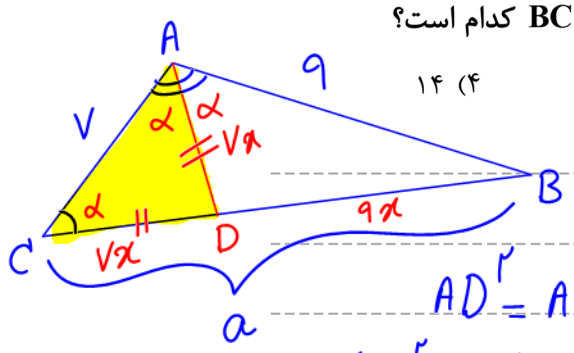
$\hat{DAC}=\hat{B}=\alpha$, $\hat{C}=\hat{C}$ $\xrightarrow{\text{(دوزاویه)}}$ $\Delta ADC \sim \Delta ABC \rightarrow \frac{DC}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AC}{BC}$

$\frac{DC}{۴}=\frac{۴}{۶} \Rightarrow DC=\frac{۱۶}{۶}=\frac{۸}{۳}$

$DC=\frac{ab}{b+c} \Rightarrow \frac{۸}{۳}=\frac{۲۴}{۴+c} \Rightarrow ۴+c=۹ \Rightarrow c=۵$

۴۵- در مثلث ABC داریم: $AB=9$ و $AC=7$ و $\hat{A}=2\hat{C}$ اندازه BC کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴



AD نیمساز است $\xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}}$ $CD=Vx$, $DB=9x$

$AD^۲=AB\times AC-CD\times DB$

$\Rightarrow ۴۹x^۲=۶۳-۶۳x^۲ \Rightarrow ۱۱۲x^۲=۶۳ \Rightarrow x^۲=\frac{۶۳}{۱۱۲}=\frac{۹}{۱۶} \Rightarrow x=\frac{۳}{۴}$

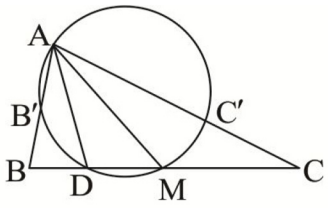
$BC=Vx+9x=16x=16\left(\frac{۳}{۴}\right)=۱۲$

۴۶- در مثلث ABC داریم: $\hat{A}=2\hat{B}$ کدام رابطه بین سه ضلع مثلث برقرار است؟

۱) $a^۲=bc$ ۲) $b^۲=ac$

۳) $a^۲-b^۲=bc$ ۴) $a^۲-c^۲=bc$

۴۷- در مثلث ABC، نقطه M وسط ضلع BC و AD نیمساز زاویه A است. دایره محیطی مثلث ADM رسم شده است. نسبت $\frac{BB'}{CC'}$ برابر کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{AB}{AC}$

۳) $\frac{AB'}{AC'}$

۴) $\frac{DB}{DM}$

۴۸- اضلاع مثلثی با اعداد ۲ و ۳ و ۴ متناسب است. نیمساز داخلی زاویه متوسط آن را رسم می‌کنیم مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل، چند برابر مساحت اصلی است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۲}{۵}$

سؤالات تستی درس چهارم

۴۹- در مثلثی به اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ طول ارتفاع وارد بر ضلع کوچک‌تر کدام است؟

۱) $\frac{۱۶۷}{۱۳}$ ۲) $\frac{۱۶۸}{۱۳}$ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۵۰- در مثلث ABC طول اضلاع AC, AB به ترتیب ۶ و ۴ و $\hat{B}+\hat{C}=۱۲۰^\circ$ است، مساحت مثلث ABC چقدر است؟

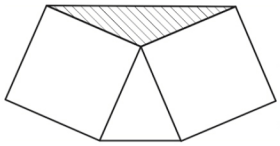
۱) $۱۰\sqrt{۳}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۶\sqrt{۳}$

۵۱- مساحت مربعی به ضلع ۶ با مساحت متوازی‌الاضلاعی به اضلاع ۸ و ۹ برابر است، اندازه زاویه منفرجه متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۱۰۵° ۲) ۱۲۰° ۳) ۱۳۵° ۴) ۱۵۰°

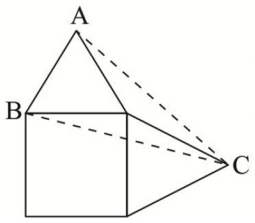
۵۲- در مثلث متساوی‌الاضلاع، بر روی دو ضلع آن دو مربع ساخته‌شده است. مساحت مثلث رنگ‌شده، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) ۱



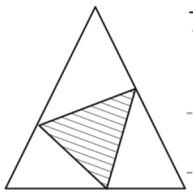
۵۳- در خارج یک مربع به ضلع ۲ واحد بر روی هر دو ضلع مجاور آن مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته‌شده است، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $۱+\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۲+\sqrt{۳}$ ۴) ۴

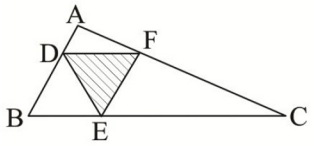


۵۴- هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم‌شده است. مساحت مثلث رنگی، چند برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$



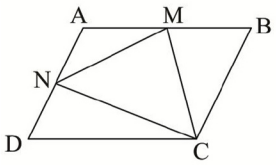
۵۵- در شکل مقابل $AD = DB$, $5BE = EC$, $4AF = 2FC$ است. مساحت مثلث DEF چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



۱) $\frac{۷}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳۶}$

۳) $\frac{۷}{۳۳}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳۳}$

۵۶- در شکل مقابل نقاط N, M وسط اضلاع متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مساحت مثلث CMN چند برابر مساحت متوازی‌الاضلاع است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۵۷- مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد، برابر $۲۴\sqrt{۵}$ واحد مربع است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

۵۸- در مثلثی اندازه‌های دو ضلع ۱۰ و ۱۵ واحد است. مجموع ارتفاع‌های وارد بر این دو ضلع برابر ارتفاع ضلع سوم است. اندازه ضلع سوم کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۷/۵ ۴) ۸

۵۹- مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $b = 8$ و $c = 5$ باشد، اندازه ضلع متوسط a کدام است؟

۱) $\sqrt{39}$ ۲) $\sqrt{41}$ ۳) $3\sqrt{5}$ ۴) $5\sqrt{2}$

۶۰- در مثلثی به اضلاع $c = 8, b = 6, a = 4$ حاصل عبارت $\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_c}{h_b}$ کدام است؟ (h_c, h_b, h_a ارتفاع‌های نظیر اضلاع c, b, a هستند.)

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{2}{3}$

۶۱- در مثلث ABC رابطه $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{۶}{S}$ برقرار است. مجموع ارتفاع‌های این مثلث چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۴ ۴) ۱۲

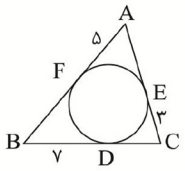
۶۲- ارتفاع‌های مثلث با اعداد ۲ و $\frac{۸}{۳}$ و ۴ متناسب‌اند، اگر یکی از اضلاع این مثلث ۲ باشد، بیشترین مساحت این مثلث چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۴}\sqrt{۱۵}$ ۲) $\frac{۴}{۳}\sqrt{۱۵}$ ۳) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۱۵}$

۶۳- اگر سه ارتفاع مثلثی برابر ۳ و ۴ و ۶ باشند، مساحت این مثلث چقدر است؟

۱) $۳/۱\sqrt{۱۵}$ ۲) $۳/۲\sqrt{۱۵}$ ۳) $۳/۳\sqrt{۱۵}$ ۴) $۳/۴\sqrt{۱۵}$

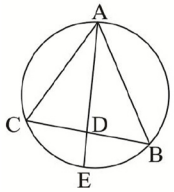
۶۴- در شکل مقابل، اندازه ارتفاع نظیر رأس A کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۷}$ ۲) $۳\sqrt{۷}$

۳) $۴\sqrt{۷}$ ۴) $۵\sqrt{۷}$

۶۵- در شکل مقابل $a=۵$ و $b=۶$ و $c=۹$ و AD نیمساز زاویه A می‌باشد، اندازه AE چقدر است؟



۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۴/۵\sqrt{۳}$

۳) $۵\sqrt{۳}$ ۴) $۵/۵\sqrt{۳}$

۶۶- در یک متوازی‌الاضلاع وسط دو ضلع مجاور را به هم وصل می‌کنیم. مساحت پنج‌ضلعی حاصل چند برابر مساحت مثلث ایجادشده است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸