



تعیین علامت و نامعادله

استاد اشرفی

www.mathtest.ir



تعیین علامت و نامعادله:

تعیین علامت عبارت درجه اول:

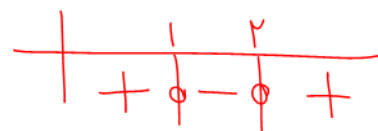
x	x_0
$ax+b$	موافق علامت a مخالف علامت a

تعیین علامت عبارت درجه دوم:

وقتی عبارت دو ریشه متمایز دارد.

x	x_1	x_2
ax^2+bx+c	موافق علامت a مخالف علامت a	موافق علامت a

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$



وقتی عبارت ریشه مضاعف دارد.

x	x_1
ax^2+bx+c	موافق علامت a موافق علامت a

وقتی عبارت ریشه ندارد.

x
ax^2+bx+c
موافق علامت a

نکته:



عبارت درجه دوم زمانی همواره مثبت یا همواره منفی است که ریشه نداشته باشد و علامت آن موافق علامت ضریب x^2 است.

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

برای نمونه جدول تعیین علامت $P(x) = x^2 - 5x + 4$ به شکل زیر است؟

$$p(x) = x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

x		1		4	
$x^2 - 5x + 4$	+	0	-	0	+

همین طور عبارت $P(x) = -x^2 + x - 3$ که ریشه ندارد جدول تعیین علامتی به شکل زیر دارد همواره منفی است.

x		
$-x^2 + x - 3$	-	

$$\Delta = 1^2 - 4(-1)(-3) = 1 - 12 < 0$$

تعیین علامت و قدر مطلق:

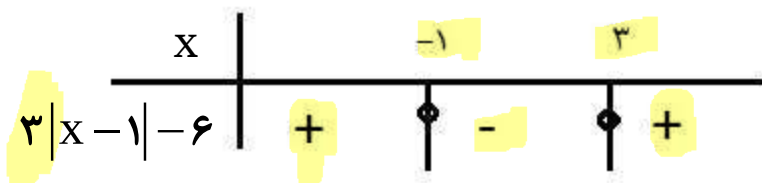
عبارت های $a|x-b|$ همواره صفر یا موافق علامت a هستند برای نمونه $-2|x-3|$ عبارتی همواره نامثبت (صفر یا منفی) است.

تعیین علامت عبارت $a|x-b|-c$ نیز به شدت شبیه تعیین علامت عبارت درجه دوم است. اگر عبارت دو ریشه داشته باشد علامت بین دو ریشه مخالف علامت a خارج آن ها علامت عبارت موافق علامت a است. اگر عبارت ریشه نداشته باشد علامت آن همواره موافق علامت a است.

به مثال زیر توجه کنید: 

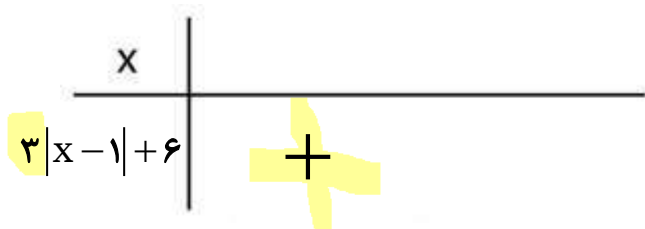
$$P(x) = 3|x-1| - 6 \stackrel{0}{=} \rightarrow 3|x-1| = 6 \rightarrow |x-1| = 2 \rightarrow x-1 = \pm 2$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-1 = +2 \\ x-1 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$



$$P(x) = 3|x-1| + 6 = 0 \rightarrow 3|x-1| = -6$$

غیر ممکن و معادله ریشه ندارد



تعیین علامت تستی:

عبارت را تا حد ممکن تجزیه و ساده میکنیم. ریشه های همه عبارت ها را می یابیم و روی جدول تعیین علامت پیاده می کنیم. عددی بزرگ تر از ریشه بزرگ به عبارت می دهیم و علامت آن را روی جدول در آخرین خانه قرار می دهیم (یا علامت جمله پرتوان را یافته و در خانه آخر قرار می دهیم).

به عقب بر می گردیم و هر گاه به ریشه های معادله یا عبارت هایی که زوج مرتبه تکرار شدند رسیدیم یعنی $(x - \alpha)$ ^{زوج} علامت تغییر نمی کند. همین طور علامت در ریشه های عبارت به شکل $|x - b|$ تغییر نمی کند. علامت در برخورد با ریشه های عبارت هایی که فرد مرتبه تکرار شده اند یعنی $(x - b)$ ^{فرد} تغییر می کند. همین طور علامت در ریشه های عبارت به شکل $a|x - b| - c$ تغییر می کند.

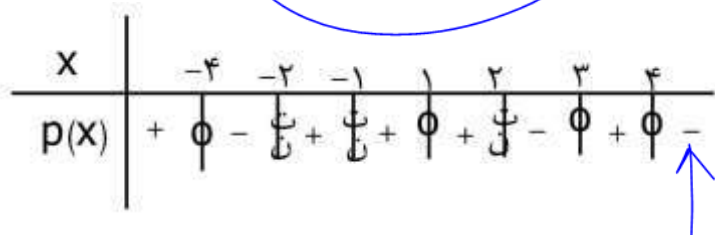
در ریشه های صورت مقادیر صفر و در ریشه های مخرج و ریشه های مشترک صورت و مخرج تعریف نشده قرار می دهیم.

به مثال زیر توجه کنید:



$$P(x) = \frac{-|x-1|(x-3)^4(|x|-4)}{(x^2-4)(x+1)^4}$$

منفی



$$|x-1|=0 \rightarrow x=1$$

تغییر علامت نداریم

$$(x-3)^4=0 \rightarrow x=3$$

داریم

$$|x|-4=0 \rightarrow |x|=4 \rightarrow x=\pm 4$$

داریم

$$x^2-4=0 \rightarrow (x-2)(x+2)=0 \rightarrow x=\pm 2$$

داریم

$$(x+1)^4=0 \rightarrow x=-1$$

نداریم

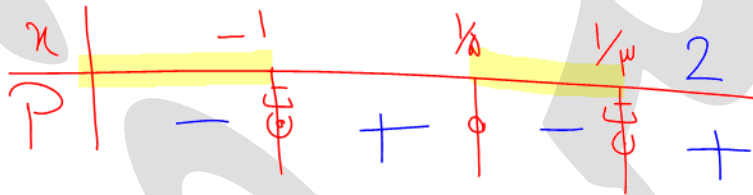
تست



۱- در بازه (a, b) از اعداد حقیقی مثبت، حاصل $P = \frac{2-x}{x+1} - \frac{3x}{1-3x}$ منفی است. حداکثر $b-a$ کدام است؟

$$\frac{2-x}{x+1} - \frac{3x}{1-3x} < 0 \Rightarrow \frac{(2-x)(1-3x) - (x+1)(3x)}{(x+1)(1-3x)} < 0$$

$$\frac{(2-4x-x+3x^2) - (3x^2+3x)}{(x+1)(1-3x)} < 0 \Rightarrow \frac{-10x+2}{(x+1)(1-3x)} < 0$$



(1) $\frac{1}{5}$

(2) $\frac{2}{15}$

(3) $\frac{1}{3}$

(4) $\frac{4}{15}$

$(\frac{1}{5}, \frac{1}{3})$

$b-a = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

۲- با فرض $P(x) = \frac{2x-5}{x-1}$ در کدام بازه از x عبارت $P-1$ مثبت و $P-3$ منفی است؟

$$P-1 = \frac{2x-5}{x-1} - 1 > 0 \quad x=0 \quad \frac{-5}{-1} - 1 > 0 \quad \text{OK}$$

$$P-3 = \frac{2x-5}{x-1} - 3 < 0 \quad x=0 \quad \frac{-5}{-1} - 3 < 0 \quad \text{No}$$

(1) $x < 4$

(2) $x > -2$

(3) $-2 < x < 4$

(4) $\mathbb{R} - [-2, 4]$

$x=0$ نباید در جواب درست موجود باشد

x	1
P ₁	+

موافق a مخالف a

۳- اگر جدول تعیین علامت عبارت $P_1 = ax + b + 1$ به صورت

باشد، جدول تعیین علامت عبارت $P_2 = ax^2 + bx + 1$ کدام است

$$a(1) + b + 1 = 0 \rightarrow a + b = -1$$

یک عدد منفی $a \rightarrow$

x	1
P ₂	-

$$ax^2 + bx + 1 = 0 \quad a + b + 1 = 0$$

مجموع ضرایب
بسیار منفی است

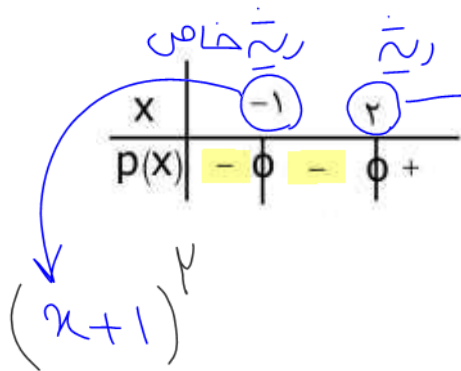
$$\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = \frac{1}{a} < 0 \end{cases}$$

x	1
P ₂	+

x	1
P ₂	-

x	1
P ₂	+

۴- جدول تعیین علامت $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ به شکل زیر است. حاصل $2a + b$ کدام است؟



$$P(x) = 2(x+1)^2(x-2)$$

۱ (۱)

۲ (۲)

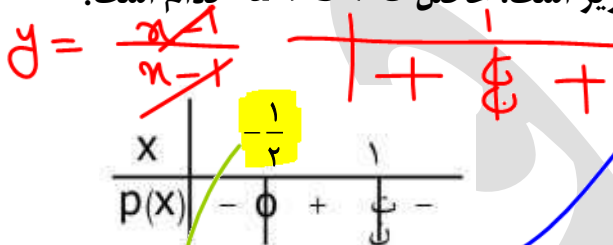
۳ (۳)

۴ (۴)

$$P(x) = 2(x^2 + 2x + 1)(x - 2)$$

$$P(x) = 2(x^3 - \cancel{2x^2} + \cancel{2x^2} - 2x + x - 2) = 2(x^3 - 3x - 2) = 2x^3 - 6x - 4$$

۵- جدول تعیین علامت $P(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{cx + 4}$ به شکل زیر است. حاصل $a + b + c$ کدام است؟



$$c(1) + 4 = 0$$

$$c = -4$$

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

اگر $x = -\frac{1}{2}$ ریشه مضاعف صورت است چنانچه در اطراف آن تغییر علامت داریم.
ممکن است $x = 1$ ریشه مشترک صورت و مخرج باشد که در این صورت باید در اطراف $x = 1$ تغییر علامت رخ نمی‌دارد.
در نتیجه مشخص می‌شود صورت درجه اول است و $a = 0$

$$f(x) = \frac{bx + 1}{-4x + 4}$$

$$b(-\frac{1}{2}) + 1 = 0 \rightarrow b = 2$$

$$a + b + c = -2$$

نامساوی و نامعادله ها:

در نامعادله ها اجازه معکوس کردن طرفین، به توان زوج رساندن طرفین، قدر مطلق گرفتن از طرفین و طرفین وسطین کردن طرف های نامعادله را نداریم. $a < b \not\Rightarrow |a| < |b|$ $a < b \not\Rightarrow a^2 < b^2$ $a > b \not\Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

اگر طرفین هم علامت باشند به شرط رعایت کردن علامت عبارت ها در پایان و عوض کردن طرفین نامعادله اجازه

عکس کردن طرفین را داریم.

چون $\frac{1}{x}$ از سه بزرگ تر است پس $\frac{1}{x}$ مثبت است

یادت نره $x < \frac{1}{3}$

$\frac{1}{x} > 3 \Rightarrow \frac{1-3x}{x} > 0$

$1-3x$	+	0	+	-
x	-	0	+	+

$x < \frac{1}{3}$

اگر طرفین هم علامت باشند و مثبت، گرفتن قدرمطلق و توان زوج رساندن مجاز است ولی اگر طرفین هردو منفی باشند به شرط تغییر جهت نامعادله مجاز به این دو کار هستیم.

چون x کوچک تر از -3 است پس منفی است

$x < -3 \Rightarrow x^2 > 9$

چون x کوچک تر از -3 است پس منفی است

$x < -3 \Rightarrow |x| > 3$

هنگام طرفین وسطین کردن نامعادله نیز اگر هریک از مخرج هایی که ضرب می شوند منفی باشند، به ازای هر کدام شان یک بار جهت نامعادله را عوض می کنیم. برای نمونه اگر هردو منفی باشند باید دو بار جهت را عوض کنیم که به حالت اول خود باز می گردد.

$-\frac{3}{2} > -\frac{5}{3} \Rightarrow -\frac{3}{2} > -\frac{5}{3} \Rightarrow -9 > -10$

تعیین علامت و نامعادله

در نامعادله $P(x) < Q(x)$ علامت طرفین یا یکی از طرفین نا مشخص باشد بهترین کار این است که یکی از عبارت ها را به طرف دیگر ببریم $P(x) - Q(x) < 0$ و عبارت حاصل را تعیین علامت کنیم.

به مثال های زیر توجه کنید:



$$\frac{x}{2x+1} \leq \frac{1}{x+2} \rightarrow \frac{x}{2x+1} - \frac{1}{x+2} \leq 0 \rightarrow \frac{x(x+2) - (2x+1)}{(2x+1)(x+2)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + 2x - 2x - 1}{(2x+1)(x+2)} \leq 0 \rightarrow \frac{x^2 - 1}{(2x+1)(x+2)} \leq 0$$

$$(x-1)(x+1) \leq 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$2x+1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$x+2 = 0 \rightarrow x = -2$$

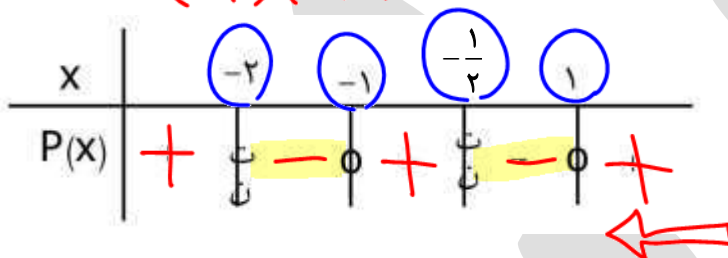
ساده

ساده

ساده

حال جدول تعیین علامت تستی عبارت را رسم می کنیم.

دعاواه
 $x=2 \rightarrow \frac{4-1}{(4+1)(2+2)} > 0$



جواب نهایی $x \leq -\frac{1}{2}$ یا $-2 < x \leq -1$ است.

مثال: مجموعه جواب نامعادله $\frac{x}{x-1} < \frac{3}{x^2+x-2}$ کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

$$(-2, +\infty) \quad (4)$$

$$(-\infty, -3) \cup (1, +\infty) \quad (3)$$

$$(-2, 1) \quad (2)$$

$$(-3, -2) \quad (1)$$

نامعادله را تا حد ممکن ساده می کنیم.

در جواب درست نباید $x=0$ موجود باشد.

$$x=0 \Rightarrow \frac{0}{0-1} < \frac{3}{0+0-2} \rightarrow 0 < -\frac{3}{2}$$

در جواب درست نباید $x=2$ موجود باشد.

$$x=2 \Rightarrow \frac{2}{2-1} < \frac{3}{2+2-2} \Rightarrow 2 < \frac{3}{2}$$

$$\frac{x}{x-1} - \frac{3}{x^2+x-2} < 0 \rightarrow \frac{x}{x-1} - \frac{3}{(x-1)(x+2)} < 0 \rightarrow$$

$$\frac{x(x+2)-3}{(x-1)(x+2)} < 0 \rightarrow \frac{x^2+2x-3}{(x-1)(x+2)} < 0 \rightarrow \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)} < 0$$

$$\frac{x+3}{x+2} < 0$$

با شرط $x \neq 1$ عبارت $x-1$ را از صورت و مخرج ساده می کنیم.

ریشه های $x = -2$ و $x = -3$ مربوط به صورت و مخرج را روی جدول پیاده می کنیم.

x		-3	-2	
$\frac{x+3}{x+2}$		+	-	+

با دادن $x = 10$ به عبارت علامت آن را در خانه آخر قرار می دهیم و به عقب بر می گردیم در این عبارت همه ریشه ها ساده اند بنابراین علامت در ریشه ها تغییر می کند.

جواب تست گزینه اول است.

نامعادله های مهم :

$$1) |x| \geq k \xrightarrow{k \geq 0} \begin{cases} x \geq k \\ x \leq -k \end{cases}$$

$|x| > 5 \rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x < -5 \end{cases}$

$$2) |x| \leq k \xrightarrow{k \geq 0} -k \leq x \leq k$$

$|x| \leq 5 \rightarrow -5 \leq x \leq 5$

$$3) x^2 \geq k \xrightarrow{k \geq 0} \begin{cases} x \geq \sqrt{k} \\ x \leq -\sqrt{k} \end{cases}$$

$x^2 > 25 \rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x < -5 \end{cases}$

$$4) x^2 \leq k \xrightarrow{k \geq 0} -\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}$$

$x^2 \leq 25 \rightarrow -5 \leq x \leq 5$

در صورت منفی بودن k جواب نامعادله ها بریهی یا غیر ممکن می شود.

$$|x| > -3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$|x| < 0 \rightarrow \emptyset$$

$$x^2 \geq 0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x^2 < -2 \rightarrow \emptyset$$

در برخی موارد که k برابر صفر است ممکن است جواب به صورت تک نقطه ای یا $\mathbb{R}$ به جز چند تک نقطه ای در آید.

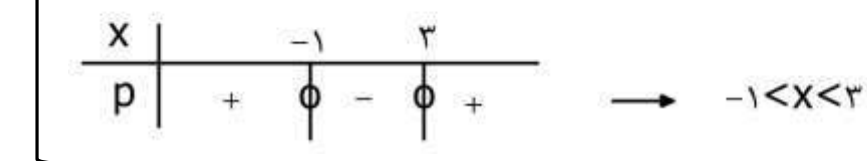
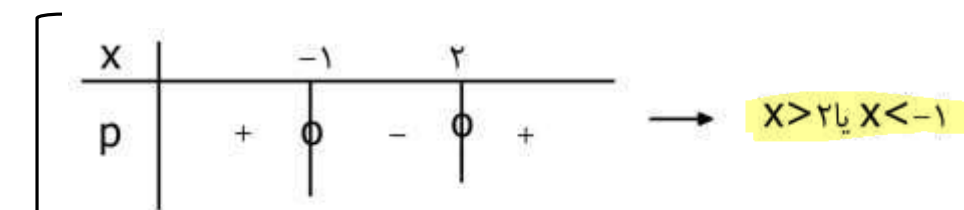
$$|x - 2| \leq 0 \rightarrow x = 2$$

$$|x^2 - 1| < 0 \rightarrow \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

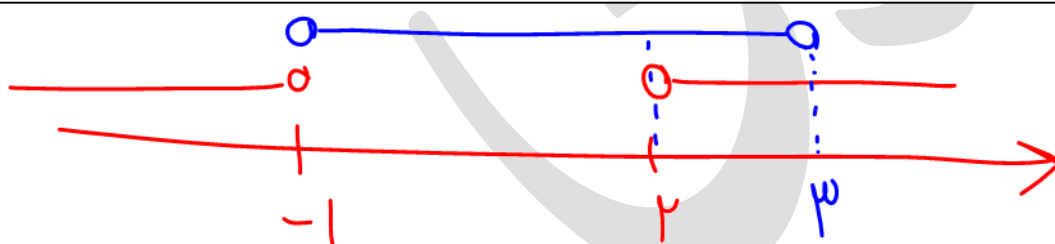
نامعادله دو گانه:

نامعادله به شکل $Q(x) < A < P(x)$ را نامعادله دو گانه می نامیم و روش حل کلی آن حل دو نامعادله سمت چپی و راستی و اشتراک آن هاست. برای نمونه به نامعادله زیر توجه کنید.

$$x + 2 < x^2 < 2x + 3 \rightarrow \begin{cases} x + 2 < x^2 \\ x^2 < 2x + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ x^2 - 2x - 3 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x - 2)(x + 1) > 0 \\ (x - 3)(x + 1) < 0 \end{cases}$$



اشتراک ۲ مجموعه برابر $2 < x < 3$ است.



نکته:



در نامعادله های دو گانه که طرفین نامعادله دو عدد باشد با کم کردن میانگین دو عدد از طرفین نامعادله می توانیم آن را به نامعادله قدر مطلق تبدیل کنیم و با توجه به صفر نشدن مخرج، آن را طرفین وسطین کنیم.

$$-1 < \frac{2x+1}{x-1} < 5 \rightarrow -1 - 2 < \frac{2x+1}{x-1} - 2 < 5 - 2 \rightarrow -3 < \frac{3}{x-1} < 3 \rightarrow$$

$$\left| \frac{3}{x-1} \right| < 3 \xrightarrow{\div 3} \left| \frac{1}{x-1} \right| < 1 \xrightarrow{x \neq 1} |x-1| > 1 \rightarrow \begin{cases} x-1 > 1 \\ x-1 < -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$-1 = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow 2x+1 = -x+1 \rightarrow 3x=0 \rightarrow x=0$$

$$\frac{2x+1}{x-1} = 5 \Rightarrow 2x+1 = 5x-5 \rightarrow 3x=6 \rightarrow x=2$$



درست $x < 0$ یا $x > 2$

۶- مجموعه جواب نامعادله $\frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2$ برابر بازه (a, b) می باشد. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

$$\frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2 \Rightarrow 3x^2-2x < 2(x^2+4) \Rightarrow 3x^2-2x < 2x^2+8 \Rightarrow x^2-2x-8 < 0$$

$$(x-4)(x+2) < 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$x=4 \quad x=-2$$

$$(-2, 4) \Rightarrow b-a=4-(-2)=6$$

۴ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

$+\infty$ (۴)

	-2	4
x^2-2x-8	+	-

۷- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x-1}{x+1} > 2x$ کدام مجموعه است؟

$$x=0 \Rightarrow \frac{0-1}{0+1} > 2(0) \Rightarrow -1 > 0 \quad \times$$

در گزینه درست نباید $x=0$ موجود باشد.

$$x=-3 \Rightarrow \frac{-3-1}{-3+1} > 2(-3) \Rightarrow 2 > -6 \quad \checkmark$$

در گزینه درست باید $x=-3$ موجود باشد.

(۱) $(-\infty, -1)$

(۲) $(-1, +\infty)$

(۳) $(-1, 1)$

(۴) $(-2, -1)$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

به صورت (a, b) است. مقدار $\frac{a+b}{2}$ کدام است؟

$$-(x^2 - 3x + 2)$$

۸- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2 + 3x - 2}{x^3 - 1} > 1$

(سنجش ۱۴۰۰)

$$\frac{-(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$x \neq 1$$

$$\frac{-(x-2)}{x^2+x+1} > 1$$

(۱) $-\frac{1}{2}$

(۲) -1

(۳) $\frac{1}{10}$

قسمت چاق انتعار چاق ولاغر ریشه ندارد $(\Delta = 1^2 - 4(1)(1) = -3)$ و عبارت درجه دومی که ریشه ندارد همواره موافق علامت منسوب x^2 است پس قسمت چاق همواره مثبت است.

$$-(x-2) > x^2+x+1 \rightarrow -x+2 > x^2+x+1 \rightarrow x^2+2x-1 < 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{(-1-\sqrt{2}) + (-1+\sqrt{2})}{2} = -1$$

۹- مجموعه جواب نامعادله $\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2}$ به صورت بازه، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

دلخواه

$$x=0 \rightarrow \frac{-8}{-2} > \frac{0}{-2} \rightarrow 4 > 0 \quad OK$$

$x=0$ باید در گزینه‌های درست من موجود باشد.

(۱) $(-4, 2) \cup (2, 4)$

(۲) $(2, 4)$

(۳) $(-1, 2) \cup (2, 4)$

(۴) $(-1, 1)$

ع
النسب
کنکور

$$x=-2 \rightarrow \frac{-12-8}{4+2-2} > \frac{-2}{-2-2} \rightarrow \frac{-20}{2} > \frac{1}{2} \quad NO$$

$x=-2$ نباید در گزینه‌های درست موجود باشد.

$$x=3 \rightarrow \frac{21-8}{9-3-2} > \frac{3}{3-2} \rightarrow \frac{13}{4} > 3 \quad OK$$

$x=3$ باید در گزینه‌های درست موجود باشد.

۱۰- مجموعه جواب نامعادله $\frac{2x^2-|x|-6}{-3x^2+2x-6} \leq 0$ با مجموعه جواب کدام نامعادله یکسان است؟

درگزینه

$$x=0 \rightarrow \frac{-6}{-6} \leq 0 \rightarrow 1 \leq 0 \quad NO$$

$x=0$ در گزینه‌های درست نباید موجود باشد.

(قلم چی ۱۴۰۰)

(۱) $|x| \leq 2$

(۲) $|x| \leq \frac{3}{2}, |x| \geq 2$

(۳) $|x| \geq 2$

(۴) $|x| \leq \frac{3}{2}$

حل $|x|^2 = |x|^2 = x^2 \Rightarrow \frac{2x^2-|x|-6}{-3x^2+2x-6} \leq 0 \Rightarrow \frac{2|x|^2-|x|-6}{-3x^2+2x-6} \leq 0$

ضرب -12 $\Rightarrow \frac{2|x|^2-|x|-6}{-3x^2+2x-6} \leq 0 \Rightarrow \frac{2|x|^2-|x|-6}{-3x^2+2x-6} \leq 0$

روسی انرژی $\frac{1}{2} \frac{(2|x|-6)(2|x|+3)}{-(3x^2-2x+6)} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{(2|x|-6)(2|x|+3)}{-(3x^2-2x+6)} \leq 0$

همواره موقوع ضرب $x^2 \rightarrow \Delta = 4 - 4(3)(6) < 0 \rightarrow$

$\Rightarrow 2|x|-6 > 0 \rightarrow |x| > 3$

۱۱- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2 + ax + b}{x + c} \geq 0$ به صورت $[-7, -3) \cup [2, +\infty)$ حاصل $a + b + c$ کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

$$-3 + c = 0 \rightarrow c = 3$$

من دوست دارم $\Rightarrow \frac{(x+7)(x-2)}{x+3} = \frac{x^2 + ax - 14}{x+3}$

$$a + b + c = 5 + (-14) + 3 = -6$$

(۱) -۸

(۲) -۶

(۳) صفر

(۴) -۵

۱۲- اگر جواب نامعادله $\frac{x+b}{2ax-3} > 0$ به صورت $(-1, 5)$ باشد حاصل ab کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰) (برای علاقه مندان)

عرد منفی $\Rightarrow$ $\frac{x+b}{2ax-3} > 0$ $\Rightarrow$ $(-1, 5)$

$x=0$ عضو بازه جواب است پس باید در نامعادله صادق باشد.

$$x=0 \rightarrow \frac{0+b}{0-3} > 0 \rightarrow -\frac{b}{3} > 0 \rightarrow b < 0$$

$$5 + b = 0 \rightarrow b = -5$$

$$\rightarrow ab = \frac{15}{2}$$

$$2a(-1) - 3 = 0 \rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

(۱) $\frac{3}{10}$

(۲) -۵

(۳) $\frac{15}{2}$

(۴) $-\frac{15}{2}$

۱۳- مجموعه جواب نامعادله $\langle \frac{2x-1}{x+1}, -1 \rangle$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

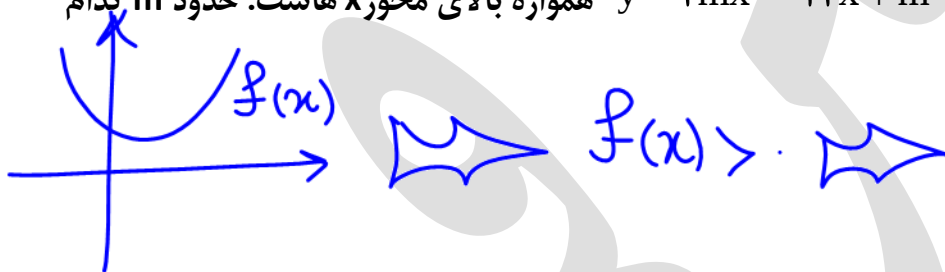
$$-1 = \frac{2x-1}{x+1} \rightarrow -x-1 = 2x-1 \rightarrow x=0 \quad (1) \quad (0, +\infty)$$

$$(2) \quad (4, +\infty)$$

$$\frac{2x-1}{x+1} = 3 \rightarrow 2x-1 = 3x+3 \rightarrow x=-4 \quad (3) \quad \mathbb{R} - [-4, 0]$$

$$(4) \quad \mathbb{R} - [-4, -1]$$

۱۴- نمودار سهمی به معادله $y = 2mx^2 - 12x + m - 3$ همواره بالای محور x هاست. حدود m کدام است؟



$$2mx^2 - 12x + m - 3 > 0$$

درجه دومی همواره مثبت است که ریشه نداشته باشد ($\Delta < 0$) و ضریب آن مثبت باشد

$$(1) \quad \langle m, 6 \rangle$$

$$(2) \quad \langle m, 3 \rangle$$

$$(3) \quad m > 3$$

$$(4) \quad m > 6$$

$$\Delta < 0 \rightarrow (-12)^2 - 4(2m)(m-3) < 0 \rightarrow 144 - 8m(m-3) < 0 \xrightarrow{\div 8} 18 - m(m-3) < 0$$

$$a > 0 \rightarrow 2m > 0 \rightarrow m > 0$$

$$m=1 \rightarrow 18 - 1(1-3) < 0$$

$$m=4 \rightarrow 18 - 4(4-3) < 0$$

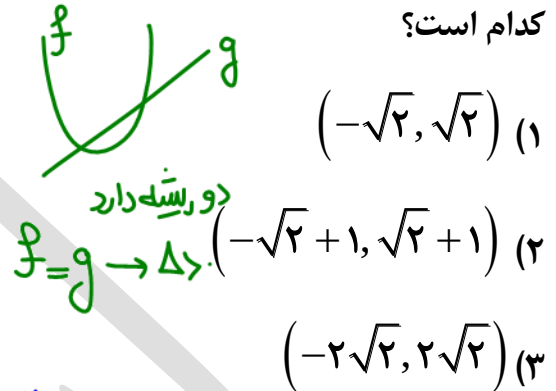
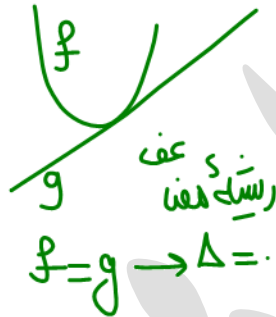
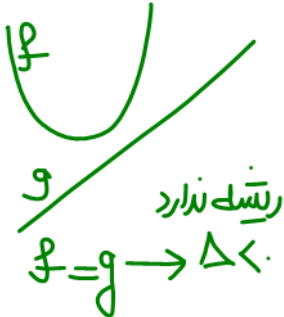
سه جایی توانیم عددها را جایشان را عوض کنیم.

$$|a-b| = |b-a|$$

$$(a-b)^2 = (b-a)^2$$

$$\cos(a-b) = \cos(b-a)$$

۱۵- نمودار تابع $y = x^2 + x + 3$ خط $y = mx + 1$ را قطع نمی کند. بزرگ ترین بازه m کدام است؟



$$(1) (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$(2) (-\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1)$$

$$(3) (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$$

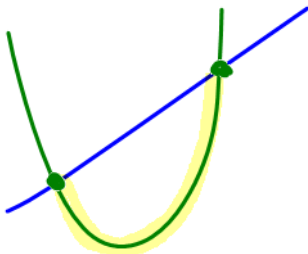
$$x^2 + x + 3 = mx + 1 \Rightarrow x^2 + (1-m)x + 2 = 0$$

$$\Delta < 0 \rightarrow (1-m)^2 - 8 < 0 \rightarrow (1-m)^2 < 8 \rightarrow \sqrt{(m-1)^2} < \sqrt{8} \Rightarrow |m-1| < \sqrt{8}$$

$$|m-1| < 2\sqrt{2} \rightarrow -2\sqrt{2} < m-1 < 2\sqrt{2} \xrightarrow{+1} -2\sqrt{2}+1 < m < 2\sqrt{2}+1$$

$$(4) (-2\sqrt{2}+1, 2\sqrt{2}+1)$$

۱۶- نمودار سهمی $y = x^2 + 7x - 8$ در بازه (a, b) زیر خط $y = 3x - 3$ قرار می گیرد. حدود



$$x^2 + 7x - 8 < 3x - 3$$

$$x^2 + 4x - 5 < 0 \rightarrow (x+5)(x-1) = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$x = -5 \quad 1$$

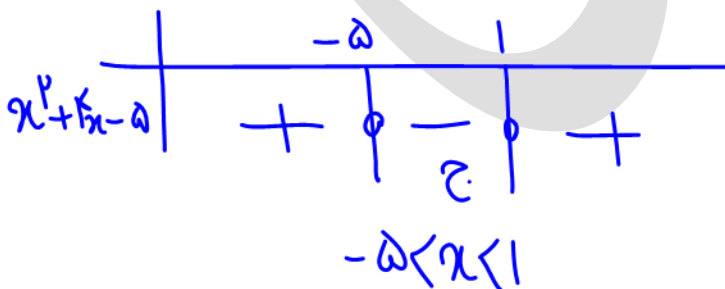
x در کدام بازه است؟

$$(1) (-5, 1)$$

$$(2) (-4, 2)$$

$$(3) (-1, 5)$$

$$(4) (-4, 3)$$



معادله های گویا :

برای حل این معادله ها، بهتر است طرفین را در ک.م.م مخرج ها ضرب کنیم و معادله را حل کنیم. در پایان نیز ریشه های به دست آمده را کنترل کنیم تا مبدا مخرج کسرهای معادله اولیه را صفر نکند.

تست



۱۷- جواب یا جواب های معادله $\frac{x-1}{x+3} = \frac{-x-4}{x^2+5x+6}$ چگونه اند؟

$$\frac{(x-1)(x+2) - 2(x+3)}{(x+3)(x+2)} = \frac{-x-6}{x^2+5x+6}$$

$$\frac{x^2+x-2-2x-6}{x^2+5x+6} = \frac{-x-6}{x^2+5x+6} \Rightarrow x^2-x-8 = -x-6$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm 2 \Rightarrow x = 2$$

$x = -2$ مخرج کسر دوم را صفر می کند و غیر قابل قبول است

(۱) یک جواب مثبت دارد.

(۲) دو جواب قرینه دارد.

(۳) یک جواب منفی دارد.

(۴) دو جواب منفی دارد.

۱۸- اگر a ریشه معادله $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+5}$ باشد، حاصل $\frac{4a+1}{a}$ کدام است؟

(قلم چی ۹۹)

$$\frac{(x+1) + (x+3)}{(x+3)(x+1)} = \frac{(x+5) + (x-1)}{(x-1)(x+5)} \Rightarrow \frac{2x+4}{x^2+4x+3} = \frac{2x+4}{x^2+4x-5}$$

$$\frac{1}{x^2+4x+3} = \frac{1}{x^2+4x-5} \rightarrow x^2+4x+3 = x^2+4x-5 \rightarrow 3 = -5$$

(۱) ۱/۵
(۲) ۲/۵
(۳) ۳/۵
(۴) ۴/۵

$$2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \rightarrow x=-2$$

در هر معادله ای، هرگاه از طرفین عبارتی را ساده کردیم آن را برابر صفر می گذاریم:

$$\frac{4a+1}{a} = \frac{4(-2)+1}{-2} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$$

معادلات خاص گویا :

الف) پارامتری:

در این معادله ها که به جز x پارامتر دیگری مانند a وجود دارد به طوری که یک ریشه معادله داده می شود و ریشه دیگر خواسته می شود.

روش حل نیز به این گونه است که ابتدا با جای گذاری x مقدار a را می یابیم و با قرار دادن a معادله تکمیل می شود و همه ریشه ها پیدا می شوند.

تست



۱۹- اگر $x = 2$ جواب معادله $\frac{x+8}{a-1} - \frac{x+4}{a+1} = \frac{x+2}{a-3}$ باشد. مقدار a کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

$$x=2 \rightarrow \frac{10}{a-1} - \frac{6}{a+1} = \frac{4}{a-3} \xrightarrow{\div 2} \frac{5}{a-1} - \frac{3}{a+1} = \frac{2}{a-3}$$

$$\frac{5(a+1) - 3(a-1)}{a^2-1} = \frac{2}{a-3} \xrightarrow{\text{cross}} \frac{2a+8}{a^2-1} = \frac{2}{a-3}$$

$$(2a+8)(a-3) = 2(a^2-1) \rightarrow 2a^2-6a-24 = 2a^2-2 \rightarrow -6a-22 = 0 \rightarrow a = -\frac{11}{3}$$

۱۰ (۱)
۱۲ (۲)
۱۱ (۳)
۱۳ (۴)

۲۰- اگر $x = 4$ یک جواب معادله $\frac{x-a}{x^2-x-6} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{a-1}{2x-4}$ باشد. جواب دیگر آن کدام است؟

$$\frac{4-a}{14-4-6} - \frac{1}{14-4} = \frac{a-1}{4} \xrightarrow{\text{cross}} \frac{4-a}{4} - \frac{1}{12} = \frac{a-1}{4}$$

$$\frac{1-2a-1}{12} = \frac{3a-3}{12} \xrightarrow{\text{cross}} 1-2a = 3a-3 \xrightarrow{\text{cross}} 5a = 4 \rightarrow a = \frac{4}{5}$$

$$\frac{x-4}{x^2-x-6} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{2x-4} \xrightarrow{x=5} \frac{1}{14} - \frac{1}{21} = \frac{1}{6}$$

۳ (۱)
۵ (۲)
۲ (۳)
۴ (۴) جواب دیگری ندارد.

$$\frac{9-4}{4 \times 7} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{cross}} \frac{5}{4 \times 7} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{cross}} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

ب) بحث راجع به معادله به کمک پارامتر

در این معادله ها که پارامتری مانند a در آن ها وجود دارد، به کمک a سوالاتی راجع به جواب داشتن یا نداشتن، ریشه مضاعف داشتن، تعداد ریشه های معادله و یا حتی راجع به چند شدن مجموع یا تفاضل یا ضرب ریشه ها پرسیده می شود.

تست



۲۱- به ازای کدام مقدار a معادله $\frac{a+1}{x-x^2} + \frac{1}{x-1} = 1$ ریشه مضاعف دارد؟

$$\frac{a+1}{x(1-x)} + \frac{1}{x-1} = 1 \Rightarrow \frac{-a-1}{x(x-1)} + \frac{1}{x-1} = 1 \Rightarrow$$

~~(۱) صفر~~
۱ (۲)

$$\frac{-a-1+x}{x(x-1)} = 1 \Rightarrow -a-1+x = x(x-1)$$

(۳) مقداری برای a یافت نمی شود

۲ (۴)

$$-a-1+x = x^2-x \Rightarrow x^2-2x+a+1=0 \Rightarrow \Delta=0 \rightarrow$$

$$(-2)^2 - 4(1)(a+1) = 0 \rightarrow 4 - 4(a+1) = 0 \rightarrow a = 0$$

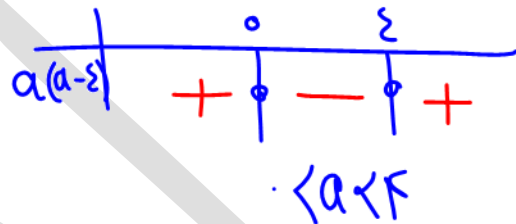
ریشه خارج
و غیر قابل قبول
 $x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$

۲۲- به ازای چند مقدار صحیح a ، معادله $\frac{x}{x-1} = \frac{a}{x}$ جواب ندارد؟

$$x^2 = a(x-1) \Rightarrow x^2 - ax + a = 0 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow \quad 3(1)$$

$$a^2 - 4a < 0 \Rightarrow a(a-4) < 0 \quad 6(2)$$

$a(a-4)$
 $\downarrow$ منفی
 $\downarrow$ $a=4$



4(3)

5(4)

علاوه بر -
 منفی بودن دلتا را نشانه های معادله $x^2 - ax + a = 0$ نباید
 منفی می کنند
 این دو عدد منفی را

$$x=1 \rightarrow 1 - a + a = 0 \rightarrow 1 = 0$$

$$x=0 \rightarrow 0 - 0 + a = 0 \rightarrow a = 0$$

علاوه بر $0 < a < 4$ مقدار a اگر منفی هم باشد معادله ریشه ندارد
 $a \in \{0, 1, 2, 3\}$

(پ) مجهول معاون:

در بسیاری از تست های پیچیده با فرض کردن یک عبارت به عنوان مجهول جدید، معادله بسیار ساده می شود.



۲۳- معادله $\frac{1}{x^2-3x-2} + \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x^2-3x}$ چند جواب حقیقی دارد؟

$x^2-3x=A \Rightarrow \frac{1}{A-2} + \frac{1}{A+2} = \frac{1}{A}$ (۱) صفر

$\frac{(A+2)+(A-2)}{A^2-4} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{2A}{A^2-4} = \frac{1}{A} \Rightarrow 2A^2 = A^2-4$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$A^2 = -4 \Rightarrow$ معادله ریشه ندارد.

۲۴- معادله $x^2 + \frac{9}{x^2-1} = k$ فقط یک جواب دارد. مقدار k کدام است؟

$x^2-1=A \rightarrow x^2=A+1$ (۱) ۷ یا -۵

$A+1 + \frac{9}{A} = k \rightarrow \frac{A^2+A+9}{A} = k \rightarrow$ (۲) ۷ یا -۳ (۳) ۲ یا -۵

$A^2+A+9=kA \rightarrow A^2+(1-k)A+9=0 \rightarrow \Delta=0 \rightarrow$ (۴) ۲ یا -۳

$(1-k)^2-36=0 \rightarrow (k-1)^2=36 \rightarrow k-1=\pm 6 \rightarrow$

$k=7, -5$

ت) مساله های پلنگ صورتی :

در این سوال ها توان هر فرد را از فرمول فیزیکی $P = \frac{W}{t}$ که W در ان کار و t زمان انجام آن است محاسبه می کنیم، با فرض این که دو نفر A و B کاری را باهم انجام دهند مجموع توان های آن ها توان کل را می سازد.

$$P_A + P_B = P_S$$

بهتر است کار را در همه مساله ها یک در نظر بگیریم.

نکته:



در تست هایی که بعد از گذشت زمانی یکی از عوامل از دور خارج یا عامل جدیدی به مجموعه اضافه می شود بهتر است از فرمول طرفین وسطین شده توان به شکل زیر استفاده کنیم.

$$Pt = W$$

با توجه به توان ها و زمان های متفاوت و این که کار را یک فرض می کنیم:

$$P_1 t_1 + P_2 t_2 + \dots = 1$$



۲۵- پلنگ صورتی دیواری را در ۴ روز رنگ می کند و دشمن وی آن دیوار را در ۶ روز رنگ می کند. اگر هر دو با هم دیوار را به رنگ صورتی درآورند، کار رنگ آمیزی چند روز طول می کشد؟

(۱) ۲ روز

(۲) ۲/۴ روز

(۳) ۲/۸ روز

(۴) ۳ روز

۲۶- اگر پلنگ صورتی دیواری را در ۴ روز به رنگ صورتی در آورد و دشمن وی نیز در ۶ روز دیوار را به رنگ آبی در آورد، با رنگ آمیزی هر دو چند روز طول می کشد تا پلنگ صورتی موفق شود دیوار را صورتی کند؟

(۱) ۸ روز

(۲) ۱۰ روز

(۳) ۱۲ روز

(۴) ۱۴ روز

۲۷- محمد و علی برای چیدن دیواری به کار گرفته شده اند. محمد می تواند ۳ ساعت زودتر از علی دیوار را بچیند. حال اگر این دو با هم کار کنند چیدن دیوار در ۲ ساعت تمام می شود. علی به تنهایی دیوار را در چند ساعت می چیند؟

۴(۱)

۵(۲)

۷(۳)

۶(۴)

۲۸- ماشین A کاری را در ۲۰ دقیقه و ماشین B همان کار را در ۴۰ دقیقه انجام می دهد. اگر هر دو ماشین با هم شروع به کار کنند و بعد از ۵ دقیقه ماشین A خراب شود، ماشین B در چند دقیقه دیگر کار را تمام

می کند؟

۳۰(۱)

۳۵(۲)

۲۵(۳)

۲۰(۴)

۲۹- اگر علی و حامد با هم کار کنند دیواری را در ۱۲ ساعت رنگ می کنند. علی به تنهایی ۴ ساعت و سپس حامد به تنهایی ۶ ساعت کار می کند و روی هم ۴۰ درصد دیوار را رنگ می کنند. علی به تنهایی کل دیوار را در چند ساعت انجام می دهد؟ (گزینه دو ۱۴۰۰)

۴۸(۱)

۳۰(۲)

۲۰ (۳)

۲۵(۴)

۳۰- دو کارگر کاری را باهم در ۱۲ روز تمام می کنند. بعد از ۸ روز کار مشترک یکی از کارگرها، کار را رها کرده و دیگری به تنهایی کار را در ۵ روز تمام می کند. کارگری که کار را رها کرده به تنهایی کار را در چند روز تمام می کند؟

۱۵(۱)

۳۰(۲)

۴۵ (۳)

۶۰(۴)

۳۱- شیر B مربوط به استخری را باز می کنیم و $\frac{6}{5}$ ساعت بعد از باز شدن شیر B، شیر A را نیز در این استخر باز می کنیم. پس از گذشت ۹ ساعت از باز شدن شیر B استخر کامل پر می شود. اگر هر یک از شیرهای آب به تنهایی استخر را پر می کردند شیر B دو ساعت بیش تر وقت لازم داشت. شیر A به تنهایی در چند ساعت استخر را پر می کند؟

۸(۱)

۹(۲)

۱۰(۳)

۱۲(۴)

۳۲- سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۹ متر در دقیقه است. این قایق یک مسیر ۸۰ متری را در جهت موافق جریان آب رفته و در جهت مخالف برگشته است. اگر اختلاف زمان رفت و برگشت ۲ دقیقه باشد سرعت قایق موتوری در مسیر رفت چند متر در دقیقه است؟

۱۰(۱)

۸(۲)

۱۲(۳)

۱۵(۴)

معادله گنگ:

برای حل این معادله ها باید رادیکال را حتی المقدور در یک طرف مساوی تنها کنیم و طرفین را به توان دو یا سه برسانیم این کار تا از بین رفتن رادیکال ها ادامه می دهیم و سپس معادله را حل می کنیم.
دقت کنید که در این معادله ها، باید ریشه های معادله را در اصل آن معادله چک کنیم تا ریشه های اضافه را کنار بگذاریم.

۳۳- اگر $3x = 2 - \sqrt{2x+3}$ باشد حاصل $9x+3$ کدام است؟

۱(۱)

۲(۲)

۳(۳)

۴(۴)

۳۴- اگر یکی از ریشه ای معادله $1 = \sqrt{ax-1} - \sqrt{x+3}$ برابر ۱ باشد، ریشه دیگر کدام است؟ (گاج ۹۹)

۱۳(۱)

۴(۲)

۱۲(۳)

۴) فاقد ریشه دیگر

الف) اعداد نامنفی و مجموع صفر آنها:

هر گاه مجموع چند عبارت نامنفی برابر صفر باشد، تک تک آنها با هم صفر هستند.

۳۵- معادله $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^3 - ax + a - 2} = 0$ فقط یک ریشه دارد. مقدار a کدام است؟

۱(۱)

۳(۲)

۶(۳)

۴) مقداری برای a یافت نمی شود.

ب) مجهول معاون:

در برخی معادله ها با در نظر گرفتن یک عبارت به عنوان مجهول معاون می توان معادله را حل کنیم.

۳۶- حاصل ضرب جواب های معادله $x^2 + 2x + 1 = \sqrt{2x^2 + 4x + 10}$ کدام است؟

۳(۱)

-۴(۲)

-۳(۳)

۴(۴)

۳۷- معادله $x^2 - |x| = 2 + \sqrt{x^2 - |x|}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱(صفر)

۱(۲)

۲(۳)

۳(۴)

پ) حل معادله به کمک دامنه و برد:

گاهی اوقات با تشکیل دامنه رادیکال ها یا برد آن ها می توانیم به یک یا چند عدد برسیم. با چک کردن آن ها در معادله می توانیم به ریشه بودن آن ها پی ببریم.

۳۸—معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + \sqrt{2x-2}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

ت) روش رسم:

هر گاه در تستی تعداد ریشه های معادله را بخواهند و حل معادله دشوار باشد یکی از روش هایی که باید به آن فکر کنید روش رسم است. گاهی اوقات لازم است بخشی از عملیات به توان رساندن را انجام دهیم سپس نمودارها را رسم کنیم.

۳۹- معادله $\frac{2\sqrt{x+1}}{x^2-1} = 1$ چند جواب دارد؟ (گزینه دو ۱۴۰۰)

۱(۱)

۲(۲)

۳(۳)

۴(صفر)

۴۰- معادله $\sqrt{2-\sqrt{2-x}} = x$ چند ریشه دارد؟ (سنجش ۱۴۰۰)

۱(۱)

۲(۲)

۳(۳)

۴(۴)