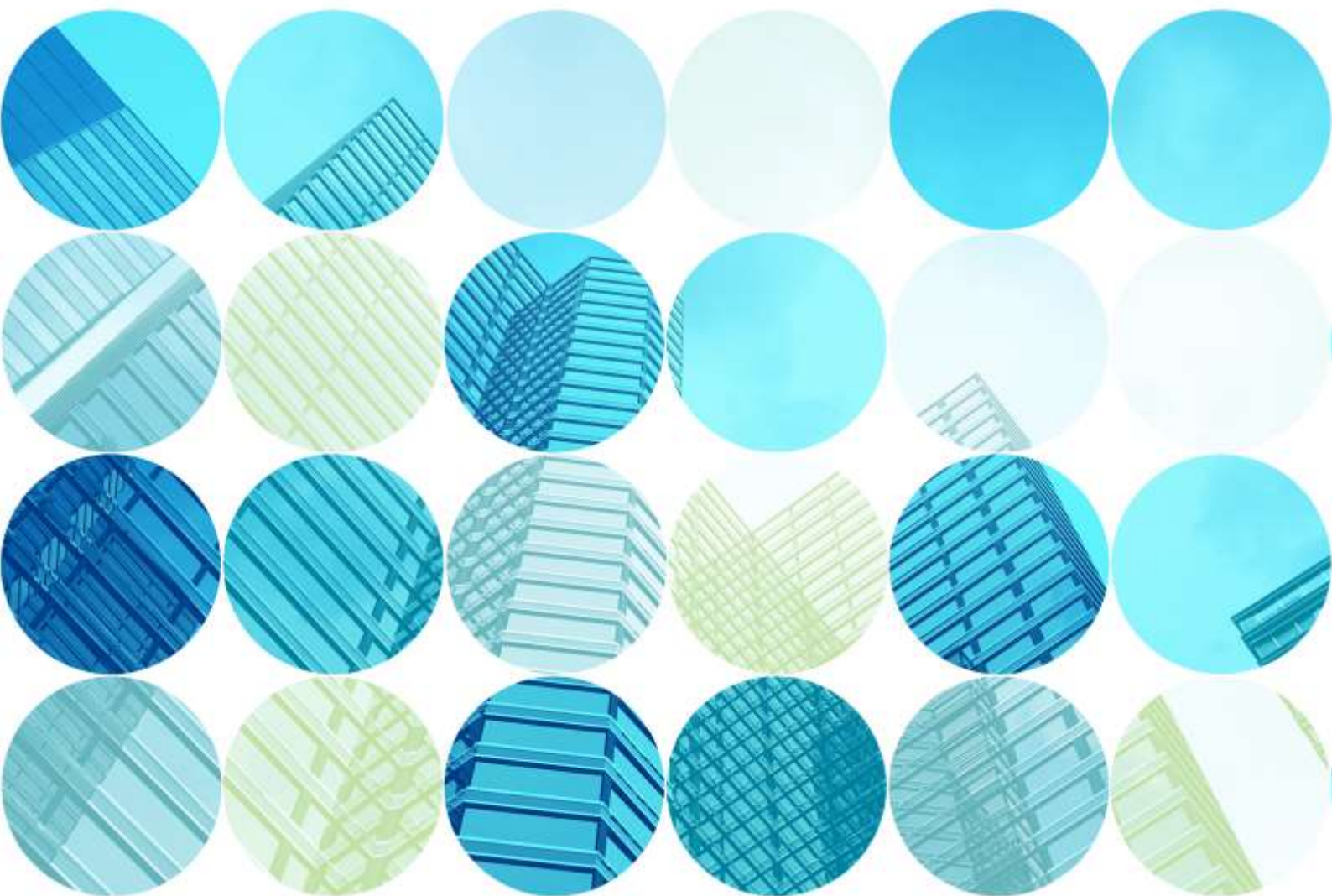


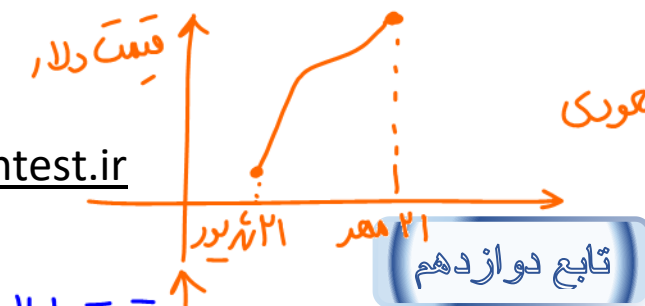
استاد اشرفی

# تابع یکنوایی



اکیداً صعودی

www.mathtest.ir

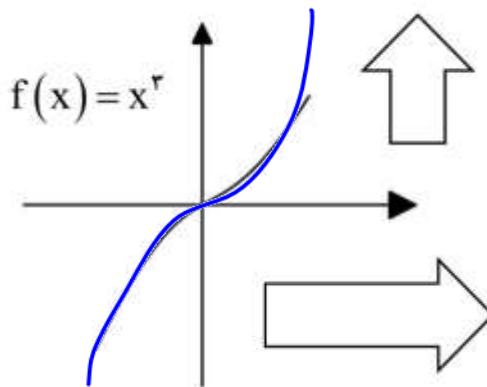
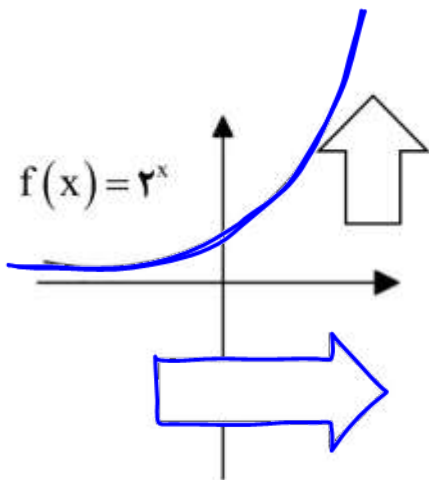


قیمت طلا

اکیداً نزولی

تابع اکیداً صعودی:

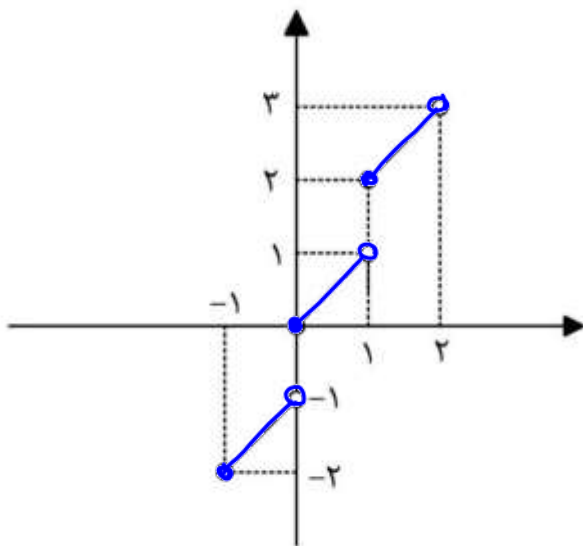
به زبان خودمانی اگر با افزایش  $x$  ها مقادیر  $y$  نیز افزایش پیدا کند آن تابع اکیداً صعودی یا صعودی اکید است. برای نمونه به نمودار دو تابع  $f(x) = 2^x$ ,  $f(x) = x^3$  صعودی اکید هستند.



تابع های اکیداً صعودی می توانند ناپیوسته باشند، مهم این است که روی محور طول ها که از چپ به راست حرکت می کنیم مقادیر  $y$  افزایش یابد.

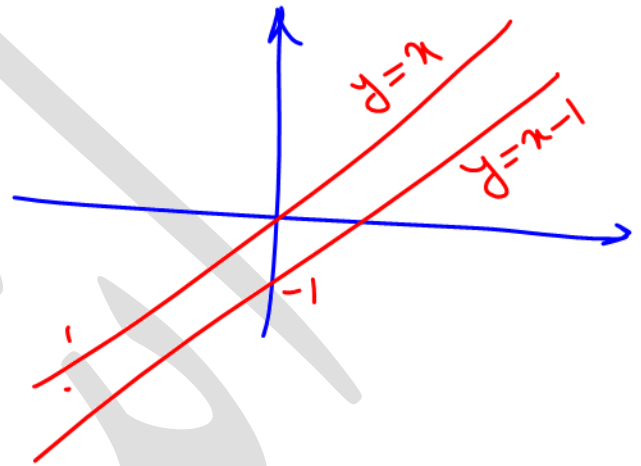
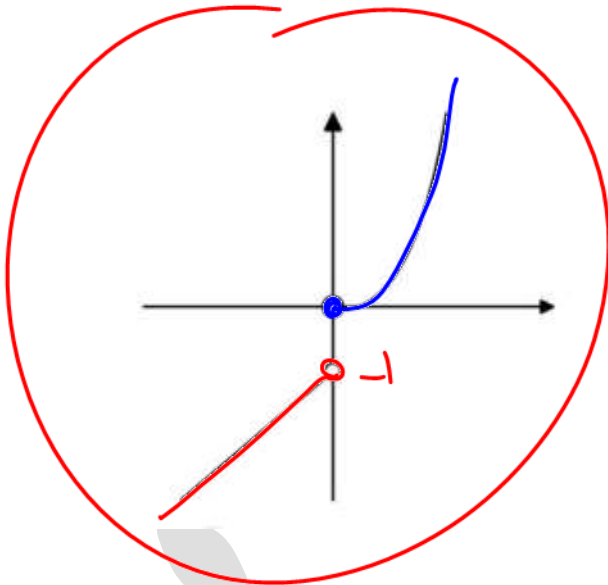
برای نمونه  $f(x) = x + [x]$  را در نظر بگیرید،

نموداری به شکل روبه رو دارد و تابعی اکیداً صعودی است.

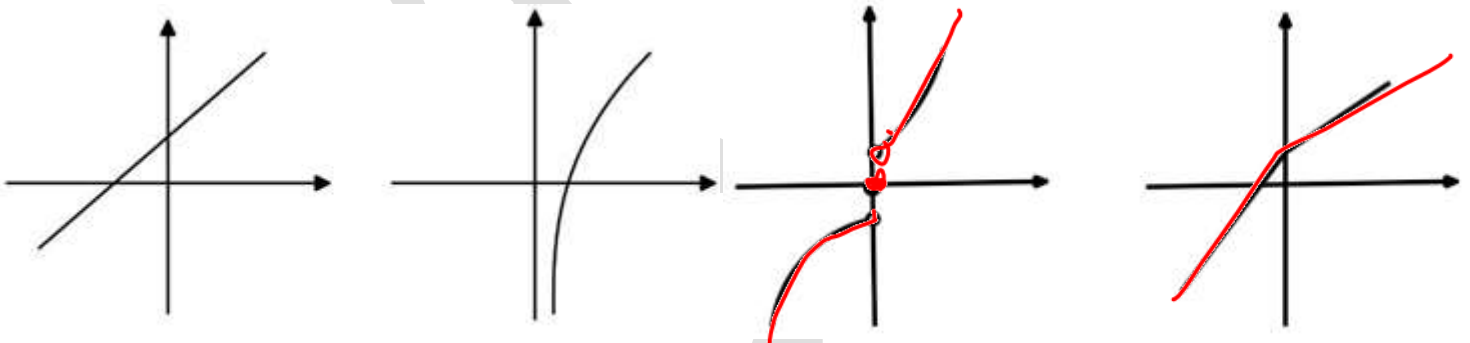


به مثال زیر توجه کنید: 

نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$  را در نظر بگیرید. این تابع نیز اکیداً صعودی است.



نمودارهای زیر نیز نمونه هایی دیگر از تابع های اکیداً صعودی است.



$y = 5x - 3$   
↓  
نسبت مثبت  
خط صعودی اکید →

**نکته:** تابع های خطی در صورتی اکیداً صعودی اند که شیب مثبت باشد.

به زبان علمی، فرض کنیم مجموعه  $a$ ، زیر مجموعه ای از دامنه تابع  $f$  باشد، اگر برای هر دو عضو  $a, b$  در  $a$  که  $a < b$  باشد، آن گاه  $f(a) < f(b)$  تابع  $f$  را روی مجموعه  $a$ ، اکیداً صعودی می گوئیم.

$$a < b \rightarrow f(a) < f(b)$$

$$a > b \rightarrow f(a) > f(b)$$

اکیداً صعودی

هم جهت باشند.

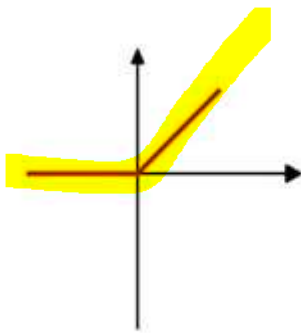
تابع صعودی: هم جهت باشند.

اگر با افزایش  $x$  ها مقادیر  $y$  افزایش یابد یا درجا بزند تابع صعودی است به زبان نمادین اگر  $a < b$  باشد آن گاه

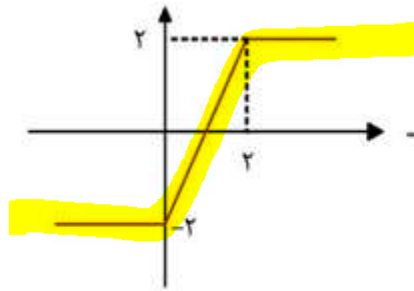
$$a < b \rightarrow f(a) \leq f(b)$$

یعنی

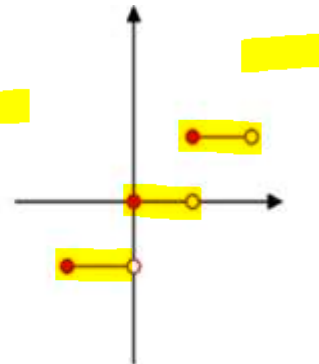
$$f(a) \leq f(b)$$



$$f(x) = x + |x|$$



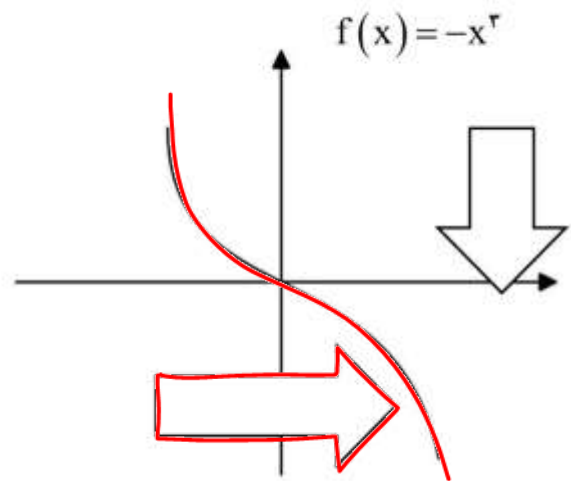
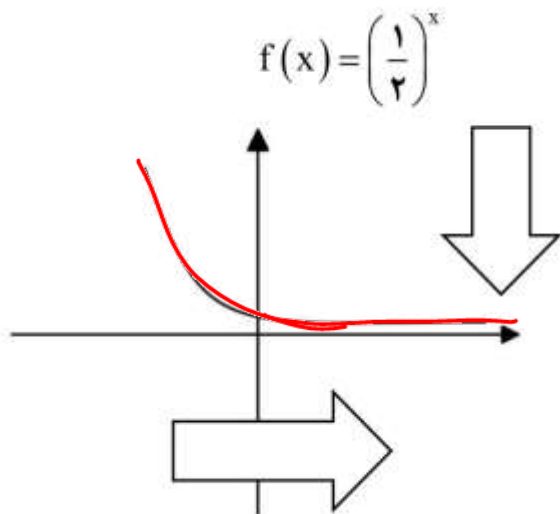
$$f(x) = |x| - |x - 2|$$



$$f(x) = [x]$$

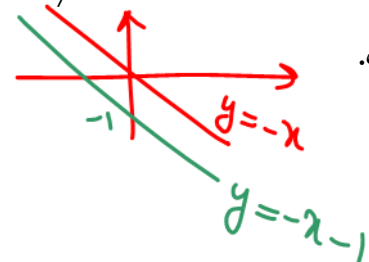
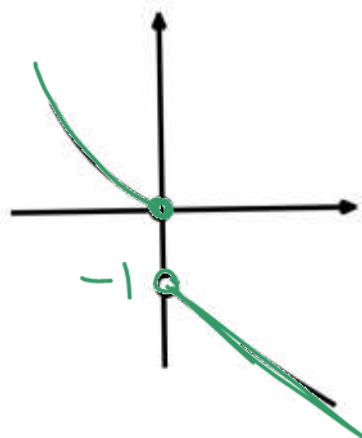
## تابع اکیداً نزولی:

به زبان خودمانی اگر با افزایش مقدار  $x$  ها، مقادیر  $y$  ها کاهش پیدا کند آن تابع اکیداً نزولی یا نزولی اکید است. برای نمونه دو تابع  $f(x) = -x^2$ ،  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  نزولی اکید هستند.



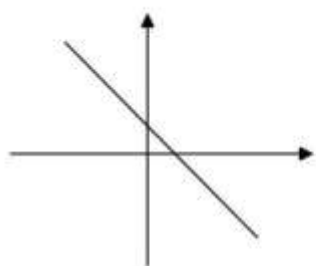
تابع های اکیداً نزولی می توانند ناپیوسته باشند، مهم این است که روی محور طول ها که از چپ به راست حرکت می کنیم

مقدار  $y$  کاهش یابند. برای نمونه  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -x-1 & x > 0 \end{cases}$  را در نظر بگیرید، نموداری به شکل زیر دارد و تابعی اکیداً

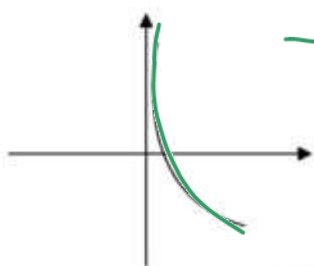


نزولی است.

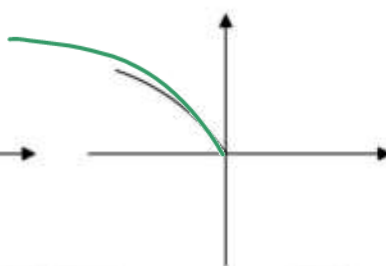
نمودارهای زیر نیز نمونه هایی دیگر از تابع های اکیدا نزولی است.



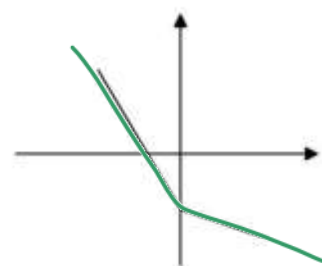
$$f(x) = -3x + 1$$



$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$



$$f(x) = \sqrt{-x}$$



$$f(x) = -3x + |x| - 1$$

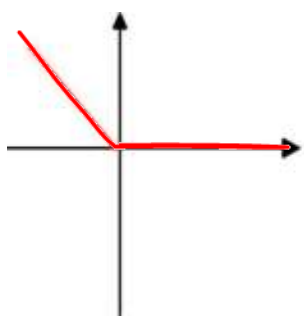
به زبان علمی، فرض کنیم مجموعه  $a$ ، زیر مجموعه ای از دامنه تابع  $f$  باشد، اگر برای هر دو عضو  $a, b$  در  $a$  که  $a < b$  باشد، آن گاه  $f(a) > f(b)$  تابع  $f$  را روی مجموعه  $a$ ، اکیدا نزولی می گوئیم.

### تابع نزولی:

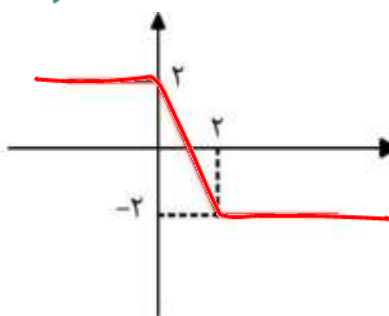
اگر با افزایش  $x$  هم‌مقادیر  $y$  کاهش یابد یا درجا بزند تابع نزولی است به زبان نمادین اگر  $a < b$  باشد آنگاه  $f(a) \geq f(b)$

اگر  $a > b \rightarrow f(a) > f(b)$  اکینزولی  
 $f(a) \geq f(b)$  نزولی

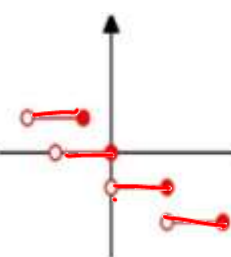
نمودارهای زیر مربوط به تابع های نزولی اند.



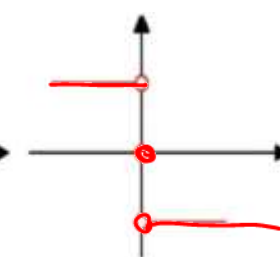
$$f(x) = |x| - x$$



$$f(x) = |x - 2| - |x|$$



$$f(x) = [-x]$$



$$f(x) = \begin{cases} -\frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ \cdot & x = 0 \end{cases}$$

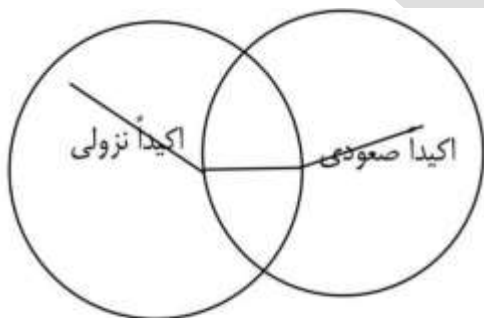
نکته:



تابع ثابت تنها تابعی است که هم صعودی و هم نزولی است. اگر خط افقی به تابعی اکیداً صعودی متصل شود کل نمودار

صعودی می شود. اگر خط افقی به تابعی اکیداً نزولی

متصل شود کل نمودار نزولی می شود.

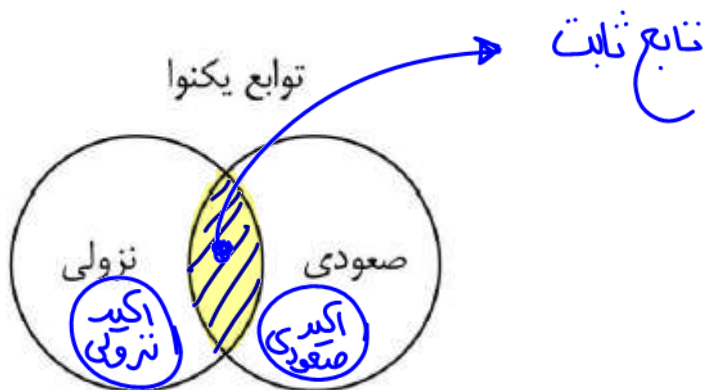


نزولی

صعودی

### یکنوایی و اکیداً یکنوایی:

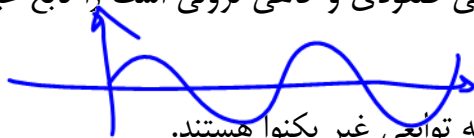
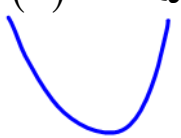
اگر تابعی روی دامنه اش صعودی یا نزولی باشد آن تابع را یکنوا می نامیم. اگر تابع روی دامنه اش اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد آن تابع را اکیداً یکنوا می نامیم.



برای نمونه تابع  $f(x) = 3x + 1$  اکیداً یکنواست چون اکیداً صعودی است یا تابع  $f(x) = [x]$  یکنواست چون صعودی است. هر تابع اکیداً صعودی، صعودی و هر تابع اکیداً نزولی، نزولی است.

### تابع غیر یکنوا: (نه صعودی، نه نزولی)

تابعی که روی دامنه تعریفش گاهی صعودی و گاهی نزولی است را تابع غیر یکنوا می نامیم. برای نمونه  $f(x) = x^2$  یا  $f(x) = \sin x$  غیر یکنوا اند. نمودارهای صفحه بعد نیز متعلق به توابعی غیر یکنوا هستند.





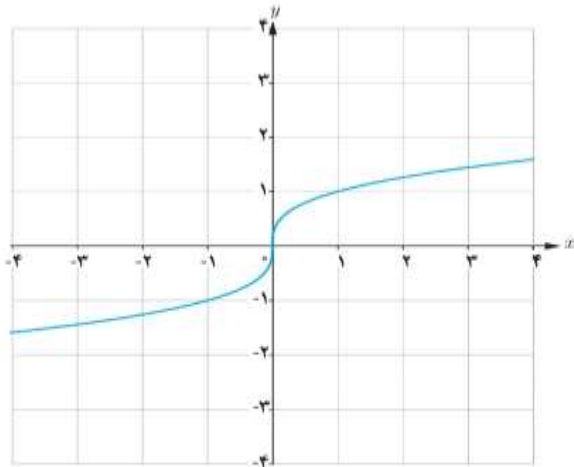
$f(x) = \frac{1}{x}$   
 $f(x) = x - [x]$  چمن باد  
 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x > 0 \\ \cdot & x = 0 \\ x^2 + 2 & x < 0 \end{cases}$   
 $f(x) = [x] + [-x]$  آبلش

تابعی  $f(x) = \frac{1}{x}$  روی مجموعه  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  غیر یکنواست ولی روی مجموعه  $(-\infty, 0), (0, +\infty)$  اکیداً نزولی است. به طور کلی تابع های همو گرافیک روی دامنه شان غیر یکنوا هستند.

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \neq \pi \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تذکره:

هر تابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی، تابعی یک به یک است ولی هر تابع یک به یکی لزوماً اکیداً یکنوا نیست. مانند تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  که یک به یک هست ولی غیر یکنواست.



فعالیت

به نمودار تابع روبه‌رو دقت کنید.  
الف) این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟  
ب) این تابع یک به یک است؟  
پ) آیا تابعی وجود دارد که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ولی یک به یک نباشد؟

تمرین

۱) نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

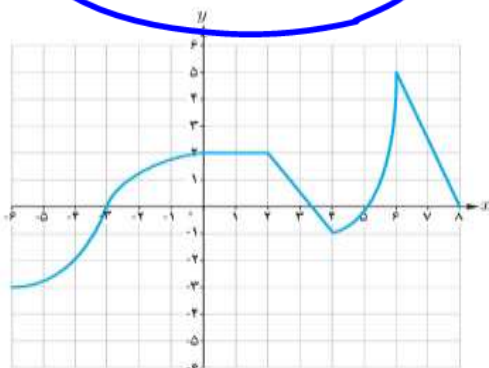
الف)  $y = (x-1)^3 - 1$

ب)  $y = (x+2)^3 - 2$

۲) نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

۳) با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



۴) تابع نمایی  $y = 2^x - 2$  و تابع لگاریتمی  $y = -\log_4^x + 2$  را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

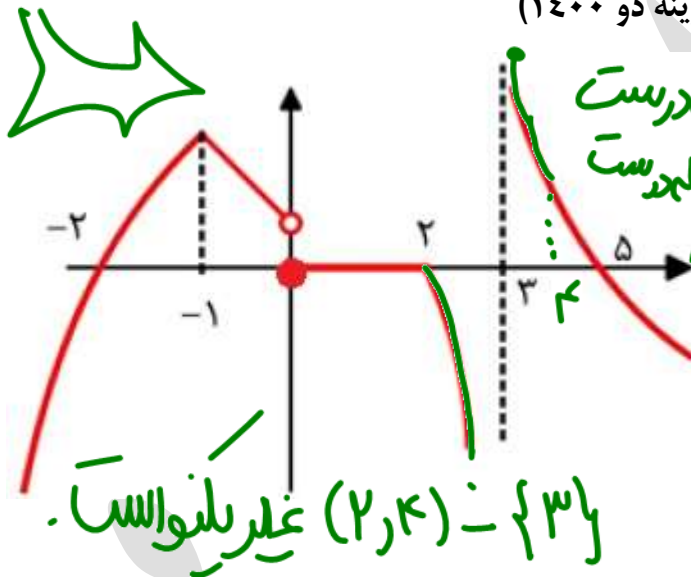
۵) تابع  $y = x|x|$  در بازه  $(-\infty, a]$  نزولی است، حداکثر مقدار  $a$  چقدر است؟

۶) تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً نزولی باشد.

۷) نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, +\infty)$  اکیداً صعودی باشد ولی در  $R$  اکیداً صعودی نباشد.



۱- کدام گزینه در مورد تابع زیر درست نیست؟ (گزینه دو ۱۴۰۰)



(۱)  $f$  در بازه  $(-\infty, -1)$  اکیداً صعودی است. جمله درست

(۲)  $f$  در بازه  $[-1, 1]$  یکنواست. نزولی و جمله درست

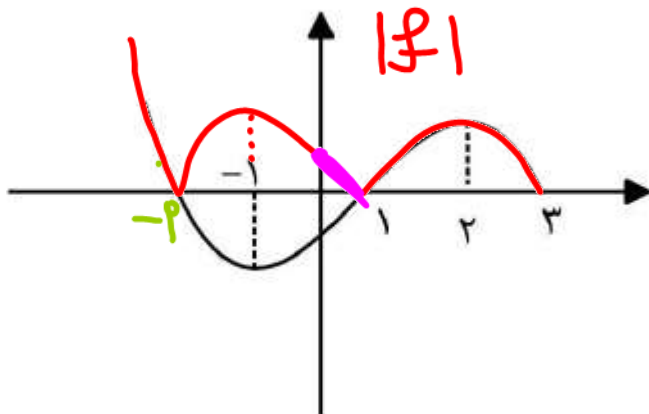
(۳)  $f$  در بازه  $[0, 3]$  نزولی است. نزولی و درست

(۴)  $f$  در بازه  $(2, 4)$  اکیداً نزولی است.

با  $\{3\} - (2, 4)$  غیر یکنواست.

تابع روی مجموعه

۲- نمودار تابع  $f$  در شکل رو به رو رسم شده است. تابع  $|f|$  روی کدام یک از بازه های زیر اکیداً نزولی است؟



(گزینه دو ۱۴۰۰)

(۱)  $(2, +\infty)$

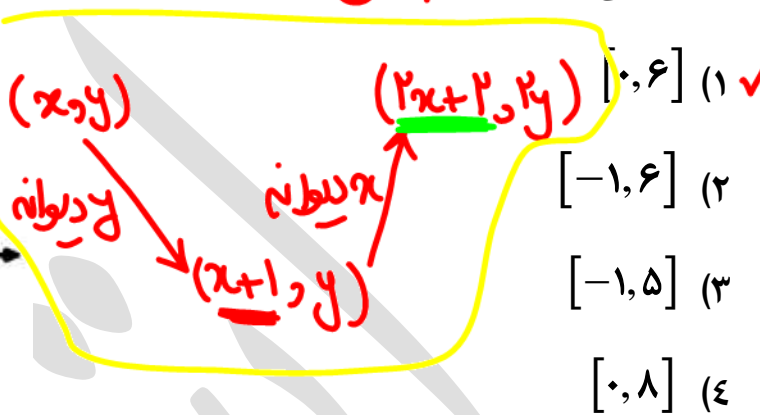
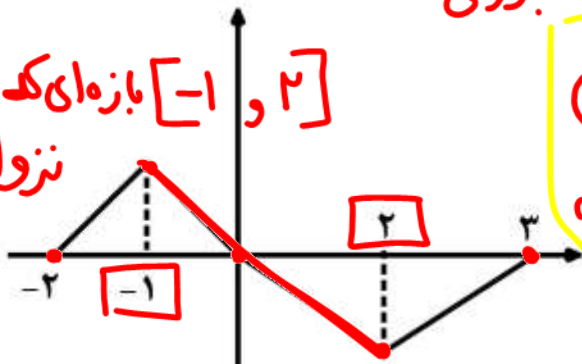
(۲)  $(-1, 2)$

(۳)  $(-2, -1)$

(۴)  $(0, 1)$

۳- اگر نمودار تابع  $y = f(x+1)$  به شکل زیر باشد تابع  $g(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$  در چه فاصله ای نزولی اکید است؟ (کاج ۱۴۰۰) **بزرگی**

$[2 و -1]$  بازه ای که محور تابع اول به نزول می کند -



$$x = -1 \rightarrow 2x + 2 = 2(-1) + 2 = 0$$

$$x = 2 \rightarrow 2x + 2 = 2(2) + 2 = 6 \rightarrow [0, 6]$$

- (۱)  $[0, 6]$  ✓
- (۲)  $[-1, 6]$
- (۳)  $[-1, 5]$
- (۴)  $[0, 8]$

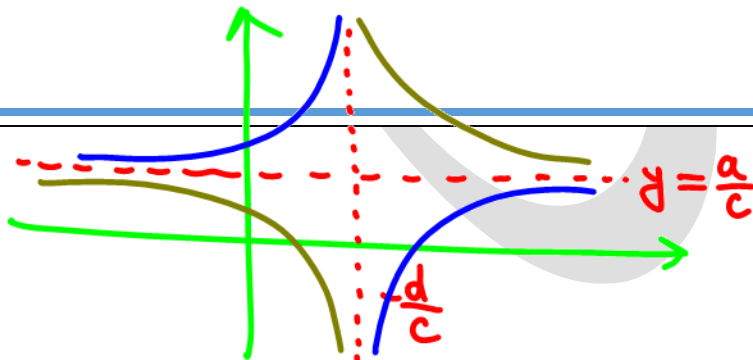
### تشخیص یکنوایی:

یکی از بهترین روش های تشخیص یکنوایی تابع رسم نمودار و بررسی آن است.

تابع هموگرافیک  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  دارای مجانب قائم  $x = -\frac{d}{c}$  و مجانب افقی  $y = \frac{a}{c}$  است.

اگر  $ad - bc > 0$  باشد شاخه های **منفی** اکیداً صعودی و اگر  $ad - bc < 0$  باشد شاخه های منحنی اکیداً نزولی است.

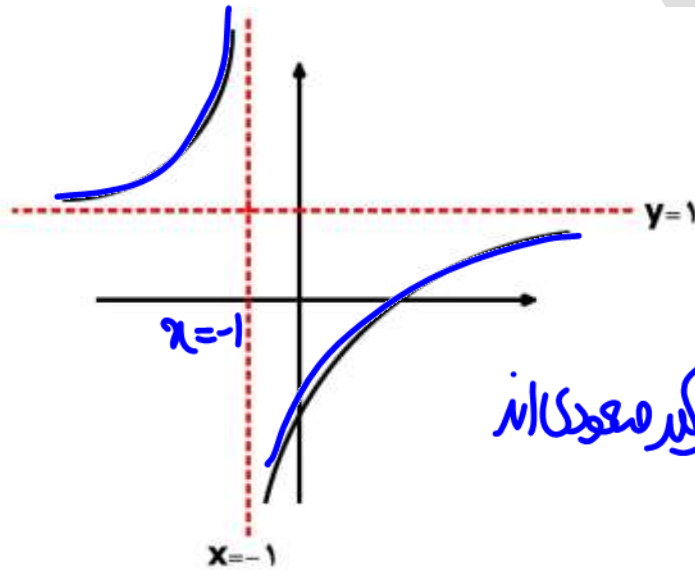
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$



برای نمونه:

برای رسم تابع  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  مجانب قائم  $x = -1$  مجانب افقی  $y = 1$  داریم.

حاصل  $ad - bc = 1(1) - (-2)(1) = 3$  که مثبت و شاخه های منحنی اکیداً صعودی هستند.



مجاذب قائم  $x = -\frac{d}{c} = -\frac{1}{1} = -1$

مجاذب افقی  $y = \frac{a}{c} = \frac{1}{1} = 1$

$ad - bc = 1(1) - (-2)(1)$

$= 3 >$ .  
شاخه های منحنی اکیداً صعودی اند

۴- کدام گزینه در بازه یکنوایی تابع  $f(x) = \frac{x+3}{x}$  درست است؟ (گزینه دو ۱۴۰۰)

$f(x) = \frac{x+3}{x+0}$   $\frac{ax+b}{cx+d}$

مجاذب قائم  $x = -\frac{d}{c} = -\frac{0}{1} = 0$

مجاذب افقی  $y = \frac{a}{c} = \frac{1}{1} = 1$

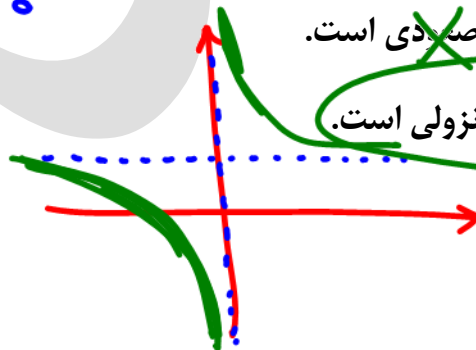
$ad - bc = 1(0) - 1 \times 3 = -3 <$

(۱) روی دامنه اش اکیداً صعودی است. ~~X~~

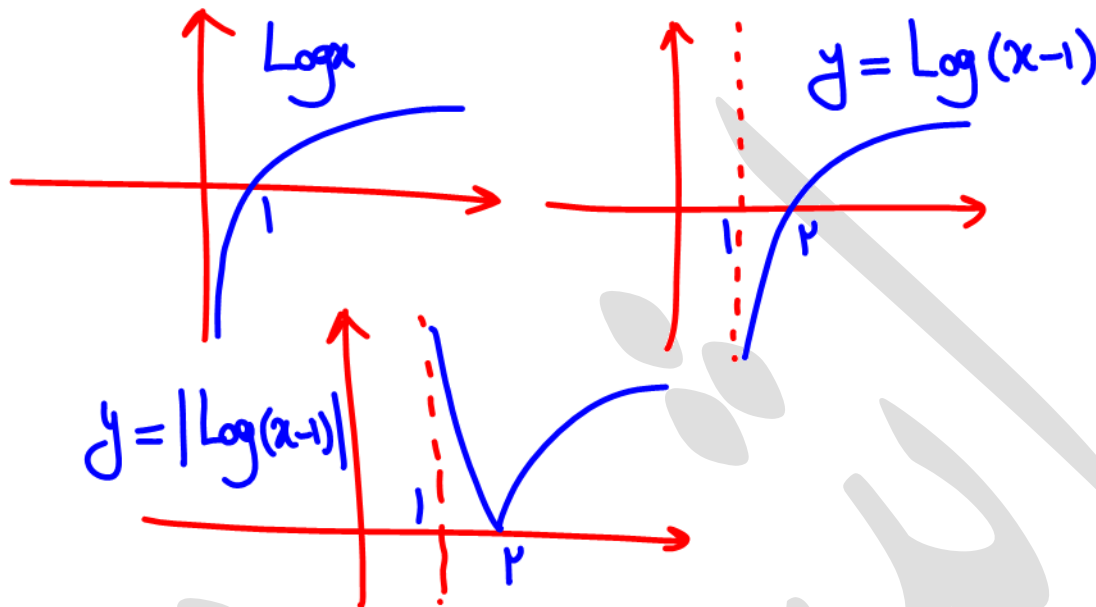
(۲) روی دامنه اش اکیداً نزولی است. ~~X~~

(۳) در بازه  $(-\infty, 0)$  اکیداً صعودی است. ~~X~~

(۴) در بازه  $(-\infty, 0)$  اکیداً نزولی است. O

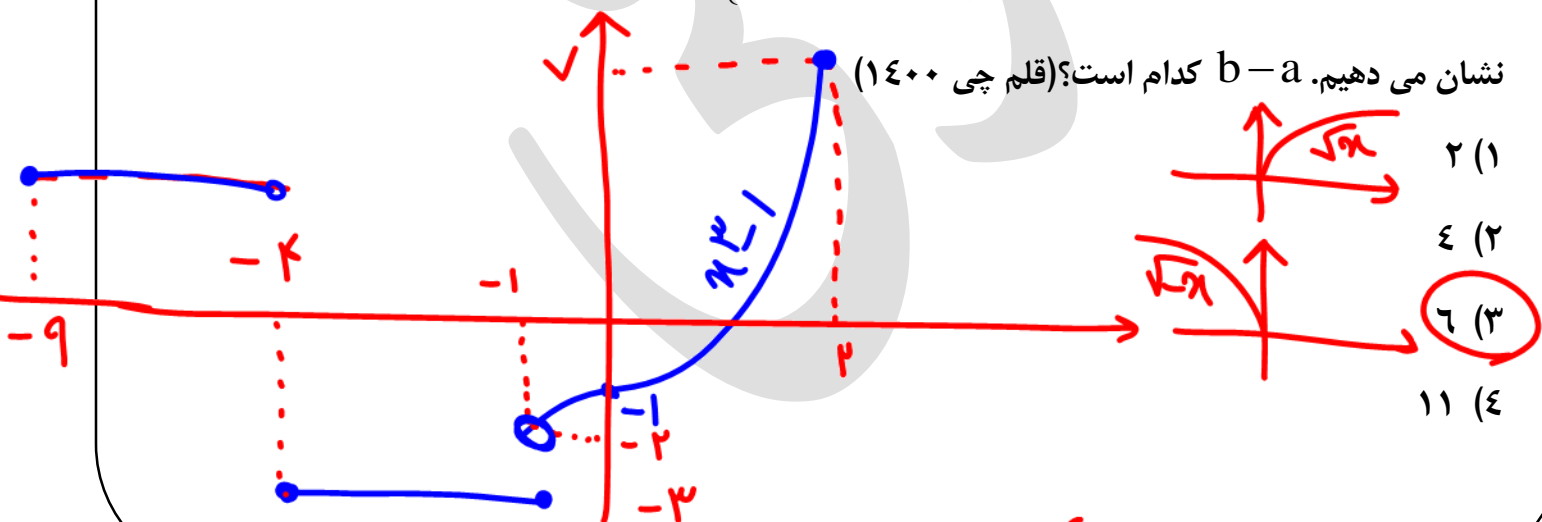


۵- تابع  $f(x) = |\log(x-1)|$  روی کدام بازه اکیداً نزولی است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)



- (۱)  $(1, 2]$
- (۲)  $(2, +\infty)$
- (۳)  $(1, +\infty)$
- (۴)  $[2, 3]$

۶- بزرگ ترین بازه ای را که تابع  $f = \begin{cases} x^2 & -1 < x \leq 2 \\ -3 & -4 \leq x \leq -1 \\ \sqrt{-x} & -9 \leq x < -4 \end{cases}$  در آن صعودی باشد به صورت  $[a, b]$  نشان می دهیم.  $b-a$  کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)



- (۱) ۲
- (۲) ۴
- (۳) ۶
- (۴) ۱۱

تابع روی بازه  $[-4, 2]$  صعودی است.  
 $b-a = 2 - (-4) = 6$

۷- کدام تابع روی دامنه اش غیر یکنواست؟ (نشانه ۹۹)

$$y = \frac{2(x+1)}{x+1} = 2$$

هموگرافیک نما  $\star$   $y = \frac{2x+2}{x+1}$  (۱) ✓

$y = -2x^2 + 1$  (۲)

$y = 2x - |x|$  (۳)

$y = \frac{2x+2}{x-1}$  (۴) ✓

$$y = \frac{2(x+1)}{x-1}$$

۸- نمودار تابع  $f(x) = (|x|-1)^3$  در بازه  $[a, +\infty)$  اکیداً صعودی است. حداقل مقدار  $a$  کدام است؟

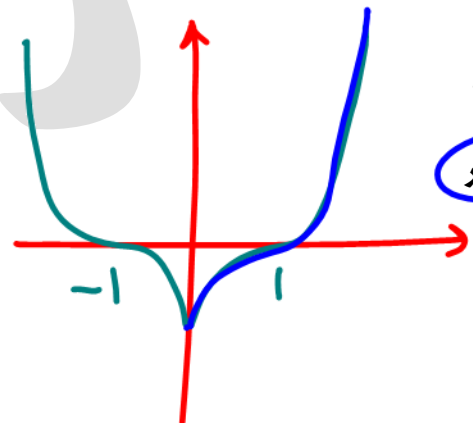
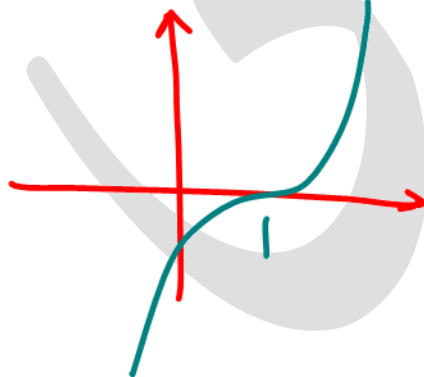
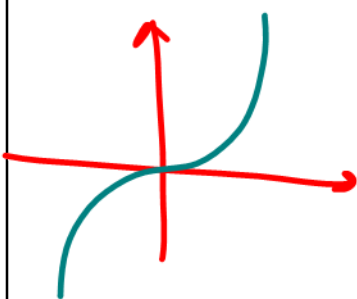
قلم چی ۱۴۰۰  $y = x^3 \Rightarrow y = (x-1)^3 \Rightarrow y = (|x|-1)^3$

(۱) -۲

(۲) -۱

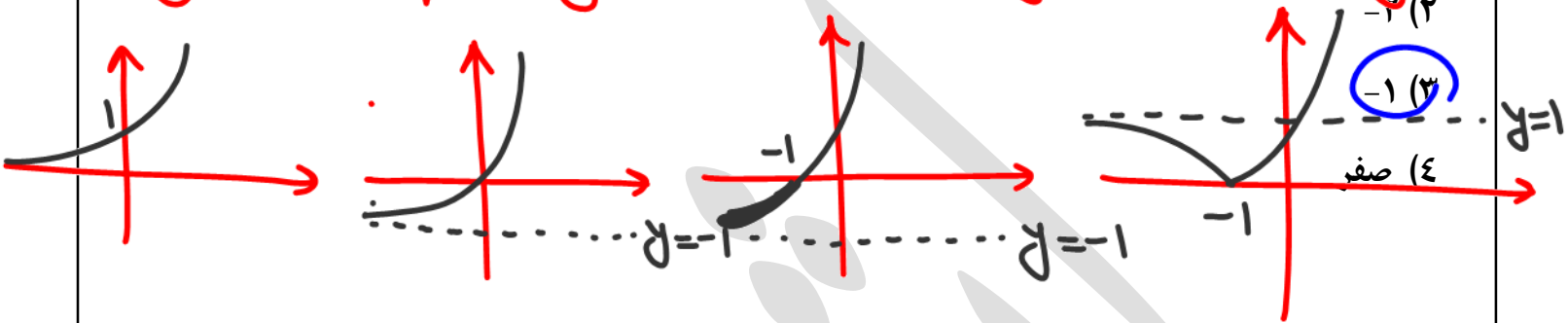
(۳) صفر

(۴) ۱



۹- تابع  $f(x) = |2^{x+1} - 1|$  در فاصله  $[a, +\infty)$  صعودی اکید است. حداقل مقدار  $a$  کدام است؟

$y = 2^x \Rightarrow y = 2^x - 1 \Rightarrow y = 2^{x+1} - 1 \Rightarrow y = |2^{x+1} - 1|$



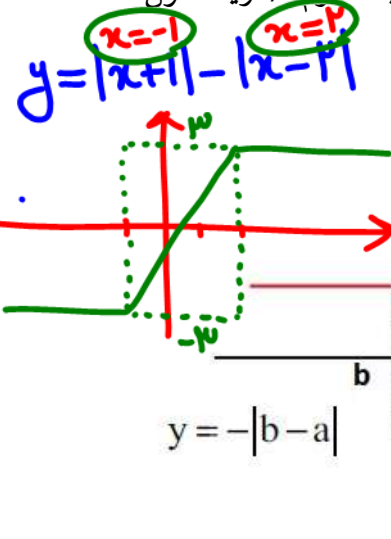
۱۰- به ازای چند مقدار صحیح  $a$  تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & x \geq 1 \\ ax - 2 & x < 1 \end{cases}$  اکیداً یکنواست؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

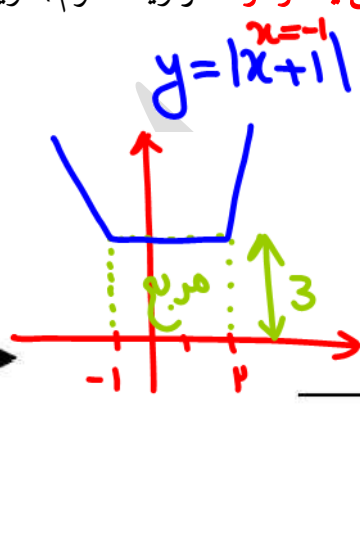




تابع گلدانی غیر یکنواست و تابع آبهاری یا سرسره اگر ریشه دوم < ریشه اول، صعودی و اگر ریشه دوم > ریشه اول، نزولی است.



$f(x) = |x-a| - |x-b|$



$f(x) = |x-a| + |x-b|$

۱۱- نمودار تابع  $f(x) = |x-a| - |x-b|$  فقط در فاصله  $(-1, 2)$  نزولی اکید است.  $a+b$  کدام است؟

ریشه دوم > ریشه اول

(کاج ۱۴۰۰)  
 $x = a$  ریشه اول  
 $x = b$  ریشه دوم  
 $x = 2$   
 $x = -1$   
 $a = 2$   
 $b = -1$

$a+b = 2+(-1) = 1$

نکته



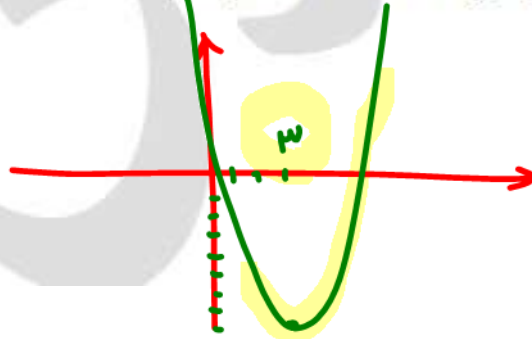
تابع های  $f(x) = a|x-b|+c$  و  $f(x) = ax^2 + bx + c$  به ترتیب راس و نوکی تیز به طول های  $x = \frac{-b}{2a}$  و  $x = b$  دارند.

این تابع ها در بازه  $[d, e]$  اکیداً یکنوا هستند به شرطی که طول راس یا نوک تیز آن ها در بازه  $(d, e)$  قرار نگیرد.  
( $d, e$  می توانند به  $\infty$  نیز میل کنند)

برای نمونه تابع  $f(x) = x^2 - 6x + 1$  روی بازه  $[0, 3]$  اکیداً یکنواست چرا که طول راس سهمی یعنی  $x = 3$  درون بازه  $(0, 3)$  قرار ندارد.

همین طور تابع  $f(x) = -|x+1| - 3$  روی بازه  $[0, 3]$  اکیداً یکنواست چرا که طول نقطه نوک تیز آن یعنی  $x = -1$  درون بازه  $(0, 3)$  قرار ندارد.

برای تشخیص نوع یکنوایی تابع باید نمودار را رسم کنیم.



$[1, 4]$

$[3, 10]$

$[2, 10]$

$y = x^2 - 6x + 1$   
 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = 3$

$y = 9 - 18 + 1 = -8$

هرگاه نوک تیز قدر مطلق یا راس سهمی درون بازه باشد تابع غیر یکنواست.

۱۲-  $f(x) = x^2 - ax - 12$  در بازه  $[2, +\infty)$  صعودی اکید است. تمام محدوده  $a$  کدام است؟

(قلم چی ۱۴۰۰)

$$x_{\text{رأس}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-a}{2(1)} = \frac{a}{2}$$

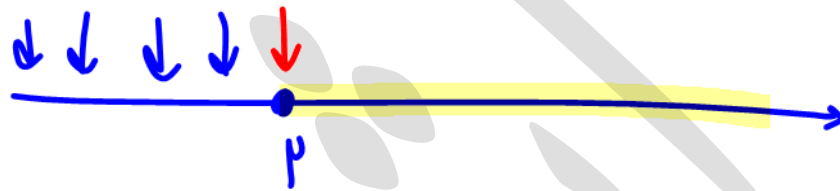
این تو نیست

(۱)  $a \leq 4$

(۲)  $a < 3$

(۳)  $a > 2$

(۴)  $a \geq 2$



$$\frac{a}{2} \leq 2 \rightarrow a \leq 4$$

۱۳- تابع  $f(x) = |4x+a| - 4$  در بازه  $[-1, 3]$  یکنوای اکید است. با فرض  $a > 0$  محدوده  $a$  کدام است؟

(نشانه ۹۹)

(۱)  $a \geq 1$

(۲)  $a \geq 4$

(۳)  $1 < a \leq 4$

(۴)  $a \geq 12$

نوک تیز قدر مطلق  $4x+a=0 \Rightarrow x = -\frac{a}{4}$



$$-\frac{a}{4} \leq -1 \xrightarrow{x=-1} a \geq 4$$

$$-\frac{a}{4} \geq 3 \xrightarrow{x=3} a \leq -12$$

### زوج های مرتب و یکنوایی:

بعد از مرتب کردن X ها، عرض های آنها در صورت اکیداً صعودی بودن، افزایشی و در صورت اکیداً نزولی بودن، کاهشی است.

۱۴- تابع  $f(x) = \{(-1, 2), (2, 3), (4, 7), (3, 2a^2 - 1)\}$  اکیداً صعودی است. a در کدام بازه قرار دارد؟

$$f = \{(-1, 2), (2, 3), (3, 2a^2 - 1), (4, 7)\}$$

a)  $\sqrt{2} < 1$

a < 2 (2)

|a| > 2 (3)

$3 < 2a^2 - 1 < 7 \Rightarrow 4 < 2a^2 < 8 \Rightarrow 2 < a < 2$  (4)  
 $2 < a^2 < 4 \Rightarrow \sqrt{2} < |a| < 2$

۱۵- تابع  $f(x) = \{(1, 2), (m^2, 2), (2, 3m), (4m, 5m), (3, 4m)\}$  یک به یک است ولی یکنوا نیست.

مقدار  $f^{-1}(3m-1)$  کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

$m^2 = 1 \rightarrow m = \pm 1$

$m = 1 \rightarrow f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

$m = -1 \rightarrow f = \{(1, 2), (2, -3), (-4, -5), (3, -4)\}$

$f^{-1}(3m-1) \stackrel{m=-1}{=} f^{-1}(-3-1) = f^{-1}(-4) = 3$

**دامنه یابی به کمک یکنوایی:**

در این گونه سوال ها بهتر است ساده ترین ضابطه ها را به عنوان ضابطه تابع در نظر بگیریم و دامنه آن را بیابیم.  
 برای نمونه: فرض کنید  $f$  تابعی اکیداً صعودی با دامنه  $\mathbb{R}$  باشد که از مبدا می گذرد. دامنه تابع  $y = \sqrt{xf(x)}$  را به این شیوه می یابیم که: به جای ضابطه  $f(x)$  مقدار  $x$  را در نظر می گیریم که ساده ترین تابع اکیداً صعودی است. ضابطه تابع  $y = \sqrt{xf(x)}$  را بازنویسی می کنیم.

ساده ترین تابع اکیداً صعودی  $f(x) = x$

$$y = \sqrt{xf(x)} \quad \underline{f(x) = x} \quad \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^2} = |x|$$

دامنه تابع اخیر برابر  $\mathbb{R}$  است.

۱۶- تابع  $f$  در  $\mathbb{R}$  صعودی اکید و  $f(3) = 0$  است. دامنه  $y = \sqrt{(x+1)f(1-2x)}$  کدام است؟

ساده ترین تابع اکید صعودی که  $f(3) = 0$  باشد

(۱)  $[-5, -1]$

$f(x) = x - 3 \Rightarrow f(1-2x) = (1-2x) - 3 = -2 - 2x$

(۲)  $[-1, +\infty)$

(۳)  $(-\infty, -1]$

$y = \sqrt{(x+1)f(1-2x)} = \sqrt{(x+1) \cdot (-2-2x)} = \sqrt{(x+1)x - 2(x+1)}$  (۴)  $\{-1\}$

$= \sqrt{-2(x+1)^2} \geq 0 \Rightarrow -2(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

**حل نامعادله به کمک توابع اکیداً یکنوا:**

در نامعادله ها به شرط اکیداً یکنوا بودن تابع و تنها بودن ضابطه تابع در دو طرف مساوی امکان زدن f ها از طرفین وجود دارد. در توابع اکیداً نزولی پس از زدن f جهت نامساوی عوض می شود.

$$\cancel{f(a) \geq f(b)} \xrightarrow[\text{است}]{f \text{ اکیداً صعودی}} a \geq b$$

$$\cancel{f(a) \geq f(b)} \xrightarrow[\text{است}]{f \text{ اکیداً نزولی}} a \leq b$$

۱۷- مجموعه جواب نامعادله  $\log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x+1}} < \log_{\sqrt{2}}^{x+2}$  کدام است؟ (علوی ۹۹)

ردگزینه  $\Rightarrow$  حل نلن

آرگومان

~~(۱)  $\emptyset$~~

~~(۲)  $\mathbb{R}$~~

(۳)  $(-1, +\infty)$

~~(۴)  $(0, +\infty)$~~

$\alpha = 0 \rightarrow \log_{\sqrt{2}}^1 < \log_{\sqrt{2}}^2$  OK  
در پایه های یکسان از یک هر چه آرگومان بزرگتر در کناریم هم بزرگتر

$\alpha = -2 \rightarrow \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{-1}} < \log_{\sqrt{2}}^0$  NO



تابع  $f(x) = \text{Log}_a^x$  با شرط  $a < 1$  اکیداً نزولی و با شرط  $a > 1$  اکیداً صعودی است.

۱۸- اگر  $f(x)$  تابعی اکیداً صعودی با دامنه  $\mathbb{R}$  باشد، جواب نامعادله  $f\left(\frac{x}{3}\right) - f(1-x) < 0$  کدام است؟

(کاج ۱۴۰۰)

~~$f\left(\frac{x}{3}\right) < f(1-x)$~~   $\Rightarrow \frac{x}{3} < 1-x$   $\Rightarrow x < 3-3x$   $\Rightarrow 4x < 3$   $\Rightarrow x < \frac{3}{4}$

(۱)  $x > \frac{3}{4}$   
 (۲)  $x < \frac{3}{4}$   
 (۳)  $x > \frac{4}{3}$   
 (۴)  $x > \frac{4}{3}$

۱۹- اگر  $f$  تابعی اکیداً نزولی با دامنه  $\mathbb{R}$  باشد، دامنه تعریف  $y = \sqrt{f(|x-2|) - f(|2x-1|)}$  کدام است؟

(قلم چی ۱۴۰۰)

~~$f(|x-2|) - f(|2x-1|) \geq 0$~~   $\Rightarrow |x-2| \leq |2x-1|$

ردگزینه:  $x=0 \rightarrow |0-2| \leq |0-1|$  NO  
 $x=1 \rightarrow |1-2| \leq |2-1|$  OK

(۱)  $\mathbb{R} - [-1, 1]$   
 (۲)  $\mathbb{R} - (-1, 1)$   
 (۳)  $(-1, 1)$   
 (۴)  $[-1, 1]$

۲۰- نمودار تابع یکنوای  $f$  در شکل زیر رسم شده است. اگر مجموعه جواب نامعادله  $f(x-1) < f(5-x)$

بازه  $[a, b]$  باشد، حاصل  $a+b$  کدام است؟ (قلم چی ۹۹)

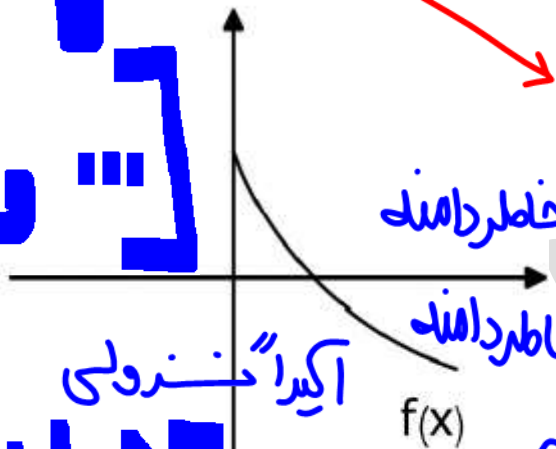
$$x-1 > 5-x \rightarrow 2x > 6 \rightarrow x > 3$$

$$x \leq 5 \quad \text{به خاطر دانسته}$$

$$x \geq 1 \quad \text{به خاطر دانسته}$$

$$\Delta \rightarrow 3 < x \leq 5 \rightarrow (3, 5] \rightarrow a+b=8$$

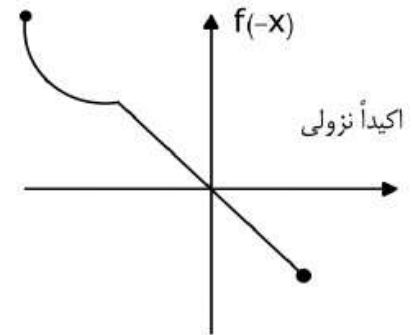
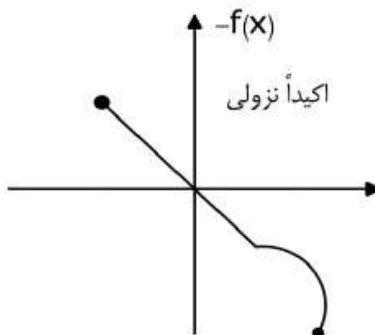
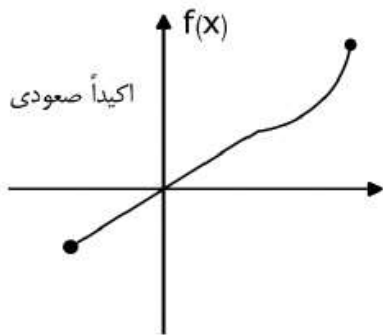
- ۶ (۱)
- ۲ (۲)
- ۸ (۳)
- ۵ (۴)



توجه  
اگر نزولی  
 $a+b > 6$

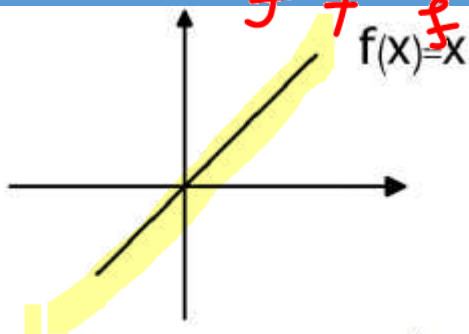
### چهار عمل اصلی و یکنوایی:

۱- اگر تابع  $y = f(x)$  اکیداً صعودی باشد، تابع های  $-f(x)$  و  $f(-x)$  نزولی اکید هستند.

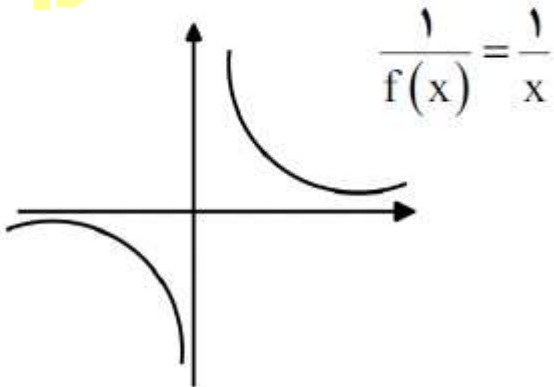




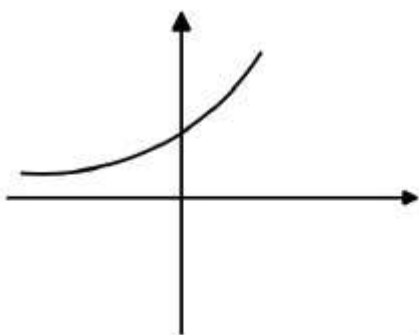
$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$



۲- اگر تابع  $y = f(x)$  اکیداً صعودی باشد،  
و  $f(x)$  تغییر علامت بدهد (یعنی هم بالا و هم پایین  
محور باشد) تابع  $\frac{1}{f}$  غیر یکنواست.



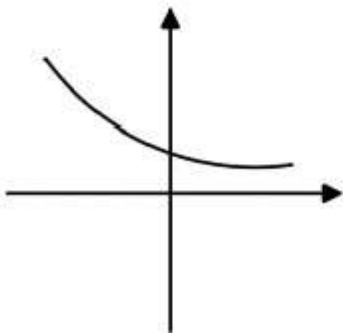
برای نمونه در تابع به شکل مقابل  $f(x)$  اکیداً صعودی  
است در حالی که  $\frac{1}{f(x)}$  غیر یکنواست.



اگر تابع  $y = f(x)$  اکیداً صعودی و همواره مثبت یا  
همواره منفی باشد. تابع  $\frac{1}{f}$  اکیداً نزولی است.

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

برای نمونه در تابع به شکل مقابل  $f(x)$  اکیداً صعودی  
است و  $\frac{1}{f(x)}$  اکیداً نزولی است.

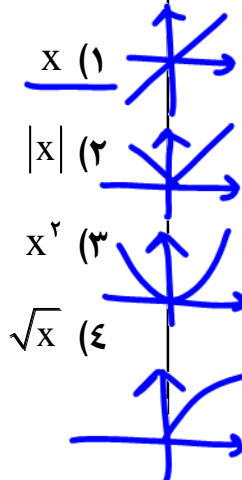


چنین اتفاقی در مورد تابع اکیداً نزولی نیز برقرار است.

۲۱-  $f(x)$  کدام باشد تا نمودار تابع  $y = \frac{1}{f(x)}$  اکیداً نزولی باشد؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

$\frac{1}{f(x)}$  اکیداً نزولی اگر اول  $f(x)$  اکیداً صعودی باشد دوم

تابع  $f(x)$  تغییر علامت ندهد.

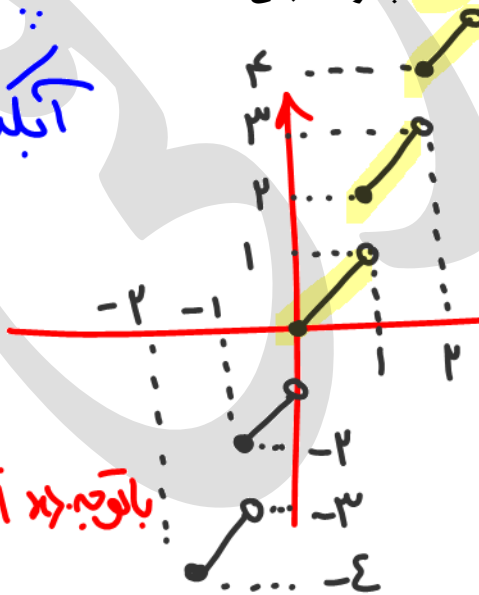


چمن دربار  $y = x - [x]$   
آبکش  $y = [x] + [-x]$

بارون  $y = x + [x]$   
اکیداً صعودی

باتوجه به اکیداً نزولی  $f(x) = \frac{1}{x + [x]}$

۲۲- تابع  $f(x) = \frac{1}{x + [x]}$  روی  $x > 0$  چگونه تابعی است؟



(۱) اکیداً صعودی

(۲) اکیداً نزولی

(۳) نه صعودی، نه نزولی

(۴) هم صعودی و هم نزولی

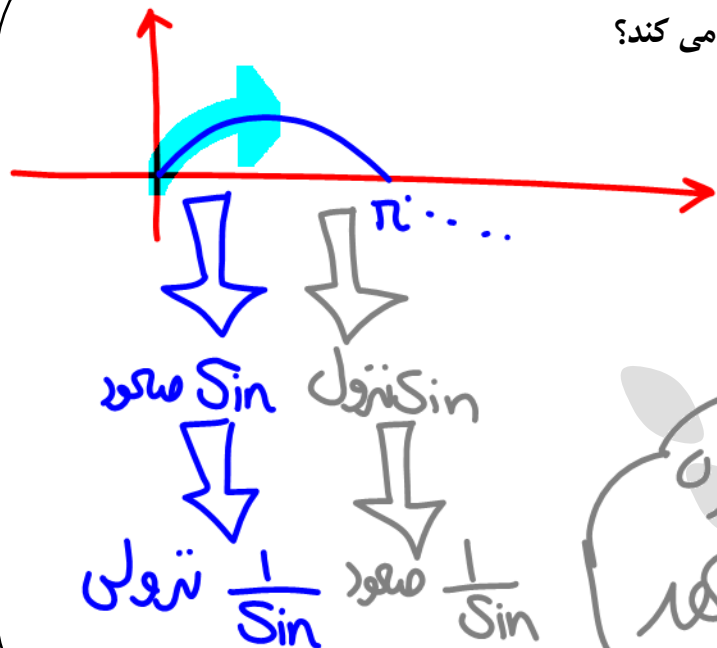
۲۳- تابع  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$  در بازه  $(0, \pi)$  چگونه تغییر می کند؟

(۱) ابتدا صعود، سپس نزولی

(۲) ابتدا نزولی، سپس صعود

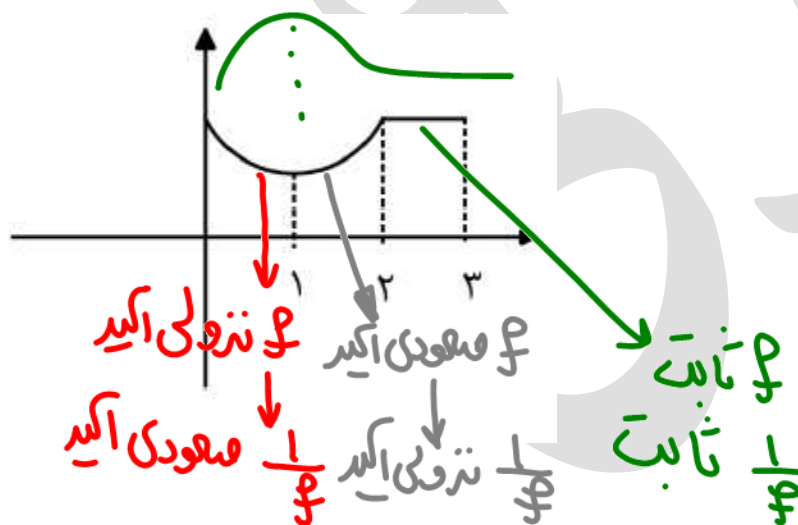
(۳) همواره صعود

(۴) همواره نزولی



تابع سینوس در این بازه تغییر علامت نمی دهد

۲۴- اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به شکل زیر باشد، بزرگ ترین بازه ای که تابع  $y = \frac{1}{f(x)}$  روی آن نزولی است کدام است؟



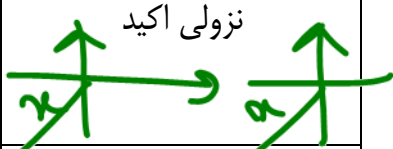
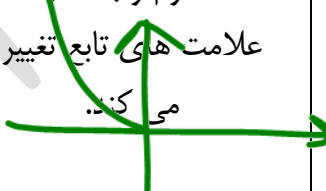
(۱)  $[0, 1]$

(۲)  $[1, 2]$

(۳)  $[1, 3]$

(۴)  $[2, 3]$

جدول یکنوایی و اعمال اصلی

|                            | $f + g$    | $f - g$    | $f \times g$  |
|----------------------------|------------|------------|---|
| $g, f$ صعودی اکید          | صعودی اکید | نامعلوم    | اگر $g, f$ مثبت باشند<br>صعودی اکید<br>اگر $f, g$ منفی باشند<br>نزولی اکید<br> |
| $f$ صعودی و $g$ نزولی اکید | نامعلوم    | صعودی اکید | نامعلوم و بسته به<br>علامت های تابع تغییر<br>می کند.<br>                       |
| $g, f$ نزولی اکید          | نزولی اکید | نامعلوم    | اگر $g, f$ مثبت باشند<br>نزولی اکید<br>اگر $f, g$ منفی باشند<br>صعودی اکید  |

در حالتی که  $f$  صعودی و  $g$  نزولی اکید است  $g - f$  نزولی اکیدا می باشد.

۲۵- تابع  $f(x) = 2^x - \sqrt{-x}$  در دامنه اش چگونه تابعی است؟

(۱) اکیداً صعودی

(۲) اکیداً نزولی

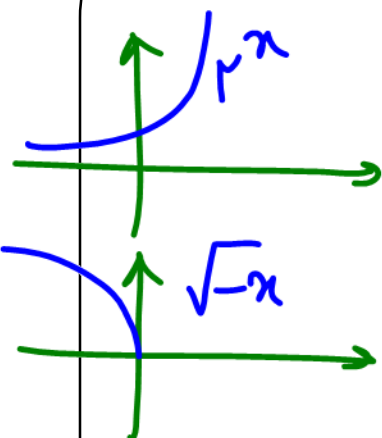
(۳) نه صعودی و نه نزولی

(۴) هم صعودی و هم نزولی

$2^x$  تابعی اکیداً صعودی است.

$\sqrt{-x}$  تابعی اکیداً نزولی است.

اکید صعودی = اکید نزولی - صعودی اکید



۲۶- برای دو تابع  $f, g$  با دامنه های برابر تابع  $f - 2g$  اکیداً صعودی و تابع  $f - 3g$  اکیداً نزولی است.

کدام نتیجه گیری درست است؟ (قلم چی ۹۹)

نزولی = صعودی - نزولی

صعودی = نزولی - صعودی

(۱)  $f$  اکیداً صعودی و  $g$  اکیداً نزولی

(۲)  $f$  اکیداً نزولی و  $g$  اکیداً صعودی

(۳)  $f, g$  هر دو اکیداً صعودی

(۴)  $f, g$  هر دو اکیداً نزولی

اکید صعودی  
اکید نزولی - اکید صعودی

$$(f - 3g) - (f - 2g) = g$$

$$3(f - 2g) - 2(f - 3g) = f$$

**یکنوایی و ترکیب توابع:**

تابع اکیداً صعودی را مثبت و تابع اکیداً نزولی را منفی و تابع مرکب را ضرب در نظر می گیریم. اگر حاصل ضرب مثبت شد تابع مرکب را اکیداً صعودی و اگر حاصل ضرب منفی شد تابع مرکب را اکیداً نزولی در نظر می گیریم.

برای نمونه اگر  $f, g$  هر دو نزولی اکید باشند، هردو را منفی فرض می کنیم با ضرب آن ها در هم علامت fog مثبت می شود و می توانیم نتیجه بگیریم fog در این حالت اکیداً صعودی است.

**اکید صعودی  $- \times - = +$**

**اکید نزولی  $+ \times - = -$**

۲۷- اگر  $f$  تابعی اکیداً نزولی باشد تابع های  $f(x^3 - 1), f(1 - 2^{x-1})$  به ترتیب از راست به چپ اکیداً ..... و اکیداً ..... هستند.

تابع  $x^3 - 1$  اکید صعودی و  $f$  اکید نزولی پس ترکیب این دو تابع  $- \times + = -$  اکید نزولی است.

تابع  $1 - 2^{x-1}$  اکید نزولی و  $f$  اکید نزولی است پس ترکیب این دو تابع  $+ \times - = +$  اکید صعودی است.

- (۱) صعودی - صعودی
- (۲) صعودی - نزولی
- (۳) نزولی - صعودی
- (۴) نزولی - نزولی

۲۸- تابع های  $f(x) = 2^{1-3x}$  و  $g(x) = \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 4)$  به ترتیب از راست به چپ چگونه اند؟

نزولی  
 $1 - 3x$

نزول

$2 = 2 = 2$  نزولی

صعود  $x^2 - 4$   $\log$  از  $2$  اکید نزولی =

(۱) اکیداً صعودی - اکیداً نزولی

(۲) اکیداً نزولی - اکیداً نزولی

(۳) اکیداً صعودی - اکیداً صعودی

(۴) اکیداً نزولی - اکیداً صعودی

$\log$   $x^2 - 4$  اکید نزولی

# تابع یک به یک و وارون

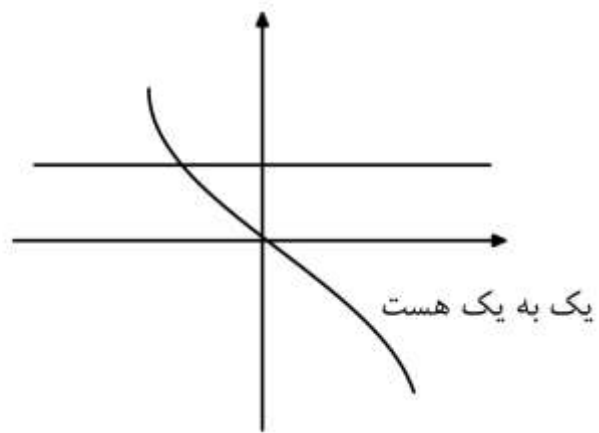
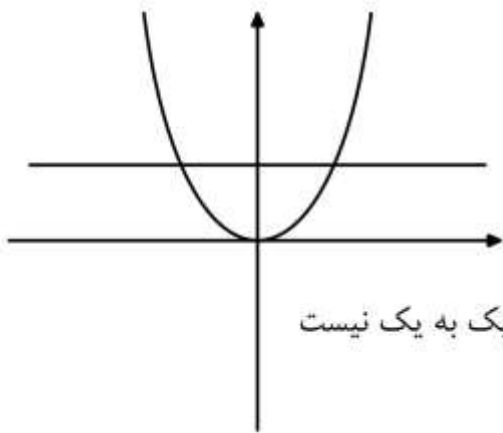
استاد اشرفی

[www.mathtest.ir](http://www.mathtest.ir)

## دوازدهم تجربی و یازدهم ریاضی

## تابع یک به یک:

تابعی است که به ازای هر  $y$  فقط یک  $x$  وجود داشته باشد. نمودار این توابع به گونه ای است که هر خط افقی آن ها را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.



## تابع های مشهور یک به یک:

تابع های خطی ( $a \neq 0$ )، رادیکالی، درجه سوم (از جنس لر)، نمایی و لگاریتمی و هموگرافیک از جمله تابع های مشهور یک به یک اند.

## تابع های مشهور غیر یک به یک:

تابع های درجه دو، قدر مطلق، براکتی، ثابت، مثلثاتی و به طور کلی همه تابع های متناوب مانند چمن در باد ( $y = x - [x]$ ) و آبکش ( $y = [x] + [-x]$ ) از جمله تابع های مشهور غیر یک به یک اند.



برای بررسی یک به یک بودن تابع ها، بهترین روش رسم آن هاست. بخصوص در مورد توابع براکتی، قدر مطلق و چند ضابطه ای به شدت این روش توصیه می شود.

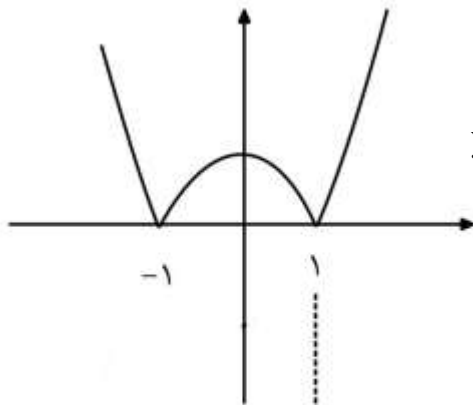


به مثال زیر توجه کنید



یک به یک بودن تابع  $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & x \geq 1 \\ 2x - x^2 & x < 1 \end{cases}$  را بررسی کنید.

نمودار تابع های  $y = |x^2 - 1|$  و  $y = 2x - x^2$  را جداگانه رسم می کنیم.

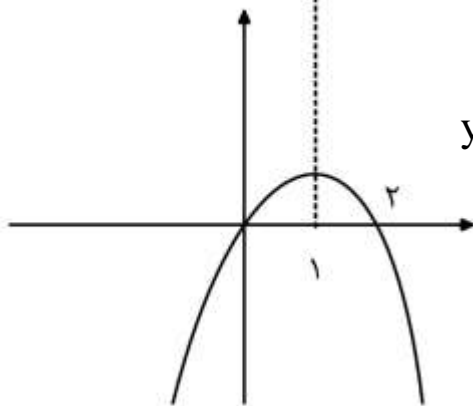


$$y = |x^2 - 1|$$

نمودار نهایی پس از رسم نمودار  $y = x^2 - 1$  و

قرینه نمودن بخش هایی که زیر محور است نسبت

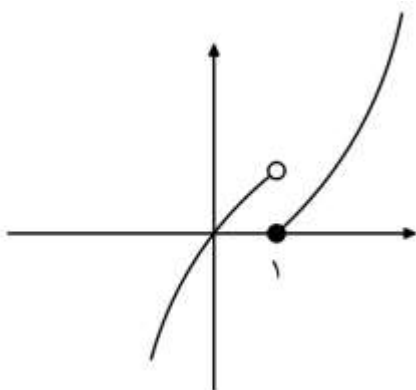
به محور طول ها به دست آمده است.



$$y = 2x - x^2$$

نمودار به صورت یک سهمی است با دهانه روبه پایین

که از نقطه های  $\{0, 2\}$  عبور کرده است.



با توجه به شرط های تابع  $f(x)$  نمودار ترکیبی را رسم می کنیم.

از نمودار  $f(x)$  مشخص است که تابع یک به یک نیست.

**بررسی یک به یک بودن از روی ضابطه:**

در مورد تابع هایی که رسم آن ها دشوار است می توانیم از مثال نقض استفاده کنیم به این ترتیب که با دادن یک  $y$  بتوانیم چند  $x$  به دست بیاوریم. این گونه ثابت کنیم که تابع یک به یک نیست. اگر به ازای یک  $y$  فقط یک  $x$  به دست آوریم نمی توانیم به یک به یک بودن تابع اذعان کنیم بلکه باید چند  $y$  دیگر را نیز امتحان کنیم.

برای نمونه برای اثبات این که تابع  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$  یک به یک نیست کافی است عددی دلخواه مانند ۳ به  $y$  بدهیم.

$$\frac{x^2 + 1}{x} = 3 \rightarrow x^2 + 1 = 3x \rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 9 - 4 = 5 > 0$$

با توجه به مثبت بودن دلتا، ۲ مقدار برای  $x$  به دست می آید و نتیجه می گیریم تابع یک به یک نیست.

بازهم تکرار می کنم اگر به ازای  $y$  داده شده  $x$  به دست نیاید یا فقط یک مقدار برای  $x$  به دست آید نمی توان راجع به یک به یک بودن تابع نظری داد و باید چند  $y$  دیگر هم بدهیم اگر همه آن ها فقط یک  $x$  به ما بدهند با توکل بر خداوند منان تابع را یک به یک در نظر می گیریم.

## یک نکته خوب که از آینده آمده:

در توابع پیوسته مانند چند جمله ای ها و .... اگر مشتق تابع تغییر علامت ندهد تابع یک به یک است.

برای مشتق گرفتن (که در آینده به طور کامل خواهیم خواند) علی الحساب این فرمول را بدانید:

$$f(x) = kx^n \quad \begin{array}{c} \text{مقدارهای } n, k \\ \text{ثابت هستند} \end{array} \quad f'(x) = knx^{n-1}$$

همین طور مشتق  $x$  برابر یک و مشتق عدد ثابتی که کنارش  $x$  نباشد صفر است.

برای نمونه تابع  $f(x) = x^3 + 2x + 1$  یک به یک است چون مشتق آن  $f'(x) = 3x^2 + 2$  عبارتی همواره مثبت است.

به مثال زیر توجه کنید: 

تابع  $f(x) = x^3 - 3x + 5$  را در نظر بگیرید از آن مشتق می گیریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 3(1) + 0 = 3x^2 - 3$$

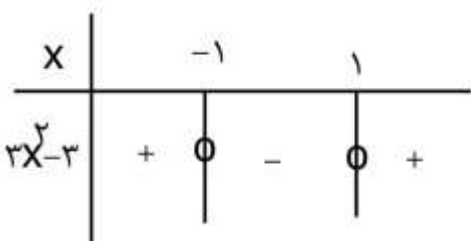
آن را تعیین علامت می کنیم:

$$3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

مشتق تابع تغییر علامت می دهد و تابع یک به یک نیست.

در آینده که به قوانین مشتق مسلط شوید از این روش خیلی

خوشتان خواهد آمد.



تست



۱- کدام یک از توابع زیر باشد تا  $f^2$  تابعی یک به یک باشد؟

(۱)  $\{(0,0), (-2,1), (2,1)\}$

(۲)  $\{(-1,4), (1,2), (4,-1)\}$

(۳)  $\{(2,2), (3,3), (-5,-2)\}$

(۴)  $\{(3,-2), (-3,2), (0,0)\}$

۲- اگر رابطه  $f = \{(2, 2a-1), (3b^2-4a, 1), (2, 2-a), (b\sqrt{2}, 5)\}$  تابعی یک به یک باشد مقدارهای

$b, a$  کدام است؟

(۱)  $\begin{cases} a=1 \\ b=\pm\sqrt{2} \end{cases}$

(۲)  $\begin{cases} a=1 \\ b=\sqrt{2} \end{cases}$

(۳)  $\begin{cases} a=1 \\ b=-\sqrt{2} \end{cases}$

(۴)  $\begin{cases} a=-1 \\ b=\pm\sqrt{2} \end{cases}$

۳- «تابع  $f(x) = 2x + |x|$  یک به یک ..... و تابع  $f(x) = x + 2|x|$  یک به یک .....»

جاهای خالی با کدام گزینه کامل می شود؟

(۱) هست - هست

(۲) نیست - نیست

(۳) هست - نیست

(۴) نیست - هست

۴- حدود  $a$  برای این که تابع  $f(x) = ax + 2|x - 1| + 3$  یک به یک باشد کدام است؟

(۱)  $|a| > 2$

(۲)  $|a| < 2$

(۳)  $|a| \geq 2$

(۴)  $|a| \leq 2$



**نکته:** در توابعی به فرم  $f(x) = ax + b|x|$  اگر بعد از دو ضابطه ای کردن حاصل ضرب شیب ها مثبت باشد تابع

یک به یک و در غیر این صورت تابع غیر یک به یک است.

**نکته:** توابعی به فرم  $f(x) = ax + b|x|$  و به طور کلی تابع های قدر مطلق (بدون مخرج) همواره پیوسته اند.

۵- تابع  $y = x^2 + ax + 3$  در بازه  $[-1, 3]$  یک به یک نیست. طول بزرگ ترین بازه‌ی بازی که  $a$  می تواند مقادیرهای آن را اختیار کند کدام است؟

۲ (۱)

۴ (۲)

۸ (۳)

۱۲ (۴)

**نکته:** تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  روی  $\mathbb{R}$  یک به یک نیست و روی بازه  $[d, e]$  به شرطی یک به یک نیست که طول راس (یعنی  $x = \frac{-b}{2a}$ ) در بازه  $(d, e)$  باشد.

۶- تابع  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  و  $g(x) = x^3 + 3x + 1$  به ترتیب از راست به چپ به لحاظ یک به یک بودن چگونه اند؟

(۱) هست - هست

(۲) نیست - هست

(۳) نیست - نیست

(۴) هست - نیست

۷- چه تعداد از تابع های زیر یک به یک اند؟

$$f(x) = \frac{[x]}{2} \quad \text{پ)}$$

$$y = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases} \quad \text{ب)}$$

$$y = 2 + |x| \quad \text{الف)}$$

$$y = x^2 - 2x \quad \text{ث)}$$

$$y = x^2 + 3x^2 + 3x + 1 \quad \text{ت)}$$

۰ (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

۸- تابع های  $f(x) = x + [x]$  و  $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  به ترتیب از راست به چپ از نظر یک به یک بودن چگونه اند؟

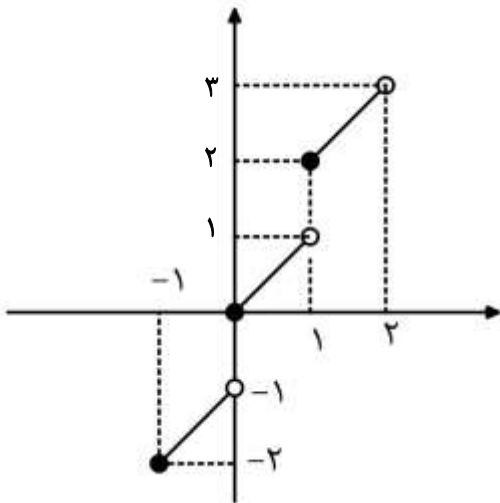
(۱) هست، هست

(۲) هست، نیست

(۳) نیست، هست

(۴) نیست، نیست

**نکته:** نمودار تابع  $f(x) = x + [x]$  شبیه باران است و به آن نمودار بارون می گوئیم. 





۹- تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & x \geq 7 \\ \frac{x}{3} + a & x < 6 \end{cases}$  یک به یک است. حداکثر مقدار  $a$  کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۱۰- حدود  $a$  برای این که تابع  $f(x) = \begin{cases} |2x-1|+1 & x \leq 0 \\ -3x+a & x > 1 \end{cases}$  یک به یک باشد کدام است؟

(۱)  $a \leq 5$ (۲)  $a \leq -1$ (۳)  $a \geq 5$ (۴)  $a \geq -1$

## تابع وارون:

اگر تابع  $f$  یک به یک باشد، تابع وارون آن را  $f^{-1}$  می نامیم به شرطی که

$$\begin{cases} f \circ f^{-1}(x) = x \\ f^{-1} \circ f(x) = x \end{cases}$$

تابع همانی  $y = x$

دقت کنید که دو تابع  $f^{-1} \circ f(x)$ ،  $f \circ f^{-1}(x)$  به دلیل عدم تساوی دامنه ها ممکن است با هم برابر نباشند.

شرط وارون پذیری تابع، یک به یک بودن آن است.

$$f \circ f^{-1}(x) = x \quad \text{✗}$$

$f^{-1}$  وارون  $f$

تذکره: 

دامنه تابع وارون، برد تابع اصلی و برد تابع وارون، دامنه تابع اصلی است.

$$D_{f^{-1}} = R_f$$

$$R_{f^{-1}} = D_f$$

نمودار تابع وارون:

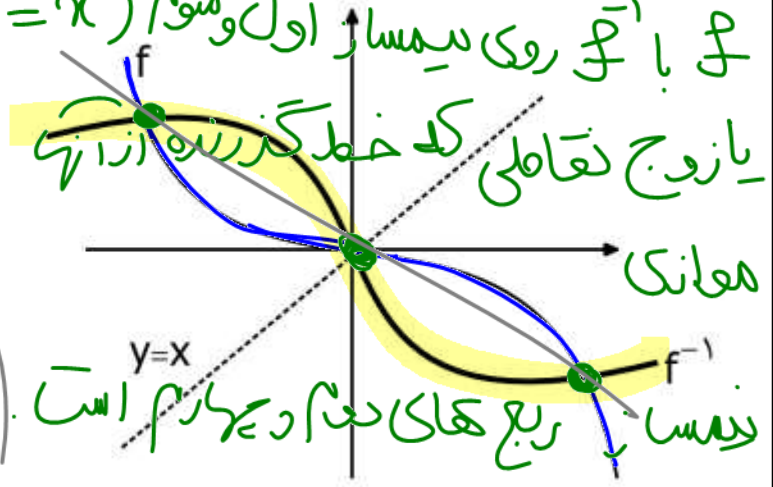
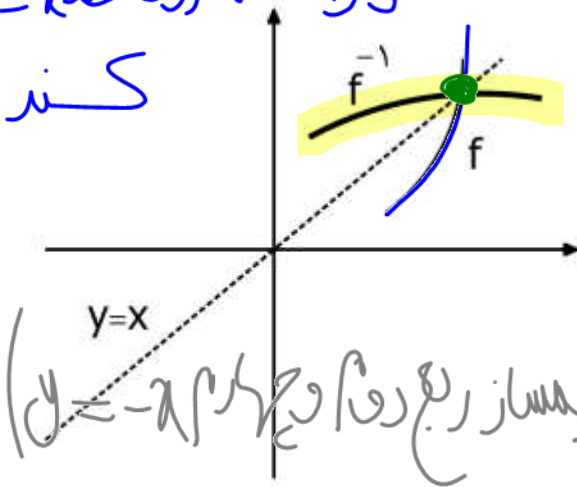
نمودار تابع وارون، قرینه نمودار تابع نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.

اگر  $f$  اکیدا نزولی باشد آنگاه معکول بوجود  $f$  با  $f^{-1}$  روی نیمساز اول و سوم  $(y=x)$

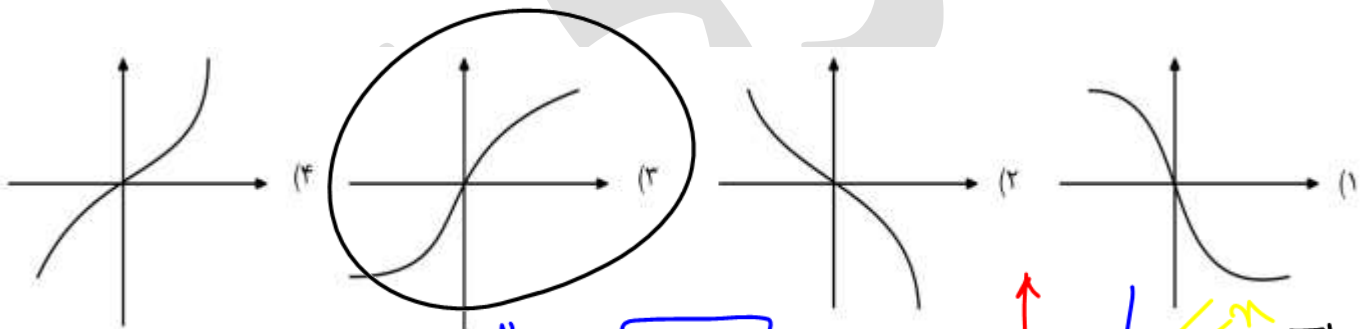
یا زوج تقاطعی که خط گذرنده از آنجا معانی

نیمساز ربع های دوم و چهارم است.

اگر  $f$  اکیدا صعودی باشد نمودار  $f^{-1}$  را حتماً روی خط  $y=x$  قطع کند

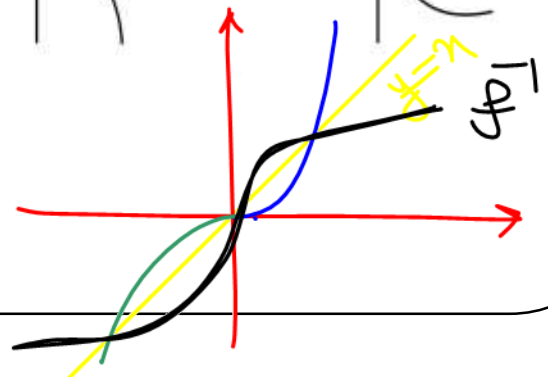


۱۱- اگر  $f(x) = x|x|$  باشد، نمودار تابع  $f^{-1}$  کدام است؟ (تجربی ۹۵)

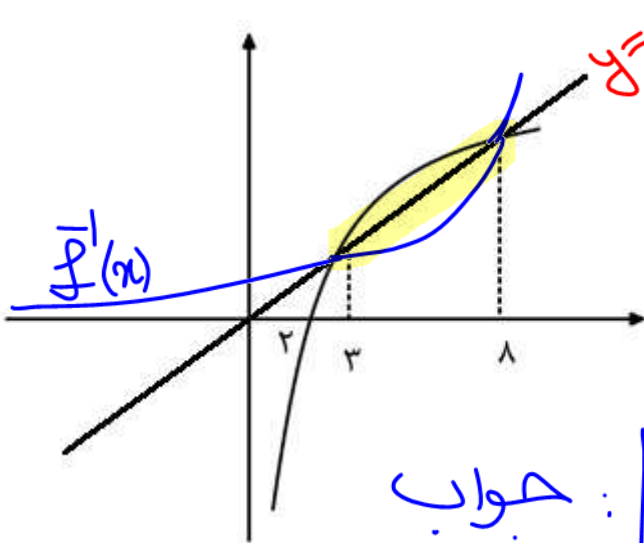


$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) = x^2 & x \geq 0 \\ x(-x) = -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

لر جاق



۱۲- شکل رو به رو نمودار تابع  $y = f(x)$  و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه



کدام است؟ (تجربی ۹۴)  $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$

$x - f^{-1}(x) > 0$   
 $x > f^{-1}(x)$

(۱)  $(0, 2]$

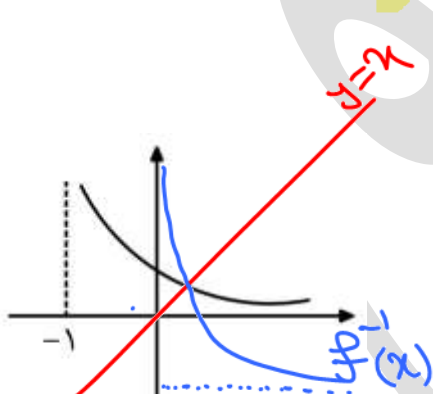
(۲)  $[2, 3]$

(۳)  $[2, 8]$

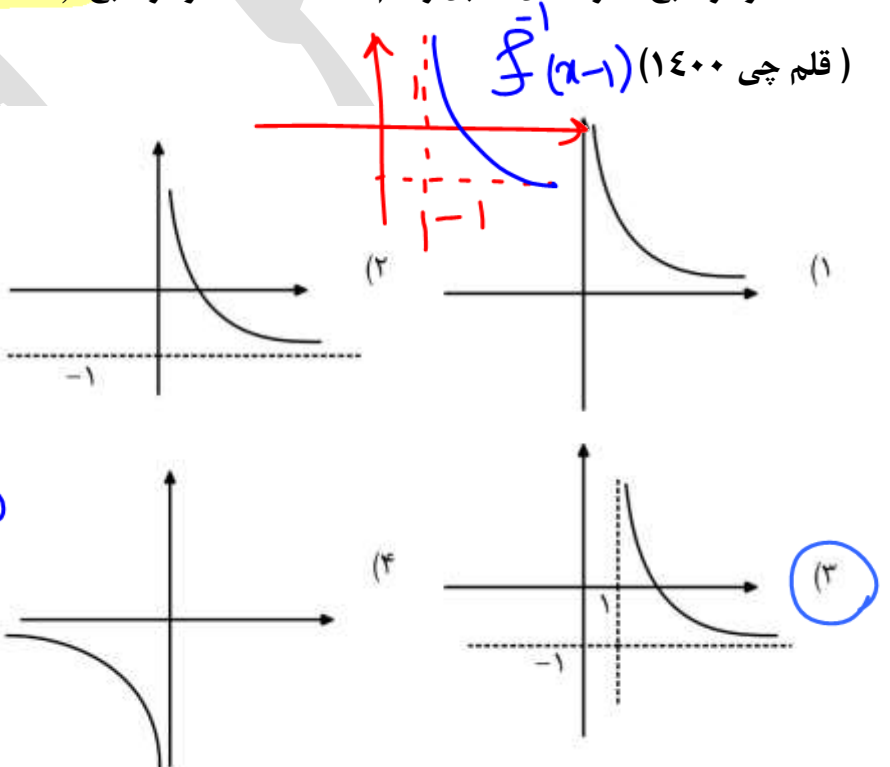
(۴)  $[3, 8]$

جواب:  $[3, 8]$

۱۳- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع  $y = f^{-1}(x-1)$  کدام است؟



وارون کردن نسبت به انتقال اولویت دارد.

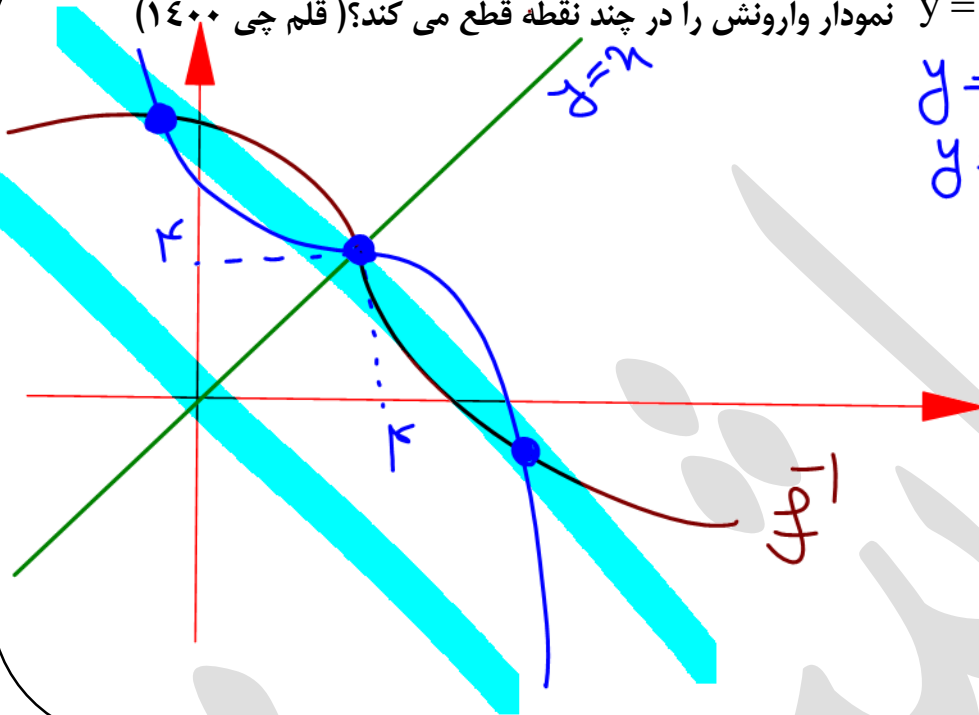


۱۴- نمودار تابع  $y = 4 - (x - 4)^3$  نمودار وارونش را در چند نقطه قطع می کند؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

$$y = -x^3 \quad 1(1)$$

$$y = -(x-4)^3 + 4 \quad 2(2)$$

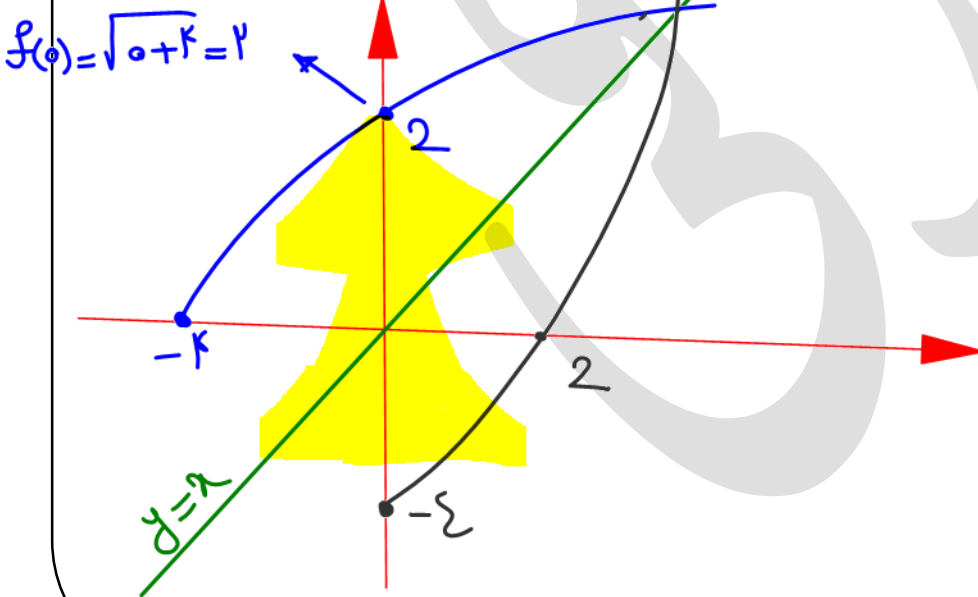
- 3(3) 3  
 4(4) صفر



۱۵- تابع  $f(x) = \sqrt{x+4}$  مفروض است. اگر نمودارهای توابع  $f$  و  $f^{-1} + m$  همدیگر را قطع نکنند.

حدود  $m$  کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

- 1)  $m > 4$   
 2)  $m > 6$   
 3)  $m \geq 4$   
 4)  $m \geq 6$



**نکته:** محل برخورد نمودارهای دو تابع  $f^{-1}, f$  در تابع های اکیداً صعودی، محل برخورد نمودار تابع  $f$  با

$$f^{-1}(x) = f(x) \rightarrow f(x) = x$$

نیمساز ربع های اول و سوم است.

۱۶- نمودار تابع  $f(x) = x^3 + x + 1$  چند بار نمودار تابع وارون آن را قطع می کند؟

$$f^{-1}(x) = f(x) \Rightarrow x = f(x) \Rightarrow x = x^3 + x + 1 \quad \text{صفر (۱)}$$

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1 \quad \begin{matrix} 1(2) \\ 2(3) \\ 3(4) \end{matrix}$$

۱۷- فرض کنید  $M$  نقطه تلاقی منحنی  $y = \sqrt{x+3} - 1$  با تابع وارون خود باشد، فاصله نقطه  $M$  از مبدأ

مختصات، کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

$$f^{-1}(x) = f(x) \Rightarrow x = f(x) \Rightarrow x = \sqrt{x+3} - 1 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$x+1 = \sqrt{x+3} \Rightarrow (x+1)^2 = x+3 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x+3 \quad \sqrt{2} \quad (2)$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \quad X \\ x = 1 \rightarrow y = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} 3(3) \\ 2\sqrt{2} \quad (4) \end{matrix}$$

فاصله نقطه  
از  $(x,y)$   
مبدأ

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

**یافتن ضابطه تابع به روش تشریحی:**

روش کلی برای یافتن ضابطه تابع وارون، یافتن (تنها کردن)  $x$  در ضابطه تابع است. برای حل این معادله  $y$  را عدد ثابتی فرض می کنیم و با حل آن که معمولاً از درجه اول یا دوم بر حسب  $x$  است، ایکس را تنها می کنیم. برای نمونه تابع وارون، تابع های زیر را می یابیم.

$$f(x) = 3x - 1 \rightarrow y = 3x - 1 \rightarrow y + 1 = 3x \rightarrow \frac{y+1}{3} = x \rightarrow x = \frac{y+1}{3} \rightarrow$$

$$y = \frac{x+1}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$$

اگر سبب خط  $f(x)$  برابر  $a$  باشد سبب خط تابع وارون  $f^{-1}(x)$  برابر  $\frac{1}{a}$  است.

**به مثال زیر توجه کنید:**

تابع وارون تابع  $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$  با دامنه  $x \geq 6$  کدام است؟

دائمه تابع وارون

$f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 9$  ( $x \leq 3$ ) (2)

$f^{-1}(x) = x^2 - 6x + 11$  ( $x \leq 3$ ) (1)

$f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 7$  ( $x \leq 1$ ) (4)

$f^{-1}(x) = x^2 - 6x + 11$  ( $x \leq 1$ ) (3)

قبل از وارون کردن تابع باید دامنه تابع وارون (یعنی شرط گزینه ها) را تعیین کنیم. دامنه تابع وارون همان برد تابع اصلی است.

از شرط تابع اصلی شروع می کنیم و ضابطه تابع را می سازیم.

$$x \geq 6 \xrightarrow{-2} x - 2 \geq 4 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{x-2} \geq 2 \xrightarrow{-} -\sqrt{x-2} \leq -2 \xrightarrow{+3} 3 - \sqrt{x-2} \leq 3 - 2$$

$$3 - \sqrt{x-2} \leq 3 - 2 \rightarrow f(x) \leq 1 \Rightarrow y < 1 \Rightarrow x < 1$$

بنابراین برد تابع اصلی  $y \leq 1$  است و دامنه تابع وارون  $x \leq 1$  است. اکنون کافی است در ضابطه تابع  $x$  را تنها کنیم.

$$f(x) = 3 - \sqrt{x-2} \rightarrow y = 3 - \sqrt{x-2} \rightarrow \sqrt{x-2} = 3 - y \rightarrow$$

$$x - 2 = (3 - y)^2 \rightarrow x - 2 = y^2 - 6y + 9 \rightarrow$$

$$x = y^2 - 6y + 11 \rightarrow y = x^2 - 6x + 11$$

گزینه سوم درست است.

حالا برویم سراغ دسته بندی ضابطه های تابع وارون:



۱ ضابطه تابع وارون تابع یک به یک زیر را به دست آورید.

الف)  $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$   
 ب)  $g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$

۲ در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که  $f$  و  $g$  وارون یکدیگرند.

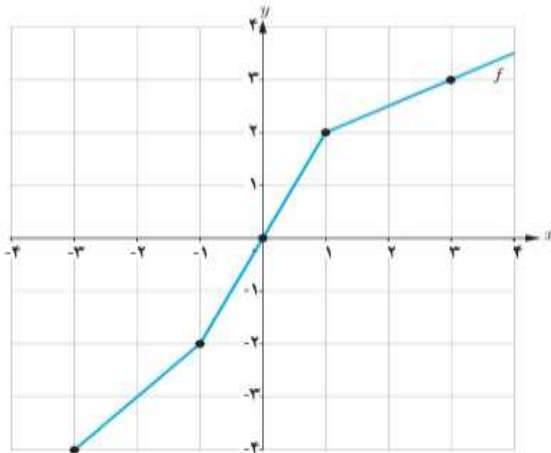
الف)  $f(x) = \frac{-\sqrt{y}}{2}x - 3$  ،  $g(x) = -\frac{2x+6}{\sqrt{y}}$   
 ب)  $f(x) = -\sqrt{x-8}$  ،  $g(x) = 8+x^2 ; x \leq 0$

۳ رابطه بین درجه سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به صورت  $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$  است که در آن  $x$  میزان درجه سانتی‌گراد و  $f(x)$  میزان درجه فارنهایت است.  $f^{-1}(x)$  را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می‌دهد.

۴ توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه آنها توابعی یک به یک بسازید و ضابطه وارون آنها را به دست آورید.

الف)  $f(x) = |x|$   
 ب)  $g(x) = -x^2$   
 پ)  $h(x) = x^2 + 4x + 3$

۵ از نمودار تابع  $f$  برای تکمیل جدول استفاده کنید.



|             |     |     |     |     |
|-------------|-----|-----|-----|-----|
| $x$         | -4  | -2  | 2   | 3   |
| $f^{-1}(x)$ | ... | ... | ... | ... |

۶ با محدود کردن دامنه تابع  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد  $f$  و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

۷ اگر  $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$  و  $g(x) = x^2$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف)  $(fog)^{-1}(5)$

ب)  $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$

پ)  $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$

الف) وارون تابع های خطی:

۱۸- اگر دو خط به معادلات  $ax + by = 8$  و  $2x - 3y = b$  نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارن باشند.  $a + b$  کدام است؟

دو خط وارون هم اند  $\pm 3$  (۱)

$$ax = \frac{8}{y} + b \Rightarrow x = \frac{8}{y} + \frac{b}{1} \Rightarrow x = \frac{8}{y} + \frac{b}{1} \quad \begin{matrix} \pm 2 & (2) \\ 2, -3 & (3) \end{matrix}$$

$$y = \frac{8}{x} + \frac{b}{1}$$

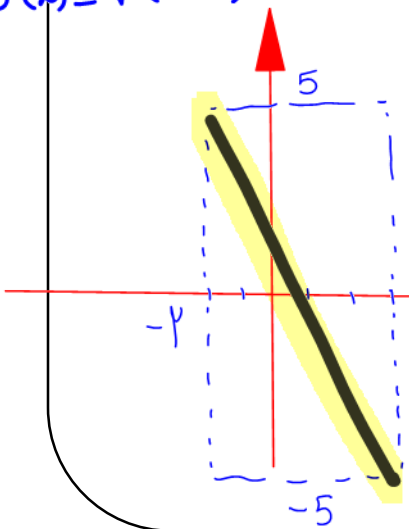
$$ax + by = 8 \rightarrow by = -ax + 8 \xrightarrow{\div b} y = -\frac{a}{b}x + \frac{8}{b}$$

$$\frac{8}{b} = -\frac{a}{b} \rightarrow b^2 = 14 \rightarrow b = \pm \sqrt{14}$$

$$a + b = \pm 2$$

۱۹- تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - |x + 2|$  در بازه ای یک به یک است. تابع وارون در این بازه کدام است؟

$$f(x) = \sqrt{(x-3)^2} - |x+2| = |x-3| - |x+2|$$



تابعی که خوردا کیدنزوی است  
وارونش هم کیدنزوی است  
گزین ۳ درست که لیب منفی دار

$$R_f = [-5, 5]$$


$$D_{f^{-1}} = [-5, 5]$$

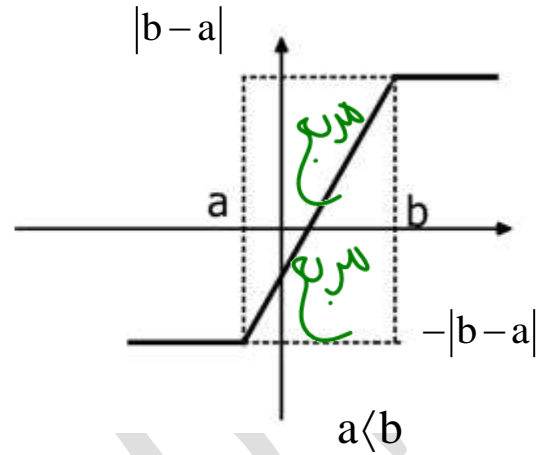
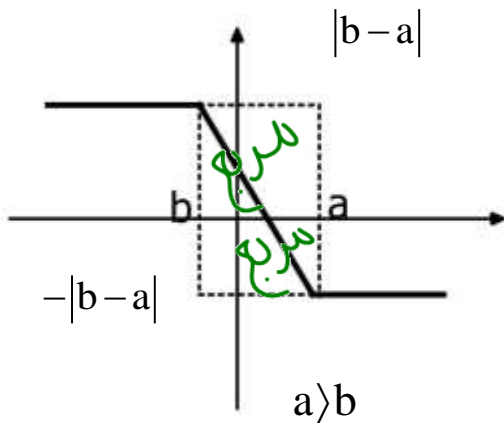
$$y = \frac{x-1}{2} \quad x \in [-5, 5] \quad (1)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad x \in [-2, 3] \quad (2)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad x \in [-5, 5] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad x \in [-2, 3] \quad (4)$$

**نکته:** نمودار تابع  $f(x) = |x-a| - |x-b|$  به نام سرسره به یکی از شکل های زیر است. 



### (ب) وارون تابع های درجه دو و رادیکالی با فرجه دو:

تابع های درجه دو به طور کلی یک به یک نیستند ولی در هر زیر مجموعه ای از بازه های قبل از طول رأس یا بعد از طول رأس یک به یک هستند و وارون آن تابعی گنگ با فرجه دو است. برای تنها کردن  $x$  در این ضابطه ها از روش مربع کامل در نمونه های ساده یا دلتا در نمونه های دشوار استفاده می کنیم.

۲۰- تابع وارون  $f(x) = x^2 - 6x + 3$  با شرط  $x < 3$  کدام است؟

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = 3$   
 تابع وارون  
 $y > -4 \Rightarrow x > -4$   
 $x=3 \rightarrow y = 3^2 - 6(3) + 3 = -6$

$f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+6} \quad -6 \leq x < 3$  (۱)

$f^{-1}(x) = \sqrt{x-6} - 3 \quad x > 6$  (۲)

$f^{-1}(x) = \sqrt{x-6} - 3 \quad x > 9$  (۳)

$f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+6} \quad x > -6$  (۴)

۲۱- نمودار تابع  $y = \sqrt{1-2x}$  را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به بالا منتقل می کنیم. ضابطه تابع وارون تابع به دست آمده کدام است؟

$y = \sqrt{1-2(x+1)} + 1$   
 $y = \sqrt{-2x-1} + 1 \Rightarrow y \geq 1$

بردیانه اصلی  
 دامنه  $f =$  شرط  $f^{-1}$   
 $(-1, 2) \in f \Rightarrow (2, -1) \in f^{-1}$

~~$y = 1 + \sqrt{-1-2x} \quad x \leq -\frac{1}{2}$  (۱)~~

~~$-\frac{1}{2}(2) - 2 + 1 = -3$~~

~~$y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 1 \quad x \geq 1$  (۲)~~

~~$y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1 \quad x \leq -\frac{1}{2}$  (۳)~~

$y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1 \quad x \geq 1$  (۴)

$-\frac{1}{2}(2) + 2 - 1 = -1$

۲۲- اگر  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  و  $D_f = (-\infty, 3]$  ضابطه تابع  $g$  کدام باشد تا دو تابع  $f \circ g$  و  $g \circ f$  همانی باشند؟ (گزینه دو ۱۴۰۰)

تابع وارون تابعی است که ترکیب آن از دو طرف با تابع اصلی برابر همانی گردد.

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

$$(2, 0) \in f \Leftrightarrow (0, 2) \in f^{-1}$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

- $y = 3 + \sqrt{x+1}$  (۱)  $3 + \sqrt{0+1} = 4$  X
- $y = 3 - \sqrt{x+1}$  (۲)  $3 - \sqrt{0+1} = 2$  ✓
- $y = 3 + \sqrt{x-1}$  (۳)  $3 + \sqrt{0-1}$  X
- $y = 3 - \sqrt{x-1}$  (۴)  $3 - \sqrt{0-1}$  X

**پ) تابع های درجه سوم و رادیکالی فرجه سه:**

برای یافتن ضابطه وارون توابع درجه سه، فقط و فقط باید آن ها را به اتحاد مکعب کامل تبدیل کنیم. اتحاد مکعب کامل و چند نمونه مشهور آن عبارتند از:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(x \pm 1)^3 = x^3 \pm 3x^2 + 3x \pm 1$$

$$(x \pm 2)^3 = x^3 \pm 6x^2 + 12x \pm 8$$

۲۳- ضابطه تابع وارون، تابع  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$  کدام است؟

عدد لغزناوه  $(0, -3) \in f \Rightarrow (-3, 0) \in f^{-1}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5} + 2$  (۱) ✓  
 $\sqrt[3]{-8} + 2 = -2 + 2 = 0$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+10} + 2$  (۲) ✗  
 $\sqrt[3]{7} + 2 \neq 0$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+5} - 2$  (۳) ✗  
 $\sqrt[3]{2} - 2 \neq 0$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-10} - 2$  (۴) ✗  
 $\sqrt[3]{-13} - 2 \neq 0$

۲۴- اگر  $g(x)$  وارون تابع  $x \geq 9$  و  $f(x) = 3 - \sqrt[3]{x-1}$  باشد. مقدار  $a$

کدام است؟ (گاج ۱۴۰۰)

$D_g = D_{f^{-1}} = (-\infty, a]$  و  $D_f = (-\infty, a]$

$f(x) = 3 - \sqrt[3]{x-1}$   $x \geq 9 \Rightarrow y = 3 - \sqrt[3]{9-1} = 3 - \sqrt[3]{8} = 3 - 2 = 1$

-۱ (۱)

۱ (۲) ✓

۲ (۳)

-۲ (۴)

تابع هموگرافیک:

به تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  هموگرافیک می گوئیم.  $(\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}, c \neq 0)$

ضابطه تابع وارون  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  برابر  $f^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$  است.  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$

در این تابع اگر  $a+d=0$  ضابطه تابع وارون برابر خود تابع می شود.  $f(x) = \frac{3x+1}{3x-2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{3x-2}$

نمودار تابع هموگرافیک در هر شرایطی نمودار تابع وارون خود را روی نیمساز ربع های اول و سوم قطع می کند.

۲۵- اگر تابع  $f(x) = \frac{3x+4}{x+m}$  از نقطه  $(2, -10)$  بگذرد، تابع  $y = f \circ f^{-1}(x) + f^{-1}(x)$  نیمساز

ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می کند؟ (سنجش ۱۴۰۰)

$f(2) = -10 \rightarrow \frac{3(2)+4}{2+m} = -10 \rightarrow \frac{10}{2+m} = -10 \rightarrow m = -3 - 1(1)$

$f(x) = \frac{3x+4}{x-3} \rightarrow f^{-1}(x) = f(x) = \frac{3x+4}{x-3}$

$y = 2 + f^{-1}(x) = x + f(x) = x \rightarrow f(x) = \frac{4}{3} - 2(2)$

$\frac{3x+4}{x-3} = 0 \rightarrow 3x+4=0 \rightarrow x = -\frac{4}{3} - 2(3)$

$\frac{4}{3} - 2(4)$

اگر  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{2}x-2}$  باشد  $f \circ f \circ f(\sqrt{2})$  کدام است؟  $f(x) = f^{-1}(x)$

$f \circ f \circ f(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2})-2} = \frac{2\sqrt{2}}{2-2} = \sqrt{2}$

۲۶- نمودار تابع  $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$  با دامنه  $\mathbb{R} - \{2\}$  نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می کند؟

(تجربی خارج ۹۴)

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow \frac{x+4}{x-2} = x$$

~~(۱) -۱, -۲~~

(۲) -۱, ۴

~~(۳) ۱, -۴~~

~~(۴) ۱, ۴~~

گزینه  
-  
 $x = -1 \rightarrow \frac{-1+4}{-1-2} = -1 \quad \text{OK}$

$x = -4 \rightarrow \frac{-4+4}{-4-2} = -4 \quad \text{NO}$

### روش تستی تابع وارون:

برای این کار کافی است  $x$  دلخواهی با توجه به دامنه و شرط تابع اصلی انتخاب کنیم و با جای گذاری آن در ضابطه تابع مقدار  $y$  را بیابیم.  $(x, y)$  نقطه ای روی تابع است بنابراین گزینه ای درست است که نقطه  $(y, x)$  روی نمودار آن باشد. یعنی اگر مقدار  $y$  را در ضابطه آن ها جای گذاری کنیم حاصل برابر  $x$  شود. دقت کنید اگر در مرحله اول گزینه درست خود را نشان ندهد با انتخاب عدد دلخواه دیگری، عملیات بالا را تکرار می کنیم.



نکته:



اگر مجبور شویم شرط های گزینه ها را بررسی کنیم باید به نوعی برد تابع اصلی را بیابیم. یعنی گزینه هایی درست اند که شرط آن ها برد تابع اصلی باشند.

به مثال زیر توجه کنید:

ضابطه تابع وارون

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & x < -1 \\ \frac{1}{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

کدام است؟

$$\frac{1-|x|}{x} \quad (|x| \geq 1) \quad (4)$$

$$\frac{1-|x|}{x} \quad (x \neq 0) \quad (3)$$

$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\frac{1+|x|}{x} \quad (|x| \geq 1) \quad (2)$$

$$\frac{1+|x|}{x} \quad (x \neq 0) \quad (1)$$

$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

به عنوان عدد دلخواه به X عدد 3 می دهیم:

$$f(3) = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(3, \frac{1}{2}\right) \in f \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 3\right) \in f^{-1}$$

گزینه ای درست است که اگر به آن  $\frac{1}{2}$  بدهیم به ما 3 بدهد.

شرط گزینه های دوم و چهارم اصلاً  $\frac{1}{2}$  را قبول نمی کنند چون  $\left|\frac{1}{2}\right|$  بزرگ تر مساوی یک نیست.  $\frac{1}{2}$  را در گزینه های اول و سوم جای گذاری می کنیم و فقط جواب گزینه اول برابر 3 است.

۲۷- ضابطه تابع وارون  $y = \frac{x}{1+|x|}$  کدام است؟

دفعه اول  $(0,0) \in f \Rightarrow (0,0) \in f^{-1}$

$y = \frac{x}{1-|x|} = 0 \quad (|x| < 1) \quad (1) \checkmark$

$y = \frac{1-|x|}{|x|} \quad (|x| > 1) \quad (2) \times$   
صفر قبول ندارد

$y = \frac{x}{|x|-1} \quad (|x| > 1) \quad (3) \times$   
صفر قبول ندارد

$y = \frac{|x|-1}{x} \quad (|x| < 1) \quad (4) \times$   
صفر قبول ندارد

تن  $y = \frac{0-1}{0} = \infty$

۲۸- ضابطه تابع وارون  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  به کدام صورت است؟

دفعه اول  $(2,4) \in f \Rightarrow (4,2) \in f^{-1}$

~~$y = x \sqrt{|x|} \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$~~

~~$y = x \sqrt{|x|} \quad x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2)$~~

~~$y = x|x| \quad x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (3) \checkmark$~~

$y = x|x| \quad x \in \mathbb{R} \quad (4) \checkmark$

$(0,0) \Rightarrow (0,0) \in f^{-1}$

۲۹-۱ اگر  $f(x) = 2x + \sqrt{2x}$  باشد، ضابطه تابع  $f^{-1}(x)$  کدام است؟ (سنگش ۹۸)

$2x + \sqrt{2x} = y$

$(2, 4) \in f \Rightarrow (4, 2) \in f^{-1}$

دامنه تابع وارون = برد تابع اصلی



$2x + \sqrt{2x} \geq 0$

$(x \geq -\frac{1}{4}) \quad \frac{1}{4}(2x - \sqrt{4x+1} + 1) \quad (1) \checkmark$

$(x \geq -\frac{1}{4}) \quad \frac{1}{2}(2x - \sqrt{4x+1} + 1) \quad (2) \times$

$(x \geq 0) \quad \frac{1}{4}(2x - \sqrt{4x+1} + 1) \quad (3) \checkmark$

$(x \geq 0) \quad \frac{1}{2}(2x - \sqrt{4x+1} + 1) \quad (4) \times$

۳۰- ضابطه تابع وارون  $f(x) = \frac{2^{x+1} + 3}{2^x - 1}$  کدام است؟

$(1, 7) \in f \Rightarrow (7, 1) \in f^{-1}$

گزینه ۱  $\frac{\log_2 7 + 3}{\log_2 7 - 1}$

گزینه ۲  $\log_2 \frac{1}{5} = \log_2 2^{-1} = -1$

گزینه ۳  $\log_2 \frac{5}{1} = \log_2 5 = 2.32 \times$

گزینه ۴  $2 \log_2 \frac{2-2}{2^x+1} = 2 \log_2 1 = 2(0) = 0 \times$

$\frac{\log_2 x + 3}{\log_2 x - 2} \quad (1)$

$\log_2^{x+3} \quad (2) \checkmark$

$\log_2^{\frac{x-2}{x+3}} \quad (3)$

$2 \log_2^{\frac{x-2}{x+3}} \quad (4)$

۳۱- ضابطه تابع وارون  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ 2x-1 & x < 2 \end{cases}$  کدام است؟

$$(2, 4) \in f \rightarrow (4, 2) \in f^{-1}$$

$$2x-1 = 2(2)-1 = 3$$

$$(2, 3) \Rightarrow (3, 2) \in f^{-1}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x \geq 4 \\ \frac{1}{2}x-1 & x < 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 4 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & x < 3 \end{cases} \quad (3)$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \geq 2 \\ \frac{1}{2x-1} & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

**تذکره:** 

برای حل تشریحی این سوال ها باید برد هر ضابطه را بیابیم و آن را به عنوان شرط همان ضابطه در تابع وارون بگذاریم. با وارون کردن هر ضابطه تابع وارون به دست می آید.

## یافتن مقدار تابع وارون:

برای یافتن مقدار تابع وارون در یک نقطه، عدد داخل پراتنز  $f^{-1}$  را برابر عرض تابع  $f$  می گذاریم و  $x$  را می یابیم، تمام

۳۲- اگر دامنه تابع  $y = x^2 - 6x + 4$  را به بازه  $[-\infty, 3]$  محدود کنیم. حاصل  $f^{-1}(11)$  کدام است؟

(گزینه دو ۱۴۰۰)

$$11 = x^2 - 6x + 4 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \rightarrow (x-7)(x+1) = 0 \quad \text{①(1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 7 \end{array} \right\}$$

۷(۲)

-۳(۳)

۱۲(۴)

نو بازه ۲ من چید غلطی کنه! ✗

۳۳- اگر  $g(x)$  تابع وارون  $f(x) = x + \sqrt{x}$  باشد مقدار  $g(6) + g(12)$  کدام است؟ (تجربی ۹۹)

$$g(4) = f^{-1}(4) \Rightarrow 4 = x + \sqrt{x} \Rightarrow x = 2 \quad \text{۱۰(1)}$$

۱۱(۲)

$$g(12) = f^{-1}(12) \Rightarrow 12 = x + \sqrt{x} \Rightarrow x = 9 \quad \text{③(3)}$$

۱۴(۴)

$$2 + 9 = 11$$

۳۴- اگر  $f(x) = x + \sqrt{x}$  و  $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$  باشند  $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$  کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(20) = g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(14)$$

$$20 = x + \sqrt{x} \Rightarrow x = 14$$

$$14 = \frac{9x+6}{1-x} \Rightarrow 9x+6 = 14-14x \Rightarrow 23x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{23}$$

- $x = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$
- (۱)  $\frac{2}{5}$
  - (۲)  $\frac{2}{5}$
  - (۳)  $\frac{2}{4}$
  - (۴)  $\frac{2}{4}$

۳۵- اگر  $f(x) = 2x+1$  و  $g^{-1}(x) = \frac{2x+4}{x-3}$  باشد حاصل  $(g \circ f^{-1})(3)$  کدام است؟

$$(g \circ f^{-1})(3) = g(f^{-1}(3)) = g(1) = 13 + 1 = 14$$

$$3 = 2x+1 \Rightarrow x = 1$$

$$3 = \frac{2x+4}{x-3} \Rightarrow 2x+4 = 3x-9 \Rightarrow x = 13$$

(سنجش ۱۴۰۰)

(۱) ۱۰

(۲) ۱۲

(۳) ۱۴

(۴) ۱۵

۳۶- اگر  $f(4x) = 3 + 2g\left(\frac{2}{x}\right)$  و  $g^{-1}(1) = 4$ ، مقدار  $f^{-1}(5)$  کدام است؟

$$f(2x) = 3 + 2g\left(\frac{2}{x}\right) \quad x = \frac{1}{2}$$

$$f\left(2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 3 + 2g\left(\frac{2}{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow f(1) = 3 + 2g(4)$$

$$f(1) = 3 + 2(1) \Rightarrow f(1) = 5 \Rightarrow 1 = f^{-1}(5)$$

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۳۷- اگر برای تابع های  $g, f$  دستگاه  $2x \rightarrow f^{-1} \rightarrow g \rightarrow \frac{x}{2}$  برقرار باشد و  $g^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 2$  آنگاه

مقدار  $f^{-1}(3)$  کدام است؟

$$g\left(f^{-1}(2x)\right) = \frac{x}{2}$$

$$f^{-1}(2x) = g^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow f^{-1}(2x) = \frac{1}{\frac{x}{2}} + 2$$

$$f^{-1}(2x) = \frac{2}{x} + 2 \Rightarrow 2x = f\left(\frac{2}{x} + 2\right) \quad x=2$$

$$4 = f\left(\frac{2}{2} + 2\right) \rightarrow 4 = f(3)$$

۴ (۱)

۶ (۲)

۲ (۳)

$\frac{4}{3}$  (۴)

**نکته:** در ماشین هایی به شکل  $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow y$  فلش ها را از سر به ته در نظر می گیریم و تابع ها را

ترکیب می کنیم. برای نمونه در این ماشین می توانیم بنویسیم:  $g(f(x)) = y$ .

۳۸- فرض کنید در دامنه  $[0, +\infty)$  تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$  مفروض باشد،  $f^{-1}(2)$  کدام است؟ (تجربی ۹۹)

(۱)  $\log_2^{2-\sqrt{3}}$

(۲)  $\log_2^{\sqrt{3}-1}$

(۳)  $\log_2^{1+\sqrt{3}}$

(۴)  $\log_2^{2+\sqrt{3}}$

### یافتن محل برخورد نمودار تابع وارون با تابعی دلخواه:

در این تیپ تست ها از خاصیت جا به جایی تابع وارون در طرفین مساوی استفاده می کنیم. به این ترتیب که اگر تابعی از یک طرف مساوی به طرف دیگر برود اینورس می گیریم اگر دارد آن را پس می دهد. دقت کنید عملیات بالا را فقط زمانی می توانیم انجام دهیم که تابع کاملاً تنها باشد و نه چیزی جمع و تفریق شده باشد و نه ضربی داشته باشد.

$$f^{-1}(x) = y \rightarrow x = f(y) \quad \text{یعنی} \quad f(x) = y \rightarrow x = f^{-1}(y)$$



۳۹- اگر  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  باشد، نمودارهای دو تابع  $f^{-1}$ ،  $g(x) = \frac{x-9}{2}$  با کدام طول

مقاطع هستند؟ (تجربی ۹۸)

(۱) ۱۲

(۲) ۱۵

(۳) ۱۸

(۴) ۲۱

۴۰- تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x - \frac{2}{x}$  در دامنه  $D_f = (-\infty, 0)$  را در نظر بگیرید. نمودار تابع  $f^{-1}$  نیمساز

ناحیه چهارم را با کدام طول قطع می کند؟ (تجربی ۹۹)

(۱)  $\frac{3}{4}$

(۲) ۱

(۳)  $\frac{3}{2}$

(۴) ۲

۴۱- اگر  $f(x) = 2x + \sqrt{x+2}$  باشد، نمودار تابع  $g(x) = -f^{-1}(x+1)$  نیمساز ربع دوم را در نقطه ای با کدام طول قطع می کند؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

$$\frac{3 - \sqrt{13}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{2 - \sqrt{7}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{-2 - \sqrt{7}}{2} \quad (4)$$

**نکته:** برای وارون کردن تابع مرکب از فرمول زیر هم می توان استفاده کرد.

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

۴۲- اگر  $f(x) = -2 + \frac{1}{x-1}$  و  $g(x) = \frac{x+3}{x+2}$  باشند. ضابطه  $f^{-1} \circ g^{-1}(x)$  کدام است؟

$$x \quad (1)$$

$$\frac{x}{x-1} \quad (2)$$

$$\frac{x-1}{2} \quad (3)$$


$$\frac{x+1}{2} \quad (4)$$

**ترکیب**  $f^{-1}, f$  :

ترکیب تابع با تابع وارونش برابر تابع همانی است.

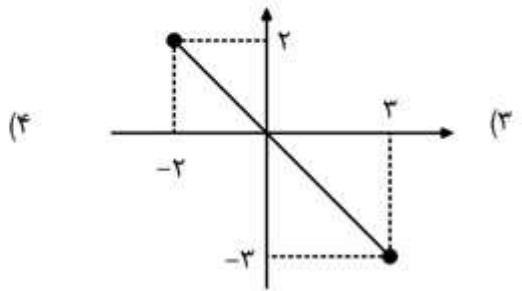
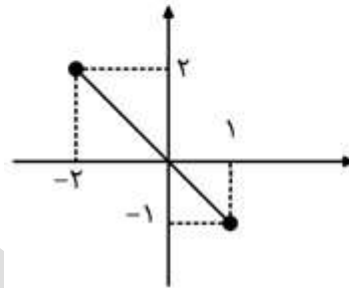
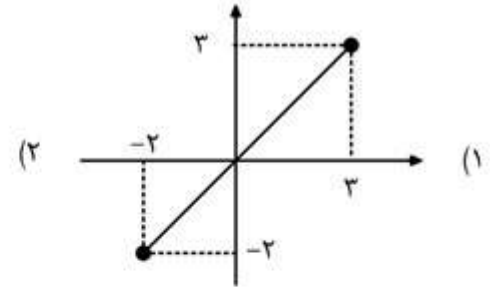
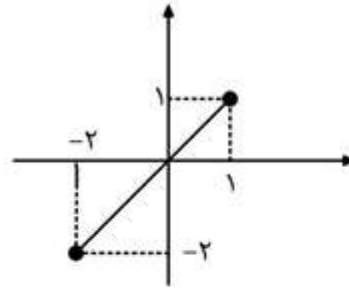
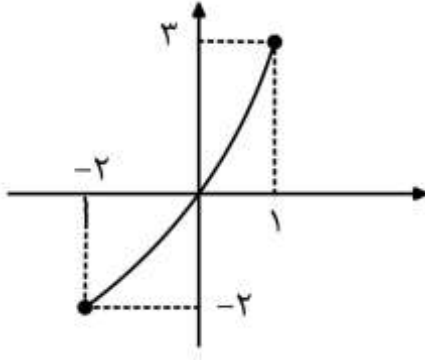
$$\begin{cases} f \circ f^{-1}(x) = x \\ f^{-1} \circ f(x) = x \end{cases}$$

ممکن است دو تابع  $f^{-1} \circ f, f \circ f^{-1}$  با هم برابر نباشند چون دامنه های آن ها لزوماً با هم برابر نیستند.

**نکته:** دامنه تابع  $f \circ f^{-1}$  برد تابع  $f$  و دامنه تابع  $f^{-1} \circ f$  دامنه تابع  $f$  است. 

$$D_{f \circ f^{-1}} = R_f, \quad D_{f^{-1} \circ f} = D_f$$

۴۳- نمودار تابع  $f^{-1}$  به صورت زیر است. نمودار تابع  $y = f^{-1} \text{ of } (x)$  کدام است؟



۴۴- اگر  $f(x) = 5 + 2\sqrt{8-x}$  و دامنه تابع ثابت  $(f^{-1} \text{ of } f)_{(x)} - (f \text{ of } f^{-1})_{(x)}$  کدام است؟

(گزینه دو ۱۴۰۰)

(۱)  $(-\infty, 8]$

(۲)  $[5, +\infty)$

(۳)  $[5, 8]$

(۴)  $(-\infty, 5]$