

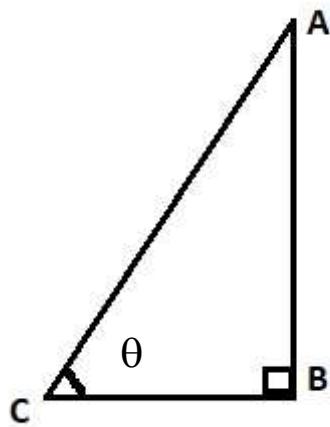
مُثُلَّثات

استاد اشرفی

www.mathtest.ir



دهم



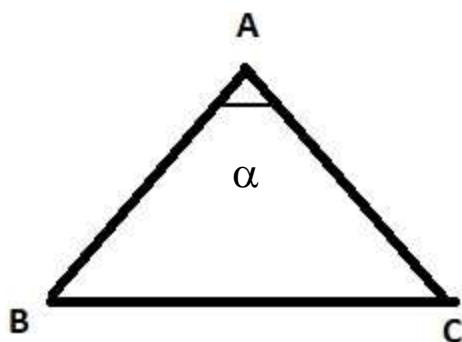
فرمول های مثلثات دهم:

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\cot\theta = \frac{BC}{AB}$$

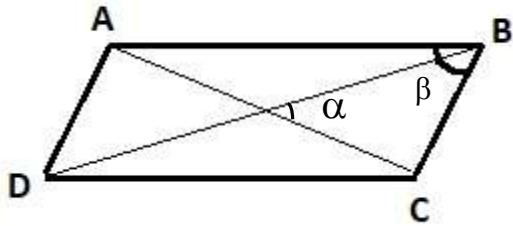


فرمول های مساحت:

فرمول مساحت مثلث:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$$

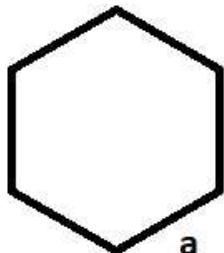
فرمول مساحت متوازی الاضلاع:



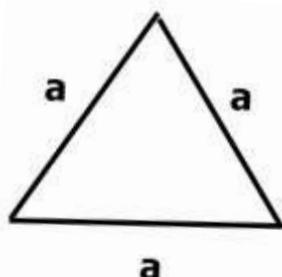
$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$$

$$S = AB \cdot BC \cdot \sin \beta$$

فرمول مساحت شش ضلعی و مثلث متساوی الاضلاع:

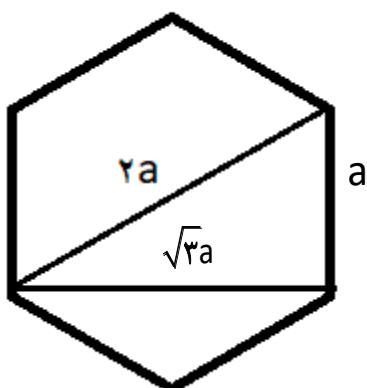


$$S = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right)$$



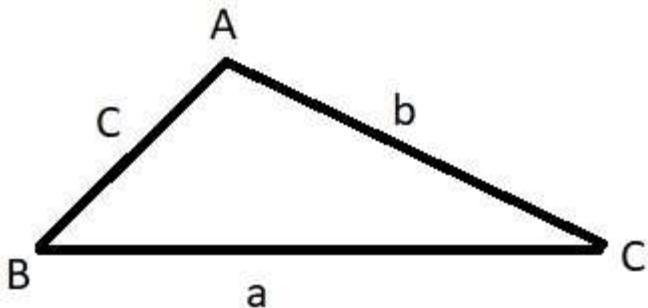
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

در هر شش ضلعی منتظم به طول ضلع a ، طول قطر بزرگ $2a$ و طول قطر کوچک $\sqrt{3}a$ است.



رابطه سینوس ها:

در هر مثلث میان اضلاع و سینوس زاویه ها رابطه زیر برقرار است.



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

هرگاه دو زاویه و یک ضلع از مثلث را بدهند
می توانیم از این روش استفاده کنیم.

روابط نسبت های مثلثاتی:

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$3) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

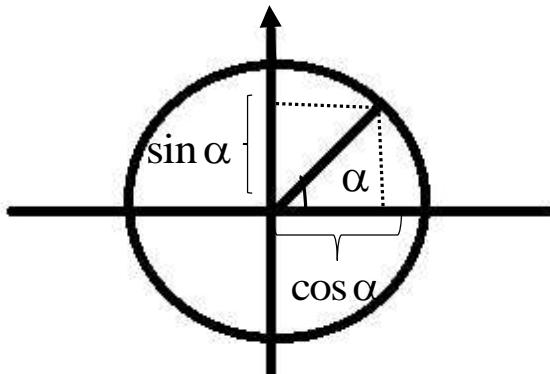
$$5) \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$$

$$2) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$4) \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

دایره مثلثاتی:

دایره مثلثاتی، دایره‌ای است به شعاع یک و به مرکز مبدا مختصات. مختصات هر نقطه روی دایره به صورت $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ است. یعنی طول هر نقطه $\cos\alpha$ و عرض هر نقطه $\sin\alpha$ است. نیز زاویه‌ای است که از اتصال نقطه به مرکز با محور طول‌ها (جهت مثبت آن) ساخته می‌شود. بدینهای است :



$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1, -1 \leq \sin\alpha \leq 1$$

جهت مثبت حرکت در دایره مثلثاتی پاد ساعت گرد است.

قاعدۀ هستک:

طبق این قاعده علامت نسبت‌های مثلثاتی را در چهار ربع به خاطر می‌سپاریم.(هستک) مخفف حروف اول کلمه‌های همه+سینوس+تانژانت+کسینوس است.

به این معنی که در ربع اول همه مثبت اند. در ربع دوم فقط سینوس مثبت است. در ربع سوم تانژانت و در نتیجه کتانژانت مثبت اند و در ربع چهارم فقط کسینوس مثبت است.

به مثال زیر توجه کنید:



برای نمونه اگر $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ و α در ربع دوم مثلثاتی باشد می‌توان سایر نسبت‌ها را به شیوه زیر یافت:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{8}}{3}$$

با توجه به اینکه در ربع دوم کسینوس منفی است، $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}$ درست است.

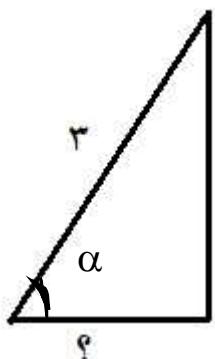
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{\sqrt{8}}{3}} = \frac{-1}{\sqrt{8}} = \frac{-1}{\sqrt{4 \times 2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{1}{3}} = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$$

یک روش سریع:

برای حل سوال بالا یک مثلث قائم الزاویه با وتر ۳ و یک ضلع قائمه ۱ واحد رسم می‌کنیم. به کمک

رابطه فیثاغورس ضلع سوم را می‌یابیم.



$$?^2 + 1^2 = 3^2 \rightarrow ?^2 = 8 \rightarrow ? = \sqrt{8}$$

حال با توجه به اضلاع مقدار نسبت های مثلثاتی را یافته و علامت های لازم برای ربع دوم را در کنار آن ها

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3} \quad \tan \alpha = -\frac{1}{\sqrt{8}} \quad \text{و} \quad \cot \alpha = \frac{-\sqrt{8}}{1}$$

می گذاریم.

نسبت های مثلثاتی مهم:

زاویه نسبت	◦	۳۰◦	۴۵◦	۶۰◦	۹۰◦	۱۸۰	۲۷۰◦	۳۶۰◦
	◦	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	◦	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	ت ن	۰	ت ن	۰
cot	ت ن	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	ت ن	۰	ت ن

تست



۱- اگر θ زاویه‌ای در ربع سوم باشد مقدار $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$

(۲) $-\frac{2}{\sqrt{10}}$

(۳) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$

(۴) $-\frac{4}{\sqrt{10}}$

۲- در مثلث ABC ، اگر AH ارتفاع مثلث C, b, a اندازه اضلاع مثلث باشند آن گاه حاصل

$b\cos C + c\cos B$ کدام است؟ (سنجدش ۹۶)

(۱) ضلع a

(۲) ارتفاع AH

(۳) تصویر AH روی ضلع a

(۴) نصف محیط

۳- ناظری به فاصله ۳۵ متر از پای ستوانی که ببروی آن مجسمه ای قرار دارد، ایستاده است. زاویه رویت انتهای و ابتدای مجسمه با سطح افق 45° و 40° است. ارتفاع مجسمه کدام است؟

$$(\tan 40^\circ = \dots / 8)$$

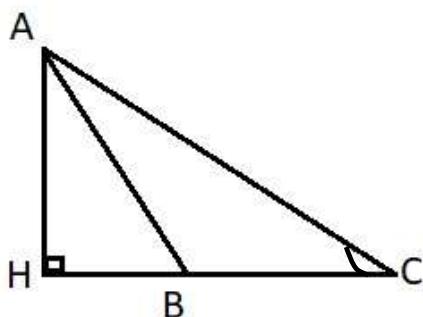
۶ (۱)

۶/۴ (۲)

۷ (۳)

۷/۲ (۴)

۴- در شکل زیر، فرض کنید $\sin C = \frac{5}{13}$ ، اندازه ارتفاع AH کدام است؟ (ریاضی ۹۹)



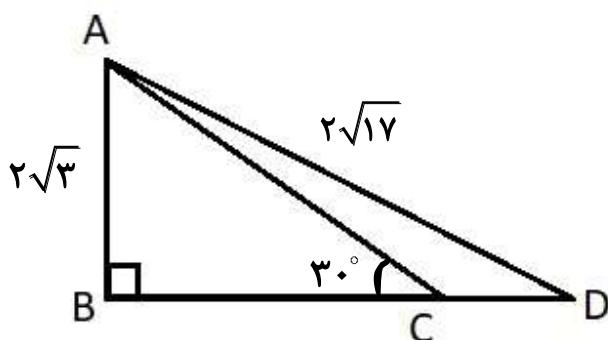
۳/۲۵ (۱)

۳/۵ (۲)

۳/۶ (۳)

۳/۷۵ (۴)

۵- در شکل زیر، طول CD کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)



$$2\sqrt{14} - 6$$

$$6 - 2\sqrt{7}$$

$$2\sqrt{14} + 6$$

$$\sqrt{14} - 3$$

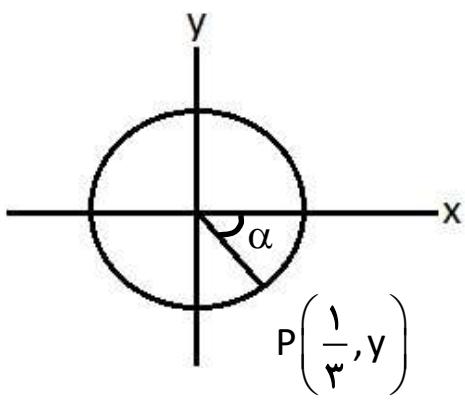
۶- در مثلث ABC $AB = 3\sqrt{2}$, $C = 45^\circ$, $B = 15^\circ$ می باشد. ضلع BC کدام است؟ (سنجهش ۱۴۰۰)

۳ (۱)

 $3\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳)

۶ (۴)

۷- در دایرهٔ مثلثاتی زیر مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟ (گزینه دو ۱۴۰۰)

 $-4\sqrt{2}$ (۱) $-2\sqrt{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

۸- در متوازی الاضلاعی اندازهٔ دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویهٔ بین دو قطر 135° است. مساحت متوازی

الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟ (تجربی ۹۲)

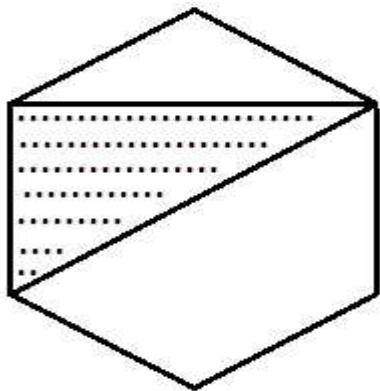
۱۸ (۱)

۲۴ (۲)

۳۲ (۳)

۳۶ (۴)

۹- مساحت قسمت هاشورخورده در شش ضلعی منتظم به ضلع ۳ چقدر است؟



$$\frac{9}{2} \quad (1)$$

$$3 \quad (2)$$

$$3\sqrt{2} \quad (3)$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

۱۰- حاصل $\frac{1+\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{1}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$ کدام است؟

$$1 \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\sin\theta \quad (3)$$

$$\cos\theta \quad (4)$$

۱۱- اگر انتهای کمان θ در ربع اول قرار داشته باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\sin^4\theta - \cos^4\theta}{\sin\theta\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}}$ کدام است؟ (قلم چی ۹۹)

$$\tan\theta \quad (1)$$

$$1-\cot\theta \quad (2)$$

$$1+\tan^2\theta \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta} \quad (4)$$

۱۲- اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل کدام است؟ (تجربی ۹۸)

$\sin x$ (۱)

$\cos x$ (۲)

$-\sin x$ (۳)

$-\cos x$ (۴)

۱۳- اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right)$ کدام است؟

$-\cos^2 x$ (۱)

$-\cos x$ (۲)

$\cos^2 x$ (۳)

$\cos x$ (۴)

۱۴- اگر $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$ باشد، حاصل $\sin^4 x + \cos^4 x$ چهراست؟

۱ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{8}$ (۴)

۱۵- در صورتی که $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد حاصل $\sqrt{1 - 2\sin x \sqrt{1 - \sin^2 x}}$ کدام است؟

$$|\cos x - \sin x| \quad (1)$$

$$|\sin x + \cos x| \quad (2)$$

$$\sin x + \cos x \quad (3)$$

$$-(\sin x + \cos x) \quad (4)$$

۱۶- اگر $\tan \theta = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ باشد، کدام رابطه صحیح است؟

$$a+b=1 \quad (1)$$

$$a-b=1 \quad (2)$$

$$a=-b \quad (3)$$

$$a=b \quad (4)$$

۱۷- اگر $3 \tan^3 x - 2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 7 \cos^3 x = 0$ باشد، آنگاه مجموع مقادیر ممکن برای $\tan x$

کدام است؟ (سنجرش ۹۹)

$$-1 \quad (1)$$

$$-3 \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$3 \quad (4)$$

پانزدهم

تعریف رادیان:

طول کمان رو به روی زاویه

$$= \frac{\text{اندازه زاویه بر حسب رادیان}}{\text{شعاع}}$$

یک رادیان زوایه رو به رو کمانی برابر با طول شعاع دایره است و تقریباً برابر 57° است.

$$\frac{D^\circ}{180} = \frac{R}{\pi}$$

رابطه بین رادیان و درجه :

برای تبدیل رادیان به درجه اگر در آن π ندیدیم به جای 180° می گذاریم و

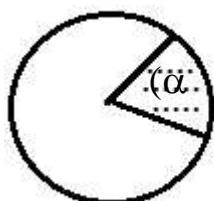
اگر π ندیدیم آن را در 57° ضرب می کنیم.

$$\frac{\pi^{\text{Rad}}}{3} = \frac{180}{3} = 60$$

$$2^{\text{Rad}} = 2 \times 57^\circ = 114^\circ$$

$$21^\circ = 21^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$$

همین طور برای تبدیل درجه به رادیان می توان آن را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب نمود.

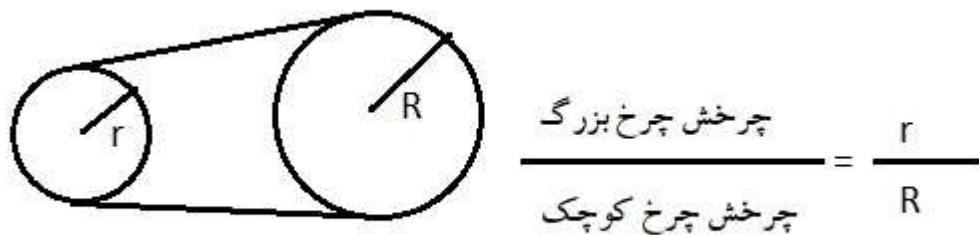
مساحت قطاع بر حسب زاویه: (α بر حسب رادیان)

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow S = \frac{1}{2} r^2 \alpha$$

نکته:



در قرقه هامیزان چرخ‌های متناسب با عکس نسبت شعاع هاست.



تست



۱۸- از بین اعداد داده شده در گزینه‌ها کدام کوچک‌تر است؟

COS ۱ (۱)

COS ۲ (۲)

COS ۳ (۳)

COS ۴ (۴)

۱۹- طول تیغه برف پاک کن شیشه عقب خودرویی 50cm است. که در هر بار حرکت 120° را طی می کند. مساحتی را که این برف پاک کن از شیشه عقب پاک می کند، کدام است؟ (قلم چی ۹۸)

$$\frac{5000\pi}{3} \quad (1)$$

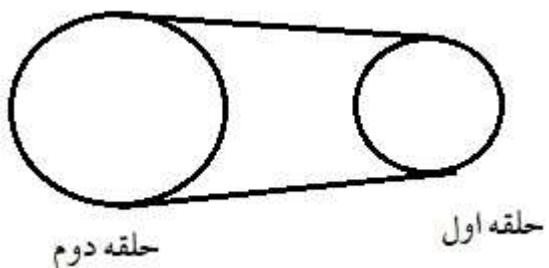
$$2500\pi \quad (2)$$

$$\frac{2500\pi}{3} \quad (3)$$

$$2000\pi \quad (4)$$



۲۰- در شکل زیر، دو حلقه با تسمه‌ای به هم متصل شده‌اند. اگر سطح حلقه دوم $\frac{\pi}{12}$ رادیان بچرخد، حلقه دوم چند درجه می چرخد؟



$$60^\circ \quad (1)$$

$$12^\circ \quad (2)$$

$$7/5^\circ \quad (3)$$

$$15^\circ \quad (4)$$

کمان های مکمل و متمم و...:

برای یافتن نسبت های مثلثاتی که در آنها مضارب $\frac{\pi}{2}$ و π دیده می شوند به دو نکته زیر توجه می کنیم:

الف) مضارب π تغییری در نسبت مثلثاتی ایجاد نمی کنند ولی مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ باعث تغییر نسبت مثلثاتی به مشابهشان

می شوند یعنی سینوس به کسینوس و تانژانت به کوتانژانت و....

ب) انتهای کمان اولیه را ربع شناسی می کنیم و علامت تابع مثلثاتی در آن ربع را می یابیم (منظور تابع اولیه است) سپس علامت آن را برای تابع نهایی لحاظ می کنیم و علامت را کنار آن می گذاریم. دقت کنید در این روش همیشه α را حاده فرض می کنیم.

برای نمونه:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

به دلیل وجود

مضرب $\frac{\pi}{2}$ تابع تغییر می کند

$$\text{در ربع } \frac{3\pi}{2} + \alpha$$

چهارم قرار دارد و \cos مثبت است

$$\sin(3\pi - \alpha)$$

به دلیل وجود

مضرب π تابع تغییر نمی کند

$$\text{در ربع } 3\pi - \alpha$$

دوم قرار دارد و \sin مثبت است

$$\tan\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$$

به دلیل وجود

مضرب $\frac{\pi}{2}$ تابع تغییر می کند

$$\text{در ربع دوم } \frac{5\pi}{2} + \alpha$$

قرار دارد و \tan منفی است

نسبت های مثلثاتی کمان قرینه:

تابع کسینوس منفی خوار است و منفی کمان خود را می خورد. دقت کنید این تابع منفی خودش را نمی تواند بخورد. ☺

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \text{ولی} \quad -\cos \alpha \neq \cos \alpha$$

تابع های سینوس، تانژانت و کتانژانت، منفی کمان خود را به پشت شان انتقال می دهند و به اصطلاح منفی سازند.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \tan(-\alpha) = -\tan \alpha, \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$



توصیه می کنم دو گروه از کمان های خاص (ا به صورت جداگانه یاد بگیرید.

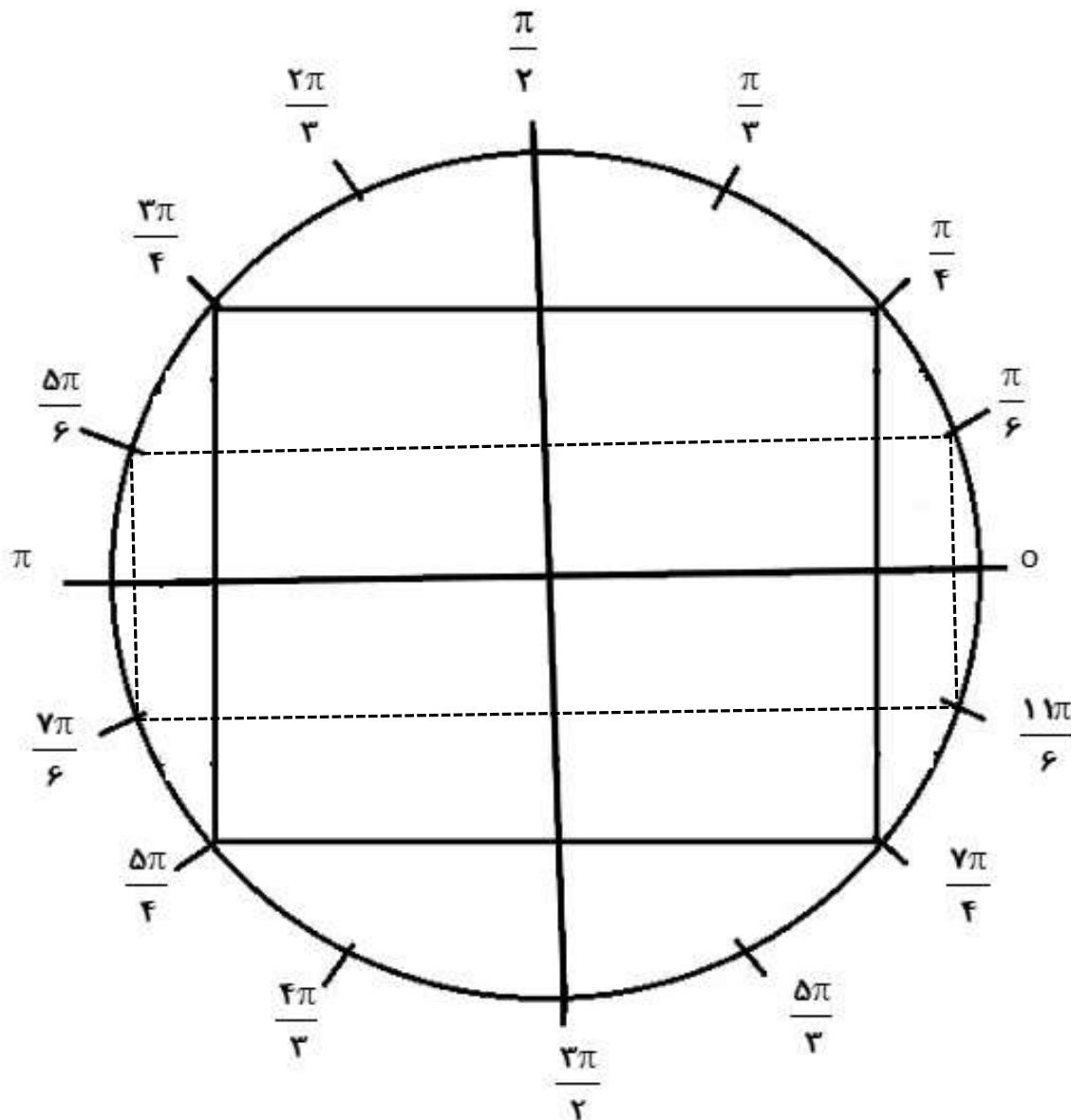
کمان $\frac{\pi}{2} - \alpha$ متمم است و نسبت های مثلثاتی آن، جایه جا شده تابع های مثلثاتی مشابه است.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

کمان $\pi - \alpha$ مکمل است و دو زاویه مکمل به جز سینوس های برابر در سایر نسبت های مثلثاتی قرینه یکدیگرند.

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

کمان های مهم:



کمان های هم خانواده:

به همه کمان هایی که در آن ها $\frac{\pi}{3}$ یا $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{\pi}{6}$ دیده می شوند کمان های هم خانواده می گوئیم.

برای یافتن نسبت مثلثاتی کمان های هم خانواده، نسبت مثلثاتی آن ها در ربع اول را می نویسیم. انتهای کمان خواسته شده را یافته و می بینیم در کدام ربع است. به کمک قاعده هستک علامت آن را یافته و برای نسبت ربع اول لحاظ می کنیم. به نمونه های زیر توجه کنید.

$$\sin \frac{15\pi}{4}$$

کمان از خانواده
کمان ربع چهارم است و سینوس آن $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

$$\frac{15\pi}{4} = 4\pi - \frac{\pi}{4}$$

کمان ربع چهارم است و سینوس در آن ربع منفی است

$$\cos \frac{43\pi}{6}$$

کمان از خانواده
کمان ربع سوم و کسینوس آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

$$\frac{43\pi}{6} = 7\pi + \frac{\pi}{6}$$

کمان ربع سوم و کسینوس در آن ربع منفی است.

یادآوری و خلاصه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل و متمم و ...:

برای یافتن نسبت مثلثاتی به نکات زیر توجه می‌کنیم:

الف) مضارب $\frac{\pi}{2}$ نسبت مثلثاتی را تغییر می‌دهند و مضارب π نسبت مثلثاتی را تغییر نمی‌دهند.

ب) با تعیین جایگاه انتهای کمان مثلثاتی، علامت تابع داده شده را به کمک قاعده هستک تعیین می‌کنیم و آن را برای تابع به دست آمده لحاظ می‌کنیم.

برای نمونه

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$$

$$\tan\left(3\pi + \alpha\right) = \tan\alpha$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$

تست



۲۱- حاصل عبارت $\tan\frac{17\pi}{6} \sin\frac{11\pi}{3} + \cos\frac{10\pi}{3}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

-۱ (۱)

۰ صفر

۱ (۳)

$\sqrt{3}$ (۴)

کدام است؟ $\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 170^\circ}$ ، حاصل $\tan 20^\circ = 0 / 36$ اگر -22

 $\frac{9}{4}$ (۱) $\frac{15}{8}$ (۲) $\frac{17}{8}$ (۳) $\frac{31}{16}$ (۴)

کدام است؟ باشد مقدار $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ اگر -23

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi)}$$

۵ (۱)

۱ (۲)

-۳ (۳)

-۴ (۴)

۲۴- حاصل $\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \dots + \cos\frac{6\pi}{7}$ کدام است؟

(۱)

(۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$

(۴) ۱

۲۵- اگر $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت مقابل کدام است؟

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$$

(۹۸) تجربی خارج

-۱/۲۳ (۱)

-۰/۵۲ (۲)

۰/۲۷ (۳)

۰/۴۸ (۴)

۲۶- حاصل $\frac{1}{1+\tan 15^\circ} + \frac{1}{1+\tan 16^\circ} + \dots + \frac{1}{1+\tan 75^\circ}$ کدام است؟ (سنچش ۹۹)

(۱) ۳۰

(۲) $30/5$

(۳) ۳۱

(۴) $31/5$

$$f(x+T) = f(x)$$

www.mathtest.ir

$$\begin{aligned} \sin(x + \pi) &= \sin x \\ \cos(x + \pi) &= -\cos x \end{aligned}$$

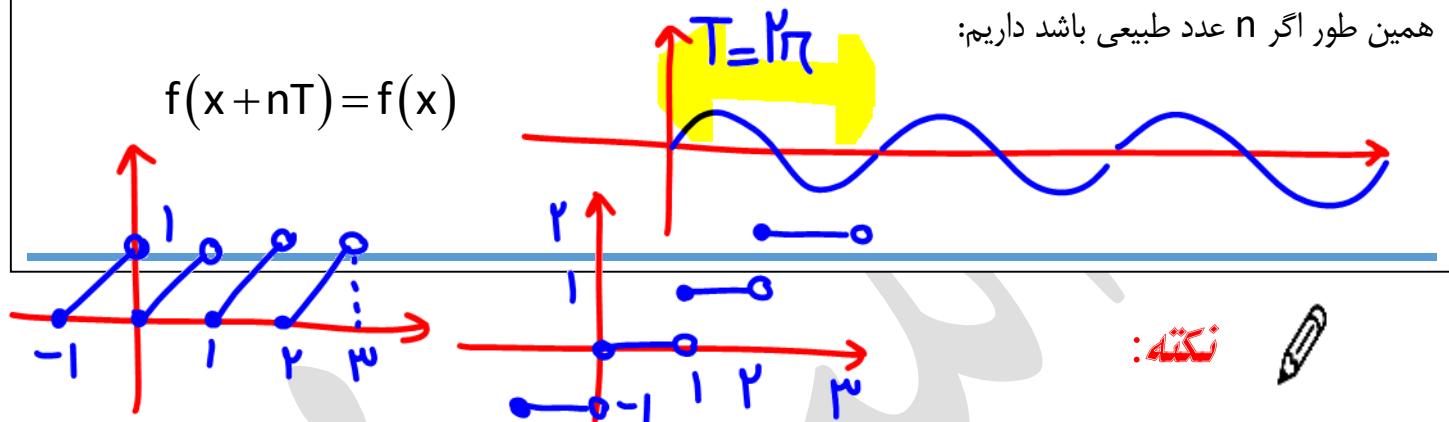
$$\begin{aligned} f(x+nT) &= f(x) \\ \sin(x + n\pi) &= \sin x \\ \sin(x + 4\pi) &= \sin x \end{aligned}$$

دوازدهم ریاضی و تجربی

دوره تناوب:

تابع $f(x)$ را تابع متناوب می‌نامیم. هر گاه عددی حقیقی و ثابت $T > 0$ موجود باشد که اولاً به ازای هر x عضو دامنه تابع، $x + T$ نیز عضو دامنه تابع باشد، ثانیاً به ازای هر x عضو دامنه تابع $f(x+T) = f(x)$ برقرار باشد.

همین طور اگر n عدد طبیعی باشد داریم:



دوره تناوب تابع $f(x) = a \cos bx$ و $f(x) = a \sin bx$ است. $T = \frac{2\pi}{|b|}$

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cos bx \\ f(x) &= a \sin bx \end{aligned}$$

تست



۱-۲۷ اگر $f(x) = \sin x - \cos x$, $g(x) = \sin x + \cos x$ باشند، آنگاه دوره تناوب تابع $f.g$ کدام است؟

(گزینه دو ۹۹)

$$f.g(x) = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = \sin^2 x - \cos^2 x$$

(۱)

$$= -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\pi}{|\omega|} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

(۲)

(۳)

(۴) تابع متناوب نیست.

-۲۸ اگر به ازای هر x عضو دامنه تابع f داشته باشیم $f(x+\lambda) = f(x)$ آنگاه کدام عدد دوره تناوب تابع

آگر دوره تناوب تابع f باشد $T=\lambda$



$$f(x+\lambda) = f(x)$$

نمی تواند باشد؟

$$f(x+T(\varepsilon)) = f(x) \quad (1)$$

$$T=\varepsilon$$

۲ (۲)

$$f(x+\varepsilon(\varepsilon)) = f(x) \quad (3)$$

$$T=\varepsilon$$

۴ (۴)

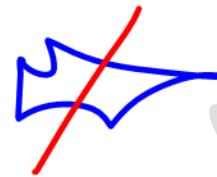
$$f(x+\lambda(1)) = f(x) \quad (5)$$

$$T=1$$

۵ (۵)

$$f(x+1(1)) = f(x) \rightarrow T=1$$

$$f(x+\lambda) = f(x)$$



دوره تناوب $T=\lambda$

-۲۹ تابعی متناوب با دوره تناوب $T=4$ و ضابطه آن در بازه $[-1, 3]$ به صورت

است. مقدار $f(102)$ کدام است؟

$$f(x+\varepsilon) = f(x) \quad \text{یا} \quad f(x+n(\varepsilon)) = f(x)$$

۵ (۱)

-۵ (۲)

۱ (۳)

-۱ (۴)

چمن در باد

$$f(x) = x - [x]$$

اکیلش

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

نکته: $T=1$

توابع زیر نیز متناوب اند.

$$f(x) = mx - [mx] \rightarrow T = \frac{1}{|m|}$$

$$f(x) = [mx] + [-mx] \rightarrow T = \frac{1}{|m|}$$

برای نمونه دوره تناوب $f(x) = \frac{x}{3} - \left[\frac{x}{3} \right]$ برابر 3 است.

۳۰- اگر دوره تناوب $y = f(2x)$ برابر T باشد دوره تناوب تابع $f\left(\frac{x}{3}\right)$ کدام است؟

$$y = f(2x)$$

$\frac{T}{2}$

(۱) (x, y)

$$f\left(\frac{x}{3}\right)$$

$\frac{6T}{2}$

(۲) $x \left(\frac{6T}{2}, y \right)$

$\frac{2T}{3}$

(۳)

$6T$

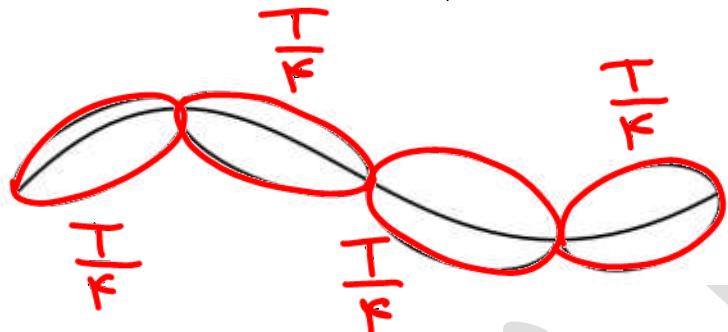
(۴)

$\frac{3T}{2}$

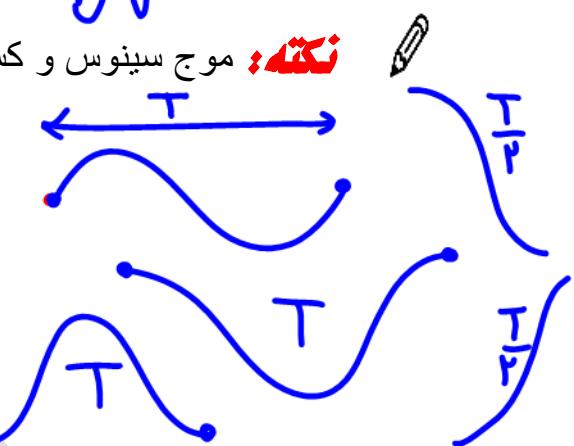
$\frac{T}{6}$

دوره تناوب $f(2x)$ برابر T است پس دوره تناوب $f(x)$ برابر $\frac{T}{2}$ بوده است.
 اکنون دوره تناوب $f\left(\frac{x}{3}\right)$ برابر $6T$ باشد دوره تناوب $f\left(\frac{x}{3}\right)$ برابر $6T$ است.

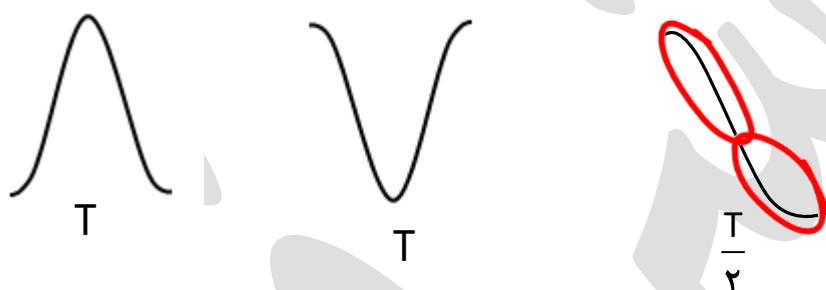
تا ی می توان تقسیم نمود.



نکته: موج سینوس و کسینوس را به قسمت های $\frac{1}{4}$



نکته: از قله تا قله و از دره تا دره یک موج کامل و از قله تا دره نیم موج محسوب

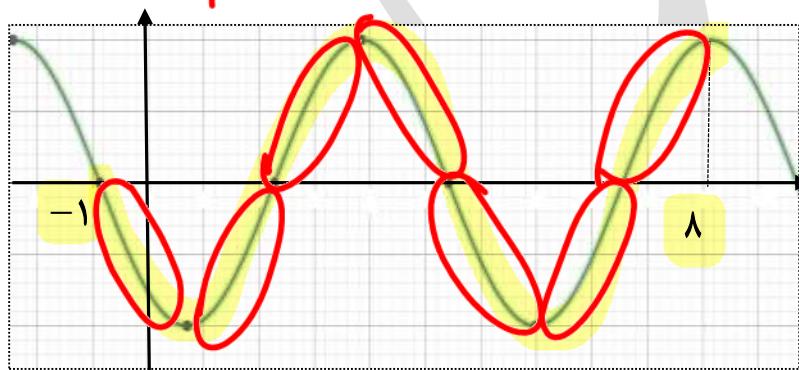


می شوند.

۳- بخشی از نمودار $f(x)$ به شکل زیر است. دوره تناوب تابع کدام است؟

$$V\left(\frac{T}{f}\right) = 1 - (-1) = 9 \quad \boxed{\frac{\sqrt{T}}{f} = 9}$$

$$T = \frac{9}{2} \quad (1)$$



$$\sqrt{T} = 34$$

$$T = \frac{36}{7} \quad (2)$$

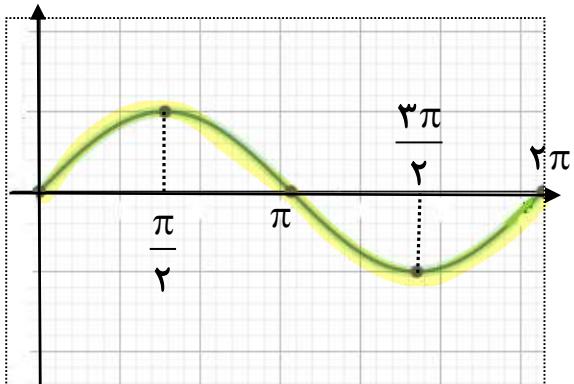
$$T = \frac{34}{V}$$

$$T = 6 \quad (3)$$

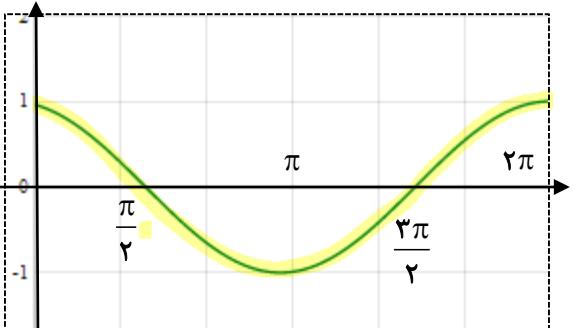
$$T = \frac{9}{4} \quad (4)$$

نمودارهای مثلثاتی:

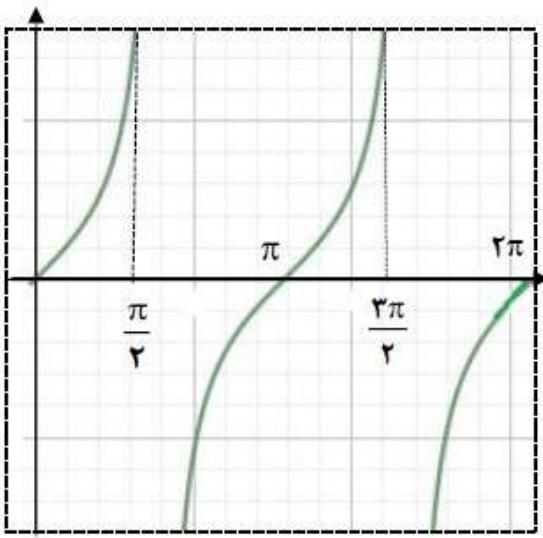
نمودارهای چهارتایع مثلثاتی را در شکل های زیر رسم نموده ام:



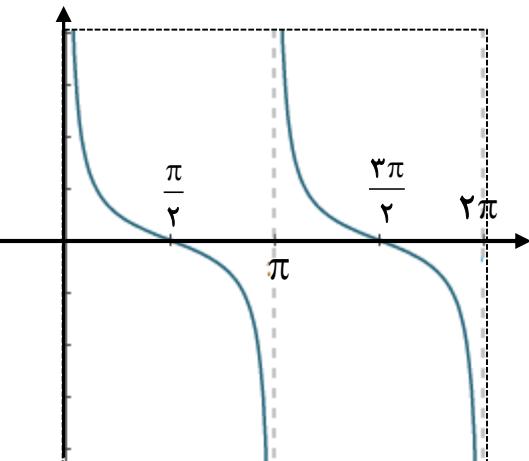
$$f(x) = \sin x$$



$$f(x) = \cos x$$



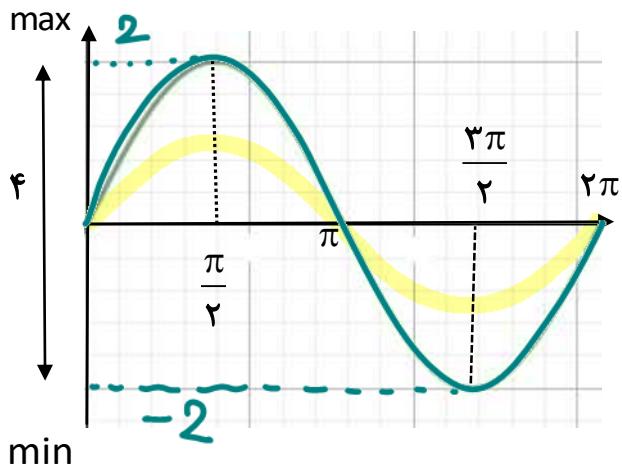
$$f(x) = \tan x$$



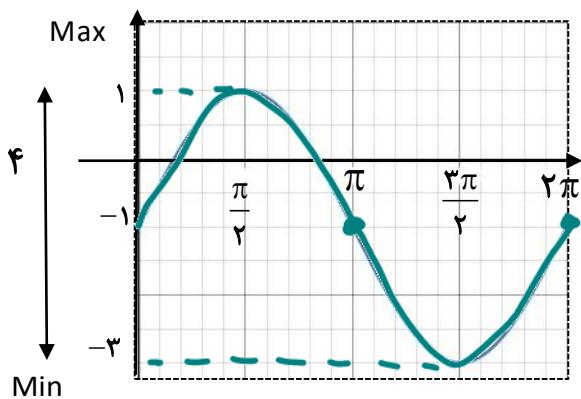
فقط برای علاقه مندان

$$f(x) = \cot x$$

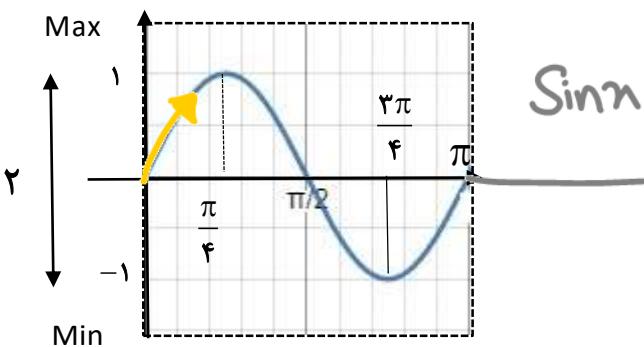
برای مفهوم شدن هرچه بیشتر نمودارها به رسم و بررسی چند نمودار سینوسی می پردازیم.



$$f(x) = 2\sin x$$

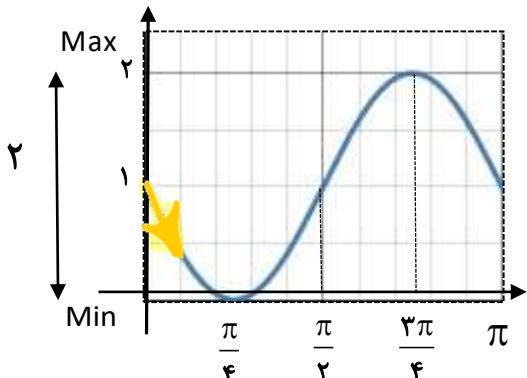


$$f(x) = 2\sin x - 1$$

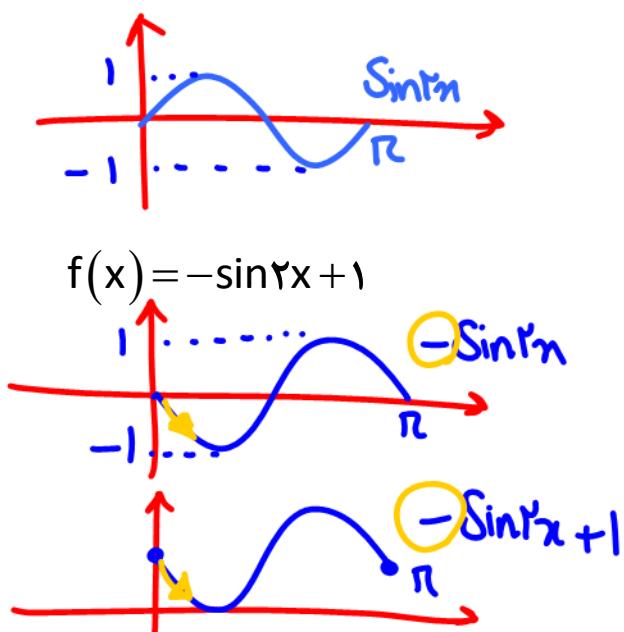


$\sin 2x$

$$f(x) = \sin 2x$$



$$f(x) = -\sin 2x + 1$$



نکته:



اختلاف بین Max (قله) و Min (دره) تابع ها، دو برابر مقدار (مثبت) ضریب سینوس یا کسینوس است.

$$\chi = \frac{\pi}{|b|}$$

روابط بین نمودارهای مثلثاتی:

در توابع $f(x) = a\cos bx + c$ و $f(x) = a\sin bx + c$ روابط زیر برقرار هستند.

از روی ضابطه

$$\begin{cases} y_{\text{Max}} = |a| + c \\ y_{\text{Min}} = -|a| + c \end{cases}$$

$f(x) = 3\cos bx + 1$ تابع min و Max را ببینید.

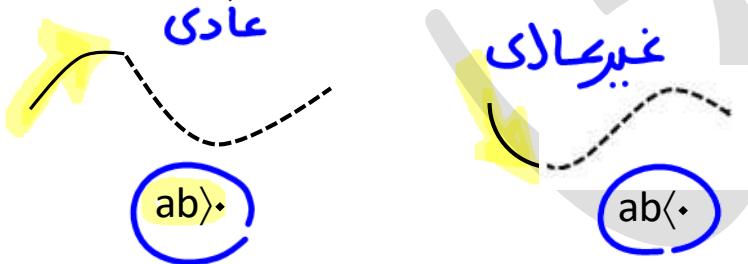
$$y_{\text{Max}} = |3| + 1 = 4$$

$$y_{\text{Min}} = -|3| + 1 = -2$$

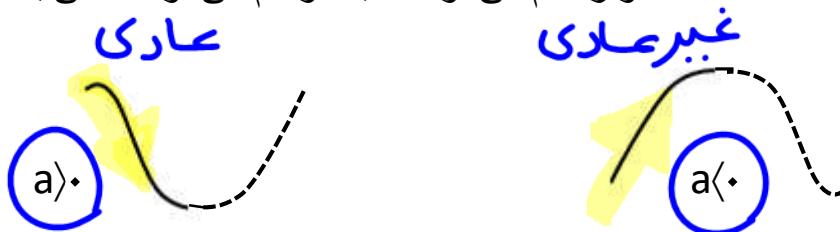
نکته:



- اگر نمودار تابع $f(x) = a\sin bx + c$ بعد از محور عرض ها صعودی باشد. $a > 0$ و اگر نزولی باشد. $a < 0$ است.

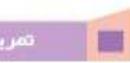


- اگر نمودارتابع $f(x) = a\cos bx + c$ بعد از محور عرض ها نزولی باشد. $a < 0$ و اگر صعودی باشد. $a > 0$ است. در این ضابطه علامت b همواره هم می‌تواند مثبت و هم می‌تواند منفی باشد.





تمرین



۱) دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیموم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

(الف) $y = 1 + 2 \sin \sqrt{3}x$

(ب) $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{\sqrt{3}}x$

(پ) $y = -\pi \sin \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - 2$

(ت) $y = -\frac{3}{4} \cos 3x$

۲) هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظریه کنید.

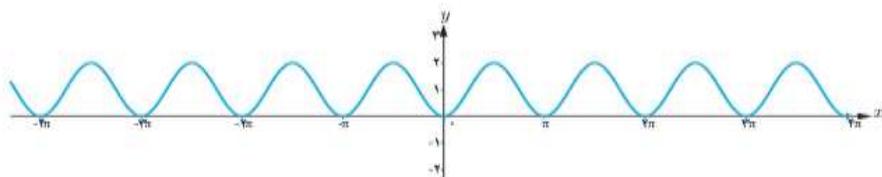
ت) $y = 1 - \cos 2x$

پ) $y = \sin 2x$

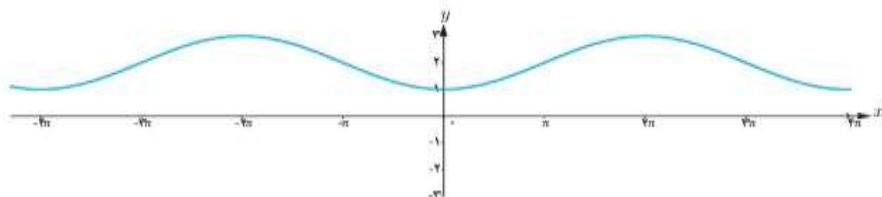
ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{\sqrt{3}}x$

الف) $y = \sin \pi x$

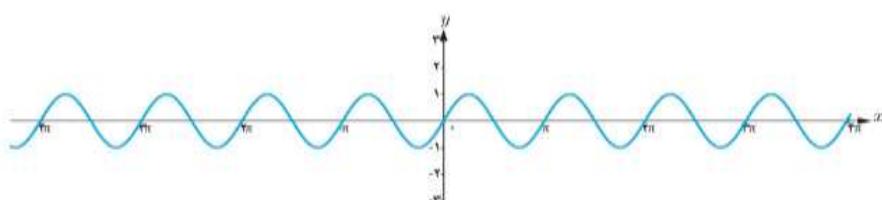
۱)



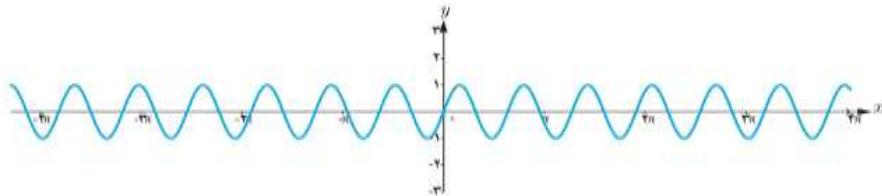
۲)



۳)



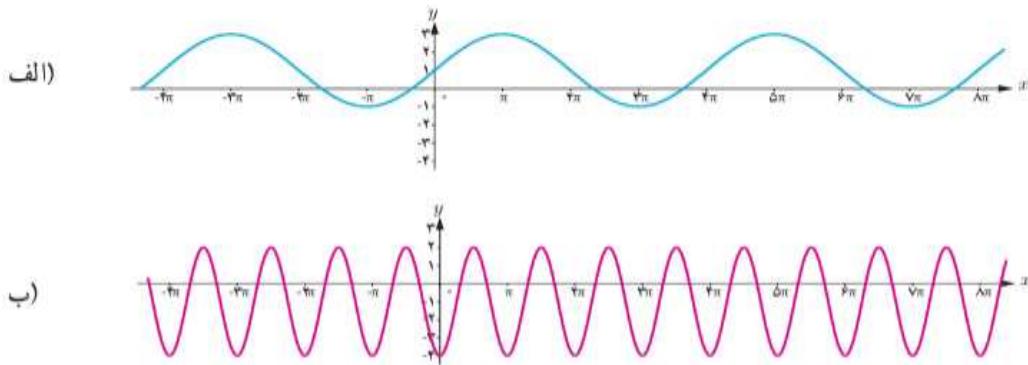
۴)



۳ در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناسب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

- (الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$
- (ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3$
- (پ) $T = 4\pi$, $\max = -1$, $\min = -7$
- (ت) $T = \frac{\pi}{2}$, $\max = 1$, $\min = -1$

۴ ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



۵ کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

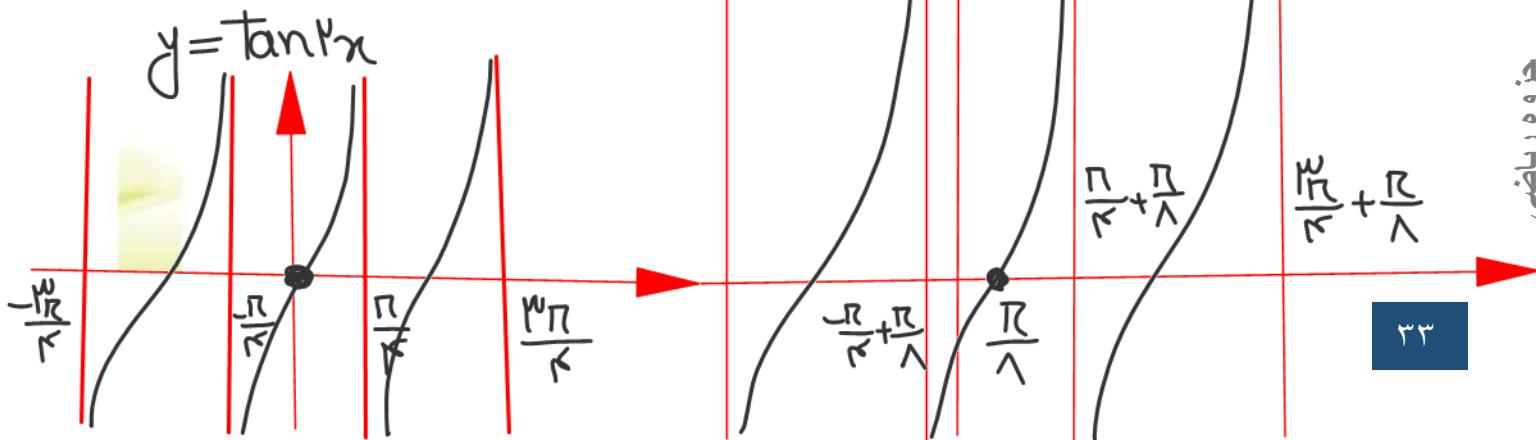
- (الف) تابع تائزانت در دامنه اش صعودی است.
- (ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تائزانت در آن نزولی باشد.
- (پ) تابع تائزانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

۶ با توجه به محورهای سینوس و تائزانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$y = \tan(\frac{1}{2}\alpha - \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{1}{2}(\alpha - \frac{\pi}{4})$$

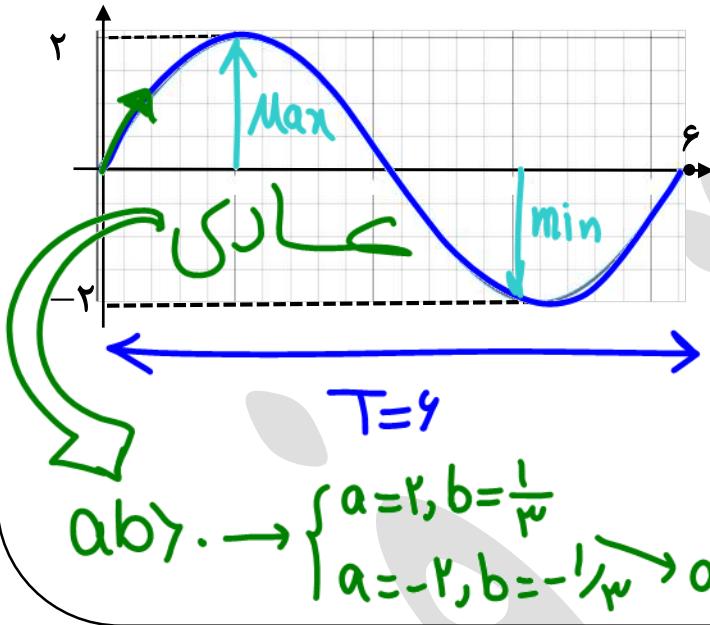


تست



۳۲- شکل رو به رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a+b$ کدام است؟

(تجربی خارج ۹۳)



$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \rightarrow \frac{2}{|b|} = 4 \quad (1)$$

$$\rightarrow |b| = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$y_M = |a| + 0 = 1 \rightarrow |a| = 1 \quad (3)$$

$$y_m = -|a| + 0 = -1 \rightarrow |a| = 1 \quad (4)$$

۳۳- شکل مقابل نمودار تابع $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ در بازه $(0, 4)$ است b کدام است؟ (ریاضی ۹۷)

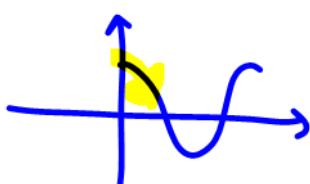
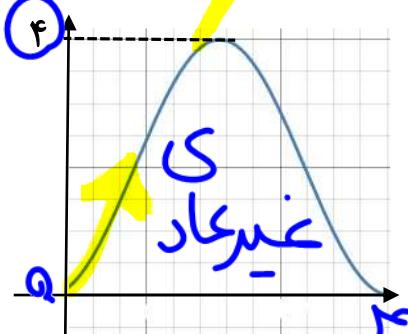
$$T = \frac{4\pi}{|\frac{\pi}{2}|} = 4$$

$$y_{\text{Max}} = |b| + a = 4$$

$$y_{\text{Min}} = -|b| + a = 0$$

$$+ \quad 2a = 4 \rightarrow a = 2$$

$$|b| = 2 \rightarrow b = -2$$



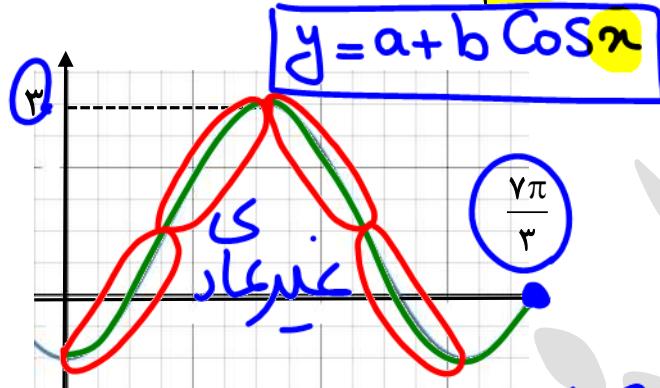
-2 (1)

-1 (2)

1 (3)

2 (4)

۳۴- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{p}x + c\right)$ است. مقدار b کدام است؟



منفی

(تجربی ۹۹)

۲ (۱)

۱ (۲)

-۱ (۳)

-۲ (۴)

$$y_{\max} = |b| + a = 3$$

$$y_{\min} = -b + a = -3$$

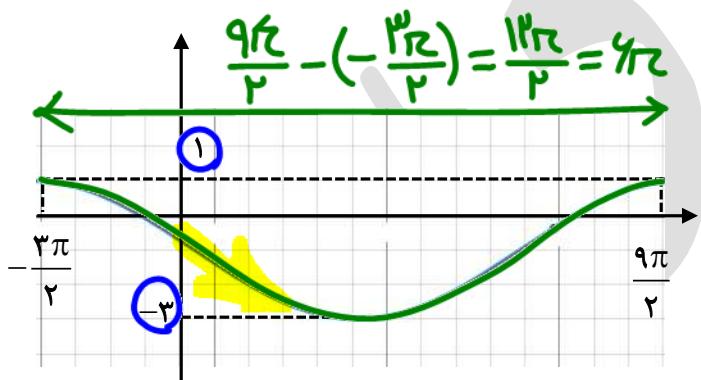
$$a + b \cos \frac{\pi}{p} = 0 \Rightarrow a + b \cos\left(\frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{p}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos \frac{2\pi}{p} = 0$$

$$a + b \left(\frac{1}{p}\right) = 0$$

$$\begin{cases} -b + a = -3 \\ a + b \left(\frac{1}{p}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{ab}{p} = -3 \rightarrow b = -2 \rightarrow a = 1$$

۳۵- شکل زیر نمودار تابع $y = a \sin bx + c$ را در یک بازه تناوب نشان می دهد. نسبت $\frac{a}{b}$ کدام است؟



$$\begin{cases} y_{\max} = |a| + c = 3 \\ y_{\min} = -|a| + c = -3 \end{cases}$$

$$\oplus \quad 2c = -6 \rightarrow c = -3 \rightarrow |a| = 3$$

(تجربی ۹۹)

-۲ (۱)

-۳ (۲)

-۴ (۳)

$$T = 6\pi$$

$$\frac{12\pi}{2} = 6\pi$$

$$|b| = \frac{1}{6}$$

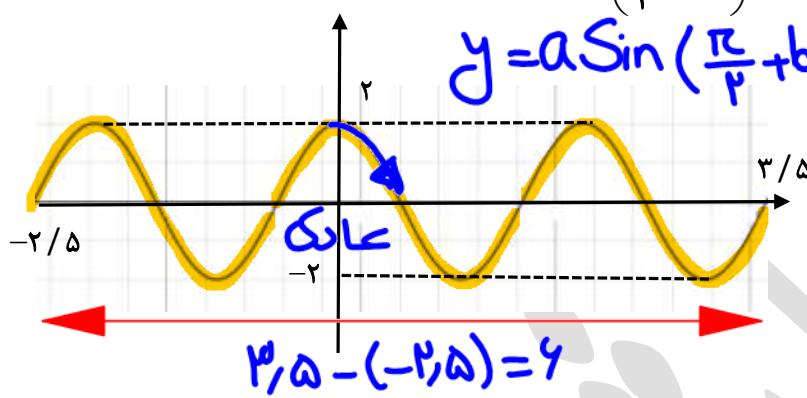
$$\frac{a}{b} = \frac{-3}{\frac{1}{6}} = -18$$

$$\frac{ab}{p} < 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{-\frac{1}{6}} = -18$$

۳۶- شکل رو به رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi \left(\frac{1}{2} + bx \right)$ کدام است؟

$$y = a \sin \left(\frac{\pi}{b} + b\pi x \right) = a \cos(b\pi x)$$



۲/۵ (۲)

۳ (۳)

۳/۵ (۴)

$$\pi T = 1 \rightarrow \pi \frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \rightarrow |b| = 1 \xrightarrow{\text{منقی خوار}} b = \pm 1$$

$$y_{\max} = 1 \rightarrow |a| + 0 = 1 \rightarrow |a| = 1 \rightarrow a = 1 \rightarrow ab = \pm 1$$

۳۷- نمودار تابع $f(x) = \cos^2 2x$ در بازه $[0, a]$ اکیداً نزولی است. حداقل a کدام است؟

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

ساده

فرمول ملاجی

(قلم چی ۹۹)

 $\frac{\pi}{8}$ (۱)

$$f(x) = \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$$

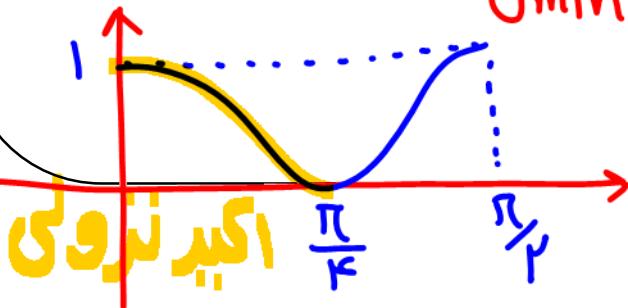
ساده

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$y_{\max} = \left| \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{2} = 1$$

 $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{16}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴)

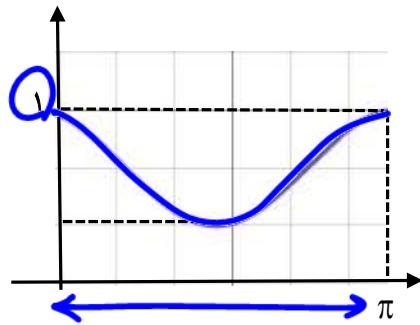
$$y_{\min} = -\left| \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{2} = 0$$



$$\sin^r \alpha = \frac{1 - \cos r\alpha}{2}$$

حللای

۳۸- اگر بخشی از نمودار $f(x) = a - \frac{1}{2} \sin^r bx$ به صورت زیر باشد. حاصل کدام می‌تواند



$$f(x) = a - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos bx}{2} \right)$$

$$f(x) = a - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos bx$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos bx + a - \frac{1}{2}$$

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

$$T = \pi \rightarrow \frac{\pi R}{|b|} = \pi \rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1 \rightarrow a + b =$$

$$y_M = 1 \rightarrow \left| \frac{1}{2} \right| + a - \frac{1}{2} = 1 \rightarrow a = 1 \rightarrow a + b = 1$$

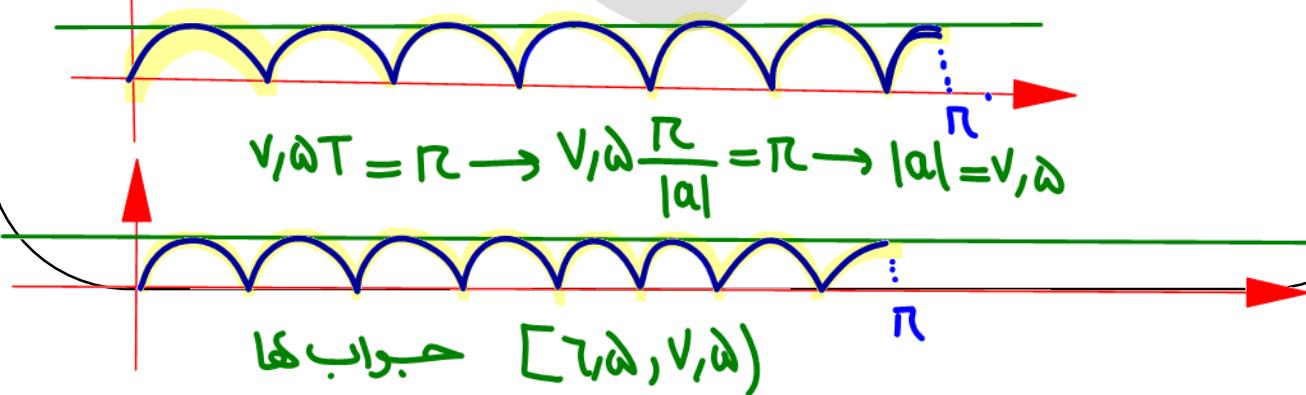
۳۹- نمودار تابع $y = \left| \cos \left(\frac{9\pi}{2} - ax \right) \right|$ در فاصله $[0, \pi]$ هفت بار خط $y = 1$ را قطع می‌کند. حداقل مقدار مثبت a کدام است؟ (سنجهش ۹۹)

$$y = \left| \cos \left(\frac{9\pi}{2} - ax \right) \right| = \left| + \sin ax \right| = |\sin ax| \quad ۳/۵ (۱)$$

$$T = \frac{\pi}{|a|}$$

$$T, \omega T = \pi \Leftrightarrow T, \omega \frac{\pi}{|a|} = \pi \rightarrow |a| = T, \omega \quad ۴ (۲)$$

۶/۵ (۴)



$$x \neq \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{2} = (\frac{1}{2}k+1)\frac{\pi}{2}$$

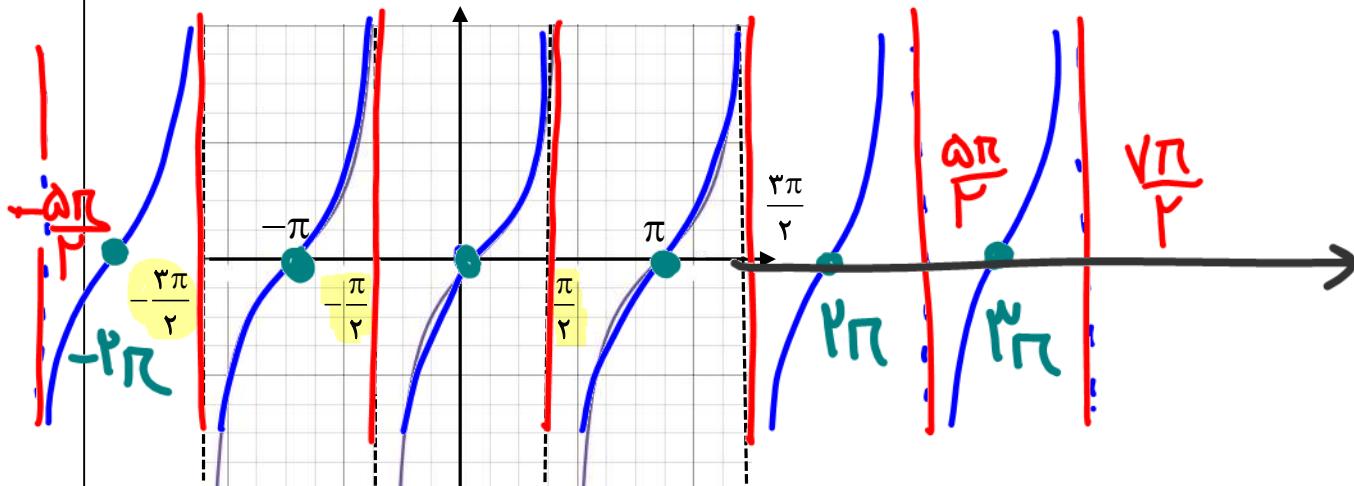
مختار فرد

نمودار تابع $f(x) = \tan x$

نمودار تابع $f(x) = \tan x$ با دامنه $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ به شکل زیر است. تابع $\tan x$ بر روی دامنه اش غیر یکنواست و

مجموعه هایی از اعداد حقیقی وجود دارند که تابع تانژانت در انها اکیداً صعودی است. (این تابع در هر بازه بین دو

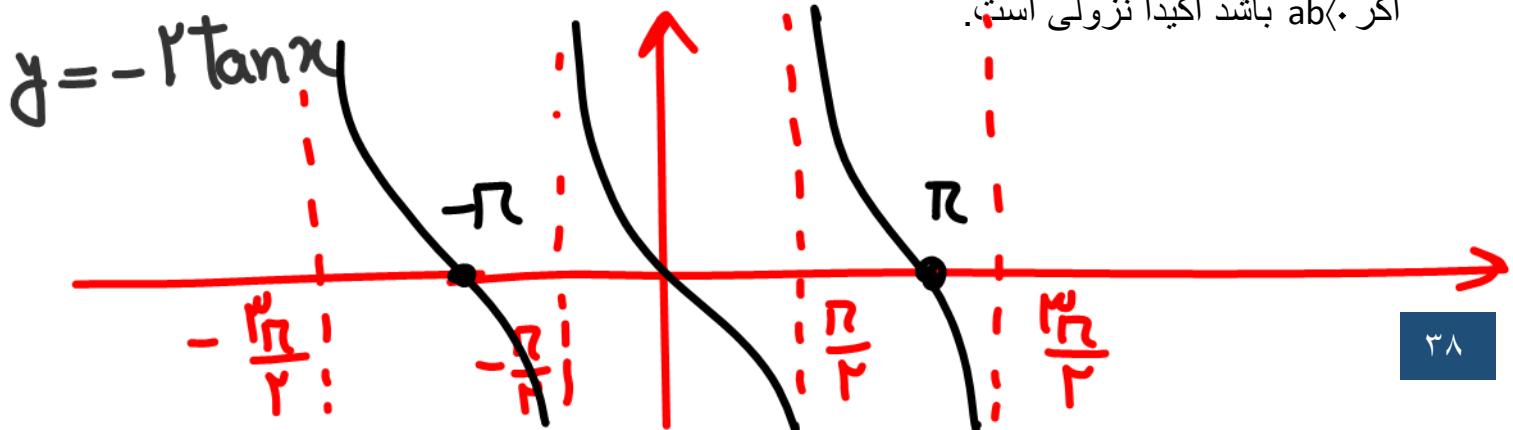
مجانب قائمش اکیداً صعودی است). همین طور دوره تناوب تابع $f(x) = \tan ax$ برابر $T = \frac{\pi}{|a|}$ است.



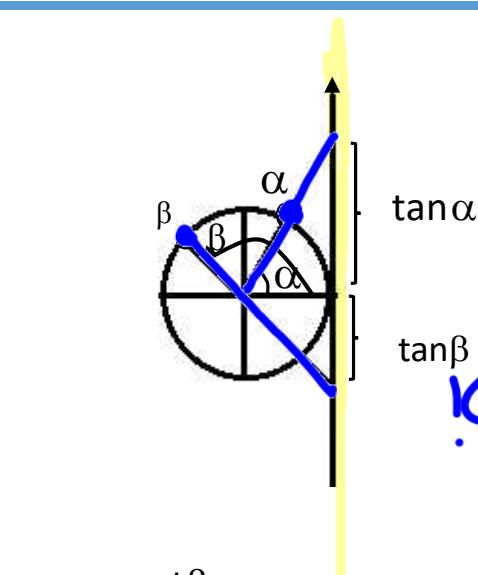
نکته:



تابع $f(x) = a \tan bx$ اگر $a > 0$ باشد در بازه های بین دو مجانب قائم آن اکیداً صعودی و اگر $a < 0$ باشد اکیداً نزولی است.



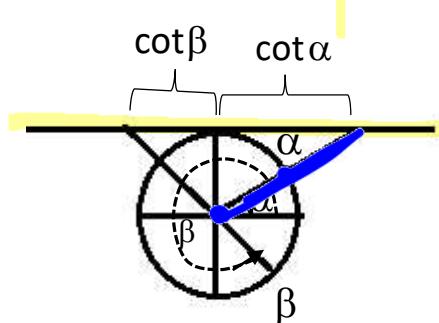
تائزانت روی دایره مثلثاتی:



خط $x=1$ روی محورهای مختصات، محور تائزانت است.

تائزانت در $x=k\pi$ برابر صفر و در $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ نمی‌باشد. این تعریف نشده است.

ابن توکتاب درسی هست!



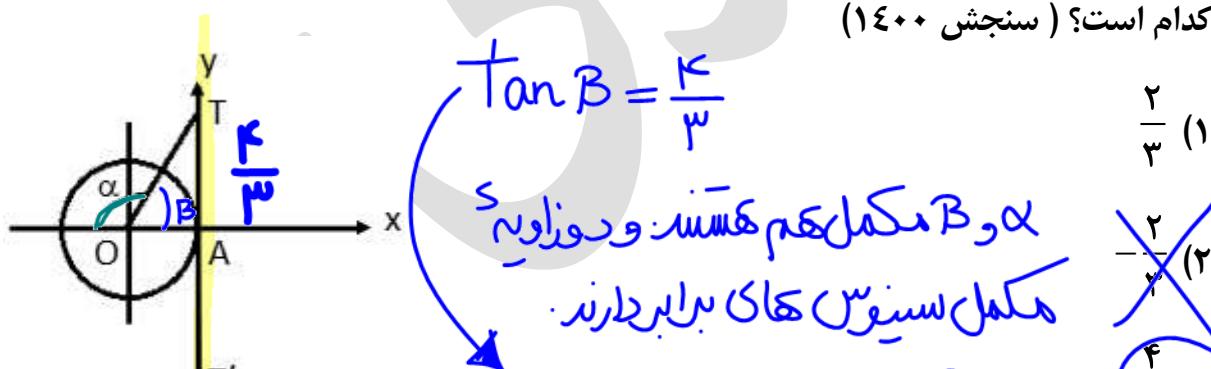
خط $y=1$ روی محورهای مختصات، محور کتائزانت است.

کتائزانت در $x=k\pi$ نشده و در $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ برابر صفر است.

توکتاب نیست!

۴- در شکل مقابل' TAT' در نقطه A بر دایره مثلثاتی مماس است. اگر $AT = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\sin \alpha$

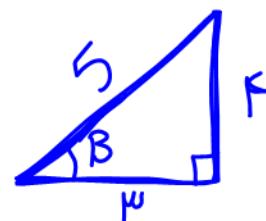
کدام است؟ (سنجهش ۱۴۰۰)



$$\sin \alpha = \sin \beta = \frac{4}{5}$$

$$\tan \beta = \frac{4}{3}$$

α و β مکمل گویی هستند و دو زاویه مکمل سینوس های برابرند.



$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

~~$$\frac{2}{5} \quad (2)$$~~

~~$$\frac{4}{5} \quad (3)$$~~

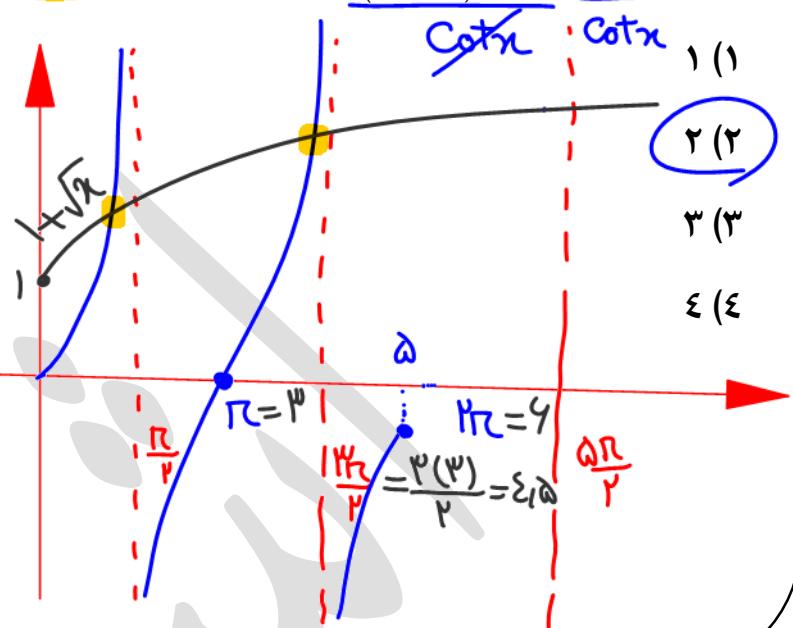
$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

۴۱- معادله $(1+\sqrt{x})\cot x = 1$ چند جواب در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ دارد؟ (سنجهش ۹۹)

$$1+\sqrt{x} = \frac{1}{\cot x}$$

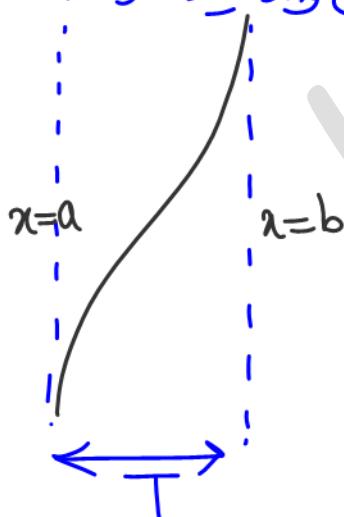
$$1+\sqrt{x} = \tan x$$

معادله روی بازوی $(0, \frac{\pi}{2})$ دارای (دورانش) اسی جوی نمودارها که اینها یکدیگر را نباید دوستطعه قطع کرد (از:



۴۲- تابع $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ در بازه (a, b) اکیداً صعودی است. حداقل $b-a$ کدام است؟

تابع تابع فضای محدودی تواند اکیداً صعودی باشد



$$b-a=T$$

دوره تناوب
تازه ایت

$$b-a=\frac{\pi}{|k|}$$

$$b-a=\frac{\pi}{2}$$

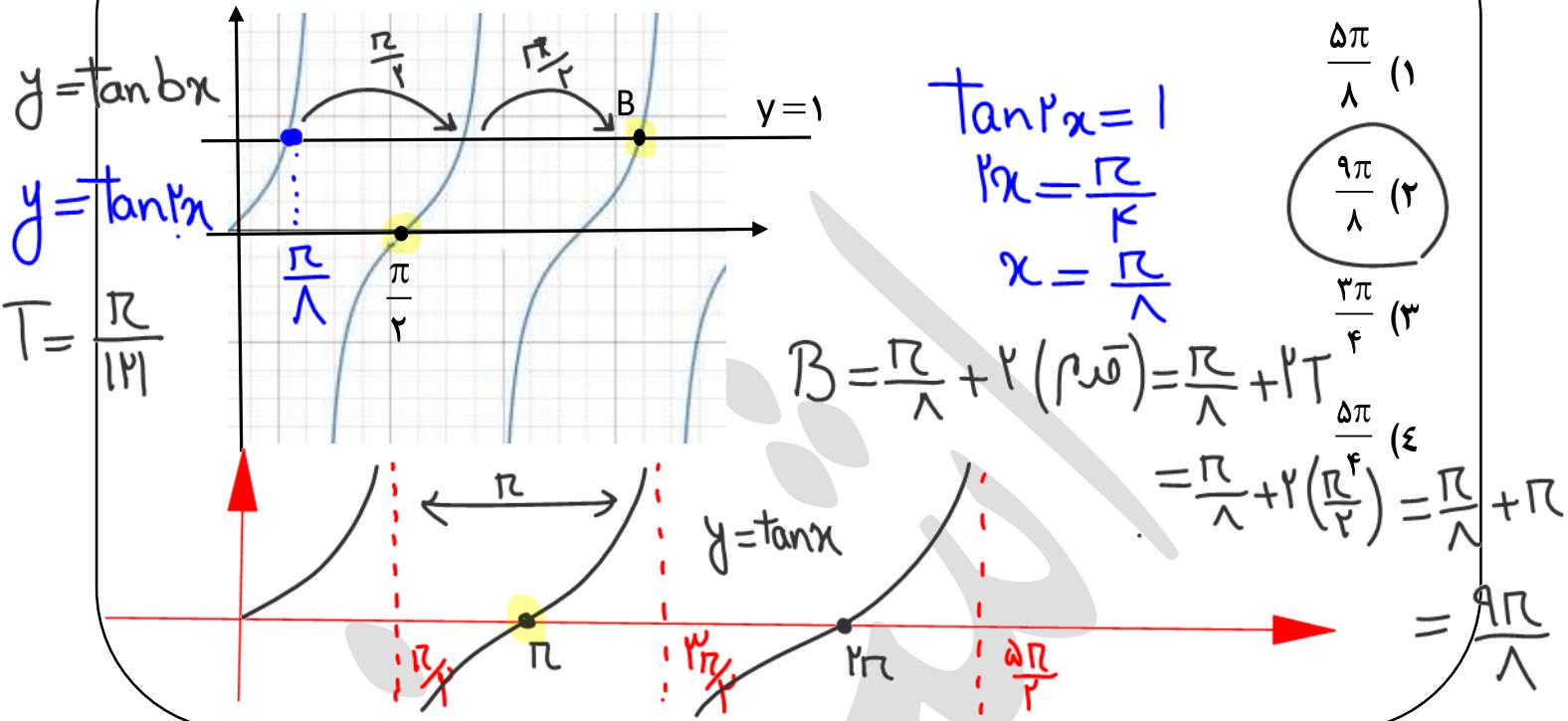
π (۱)

$\frac{\pi}{2}$ (۲)

2π (۳)

$\frac{5\pi}{6}$ (۴)

۴۳- نمودار تابع $f(x) = \tan bx$ به شکل زیر است. طول نقطه B کدام است؟



$$\tan \pi x = 1$$

$$\pi x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{5\pi}{\lambda} \quad (1)$$

$$\frac{9\pi}{\lambda} \quad (2)$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad (3)$$

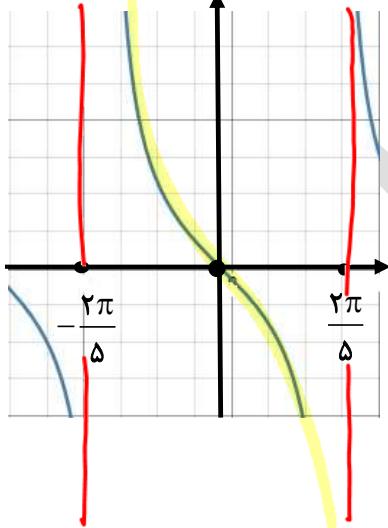
$$\frac{5\pi}{4} \quad (4)$$

$$\frac{10\pi}{\lambda} \quad (5)$$

$$\frac{9\pi}{\lambda} \quad (6)$$

$$y = \tan x$$

۴۴- بخشی از نمودار تابع $f(x) = \tan \frac{mx}{m-1}$ به شکل زیر است. m کدام است؟



$$T = \frac{\pi}{\left| \frac{m}{m-1} \right|} = \frac{\pi}{\frac{m}{m-1}} = \frac{\pi(m-1)}{m} = \frac{\pi}{\frac{5}{9}} = \frac{9\pi}{5}$$

$$\left| \frac{m}{m-1} \right| = \frac{\omega}{\zeta}$$

$$\frac{5}{9} \quad (1)$$

$$\frac{9}{5} \quad (2)$$

$$-\frac{5}{9} \quad (3)$$

$$-\frac{9}{5} \quad (4)$$

تازه است در حال تولید کردن اساتیز

ضریب x منفی است

$$\frac{m}{m-1} = -\frac{\omega}{\zeta} \Rightarrow \zeta m = -\omega m + \omega \Rightarrow \omega m = \zeta \Rightarrow m = \frac{\zeta}{\omega}$$

یازدهم ریاضی ودوازدهم تجربی

یادآوری قوانین مثلثاتی دهم:

۱) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

۲) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

۳) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

۴) $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

۵) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$

۶) $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ \sin 2\alpha &= \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

۷) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

۸) $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

۹) $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

۱۰) $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

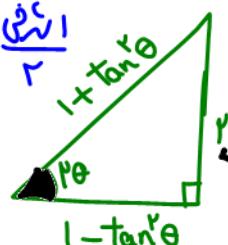
۱۱) $\sin 2\alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

۱۲) $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$

۱۳) $1 + \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$

۱۴) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + \sin 2\alpha$

۱۵) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1 - \sin 2\alpha}{2}$



$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

مادرطایی

۱۶) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

۱۷) $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

۱۸) $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

۱۹) $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \sin^2 \frac{2\alpha}{2}$

قوانين مستحب:

۲۰) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

۲۱) $\cot \alpha + \tan \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

۲۲) $1 - \sin 2\alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$

۲۳) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1 - \sin 2\alpha}{2}$

تست



جزوه ۱۴

۴۵- اگر انتهای کمان θ در ربع دوم و $\sin \theta = \frac{1}{3}$ باشد مقدار $\cos 2\theta$ کدام است؟

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \Rightarrow \cos \theta = 1 - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$-\frac{7}{9} \quad (1)$$

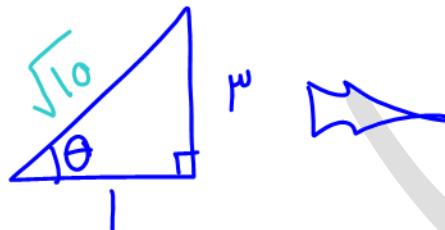
$$\cos \theta = 1 - 2 \left(\frac{1}{9}\right) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{9}{9} - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{7}{9} \quad (2)$$

$$\frac{2}{9} \quad (3)$$

$$-\frac{2}{9} \quad (4)$$

۴۶- اگر انتهای کمان θ در ربع سوم و $\tan \theta = 3$ باشد مقدار $\cos 2\theta$ کدام است؟



$$\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

$$-\frac{3}{5} \quad (1)$$

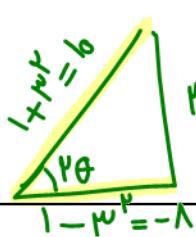
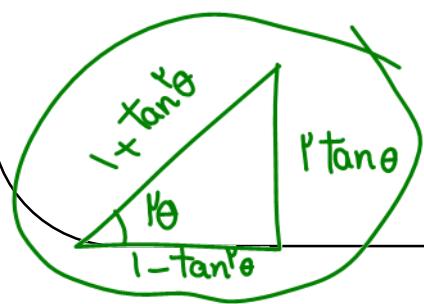
$$-\frac{4}{5} \quad (2)$$

$$\cos \theta = 1 - 2 \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$-\frac{2}{5} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{5} \quad (4)$$

راه نسبتی دوبل کردن کمان به کمک تانژانت



$$\cos \theta = \frac{-1}{1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

روش تستی دوچرخه

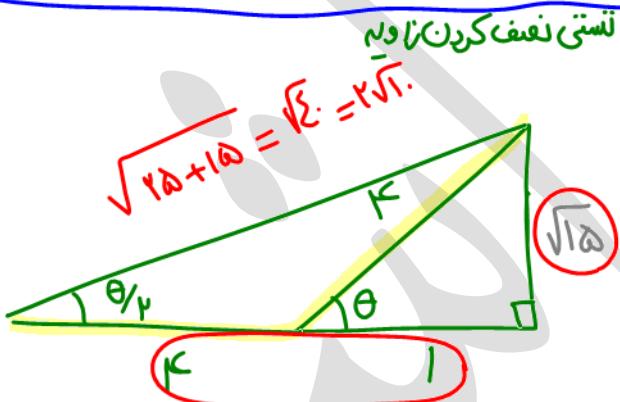
۴۷- اگر انتهای کمان θ در ربع اول باشد مقدار $\cos \frac{\theta}{2}$ کدام است؟

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \quad \frac{1}{4} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\text{معاود}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}} \\ = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}}$$



$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \quad (2)$$

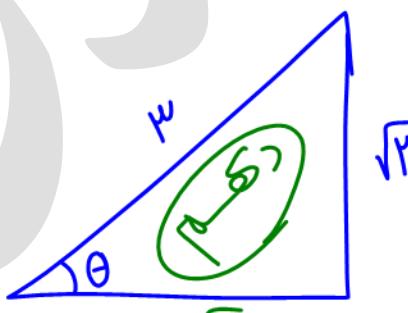
$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}} \quad (4)$$

۴۸- اگر انتهای کمان θ در ربع دوم باشد مقدار $\sin 2\theta$ کدام است؟

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{4}}{2} \right) = \\ &= -\frac{2\sqrt{12}}{4} = -\frac{2(2\sqrt{3})}{4} \\ &= -\frac{4\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$



$$\cos \theta = \frac{\sqrt{4}}{2}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (1)$$

$$\frac{-2\sqrt{2}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3} \quad (4)$$

$x \rightarrow r_x \rightarrow \varepsilon_x$

اگر $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{4}$ باشد، مقدار $\cos^4 x$ کدام است؟

$$\cos^4 x = 1 - \gamma \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \cos^4 x = 1 - \gamma \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2$$

$-\frac{3}{4}$ (۱)

$$\cos^4 x = 1 - \gamma \left(\frac{6}{16}\right) = 1 - \frac{6}{16} = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$\frac{3}{4}$ (۲)

$$\cos^4 x = \gamma \cos^2 x - 1 = \gamma \left(\frac{1}{8}\right) - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}$$

$-\frac{7}{8}$ (۳)

$\frac{7}{8}$ (۴)

۵۰- مقدار عددی $\cos 22.5^\circ$ کدام است؟

$$\cos^4 \omega = \gamma \cos^2 22.5^\circ - 1$$

$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$ (۱)

$$\frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} = \gamma \cos^2 22.5^\circ - 1$$

$\frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} + 1 = \gamma \cos^2 22.5^\circ \quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (۲)

$$\frac{\sqrt{\gamma} + \gamma}{\gamma} = \gamma \cos^2 22.5^\circ$$

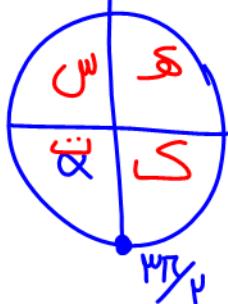
$\cos^2 22.5^\circ = \frac{\sqrt{\gamma} + \gamma}{\gamma} \quad \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (۳)

$$\cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{\gamma} + \gamma}}{\gamma}$$

$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (۴)

اگر $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$ کدام است؟

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$



فرمول

توان دو

$$-\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \frac{1}{4} \quad (2)$$

~~$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}$~~

$$1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4} \quad (3)$$

$$-2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{3}{4} \quad (4)$$

اگر $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$ باشد، مقدار $\tan x + \cot x$ کدام است؟

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\frac{5}{4} - \sin x}} = \frac{4}{9}$$

توان دو

$$\frac{5}{2} \quad (1)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = \frac{25}{16} \quad (2)$$

$$1 + 2\sin x \cos x = \frac{25}{16} \quad (3)$$

$$2\sin x \cos x = \frac{9}{16} \quad (4)$$

53- ساده شده عبارت

$$\frac{(A+1)(A-1)}{\dots} = \frac{A^2 - 1^2}{\dots}$$

کدام است؟

$$\frac{(Sin\alpha + Cos\alpha + 1)(Sin\alpha + Cos\alpha - 1)}{Cos2\alpha}$$

$$\frac{(Sin^2\alpha + Cos^2\alpha + 2Sin\alpha Cos\alpha) - 1}{Cos2\alpha} = \frac{1 + Sin2\alpha}{Cos2\alpha}$$

$$= \frac{(1 + Sin2\alpha) - 1}{Cos2\alpha} = \frac{Sin2\alpha}{Cos2\alpha} = Tan2\alpha$$

$\tan 2\alpha$ (۱) ✓
 $\cot 2\alpha$ (۲)
 $\tan \alpha$ (۳)
 $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۴)

$$Sin^2\alpha = 2Sin\alpha Cos\alpha$$

54- حاصل

$$\frac{\sin 2^\circ}{1 + \cos 2^\circ}$$

کدام است؟

$$\frac{Sin^2(1^\circ)}{1 + Cos^2(1^\circ)} = \frac{2Sin1^\circ \cdot Cos1^\circ}{1 + (2Cos^2 1^\circ - 1)} = \frac{2Sin1^\circ \cdot Cos1^\circ}{2Cos^2 1^\circ} = \frac{Sin1^\circ}{Cos1^\circ} = Tan1^\circ$$

$\sin 1^\circ$ (۱)
 $\cos 1^\circ$ (۲)
 $\tan 1^\circ$ (۳)
 $\tan 4^\circ$ (۴)

$$Cos^2\alpha = 2Cos^2\alpha - 1$$

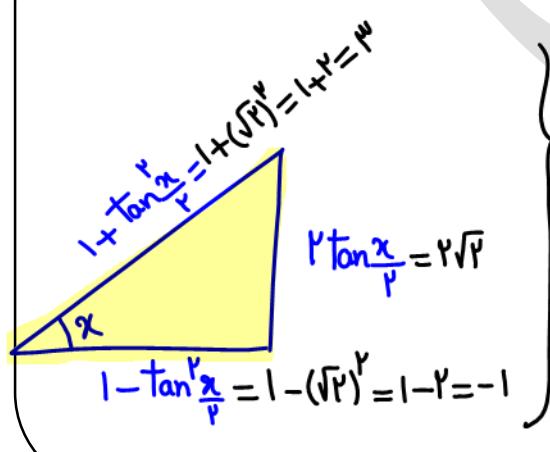
$$Cos^2\alpha = 1 - 2Sin^2\alpha$$

طلایی
-

55- اگر $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2}$ باشد، حاصل

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

کدام است؟



$$Cosx = \frac{\text{معاشر}}{\text{فتر}} = \frac{-1}{\mu}$$

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - (-\frac{1}{\mu})}{1 + (-\frac{1}{\mu})} = \frac{\frac{2}{\mu}}{\frac{2}{\mu}} = \frac{1}{1} = 2$$

$$2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}$$

$$2$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

56- اگر $\sin 4x = 4$ باشد، $\tan 2x + \cot 2x$ چقدر است؟

$$\tan 4x + \cot 4x = \frac{4}{\sin 2x} = 4$$

$$\frac{4}{\sin 4x} = 4 \rightarrow \frac{4}{4} = \sin 2x \rightarrow \frac{1}{1} = \sin 2x$$

۱ (۱)

۲ (۲)

-۲ (۳)

-۱ (۴)

برابر کدام است؟

$$x = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \rightarrow \frac{1}{\sin 45^\circ} - \cot 45^\circ = \frac{1}{1} - 0 = 1$$

که نتای درست است که اگر $x = 45^\circ$ برد کمینه می شود.

 ~~$\cot \frac{x}{2}$~~ (۱) ✗ $\tan \frac{x}{2}$ (۲) ✓ ~~$-\tan \frac{x}{2}$~~ (۳) ✗ ~~$-\cot \frac{x}{2}$~~ (۴) ✗

برای $x = 45^\circ$

$$\frac{1}{\sin 45^\circ} - \cot 45^\circ = \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

که نتای درست است که اگر $x = 45^\circ$ برد کمینه می شود.

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ باشد حاصل عبارت $x = \frac{\pi}{12}$ اگر -58°

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x} = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{4}}{1 - \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
 $\sqrt{3}$ (۴)

اگر $\cot x = 1 + \tan x$ ، حاصل $\tan 2x$ کدام است؟

$\cot x - \tan x = 1$

$\cot x - \tan x = 1 \quad \div 2$
 $\cot x = \frac{1}{2} \quad \text{علق}$
 $\tan x = 2 \quad \text{کم ۰۵}$

۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

برای دلخواه $\alpha = 45^\circ$ برابر است با:

$$\frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{1 + 1 - 0}{1 + 1 + 0} = \frac{2}{2} = 1$$

$\tan \alpha$ (۱)

$\cot \alpha$ (۲)

$-\tan \alpha$ (۳)

$-\cot \alpha$ (۴)

که نهای درست است که اگر $\alpha = 45^\circ$ باشد $\tan \alpha$ مانند دهد

دلخواه

$$\alpha = \dots \rightarrow \frac{1 + \sin 0 - \cos 0}{1 + \sin 0 + \cos 0} = \frac{1 + 0 - 1}{1 + 0 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

که نهای درست است که اگر $\alpha = 0^\circ$ باشد $\tan \alpha$ مانند دهد

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \frac{1}{2} \sin^2 \alpha &= \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\sin^2 \omega \times \sin(\alpha - \beta) \times \sin(\alpha - \gamma)$$

$$\sin^2 \omega \times \sin \beta \times \sin \gamma$$

$$\boxed{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \sin \beta}$$

$$\frac{1}{2} \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \boxed{\cos \alpha \sin \beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin \alpha \right)$$

دوزاینہ مکمل سینوس ها برابر و کسینوس های قرینه دارند

$$\frac{1}{2} \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2} \sin \alpha$$

$$\frac{1}{2} \cos \beta$$

$$\frac{1}{2} \sin \beta$$

$$\frac{1}{4} \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\frac{1}{4} \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\frac{1}{2} \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos^4 x$$

$$f(x) = 2x^2 - 1$$

$$(f \circ f)(\cos x) = f(f(\cos x)) = f(\frac{1}{2} \cos^2 x - 1)$$

$$= f(\cos^2 x) = \frac{1}{2} \cos^4 x - 1 = \cos^2 x$$

$$\sin^4 x$$

$$\cos^4 x$$

$$\sin^4 x$$

$$\cos^4 x$$

$$A^2 - B^2$$

$$\begin{aligned} \cot^2 \alpha - \tan^2 \alpha &= (\underbrace{\cot \alpha - \tan \alpha}_{\text{انجام هندوچ}}) (\underbrace{\cot \alpha + \tan \alpha}_{\text{کدام است؟}}) \\ &= (\frac{1}{2} \cot \alpha) \left(\frac{1}{2} \tan \alpha \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\tan^2 15^\circ} - \frac{1}{\cot^2 15^\circ}$$

$$8\sqrt{3}$$

$$-8\sqrt{3}$$

$$4\sqrt{3}$$

$$-4\sqrt{3}$$

۶۴- اگر انتهای کمان زاویه x در ربع دوم دایره مثلثاتی باشد و داشته باشیم ، $\cos(\pi + 2x) = \frac{1}{3}$

مقدار $\tan x$ کدام است؟

$$\cos(\pi + 2x) = \frac{1}{3} \rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{3} \rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{3}$$

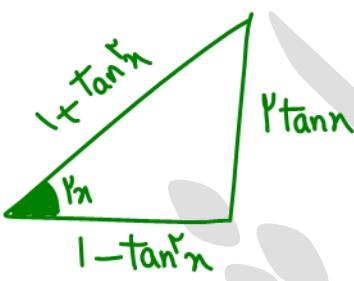
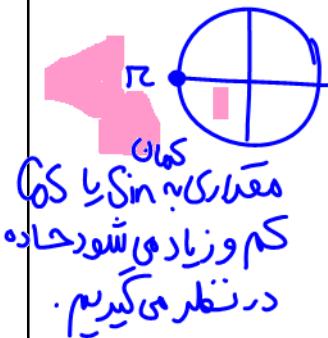
$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (۱)

$$\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = -\frac{1}{3} \rightarrow \tan^2 x = 2 \rightarrow \tan x = \pm \sqrt{2}$$

$$\sqrt{1 - \tan^2 x} = -1 - \tan x \rightarrow \tan x = \pm \sqrt{2}$$

$$r = r \tan^2 x \rightarrow \tan x = \pm \sqrt{2}$$

$$\tan x = \pm \sqrt{2} \rightarrow \tan x = \pm \sqrt{2}$$



در ربع دوم است و تابع آلت در این دفعه منفی است .

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$-\cos^2 x = -1 + \sin^2 x \rightarrow \text{کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)}$$

$$\left(-\cos \frac{\pi}{14}\right)^2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{14} \left(\cos^2 \frac{\pi}{14} - 1\right)\right) = \cos^2 \frac{\pi}{14} \left(-\frac{\cos^2 \frac{\pi}{14} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{14}}{\frac{1}{r} \sin^2 \frac{\pi}{14}}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{r^2} \cos^2 \frac{\pi}{14} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{14} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{r} \sin \frac{\pi}{14}\right)^2 = -\frac{1}{14} \sin^2 \frac{\pi}{14} = -\frac{1}{14} \left(\frac{r}{2}\right)^2 = -\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\sin^2 x = r \sin x \cos x \rightarrow \frac{1}{r} \sin^2 x = \sin x \cos x \rightarrow \sin^2 x = r \cos x \sin x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \rightarrow \frac{1}{r} \sin^2 x = 1 - \frac{1}{r^2} \sin^2 x = \frac{1}{r^2} \cos^2 x$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

سال دیگم
Cos Σ .

$$\frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \lambda} = \frac{\frac{1}{r} \sin \Sigma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \lambda} = \frac{\frac{1}{r} \sin \Sigma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \lambda}$$

۶۶- حاصل عبارت $\frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \lambda}$ کدام است؟

Cos Σ . $\frac{1}{r}$ (۱) $\frac{1}{\lambda}$ (۲) $\frac{1}{\Sigma}$ (۳) $\frac{1}{\mu}$ (۴)

$$= \frac{\frac{1}{r} \sin \Sigma \cdot \cos \Sigma}{\sin \lambda} = \frac{\frac{1}{r} (\frac{1}{r} \sin \lambda)}{\sin \lambda} = \frac{1}{\Sigma}$$

$$\sin \lambda = r \sin \alpha \cos \alpha \rightarrow \frac{1}{r} \sin \lambda = \sin \alpha \cos \alpha$$

۶۷- اگر $\alpha = 75^\circ$ باشد، مقدار $\cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha$ کدام است؟

$$\frac{1}{r} \sin \lambda \left(\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right) = \frac{1}{r} \sin \lambda \cos \alpha$$

$$= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \sin \lambda \right) = \frac{1}{r} \sin \lambda \xrightarrow{\alpha = 75^\circ} \frac{1}{r} \sin \mu.$$

 $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۱) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۴)

$$\frac{1}{r} \sin(\cancel{\lambda} - 45^\circ) = \frac{1}{r} \sin(-45^\circ) = -\frac{1}{r} \sin 75^\circ = -\frac{1}{r} \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right) = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4r}$$

۶۸- در تساوی $\frac{\cos 2^\circ}{\sqrt{2} \cos 1^\circ + 1} + 1 = k \sin 1^\circ$ مقدار K کدام است؟ (قلم چی ۹۹)

$$\frac{\sqrt{2} \cos 1^\circ - 1}{\sqrt{2} \cos 1^\circ + 1} + 1 = \frac{(\sqrt{2} \cos 1^\circ - 1)(\sqrt{2} \cos 1^\circ + 1)}{\sqrt{2} \cos 1^\circ + 1} + 1$$

$$= (\sqrt{2} \cos 1^\circ - 1) + 1 = \sqrt{2} \cos 1^\circ = k \sin 1^\circ.$$

$$k = \sqrt{2}$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

$\sqrt{2}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۳)

-۲ (۴)

۶۹- مقدار عبارت $(1 + \cos \frac{\pi}{\lambda})(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda})(1 + \cos \frac{3\pi}{\lambda})(1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda})$ کدام است؟

$$\frac{\pi}{\lambda} + \frac{4\pi}{\lambda} = \pi$$

دوزایی معلم سینوس های برابر و کسینوس های قرینه دارند

$\frac{1}{4}$ (۱)

$$(1 + \cos \frac{\pi}{\lambda})(1 - \cos \frac{\pi}{\lambda}) (1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda})(1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda})$$

$$(1 - \cos \frac{3\pi}{\lambda})(1 - \cos \frac{4\pi}{\lambda}) = \sin \frac{\pi}{\lambda} \cdot \sin \frac{4\pi}{\lambda}$$

$\frac{1}{16}$ (۲)

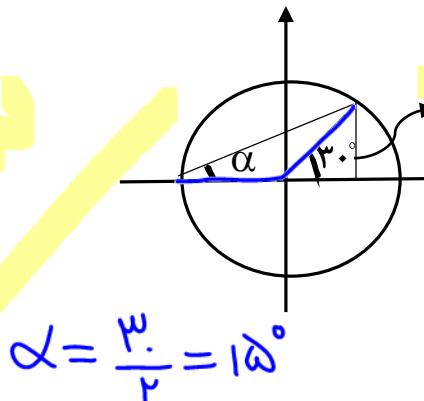
$$\frac{\pi}{\lambda} + \frac{4\pi}{\lambda} = \frac{5\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

$\frac{1}{12}$ (۳)

$\frac{1}{\lambda}$ (۴)

$$\sin \frac{\pi}{\lambda} \cos \frac{4\pi}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sin \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{\lambda}$$

۷۰- در شکل زیر $\cos \alpha$ کدام است؟ (سنجهش ۹۹)



$$-\sqrt{3} + 2$$

روش نسبتی اسخی برای
نصف کردن

$$\frac{1}{2}(2 + \sqrt{3}) \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}) \quad (3)$$

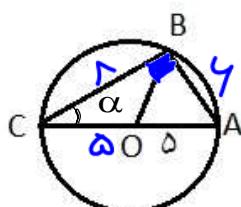
$$\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}/2 - 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3} + 2}{2} = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3} + 2}{2} = \cos 30^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3} + 2}{2}$$

۷۱- در شکل زیر $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ است. مساحت مثلث AOB کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

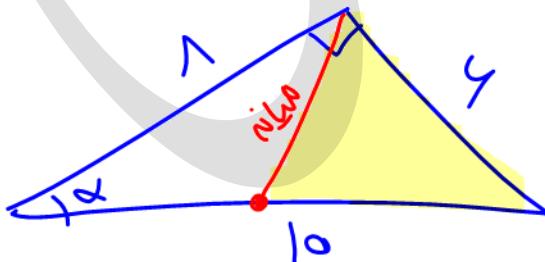


$$\triangle ABC \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \quad (1)$$

$$12 \quad (2)$$

$$16 \quad (3)$$

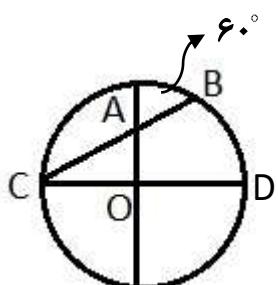
$$18 \quad (4)$$



$$S = \frac{9 \times 1}{2} = 9 \quad \Rightarrow \quad S_{\text{کوچک}} = \frac{1}{2}(2 \times 9) = 12$$

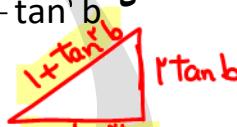
۷۳- در شکل زیر O مرکز دایرهٔ مثلثاتی است. طول AB کدام است؟

(۱)

 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴)

اگر $a - b = \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل کدام است؟ (سنجهش ۹۹)

$$a = \frac{\pi}{4} + b \xrightarrow{\text{X}} \tan a = \frac{1}{r} + \tan b$$

 $\cos^r b$ (۱) $\cos b$ (۲) $\sin^r b$ (۳) $\sin b$ (۴)

$$\frac{\sin \tan a}{1 - \tan^r b} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + \tan b \right)}{1 - \tan^r b} = \frac{\cos \tan b}{1 - \tan^r b} = \frac{1 - \tan^r b}{1 + \tan^r b}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^r b} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^r b}} = \cos^r b$$

دھم

$$1 + \tan^r b = \frac{1}{\cos^r b}$$

دوازدهم ریاضی و تجربی

معادله مثلثاتی:

به طور کلی معادله های مثلثاتی به شیوه زیر حل می شوند:

$$\sin x = \sin \alpha \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{array} \right.$$

$$\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

در این معادله ها K عددی صحیح است. برای نمونه:

$$\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{array} \right.$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

اگر مقادیر معادله منفی باشد به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) \rightarrow \cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$$

در معادله های کسینوسی برای منفی کردن از زاویه مکمل استفاده می کنیم.

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

معادله تانژانت و کتانژانت (مخصوص رشته ریاضی) به صورت زیر است:

$$\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\cot x = \cot \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha$$

برای نمونه:

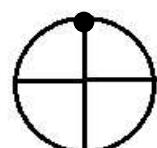
$$\tan x = \sqrt{3} \rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\cot 2x = -1 \rightarrow \cot 2x = -\cot \frac{\pi}{4} \rightarrow \cot 2x = \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \div 2 \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

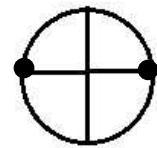
معادله های مثلثاتی خاص:

برخی معادله های مثلثاتی را می توان به صورت ساده تری حل کرد. این معادله های شش گانه عبارت اند از:

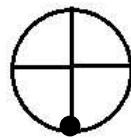
$$\sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$



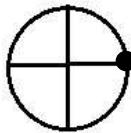
$$\sin x = -1 \rightarrow x = k\pi$$



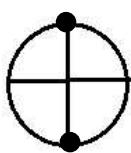
$$\sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$



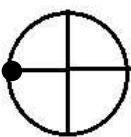
$$\cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi$$



$$\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$



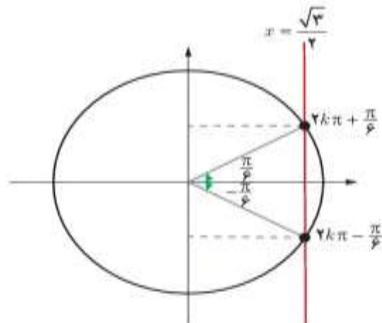
$$\cos x = -1 \rightarrow x = 2k\pi + \pi$$



برای نمونه به حل معادله های زیر نگاه کنید:

$$\sin 2x = 1 \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

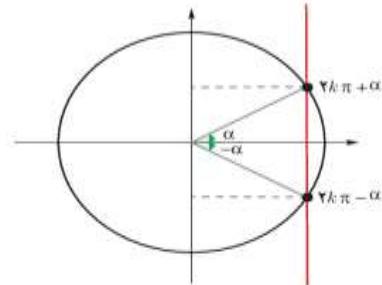
$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \rightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$$



الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی رو به رو و محل تقاطع خط $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را بدست آورید.

برای هر عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ در معادله $\cos x = a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos \alpha = a$



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به صورت $\cos x = \cos \alpha$ نوشت و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی رو به رو به صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \quad \text{و} \quad x = 2k\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{2}$ را بدست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ پس معادله به صورت $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال: معادله $\sin 2x = \sin^3 x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند:

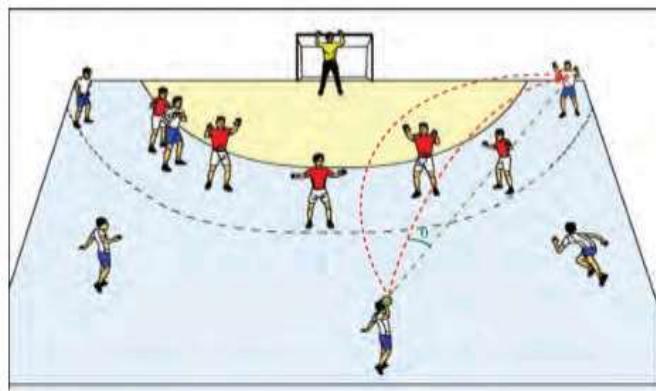
$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

مثال : معادله $\sin 3x = \sqrt{3}$ را حل کنید.

$$\sin 3x = \sqrt{3}$$

$$\sin 3x = \sqrt{3}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{18}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



مثال : یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت ۱۶ m/s برای هم‌تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{16}$$

از رابطه داده شده به دست می‌آید :

$$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{16} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 16}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{12}$ و $\theta = \frac{5\pi}{12}$ می‌باشد.

مثال : جواب‌های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

$$\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



مثال : معادله $\cos x = 5 - 4\cos^2 x$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به صورت $5 - 4\cos^2 x = \cos x$ می نویسیم. با تغییر متغیر $t = \cos x$ می توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $5 - 4t^2 - t = 0$ تبدیل کرد. جواب های این معادله $t = -\frac{1}{4}$ و $t = 5$ است. بنابراین جواب های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x = -\frac{1}{4}$ و $\cos x = 5$ به دست می آیند. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب های معادله $\cos x = -\frac{1}{4}$ را به دست می آوریم.

$$\cos x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{7\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{7\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

تمرین

- ۱ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.
 (الف) $\sin 2\alpha$
 (ب) $\cos 2\alpha$

- ۲ نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

- ۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف	$\sin \frac{\pi}{4} = \sin 3x$	(ب)	$\cos 2x - \cos x + 1 = 0$
ب)	$\cos x = \cos 2x$	(ت)	$\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$
ث)	$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$	(ج)	$\sin x - \cos 2x = 0$

- ۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت ها می توان ساخت؟

تست



۷۴- جواب کلی معادله $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ کدام است؟

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (3)$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

۷۵- جواب کلی معادله $\sin x \cdot \cos x = \sin \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (1)$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (3)$$

(4) جواب ندارد.

۷۶- جواب معادله $\sin(\pi+x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\sin(\pi-x)+1=0$ کدام است؟

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

۷۷- یکی از جواب های معادله $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$ کدام است؟

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (3)$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (4)$$

۷۸- تعداد جواب های معادله $\sin x - \sin 2x = 0$ در فاصله $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)

۷۹- جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ کدام است؟

$$x = \frac{k\pi}{3} \quad (۱)$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} \quad (۲)$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (۳)$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۴)$$

۸۰- جواب کلی معادله $2\sin^2 x = 1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

$$x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{16} \quad (1)$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{16} \quad (2)$$

$$x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \quad (3)$$

$$x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (4)$$

۸۱- کدام گزینه جزء جواب های کلی معادله $\cos 5x = \sin x$ می باشد؟

$$x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \quad (1)$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \quad (2)$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (3)$$

$$x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{8} \quad (4)$$

۸۲- نمودار تابع $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ روی بازه $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می کند؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۵ (۵)

۸۳- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\cos 2x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0$ کدام است؟

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

۸۴- مجموع جواب های معادله $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

(گزینه دو ۱۴۰۰)

$$\frac{2\pi}{3} \quad (1)$$

$$\frac{7\pi}{12} \quad (2)$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (4)$$

۸۵- جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos 2x = 0$ کدام است؟

$$x = \frac{2k\pi}{5} \quad (1)$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{5} \quad (2)$$

$$x = (2k-1)\frac{\pi}{5} \quad (3)$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{5} \quad (4)$$

۸۶- مجموع جواب های معادله متشابه $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$$\frac{5\pi}{2} \quad (1)$$

$$3\pi \quad (2)$$

$$\frac{7\pi}{2} \quad (3)$$

$$4\pi \quad (4)$$

۸۷- کل جواب های معادله $\cos x(2\cos 2x - 1) = 0$ کدام است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

$$\frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{k\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \quad (3)$$

$$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

- جواب کلی معادله مثلثاتی $x = k\pi + \frac{i\pi}{4}$ است. مجموعه مقادیر k کدام

است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

{۰, ۱, ۳} (۱)

{۱, ۳} (۲)

{۰, ۱} (۳)

{۱, ۲, ۳} (۴)

- یکی از دسته جواب های معادله $\sqrt{\cos x + 1} = \sin x$ کدام است؟

$k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۱)

$2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۲)

$2k\pi$ (۳)

$2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۴)

۹۰- تعداد جواب های معادله مثلثاتی $\cos^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 1$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

(۱) ۱

(۲) ۳

(۳) ۵

(۴) ۶

۹۱- جواب های معادله مثلثاتی $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ که در آن K یک عدد صحیح است. کدام است؟ (تجربی ۹۹)

 $\frac{k\pi}{3}$ (۱) $\frac{2k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ (۴)

۹۲- مجموع جواب های معادله مثلثاتی $\tan^3 x \cdot \tan x = 1$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ کدام است؟

(ریاضی ۹۹)

5π (۱)

6π (۲)

$\frac{9\pi}{2}$ (۳)

$\frac{11\pi}{2}$ (۴)

فرمول های اختصاصی رشته ریاضی :

$$1) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha$$

$$2) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

$$3) \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$$4) \sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$5) \frac{1 \mp \tan\alpha}{1 \pm \tan\alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{4} \mp \alpha\right)$$

$$6) \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$7) \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$8) \sin 3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$9) \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$10) \tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

مخصوص رشته ریاضی

تست



۹۳- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$

(۲) ۴

(۳) ۱

(۴) $\frac{1}{2}$

۹۴- حاصل $\sin^3 \frac{\pi}{12} + \cos^3 \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

(۱) $\frac{3\sqrt{6}}{8}$ (۲) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (۳) $3\sqrt{6}$ (۴) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$

۹۵- اگر $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{5}$ باشد، حاصل $\tan 2\alpha$ کدام است؟

۱/۵ (۱)

۱/۸ (۲)

۲/۴ (۳)

۲/۵ (۴)

۹۶- اگر $a \tan 50^\circ + \tan 20^\circ = \tan 70^\circ$ باشد، حاصل a کدام است؟

۲ (۱)

 $\frac{3}{2}$ (۲)

۱ (۳)

 $\frac{5}{2}$ (۴)

۹۷- حاصل عبارت $\frac{\tan^2 25 - \tan^2 20}{1 - \tan^2 25 \cdot \tan^2 20}$ کدام است؟

(1) $\tan 5$

(2) $\frac{1}{2} \tan 5$

(3) ۱

(4) $\frac{1}{2}$

۹۸- مجموع جواب های معادله $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(1) $\frac{5\pi}{2}$

(2) 3π

(3) $\frac{3\pi}{2}$

(4) 4π

۹۹- جواب کلی معادله $\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \frac{1}{2}$ کدام است؟

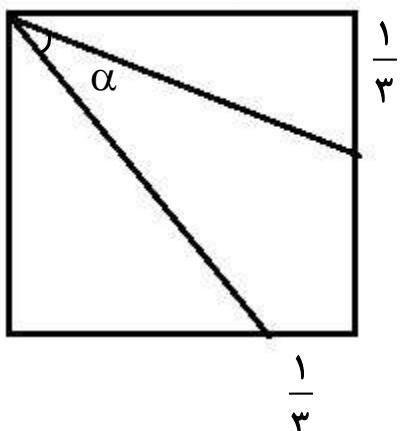
$$\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3} \quad (1)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{9} \quad (2)$$

$$\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9} \quad (3)$$

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{9} \quad (4)$$

۱۰۰- در مربع شکل مقابل، $\tan \alpha$ کدام است؟



$$\frac{4}{9} \quad (1)$$

$$\frac{5}{9} \quad (2)$$

$$\frac{7}{9} \quad (3)$$

$$\frac{8}{9} \quad (4)$$