

حد و پیوستگی

استاد اشرفی

www.mathtest.ir

یازدهم ریاضی و دوازدهم تجربی

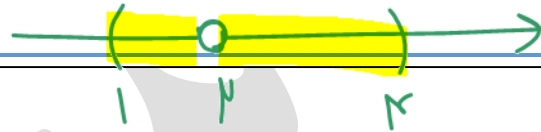
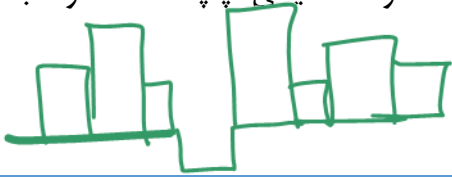
همسایگی:

اگر x عضو بازه (a, b) باشد آن گاه این بازه را یک همسایگی نقطه x می نامیم و اگر x از این بازه حذف شود مجموعه $(a, b) - \{x\}$ یا $(a, x) \cup (x, b)$ را یک همسایگی محذوف x می نامیم.

همین طور بازه (a, x) را یک همسایگی چپ x و بازه (x, b) را همسایگی راست x در نظر می گیریم.

برای نمونه بازه $(1, 4)$ همسایگی $x = 2$ این بازه همسایگی راست $x = 1$ و همسایگی چپ $x = 4$ و مجموعه

$(1, 4) - \{2\}$ یک همسایگی محذوف $x = 2$ است.



بازه $(1, 4)$ همسایگی راست $x = 1$ است

تست



بازه $(1, 4)$ همسایگی چپ $x = 4$ است

۱- حدود x کدام باشد تا بازه $(2x-1, x^2)$ یک همسایگی عدد ε باشد؟

$$x^2 - 1 < \varepsilon < x^2$$

$x = 0 \Rightarrow -1 < \varepsilon < 0$ No

$x = 2 \Rightarrow 3 < \varepsilon < 4$ No

$x = -3 \Rightarrow -7 < \varepsilon < 9$ OK

~~$(\frac{5}{2}, +\infty)$ (1)~~

~~$(-2, 2)$ (2)~~

~~$(-\infty, \frac{5}{2}) - \{-2\}$ (3)~~

$(-\infty, \frac{5}{2}) - [-2, 2]$ (4)

۲- مجموعه جواب های نا معادله $1 < |x-2| < 2$ اجتماع یک همسایگی راست نقطه a و یک همسایگی چپ

نقطه b است. حاصل $a+b$ کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

$$1 < |x-2| < 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 < x-2 < 2 \\ 1 < -(x-2) < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 < x < 4 \\ 1 < -x+2 < 2 \end{cases}$$

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

$(0, 1) \cup (3, 4)$

$= (3, 4) \cup (0, 1)$

همسایگی چپ $a=0$ همسایگی راست $b=1$

$a=0 + b=1 = 1$ $a=3 + b=4 = 7$

۳- دامنه کدام تابع یک همسایگی محذوف $x=2$ است؟

$$\left\{ \begin{array}{l} |1-x^2| \geq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \end{array} \right\} \cap \rightarrow [-1, 1]$$

$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$ (۱) ✗



$g(x) = \frac{x-2}{[x]-2}$ (۲)

$[x]-2=0 \rightarrow [x]=2 \rightarrow 2 < x < 3 \rightarrow \mathbb{R} - [2, 3)$

$h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}$ (۳) ✓



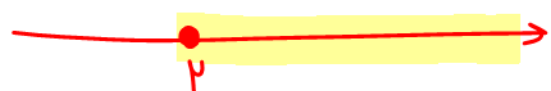
کنند

$|x-2| > 0 \Rightarrow x \neq 2$



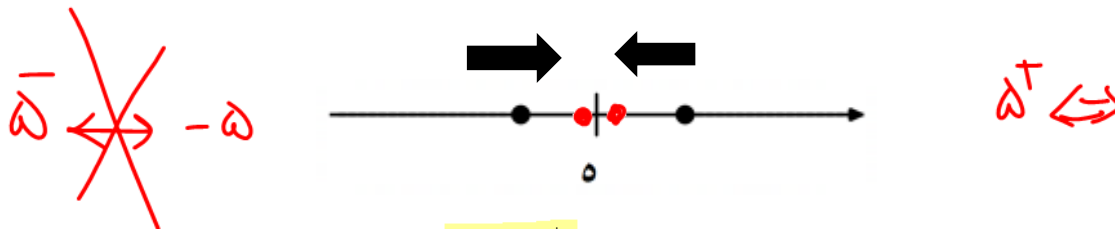
$I(x) = \sqrt{x-2}$ (۴)

$x-2 > 0 \rightarrow x > 2 \rightarrow [2, +\infty)$



مفهوم حد:

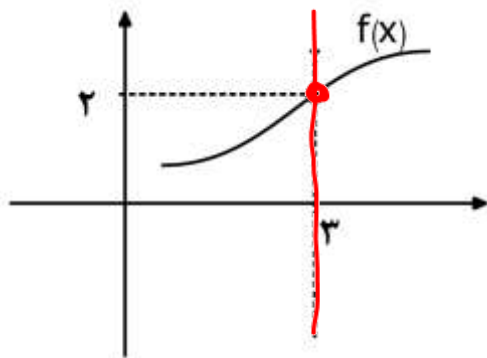
مفهوم شهودی حد، یعنی خیلی نزدیک شدن در واقع وقتی می گوئیم A به B میل می کند و آن را با نماد $A \rightarrow B$ نمایش می دهیم به آن معنی است که نقطه A روی محور طول ها به هر اندازه کوچک و دلخواه به B نزدیک شود. نقطه A از هر دو طرف روی محور طول ها به B می تواند نزدیک شود. برای نمونه وقتی می گوئیم $x \rightarrow 5$ یعنی نقطه x روی محور طول ها می تواند از مقادیر بزرگ تر یا کوچک تر از 5 به آن نزدیک شود.



وقتی x از مقادیر بزرگ تر از 5 به آن نزدیک می شود آن را با نماد $x \rightarrow 5^+$ و زمانی که x از مقادیر کوچک تر از 5 به آن نزدیک می شود آن را با نماد $x \rightarrow 5^-$ نمایش می دهیم.

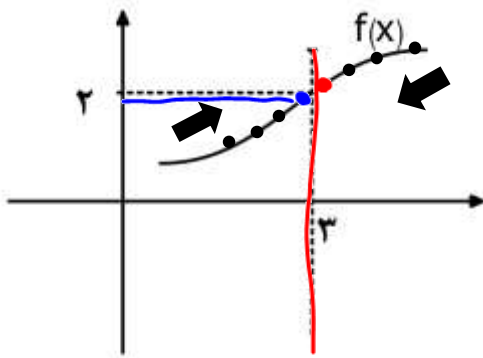
مقدار تابع و حد از روی شکل:

برای یافتن مقدار تابع از روی نمودار آن، در طول مورد نظر بر روی محور ایکس ها خطی بر محور طول ها عمود می کنیم تا نمودار تابع را در نقطه ای قطع کند. عرض این نقطه، مقدار تابع است.
برای نمونه مقدار تابع در $x = 3$ از روی شکل نمودار $f(x)$ برابر ۲ است.



$$f(3) = 2$$

در حالیکه اگر ایکس به سه میل کند عرض نقاطی را می یابیم که طول آن ها در همسایگی $x = 3$ باشند.



$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$$

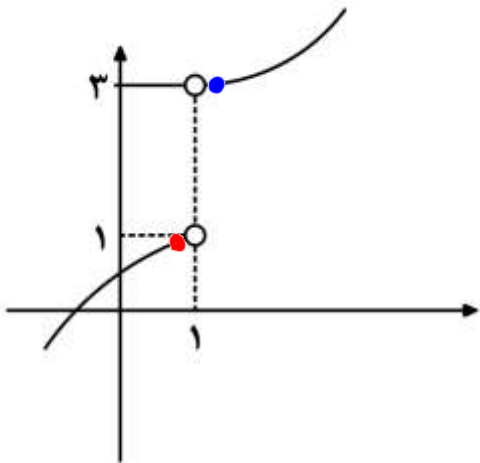
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$$

وقتی x به قدر کافی به ۳ نزدیک شود مقادیر تابع به ۲ نزدیک می شوند و به اصطلاح می گوئیم حد تابع در $x = 3$ برابر ۲ است و آن را به زبان نمادین به صورت زیر می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$

اگر x از مقدارهای بیش از سه به آن نزدیک شود آن را با نماد $x \rightarrow 3^+$ نمایش می‌دهیم و اصطلاحاً به آن حد راست می‌گوئیم و اگر از مقدارهای کمتر از سه به آن نزدیک شود آن را با نماد $x \rightarrow 3^-$ نمایش می‌دهیم و به آن حد چپ می‌گوئیم.

برای نمونه در تابع رسم شده در $x = 1$ حد راست تابع برابر ۳ و حد چپ تابع برابر ۱ است.



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{ندارد}$$

همان طور که در شکل بالا می‌بینید مقدار تابع در $x = 1$ وجود ندارد ولی مقادیر حد چپ و حد راست در این نقطه وجود دارند.

نکته: 

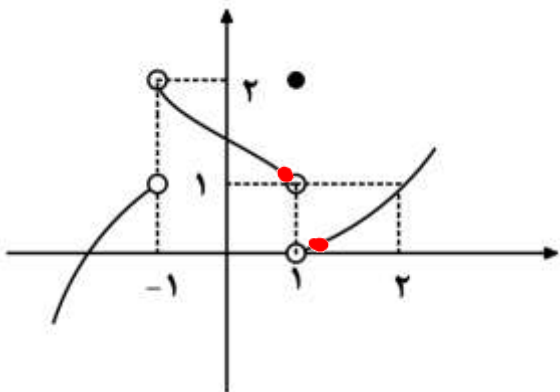
وجود حد چپ و خود تابع در یک نقطه هیچ ارتباطی به هم ندارند. یعنی ممکن است تابع در نقطه‌ای موجود باشد ولی حد آن موجود نباشد یا

شرط وجود داشتن حد: اگر مقدار حد چپ و راست یک تابع در یک نقطه برابر باشند می‌گوئیم تابع در آن نقطه

حد دارد.

حد از روی نمودار:

با توجه به نمودار زیر که مربوط به تابع $y = f(x)$ است، حدهای زیر را بیابید.



$$۱) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \circ$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = |$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{ندارد}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) =$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) =$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) =$$

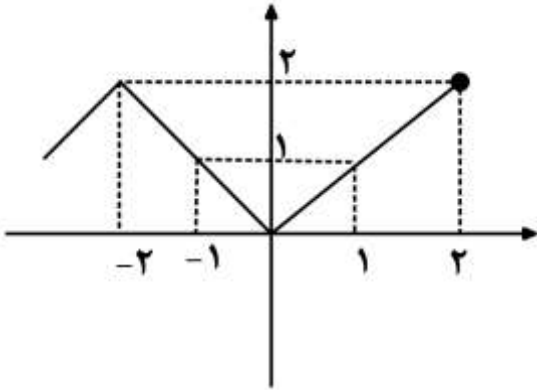
$$۷) f(-1) =$$

$$۸) f(1) =$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(-x) =$$

$$۱۰) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(-x) =$$

۴- اگر نمودار $f(x)$ به شکل زیر باشد، کدام یک از توابع زیر در نقاط داده شده حد چپ دارد ولی حد ندارد؟ (سنجش ۹۹)



(۱) $y = [f(x)]$ در $x = -2$

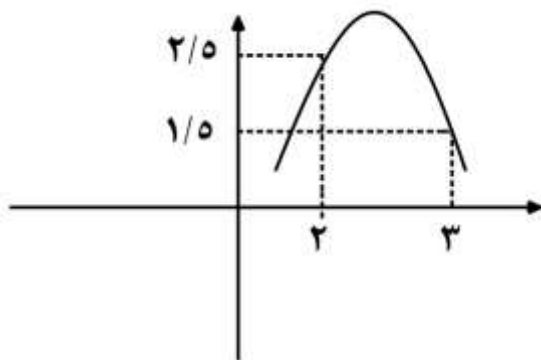
(۲) $y = [f(x)]$ در $x = 0$

(۳) $y = [f(x)]$ در $x = 1$

(۴) $y = [f(x)]$ در $x = -2$

۵- اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد $\lim_{x \rightarrow 3^-} [f(x) + f([x])]$ کدام است؟

(سنجش ۹۹) (برای علاقه مندان)



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

محاسبه مقدار حد تابع از روی ضابطه:

برای یافتن مقدار حد تابع های چند جمله ای، قد مطلق، رادیکالی (زیر رادیکال غیرصفر) کسری (با مخرج غیر صفر) لگاریتمی (با آرگومان غیر صفر) و مثلثاتی (با مخرج غیر صفر) کافی است عدد داده شده را به X بدهیم و مقدار تابع را حساب کنیم در این موارد مقدار حد همان مقدار تابع است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x+1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \log_2(x^2+4) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{x-2} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} |5x - 1| = 11$$

نکته: این تابع ها در نقاط گفته شده، حد دارند.



۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow (\pi^-)} \frac{|x \sin x + \cos x|}{\sqrt{\frac{x}{\pi} + 3}}$ کدام است؟

۲ (۱)

 $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳)

۴ (۴)

۷- اگر حد تابع f در نقطه ای به طول ۵، برابر عدد حقیقی مثبت L باشد و داشته باشیم

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f^2(x) - 2f(x) - x}{f(x) + x + 3} = 2$$

مقدار L کدام است؟ (گزینه دو ۱۴۰۰)

۸ (۱)

۵ (۲)

۳ (۳)

۷ (۴)

بررسی حد داشتن از روی ضابطه:

برای این که تابع در نقطه ای حد داشته باشد باید مقدار حد چپ و راست آن در نقطه مورد نظر با هم برابر باشند.

به مثال زیر توجه کنید:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

در تابع $f(x)$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ کدام است؟

۴ وجود ندارد

۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ صفر

حد راست تابع در $x = 0$ برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

حد چپ تابع در $X = 0$ را نیز می یابیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x - 1 = 0 - 1 = -1$$

حد چپ و راست تابع در $X = 0$ برابر نیستند و تابع در این نقطه حد ندارد.

۸- تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b & |x| < 1 \\ x^2 + x & |x| > 1 \end{cases}$ در همه نقاط اعداد حقیقی حد دارد. حاصل $2a + b$ کدام است؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۴ امکان ندارد (۴)

- قبل از این که به محاسبه نمونه های پیچیده تر بپردازیم بهتر است قواعد مشتق گیری را بلد باشیم

قواعد مشتق گیری:

۱) $y = k \rightarrow y' = 0$

$y = 5 \rightarrow y' = 0$

۲) $y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$

$y = x^3 \rightarrow y' = 3x^2$

۳) $y = ku \rightarrow y' = ku'$

$y = 5x^4 \rightarrow y' = 5(4x^3) = 20x^3$

۴) $y = u \pm v \rightarrow y' = u' \pm v'$

$y = x^2 + 5x \rightarrow y' = 2x + 5(1)$

۵) $y = u^n \rightarrow y' = nu^{n-1}u'$

$y = (x^2 + 5x)^4 \rightarrow y' = 4(x^2 + 5x)^3(2x + 5)$

۶) $y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$y = (x+1)^3 \rightarrow y' = 3(x+1)^2(1)$

$y = \sqrt{5x+7} \rightarrow y' = \frac{5}{2\sqrt{5x+7}}$

مشتق زنجیره

خوبش 2x

۷) $y = \sqrt[3]{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$

$y = \sqrt[3]{5x+7} \rightarrow y' = \frac{5}{3\sqrt[3]{(5x+7)^2}}$

مشتق زنجیره

مربعش 3x

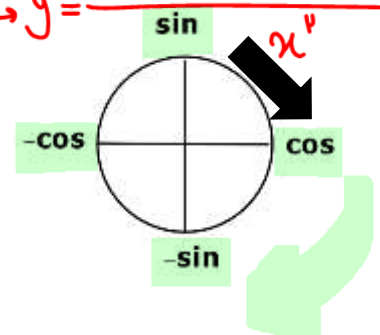
۸) $y = u.v \rightarrow y' = u'v + v'u$

$y = x(x^3 - 5x + 1) \rightarrow y' = 1(x^3 - 5x + 1) + (3x^2 - 5)x$

۹) $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$y = \frac{x^3 - 5x + 1}{x} \rightarrow y' = \frac{(3x^2 - 5)x - 1(x^3 - 5x + 1)}{x^2}$

۱۰) $y = \sin u \rightarrow y' = u' \cos u$



۱۱) $y = \cos u \rightarrow y' = u'(-\sin u)$

$$۱۱) y = \cos u \rightarrow y' = -u' \sin u$$

$$۱۲) y = \tan u \rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u) = u' \cdot \frac{1}{\cos^2 u}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$۱۳) \cot u \rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u) = -u' \frac{1}{\sin^2 u}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

قاعدهٔ تکتم: برای مشتق گرفتن از توابع مثلثاتی توان دار به شیوهٔ زیر عمل می‌کنیم:

$$y = \cos^n u \rightarrow y' = n u' \cos^{n-1} u (-\sin u)$$

تکتم

مشتق

تابع

کمان

توان

$$y = \sin^n u \rightarrow y' = n u' \sin^{n-1} u \cos u$$

$$۱۴) y = \sin^n u \rightarrow y' = n u' \sin^{n-1} u \cos u$$

$$۱۵) y = \cos^n u \rightarrow y' = -n u' \cos^{n-1} u \sin u$$

$$۱۶) y = \tan^n u \rightarrow y' = n u' \tan^{n-1} u (1 + \tan^2 u)$$

$$۱۷) y = \cot^n u \rightarrow y' = -n u' \cot^{n-1} u (1 + \cot^2 u)$$

توان

(n)

Sin

u

کمان

تابع

از توابع زیر مشتق بگیرید.

$$\text{الف) } y = x^5 - \frac{3x^4}{5} - 2x^2 + 7x + 9 \rightarrow y' = 5x^4 - \frac{3}{5}(4x^3) - 2(2x) + 7(1) + 0$$

$$\text{ب) } y = (3x^2 - 5x + 1)^6 \rightarrow y' = 6(3x^2 - 5x + 1)^5 (6x - 5)$$

$$\text{پ) } y = \sqrt{3x^2 - 7x + 2} \rightarrow y' = \frac{6x - 7}{2\sqrt{3x^2 - 7x + 2}}$$

$$\text{ت) } y = \sqrt[3]{3x^2 - 7x + 2} \rightarrow y' = \frac{6x - 7}{3\sqrt[3]{(3x^2 - 7x + 2)^2}}$$

$$\text{ث) } y = \sqrt[3]{(3x^2 - 7x + 2)^2} = (3x^2 - 7x + 2)^{\frac{2}{3}} \rightarrow y' = \frac{2}{3}(3x^2 - 7x + 2)^{-\frac{1}{3}} (6x - 7)$$

$$\text{ج) } y = (x^2 + 5x)\sqrt{3x - 1} \rightarrow y' = (2x + 5)\sqrt{3x - 1} + \frac{3}{2\sqrt{3x - 1}}(x^2 + 5x)$$

$$\text{چ) } y = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \rightarrow y' = \frac{2\sqrt{x^2 + 1} - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}(2x - 1)}{(\sqrt{x^2 + 1})^2}$$

$$\text{ح) } y = \frac{\sqrt{3x + 5}}{\sqrt{x - 3}} \rightarrow y' = \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x + 5}}\sqrt{x - 3} - \frac{1}{2\sqrt{x - 3}}\sqrt{3x + 5}}{(\sqrt{x - 3})^2}$$

$$\text{خ) } y = \sqrt{\frac{3x + 5}{x - 3}} \rightarrow y' = \frac{\frac{3(x - 3) - 1(3x + 5)}{(x - 3)^2}}{2\sqrt{\frac{3x + 5}{x - 3}}}$$

$$د) y = \frac{(x^2 - x + 1)^5}{2x - 7} \longrightarrow y' = \frac{5(x^2 - x + 1)^4(2x - 1)(2x - 7) - 2(x^2 - x + 1)^5}{(2x - 7)^2}$$


$$ذ) y = 2 \sin 5x \longrightarrow y' = 2 (5 \cos 5x) = 10 \cos 5x$$

$$ر) y = \tan \sqrt{\pi x + 1} \longrightarrow y' = \frac{\pi}{\sqrt{\pi x + 1}} \cdot (1 + \tan^2 \sqrt{\pi x + 1})$$

$$ز) y = \sin^3(2x - 1) \longrightarrow y' = 3(2) \sin^2(2x - 1) \cdot \cos(2x - 1)$$

$$س) y = 2 \cos^5 \sqrt{3x - 1} \longrightarrow y' = 2 \cdot 5 \frac{3}{2\sqrt{3x - 1}} \cos^4 \sqrt{3x - 1} (-\sin \sqrt{3x - 1})$$

نسبت صحیح است

نکته: بسیار مهم ☺ 

برای یافتن علامت حدی مقدار یک تابع، از آن مشتق می‌گیریم و عدد X را به آن می‌دهیم. اگر مشتق مثبت باشد علامت حدی مقدار تابع با علامت حدی X یکسان و اگر مشتق منفی باشد علامت حدی مقدار تابع با X قرینه است.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \underline{\underline{f'(a)}} \gg L^+$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \underline{\underline{f'(a)}} \ll L^-$$

۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^-} \left[-\frac{1}{x}\right]$ کدام است؟

-۱ (۱)

-۲ (۲)

-۳ (۳)

-۴ (۴)

۱۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} [x^3 - 3x]$ کدام است؟

-۱ (۱)

-۲ (۲)

-۳ (۳)

-۴ (۴)

۱۱- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x < 0 \\ -\sqrt{1+x} & x \geq 0 \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - x)$ کدام است؟

(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) موجود نیست

۱۲- مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} [2 \sin x - 1]$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

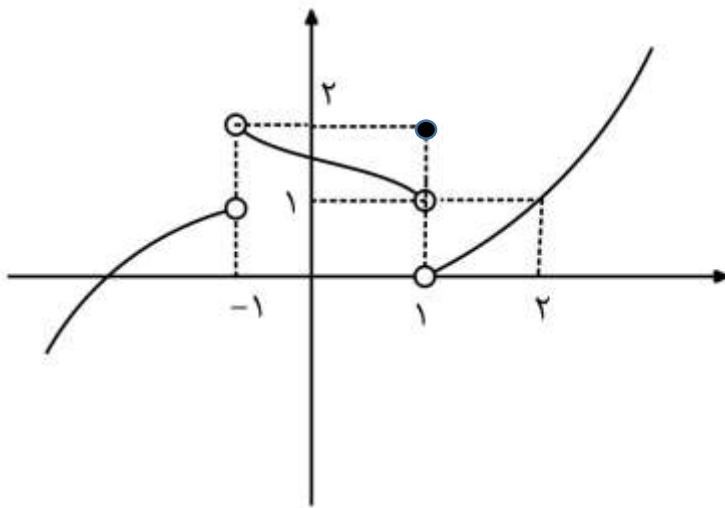
(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) وجود ندارد

مثال: نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر است. حاصل حد های خواسته شده را در صورت نیاز به کمک مشتق بیابید.



$$۱۱) \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(2 - x^2) =$$

$$۱۲) \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(2 - x^2) =$$

$$۱۳) \lim_{x \rightarrow 2^+} f\left(\frac{2}{x}\right) =$$

$$۱۴) \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f\left(-\frac{2}{x}\right) =$$

$$۱۵) \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f \circ f(x) =$$

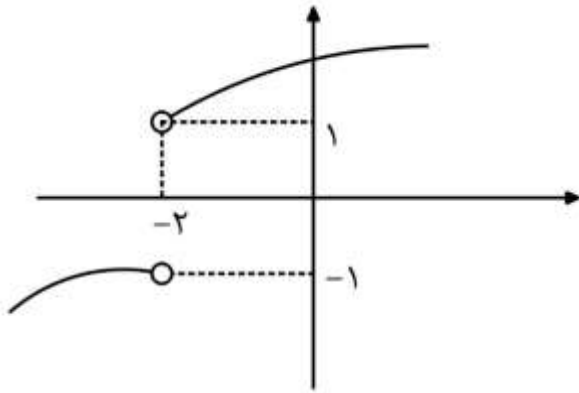
$$۱۶) \lim_{x \rightarrow 1^-} f \circ f(x) =$$

$$۱۷) \lim_{x \rightarrow (-1)^+} [f(x)] =$$

$$۱۸) \lim_{x \rightarrow 1^+} f([x]) =$$

$$۱۸) [\lim_{x \rightarrow 2} f(x)] = \text{مخصوص رشته ریاضی}$$

۱۳- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(\sqrt[3]{x+4} - x)$ کدام است؟



(۱) -۱

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) وجود ندارد

نکته : 

برای این که تابع در نقطه ای حد داشته باشد باید مقدار تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد.

برای نمونه تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در همسایگی چپ $x = 0$ تعریف نشده است پس تابع در $x = 0$ حد ندارد.

یا تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ در همسایگی راست $x = 1$ تعریف نشده است پس تابع در $x = 1$ حد ندارد.

یا تابع $f(x) = \log x$ در همسایگی چپ $x = 0$ تعریف نشده است پس تابع در $x = 0$ حد ندارد.

۱۴- تابع $f(x)$ در $x=0$ حد دارد و $\sqrt{f(x)}$ تعریف شده است ولی $\sqrt{f(x)}$ حد چپ و راست ندارد. کدام می تواند باشد؟ (سنجش ۹۹ با تغییر)

$$f(x) = x \quad (۱)$$

$$f(x) = x - x^2 \quad (۲)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (۳)$$

$$f(x) = x^4 - x^2 \quad (۴)$$

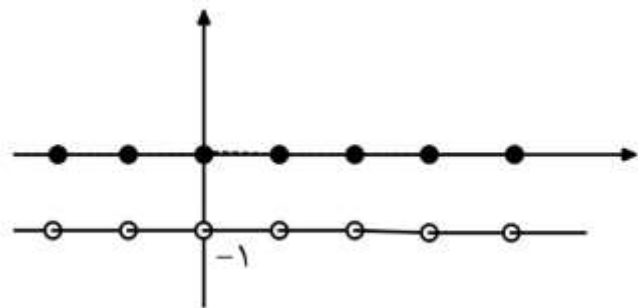
توابع Z, Z' :

این توابع در همه نقاط اعم از صحیح و غیر صحیح حد دارند و حد آنها در همه نقاط از ضابطه تابع غیر \mathbb{Z} محاسبه می شود.

مشهورترین نوع این تابع ها، تابع آبکش است که حد آن در همه نقاط -1 است.

$$f(x) = [x] + [-x]$$

$$= \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



کدام $\lim_{x \rightarrow 3/5} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ آنگاه به ترتیب $f(x) = \begin{cases} 2x & x \notin \mathbb{Z} \\ x+1 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ اگر ۱۵- است؟

(۱) ۷, ۶

(۲) ۷, ۴

(۳) حد ندارد و ۴/۵

(۴) ۶ و حد ندارد.

چهار عمل اصلی روی حد :

برای بررسی وجود یا عدم وجود مقدار حد جمع ، ضرب ، تفریق و تقسیم دو تابع به جدول زیر توجه نمائید.

	g, f در x حد دارند.	g, f در x حد ندارند.	F در x حد دارد و g در x حد ندارد.
\pm	حد دارد	نامعلوم	حد ندارد
\times	حد دارد	نامعلوم	حد ندارد مگر حد f در آن نقطه صفر باشد.
\div	با شرط صفر نبودن مخرج حد دارد	نامعلوم	حد ندارد مگر حد صورت کسر صفر شود

اگر g, f در نقطه ای حد نداشته باشند جمع و تفریق، ضرب یا تقسیم آن ها ممکن است حد داشته باشد یانه!

برای نمونه تابع های $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$ در $x = 0$ حد ندارند ولی جمع آن ها یعنی

$f + g(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ یا ضرب و تقسیم آن ها یعنی $y = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ حد دارند.

۱۶- اگر تابع f در $x = a$ حد داشته باشد، اما تابع g در $x = a$ حد نداشته باشد، دربارهٔ حد $f - g$ در $x = a$ کدام گزینه درست است؟ (گزینه دو ۱۴۰۰)

(۱) قطعاً حد دارد.

(۲) ممکن است حد داشته باشد.

(۳) قطعاً حد ندارد.

(۴) اگر حد تابع f در a برابر صفر باشد قطعاً حد دارد.

یازدهم ریاضی و دوازدهم تجربی

ابهام:

کسرهایی به صورت صفر، صفرم به چهار حالت زیر تقسیم می شود.

$$\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0$$

$$\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$$

$$\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$$

$$\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}} = \text{مبهم}$$

در حالت مبهم، معمولاً، برای حل حد از صورت و مخرج جداگانه مشتق می گیریم و به افتخار مبدع این روش، نام این قاعده را هوییتال می نامیم.

برای نمونه برای یافتن $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 3}$ که به صورت صفر، صفر است می توانیم از آن هویپتال بگیریم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 3} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 1}{3x^2 + 2} = \frac{5}{5} = 1$$

۱۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3 - \sqrt{x+4}}{\sqrt{x-1} - 2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$

(۲) $-\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{2}{2}$

(۴) $-\frac{2}{2}$

۱۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{2x} - 4}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{3}{2}$

۱۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1}$ کدام است؟ (تجربی ۹۷)

(۱) -۱۱۲

(۲) -۹۶

(۳) -۸۴

(۴) -۷۲

۲۰- حد عبارت $\frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16}$ وقتی $x \rightarrow 2$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

(۱) $-\frac{1}{3}$

(۲) $-\frac{1}{4}$

(۳) $-\frac{1}{6}$

(۴) $-\frac{1}{8}$

۲۱- تست $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

(۱) $-1/5$

(۲) $-1/2$

(۳) $-0/8$

(۴) $-0/6$

۲۲- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}{x^2-2x+1}$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{1}{6}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) ۶

(۴) ۳



در تست هایی که در ابهام صفر، صفرم مجهول هایی موجود باشد باید به ازای x های داده شده صورت یا مخرج را برابر صفر قرار دهیم.

۲۳- مقدار حد تابع $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+a}-b}{x-2} = \frac{1}{4}$ است. ab کدام است؟

(۱) ۲

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) ۳

(۴) ۴

۲۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+3x}}{(1+x)^3 - 1}$ چند برابر $\sqrt{5}$ است؟ (ماز ۱۴۰۰)

(۱) $-\frac{1}{15}$ (۲) $-\frac{4}{15}$ (۳) $-\frac{2}{15}$ (۴) $-\frac{8}{15}$

نکته: هم ارزی برنولی به صورت های زیر است. (مخصوص علاقه مندان)



$$\begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 \pm \alpha)^n = 1 \pm n\alpha \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt[n]{1 \pm \alpha} = 1 \pm \frac{\alpha}{n} \end{cases}$$

۲۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sqrt{x+1}+7}-2}{x}$ کدام است؟

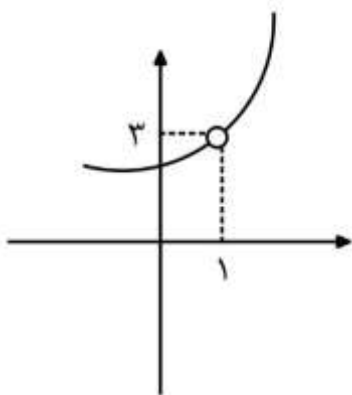
۱) $\frac{1}{4}$

۲) $\frac{1}{6}$

۳) $\frac{1}{12}$

۴) $\frac{1}{24}$

۲۶- نمودار تابع $f(x)$ در همسایگی $x=1$ به شکل زیر است. $2a+b+c$ کدام است؟



$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$$

۱) -۲

۲) ۲

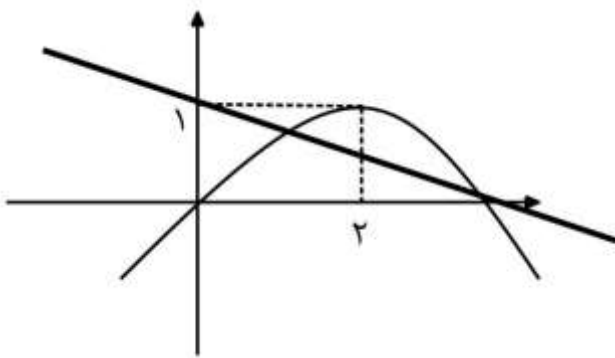
۳) -۳

۴) ۳

نکته: نمودار تابع های کسری در نقاطی به صورت صفر، صفرم معمولاً به شکل حفره در می آیند و عرض حفره حاصل ابهام را نشان می دهد.

۲۷- نمودار تابع سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) + g(x)}{4 - x}$

کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)



(۱) $-\frac{3}{2}$

(۲) $-\frac{5}{4}$

(۳) $\frac{5}{4}$

(۴) $\frac{3}{2}$

۲۸- فرض کنید $f(x) = x^2 - ax - b$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + f(x) - 2}{x^2 - 1} = 3$ باشد، اگر $f(1) \neq -2$

آن گاه $f(2)$ کدام است؟ (برای علاقه مندان)

(۱) -3

(۲) 4

(۳) 3

(۴) -4

۲۹- فرض کنید $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - \sqrt{x}}$ باشد در این صورت حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} f(5-x)$ برابر

کدام است؟

۸ (۱)

۴ (۲)

۲ (۳)

۱ (۴)

۳۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$ کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۱)

صفر (۲)

$-\sqrt{2}$ (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

۳۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\cos 2x}$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $-\frac{1}{2}$

(۴) ۲

۳۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{6}$

(۲) $-\frac{1}{6}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $-\frac{2}{3}$

۳۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan 2x}{\sin^2 x - \sin x}$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) -۲

(۳) ۱

(۴) -۱

قدر مطلق و براکت:

برای حل حدهای شامل براکت و قدر مطلق، باید براکت و قدر مطلق را به ترتیب با عدد گذاری و علامت گذاری از بین ببریم.

اگر تعیین وضعیت علامت حدی عبارت های داخل قدر مطلق یا براکت با عدد گذاری ممکن نباشد از مشتق که در گذشته به آن اشاره کردم، کمک می گیریم.

۳۴- حد عبارت $\frac{x^4 + 4x - 8}{x^2 + 2 \left[\frac{1}{2}x \right]}$ وقتی $x \rightarrow (-2)^-$ چقدر است؟ (سنجش ۱۴۰۰)

(۱) صفر

(۲) ۷

(۳) ۹

(۴) وجود ندارد

۳۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x^2 - x - 6|}{x + \sqrt{2 - x}}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{20}{3}$ (۲) $\frac{20}{3}$ (۳) $\frac{40}{3}$ (۴) $-\frac{40}{3}$


۳۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

(۱) $-\frac{1}{6}$

(۲) $-\frac{1}{12}$

(۳) $\frac{1}{12}$

(۴) $\frac{1}{6}$

 **نکته:** اگر عبارت زیر رادیکال صفر شود برای حل تست از روش های تشریحی مانند گویا کردن یا ضرب در مزدوج استفاده می کنیم.

۳۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x] + 3}{x + 2}$ کدام است؟ (تجربی ۹۹)

(۱) $-\infty$

(۲) -1

(۳) صفر

(۴) ۱

۳۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{1 - \sqrt{\sin x}}{|\cos x|}$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) $-\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۳۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\sqrt{1 - \sin^2 2x}}$ کدام است؟

(۱) -۲

(۲) ۲

(۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۴۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x - \sin 3x}{\sqrt{2+2\cos x}}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۷)

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) ۲

پاز دهم

پیوستگی در نقطه:

تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است اگر:

(الف) مقدار تابع در $x = a$ موجود باشد.

(ب) حد تابع در $x = a$ موجود باشد.

(پ) مقدار حد و تابع در $x = a$ برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$


پیوستگی چپ

پیوستگی راست

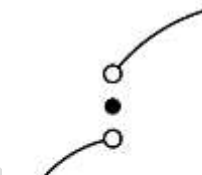
انواع نقاط ناپیوسته:



تابع در $x=a$ حد دارد
ولی به دلیل موجود
نبودن تابع پیوسته نیست



تابع در $x=a$ حد دارد
ولی مقدار تابع با حد آن
برابر نیست و تابع ناپیوسته است.



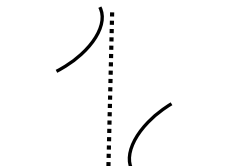
تابع حد ندارد
و ناپیوسته است



تابع حد ندارد
و ناپیوسته است
ولی پیوستگی چپ دارد.



تابع حد ندارد و
ناپیوسته است ولی
پیوستگی راست دارد.



تابع در $x=a$ موجود
نیست و حد نیز ندارد و
ناپیوسته است



تابع در $x=a$
حد چپ ندارد
و ناپیوسته است



تابع در $x=a$
حد راست ندارد
و ناپیوسته است

نکته: 

تابع ها در سرو ته بازه های بسته ناپیوسته اند. برای نمونه تابع $f(x) = \sqrt{x}$ که دامنه آن $[0, +\infty)$ است در نقطه $x = 0$ ناپیوسته است. یا تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ که دامنه آن بازه $[-1, 1]$ است در نقاط $x = 1$ و $x = -1$ ناپیوسته است.

۴۱- پیوستگی تابع $f(x) = \left[-\frac{x}{2}\right]$ در $x = 4$ چگونه است؟

(۱) فقط از راست پیوسته

(۲) فقط از چپ پیوسته

(۳) پیوسته

(۴) از هیچ طرفی پیوسته نیست

۴۲- اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} - x & x \geq -2 - \{0, 2\} \\ x^2 - 2x & x = \{0, 2\} \\ ax + 3 & \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته باشد، a کدام است؟

(۱) $-\frac{27}{16}$

(۲) $\frac{27}{16}$

(۳) $-\frac{3}{8}$

(۴) $\frac{3}{8}$

۴۳- به ازاء کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + [-x^2]}{x|x-1|} & x < 1 \\ ax + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته است؟ (سنجش ۹۹)

(۱) -۳

(۲) -۲

(۳) -۱

(۴) ۱

۴۴- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{x-3} & x > 3 \\ ax - 3a - \frac{3}{8} & x \leq 3 \end{cases}$ در نقطه $x = 3$ پیوسته

است؟ (ریاضی خارج ۹۴)

(۱) -۲

(۲) ۲

(۳) هیچ مقدار a (۴) هر مقدار a

۴۵- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin^2 x - \sin x - 1 & x \neq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\cos^2 x}{a} & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته

است؟ (تجربی خارج ۹۹)

- (۱) $1/5$
 (۲) 1
 (۳) -1
 (۴) $-1/5$

۴۶- اگر تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x - a}{\cos 2x} & x \neq \frac{\pi}{4} \\ \sin 2x + b & x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

در $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته باشد، $a + b$ کدام است؟

(قلم چی ۱۴۰۰)

- (۱) صفر
 (۲) -1
 (۳) -2
 (۴) 1

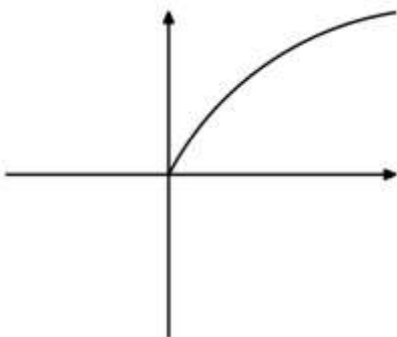
پیوستگی روی بازه:

توابع چند جمله ای، گویا، رادیکالی، مثلثاتی، لگاریتمی، نمایی و قدر مطلق روی دامنه شان پیوسته اند. برای نمونه تابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ روی $\mathbb{R} - \{1\}$ و تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ روی بازه $[1, +\infty)$ و تابع $f(x) = \log(x-1)$ روی بازه $(1, +\infty)$ پیوسته هستند.

همچنین توابعی مانند $f(x) = 2^x$ و $f(x) = \sqrt[3]{x}$ و $f(x) = x^5 - 7x^2 + 1$ روی \mathbb{R} پیوسته اند.

نکته: 

نقاط سر و ته بازه بسته، جزء نقاط ناپیوستگی محسوب می شوند. برای نمونه تابع $f(x) = \sqrt{x}$ روی بازه $[0, +\infty)$ پیوسته است ولی در $x = 0$ (به دلیل نداشتن حد چپ) ناپیوسته است.



۴۷- تعداد نقاط ناپیوستگی $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{x^2 - 2x - 8}$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

نکته: برای پیوسته بودن تابع های چند ضابطه ای روی یک بازه معمولاً پیوستگی تابع را در نقطه های مرزی بررسی می کنیم. یعنی پیوستگی را فقط در نقطه هایی که شرط تغییر می کند محاسبه می کنیم.

۴۸- به ازاء کدام مقدار m تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 8}{x - \sqrt{3x - 2}} & x > 2 \\ mx + 24 & x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد

حقیقی پیوسته است؟ (سنجش ۱۴۰۰)

۶ (۱)

۸ (۲)

۱۰ (۳)

۱۲ (۴)

۴۹- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & |x-1| \geq 1 \end{cases}$ یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

$$-\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\frac{5}{4} \quad (4)$$

پیوستگی تابع های براکتی:

توابع براکتی در نقاطی که عبارت داخل براکت را عضو \mathbb{Z} می کنند ناپیوسته است (و در سایر نقاط پیوسته است) برای نمونه

تابع $f(x) = [4x]$ در $x = \frac{1}{4}$ ناپیوسته است. چون $x = \frac{1}{4}$ عبارت داخل براکت را عددی عضو \mathbb{Z} می کند. مگر:

الف: در تابع براکتی، عامل صفر کننده ضرب شده باشد. مانند تابع $f(x) = (2x-1)[4x]$ در $x = \frac{1}{2}$ که در آن پیوسته است.

ب: عامل رُند کننده (عضو \mathbb{Z} کننده) عبارت داخل براکت در آن نقطه مینیمم باشد. مانند تابع های $f(x) = [\sin x]$

در $x = \frac{3\pi}{4}$ و تابع $g(x) = [x^2]$ در $x = 0$ که پیوسته هستند. (مخصوص علاقه مندان)

۵۰- تابع $f(x) = [5x]$ روی بازه $[-2, 2]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟ (سنگش ۹۹)

۱۸ (۱)

۱۹ (۲)

۲۰ (۳)

۲۱ (۴)

۵۱- تابع $f(x) = [\sqrt{x}]$ روی بازه $[1, 50]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۴ (۱)

۸ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

۵۲- تابع با ضابطه $f(x) = [x^2 - 3]$ روی بازه $(2, 2+k)$ پیوسته است. بیش ترین مقدار k کدام است؟

(۱) $\sqrt{2} - 1$

(۲) $\sqrt{5} - 2$

(۳) $\sqrt{3} - 1$

(۴) $\sqrt{2}$

۵۳- تابع $y = \left[\frac{3}{x} - 1 \right]$ در بازه $\left(\frac{1}{3}, 2 \right)$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۷

۵۴- اگر $f(x) = x|x-1|$ باشد آنگاه:

(۱) $f(x)$ در $x=1$ پیوسته، اما در $x=0$ ناپیوسته است.

(۲) $f(x)$ در $x=0$ پیوسته، اما در $x=1$ ناپیوسته است.

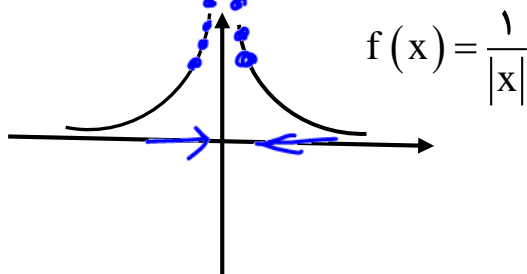
(۳) $f(x)$ در $x=\{0,1\}$ پیوسته است.

(۴) $f(x)$ در $x=\{0,1\}$ ناپیوسته است.

دوازدهم ریاضی و تجربی

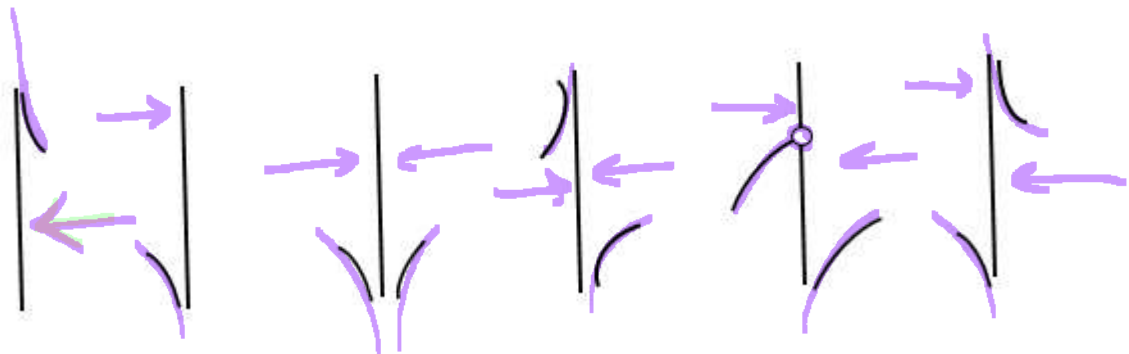
حد نامتناهی:

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ، به این معنی است که می توان مقادیرهای $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.



$$\frac{\text{عدد غیر صفر}}{\text{حدی}} = \infty$$

برخی از نمودارهای توابع در نقاط دارای حد نامتناهی :



نکته ۱: هر گاه مخرج کسر به صفر حدی (نه مطلق) میل کند به شرطی که صورت کسر نیز به صفر میل نکند

حاصل کسر به بی نهایت میل می کند.

$$\frac{\text{عدد غیر صفر}}{\text{حدی}} = \infty$$

برای نمونه $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x-5}$ وقتی x به 5 میل می کند به بی نهایت میل خواهد کرد.

نکته ۲: نسبت یک عدد به صفر مطلق تعریف نشده است و بی نهایت نیست.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{[x]} = \frac{2}{0^+} = \text{تعریف نشده مطلق}$$

نکته ۳: صفر تنها عددی است که علامت حدی آن با علامت جبری اش یکسان است. برای تشخیص این علائم به

علامت حدی \ominus علامت جبری \oplus

مثال زیر توجه کنید:

$$\begin{cases} \ominus^+ = \text{عدد مثبت} \\ \ominus^- = \text{عدد مثبت} \end{cases} \quad \begin{cases} \oplus^+ = \text{عدد مثبت} \\ \oplus^- = \text{عدد منفی} \end{cases}$$

نکته ۴: علامت بی نهایت حاصل حد، از تقسیم علامت جبری صورت به علامت حدی صفر است.

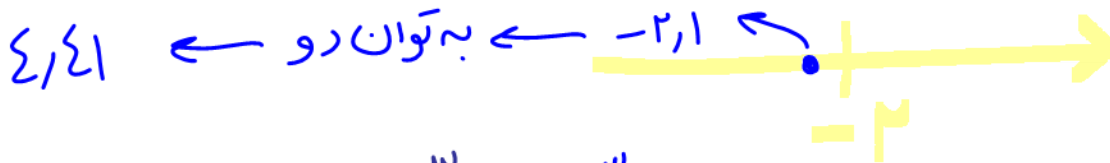
$$\frac{\text{عدد مثبت}}{+} = +\infty \quad \frac{\text{عدد مثبت}}{-} = -\infty \quad \frac{\text{عدد منفی}}{-} = +\infty \quad \frac{\text{عدد منفی}}{+} = -\infty$$

حاصل حد های زیر را بیابید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{x-3} = \frac{3^++1}{3^+-3} = \frac{\Sigma}{0^+} = +\infty \quad 2) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{x-3} = \frac{3^-+1}{3^- - 3} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{[x]-3} = \frac{4}{[3^+]-3} = \frac{4}{\text{مطلق } 3^- - 3} = \frac{\Sigma}{0^+} = \text{تب}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{[x]-3} = \frac{4}{[3^-]-3} = \frac{4}{3^- - 3} = \frac{4}{-1} = -4$$



$$5) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{3}{4^+-2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{-1}{4^+-2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{(x-3)^2} = \frac{4}{(0^+)^2} = +\infty$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{(x-3)^2} = \frac{4}{(0^+)^2} = +\infty$$

بعد از 3 بالای بالانیم.

قبل از 3 بالای بالانیم.

نکته: وقتی X به ریشه مضاعف مخرج میل می کند بی نهایت ، تغییر علامت نمی دهد. (مانند دو حد بالا)

$$9) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x^2-x} = \frac{2}{1^+-1^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x^2-x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

مشتق مخرج مثبت است. $\frac{x=1}{2(1)-1} = 1$ مشتق مخرج = $2x-1$

مشتق مخرج مثبت است. $\frac{x=1}{2-1} = 1$

نکته: برای یافتن علامت حدی صفر مخرج کافی است در نقطه داده شده از مخرج مشتق بگیریم (مانند آنچه در

حد یازدهم گفتم) اگر مشتق مثبت شد علامت حدی مخرج همان علامت حدی X و اگر مشتق منفی شد علامت حدی

مخرج قرینه علامت حدی X است.

$$۱۳) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{\sqrt[3]{2x+4} - \sqrt{2x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{8} - \sqrt{4}} = \frac{2}{2-2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{(2x+4)^3}} - \frac{2}{2\sqrt{2x}} \stackrel{x=2}{=} \frac{2}{12} - \frac{2}{4} < 0. \quad \text{مشتق منفی است.}$$

$$۱۴) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x+1}{x^3 - 2x + 1} = \frac{-2+1}{1-2+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\frac{2x^2 - 2}{x^3 - 2x + 1} \stackrel{x=1}{=} \frac{2-2}{1-2+1} = 0 \quad \text{مشتق مثبت است}$$

$$۱۵) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-3}{\left(\frac{2}{x} - 3x + 1\right)} = \frac{1-3}{2-3+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$


$$\frac{0x - 1(2)}{x^2} - 3 + 0 = \frac{-2}{x^2} - 3 \stackrel{x=1}{=} -2 - 3 \quad \text{مشتق منفی است.}$$

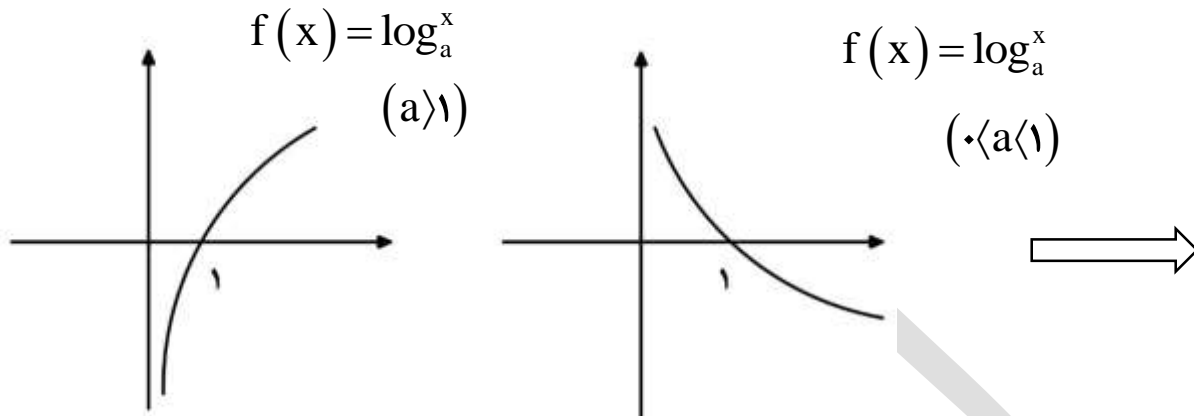
نکته: در مخرج کسرهایی که به صورت مجموع X آزاد و X قدر مطلق باشد ممکن است حد یک طرف

تعریف نشده شود. گاهی ممکن است این اتفاق برای مجموع یا تفاضل دو قدر مطلق نیز رخ دهد.

$$۱۷) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + |x|} =$$

$$۱۸) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x + |x|} =$$

نکته: حد توابع لگاریتمی وقتی x به سمت ریشه آرگومان آن ها برود به ∞ میل می کند. (برای علاقه مندان) 



$$\xrightarrow{a > 1} \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a^x = -\infty$$

$$\xrightarrow{0 < a < 1} \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a^x = +\infty$$

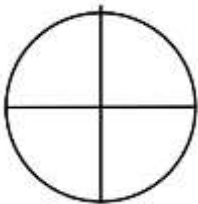
$$۲۱) \lim_{x \rightarrow 1^-} \log(1 - x^2) =$$

$$۲۲) \lim_{x \rightarrow 1^+} \log(1 - x^2) =$$

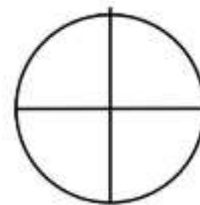
حد نامتناهی و مثلثات:

برای یافتن نقطه‌ حدی روی دایره مثلثاتی، پس از تعیین نقطه‌ مطلق بر روی دایره مثلثاتی همواره از جهت مثبت مثلثاتی به آن نقطه نزدیک می‌شویم قبل از رسیدن به آن نقطه علامت حدی منفی و بعد از آن علامت حدی مثبت است.

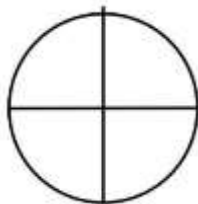
$$x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}$$



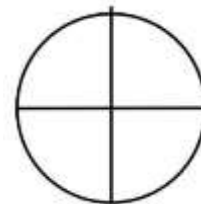
$$x \rightarrow \pi^+$$



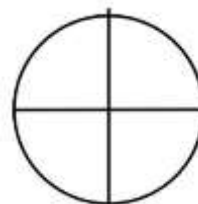
$$x \rightarrow \frac{3\pi^-}{2}$$



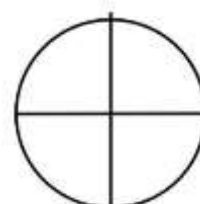
$$x \rightarrow -\pi^-$$



$$x \rightarrow -\frac{\pi^+}{2}$$



$$x \rightarrow -\frac{3\pi^-}{4}$$



$$۲۳) \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1+x}{\sin x} =$$

$$۲۴) \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1+x}{\sin x} =$$

$$۲۵) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1+x}{\cos x} =$$


$$۲۶) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{1+x}{\cos x} =$$

$$۲۷) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x =$$

$$۲۸) \lim_{x \rightarrow -\pi^-} \cot x =$$

$$۲۹) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{1-\sin x} =$$

$$۳۰) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{x}{1-\sin x} =$$

نکته: عبارت های $1 \pm \sin$ و $1 \pm \cos$ همواره نامنفی هستند. 

$$۳۱) \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} \frac{x}{1 + \cos \frac{x}{2}} =$$

$$۳۲) \lim_{x \rightarrow 2\pi^+} \frac{x}{1 + \cos \frac{x}{2}} =$$

نکته: در توابع مثلثاتی نیز می توان با استفاده از مشتق مخرج، علامت حدی صفر را تعیین کرد. اگر علامت مشتق مثبت باشد علامت صفر، همان علامت حدی X و در غیر این صورت علامت صفر قرینه علامت ایکس است.

$$۳۳) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{x}{\tan x - 1} =$$

$$۳۴) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} \frac{2x - 1}{\cot x - \sqrt{3}} =$$

$$۳۵) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - 3x}{\tan x - \cot x} =$$

$$۳۶) \lim_{x \rightarrow -\frac{3\pi}{4}^-} \frac{x + 1}{\sin x - \cos x} =$$

تست



۵۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] - 3}{|2x - 1|}$ کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

(۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$

(۳) صفر

(۴) ۱

۵۶- اگر $f(x+1) = \frac{x}{x^2 - 1}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +} f(x)$ کدام است؟

(۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$

(۳) -۱

(۴) ۱

۵۷- تابع f پیوسته و اکیداً نزولی بوده و $f(3) = 2$ است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 6}{f(x) - 2}$ کدام است؟

(گزینه دو ۱۴۰۰)

(۱) $-\infty$

(۲) ۲

(۳) $+\infty$

(۴) صفر

۵۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{2x^2 + ax + b} = +\infty$ است. مجموع $a + b$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) -۳

(۳) ۶

(۴) -۶

۵۹- حاصل حد راست و چپ تابع $f(x) = \frac{x-1}{x[x]}$ در $x=0$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

(۱) وجود ندارد، $-\infty$

(۲) وجود ندارد، $+\infty$

(۳) $+\infty$ و وجود ندارد

(۴) $-\infty$ و وجود ندارد

۶۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{[x] + [-x]}$ کدام است؟

(۱) $+\infty$

(۲) $-\infty$

(۳) ۲

(۴) وجود ندارد

۶۱- حد عبارت $\frac{2x+1}{x^2-x^3}$ وقتی $x \rightarrow 2^+$ کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۰)

(۱) $+\infty$

(۲) $-\infty$

(۳) ۲

(۴) -۲

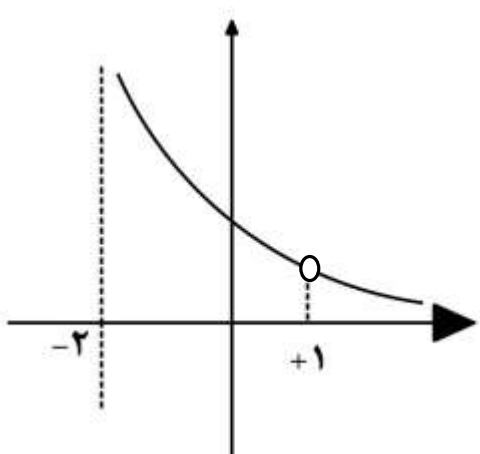
۶۲- قسمتی از نمودار $y = \frac{2x+a}{x^2+bx+c}$ به شکل زیر است. حاصل $a+b$ کدام است؟

(۱) -۵

(۲) -۱

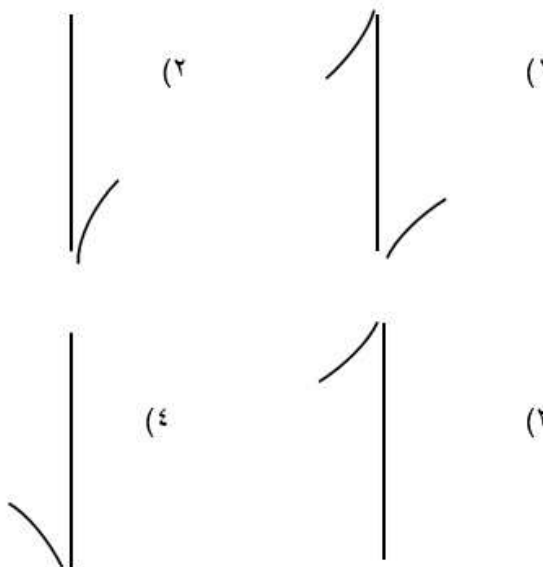
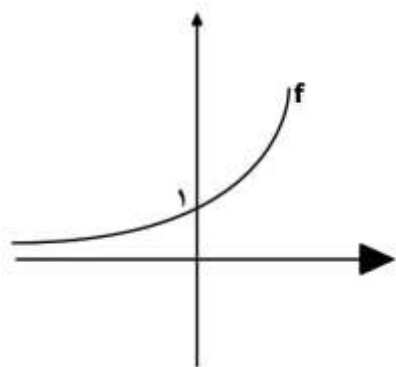
(۳) -۲

(۴) -۴

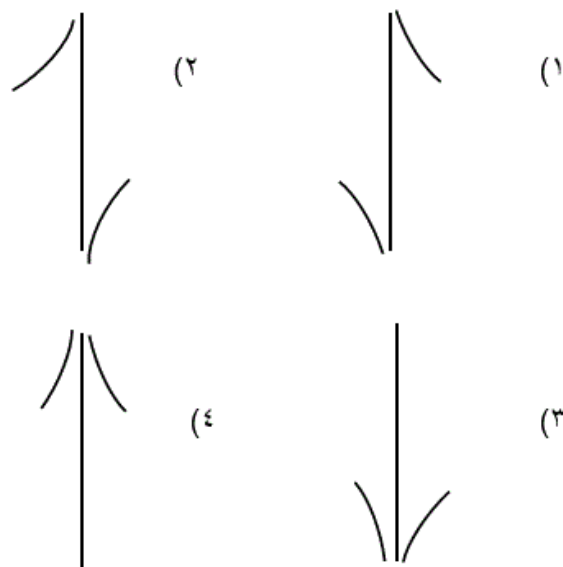


۶۳- اگر نمودار f در همسایگی $x = 0$ به صورت زیر باشد آن گاه نمودار $y = \frac{1}{\sqrt{1-f}}$ در همسایگی

$x = 0$ کدام مورد می تواند باشد؟

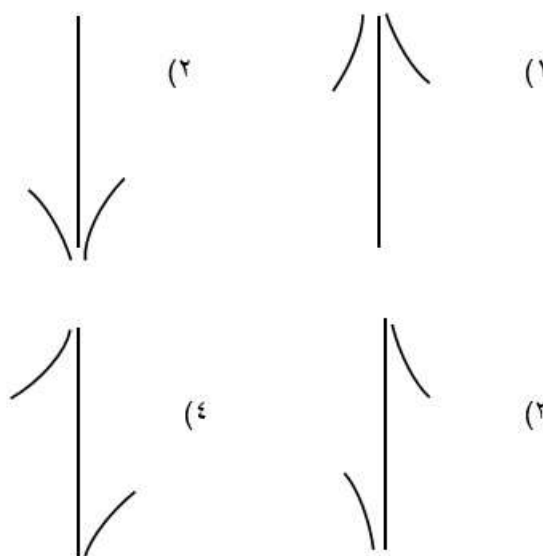
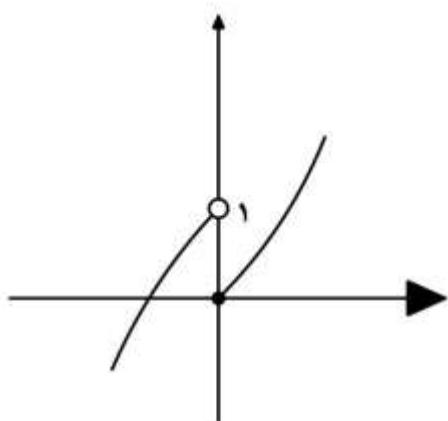


۶۴- نمودار تابع $f(x) = \frac{[x-2] + \frac{1}{2}}{4-x^2}$ در همسایگی $x = 2$ کدام است؟ (سنجش ۹۹)



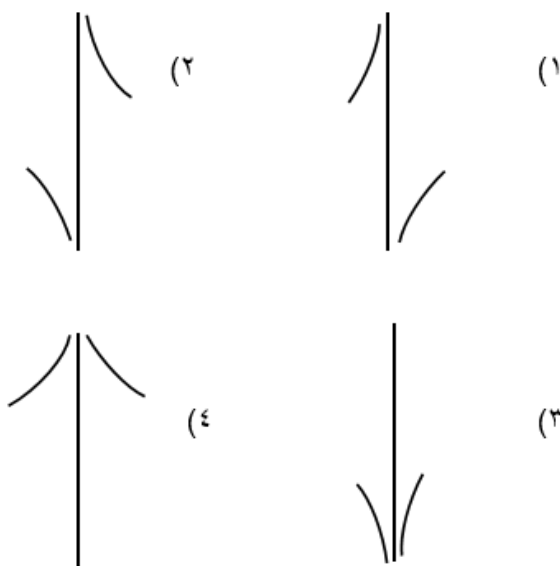
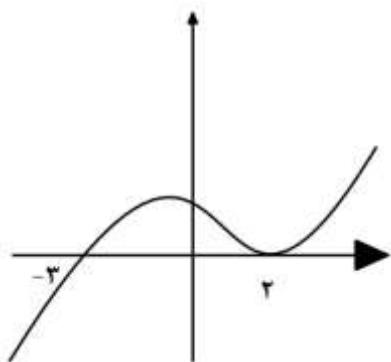
۶۵- نمودار تابع f به صورت رو به رو است. نمودار تابع $y = \frac{1}{[x] + f(x)}$ در مجاورت $x = 0$ چگونه

است؟ (گزینه دو ۱۴۰۰)



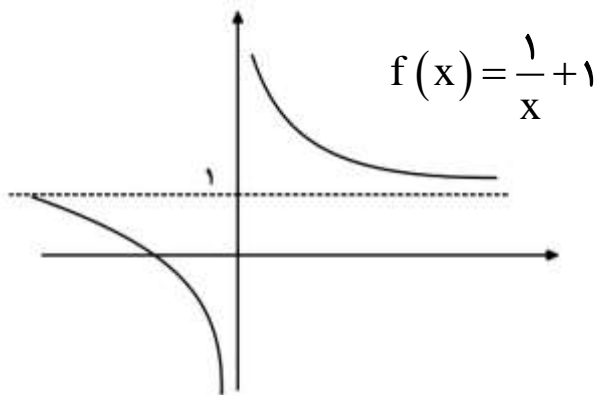
۶۶- نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر است. نمودار تابع $y = \frac{1}{f(x)}$ در همسایگی محذوف $x = 2$

به کدام شکل است؟



حد در بی نهایت :

اگر تابع در بازه ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، رابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ به معنی این است که $f(x)$ را به مقدار دلخواه می توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آن که x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.



نکته ۱:



$$\frac{\text{عدد}}{\pm\infty} = 0$$

نسبت عدد به بی نهایت برابر صفر است و نسبت

$$\frac{\pm\infty}{\text{عدد}} = \pm\infty$$

بی نهایت به عدد، بی نهایت است.

نکته ۲:



هر گاه حد تابع در بی نهایت را از ما بخواهند کافی است به کمک هم ارزی حذف آشغال ها، فقط جمله های دارای بزرگ ترین توان را نگه داریم و بقیه را حذف کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \dots$$

قانون حذف آشغال ها: ☺



در ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ جبری حالت های زیر رخ می دهد:

الف) اگر درجه صورت بزرگ تر از مخرج باشد، جواب حد بی نهایت است.

ب) اگر درجه صورت و مخرج برابر باشند، جواب حد عددی غیر صفر است.

ج) اگر درجه صورت کوچک تر از مخرج باشد، جواب حد صفر است.

$$۱) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 5x - 1}{100x^2 - x + 1} =$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 1}{7x^2 - x + 6} =$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 1}{2x^4 - x + 3} =$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{4x^2 - x + 1} =$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{3x + 5} =$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 3x}}{x - \sqrt{1 - x}} =$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x - 1)(3x^2 + 5)^2}{x^5 - 100x + 2} =$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{۲x - \sin x}{۴x + \cos x} =$$


$$۹) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{۲x - [x]}{۵x + ۱} =$$

نکته ۴: 

در این ابهام اگر عبارت داخل براکت بی نهایت شود، می توانیم از نماد براکت صرف نظر کنیم.

$$۱۰) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{۲x + [\sqrt{-x}]}{x - \sqrt{x^2 - x}} =$$

$$۱۱) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{۳x + ۱}{x + ۲} \right] =$$

نکته ۵:  در این گونه تست ها برای تعیین علامت حدی نسبت داخل براکت عددی به نمایندگی از $+\infty$ یا $-\infty$

به عبارت داخل براکت می دهیم اگر حاصل بزرگ تر از نسبت پرتوان شد به آن علامت حدی مثبت و اگر کمتر شد

علامت حدی منفی می دهیم.

$$۱۲) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-۵x + ۱}{x + ۲} \right] =$$

$$۱۳) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - 1 \cdot x + 1}{x^2 - 3} \right] =$$

$$۱۴) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x + 5} \right] =$$

$$۱۵) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x + 5} \right] =$$

$$۱۶) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin x}{x} \right] =$$

$$۱۷) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^x}{2^x - 3^x} =$$

$$۱۸) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 3^x}{2^x - 3^x} =$$

نکته: در ابهام های $\frac{\infty}{\infty}$ نمایی در $+\infty$ پایه بزرگ تر و در $-\infty$ پایه کوچک تر را به عنوان پرتوانهای صورت و

مخرج انتخاب می کنیم.

$$19) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x + 2^x}{2^{2x-1} - 3(3^x)} =$$

تست



۶۷- اگر حاصل عبارت $\frac{(a-1)x^5 + 3x^4 + 4}{(2+a)x^2 + 5x^2 - 1}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر $-\infty$ باشد، محدوده a کدام

است؟ ($a \neq 1$)

۱) $a > 1$

۲) $a < 1$

۳) $-2 < a < 1$

۴) $a > 1$ یا $a < -2$

۶۸- اگر n عدد طبیعی باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x^3 + 7x^n}{2x^n + 5x - 7}$ کدام مورد نمی تواند باشد؟
(سنجش ۹۹)

(۱) $-\infty/5$

(۲) ۳

(۳) $3/5$

(۴) $-\infty$

۶۹- اگر $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + x}$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) ۳

۷۰- تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax - \sqrt{x^2 - 1}}{4x^n - 12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{6}$ باشد، آن گاه

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۹)

(۱) $\frac{1}{24}$

(۲) $\frac{1}{18}$

(۳) $\frac{1}{12}$

(۴) $\frac{5}{36}$

۷۱- تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{(x-3)(x^2+1)} - x}{3x+5}$ را در نظر بگیرید. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

کدام است؟ (تجربی ۹۹)

(۱) صفر

(۲) -1

(۳) $-\infty$

(۴) $+\infty$

۷۲- مقدار $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} - x^2}{x}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

(۱) $\frac{3}{2}$

(۲) ۱

(۳) صفر

(۴) -۱

۷۳- مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}} \right)$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۴) $\sqrt{2}$

۷۴- فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

(۱) ۱

(۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$

(۴) -۱

۷۵- اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 \left[\frac{1}{x} \right] + 6x^2 - 1}{4x^2 - (1+n)x^m + 5} = \frac{3}{2}$ باشد، حاصل mn کدام است؟

(۱) هر مقداری

(۲) ۱

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) -۱

۷۶- اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(m-1)x^{b+1} - x - 1}{2x^2 - x + 1} = 4$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{m+b-11}{x^2 + 8x - m}$ کدام است؟

(علوی ۹۹)

(۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$

(۳) ۱

(۴) -۱

۷۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-1}{2x+3} \right)^x$ برابر کدام است؟ (مدارس برتر ۹۹)

(۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) $\frac{2}{3}$

(۴) صفر

۷۸- حاصل حد تابع $f(x) = \frac{1}{3^{\tan x} - 1}$ هنگامی که $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

- ۱ (۱)
- $+\infty$ (۲)
- ۱ (۳)
- صفر (۴)

۷۹- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x - 2}{x - 2} - ax = b$ عدد حقیقی b کدام است؟ (مدارس برتر ۹۹)

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۸۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x|x| + x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 4x + x}}$ کدام است؟ (سنجش ۹۹)

(۱) $-\frac{1}{2}$

(۲) صفر

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) ∞

۸۱- اگر نمودار زیر متعلق به تابع $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + ax + b}{x^3 + x}$ باشد، $a - b$ کدام است؟

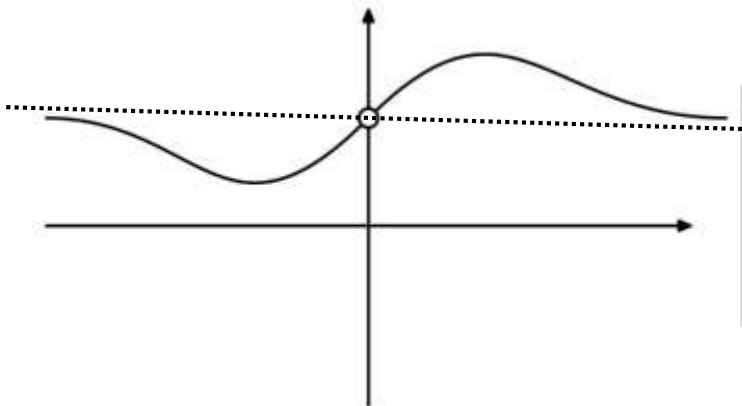
(قلم چی ۱۴۰۰)

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) -۱



نکته: اگر عبارت های پر توان در صورت یا مخرج به صورت جمع یا تفریق حذف شوند ممکن است آن

جمله ها پر توان واقعی کسر نباشند. باید به کمک اتحاد ها عبارت را ساده نمود و پر توان واقعی را یافت.

۸۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x}}$ کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۰)

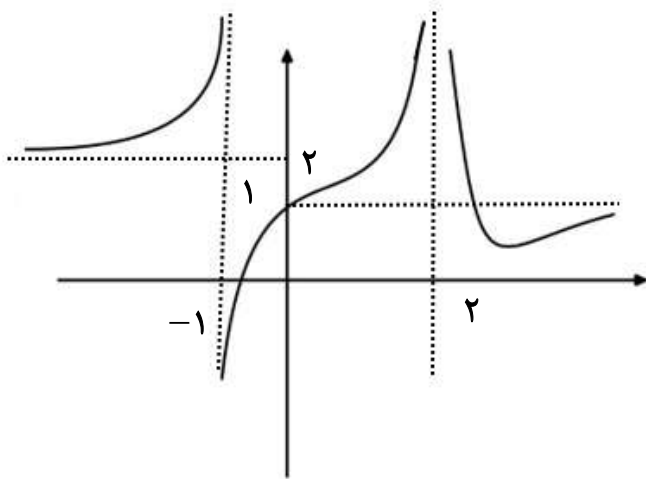
(۱) صفر

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) ۲

۸۳- نمودار تابع f به شکل زیر است. چند تا از حدهای زیر درست محاسبه شده است؟ (علوی ۹۹)



(الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f([f(x)]) = 0$

(ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = 2$

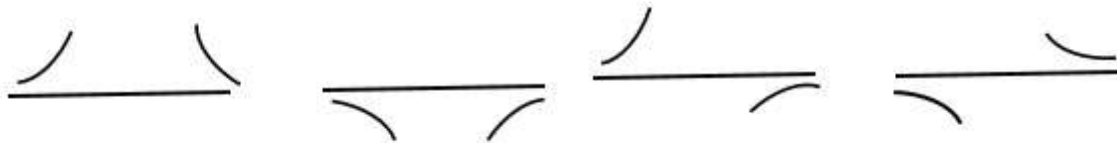
(پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(f(x)) = 2$

(۱) صفر

(۲) ۱

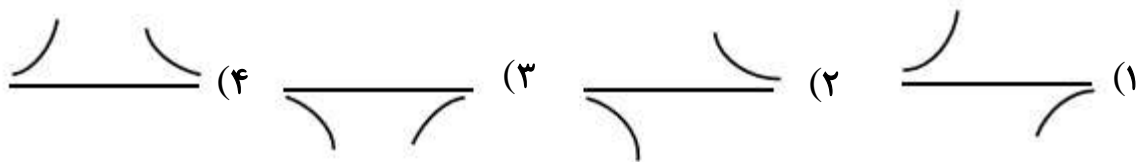
(۳) ۲

نکته: اگر حد تابع در بی نهایت به یک عدد میل کرده باشد نمودار آن به یکی از شکل های زیر است.



برای فهمیدن این که نمودار بالاتر یا پایین تر از حاصل حد (پرتوان به پرتوان) است. عددی به نمایندگی از $+\infty$ و $-\infty$ به جای x می گذاریم اگر حاصل بیش از پرتوان به یه توان شد نمودار بالای خط و اگر کمتر شد نمودار زیر خط قرار می گیرد.

۸۴- نمودار تابع $y = \frac{2x^2 - x - 2}{x^2 + 2x}$ در بی نهایت کدام وضع را دارد؟ (ریاضی خارج ۹۸ با تغییر)



نکته: (مخصوص علاقه مندان) 

توابع متناوب در بی نهایت حد ندارند. برای نمونه:

$$۱) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$$


$$۳) \lim_{x \rightarrow \infty} \tan x$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow \infty} \cot x$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow \infty} [x] + [-x]$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow \infty} x - [x]$$

هیچ کدام دارای حد نیستند.

نکته: نسبت اعداد نامعلوم ولی محدود (کران دار) به روی بی نهایت صفر است. 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{2x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - [x]}{x^2 + x + 3} = 0$$

نکته: حد برکت توابع بالا ممکن است موجود باشد یا موجود نباشد. 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin x}{2x+1} \right] = \text{حد ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x - [x]}{x^2 + x + 3} \right] = 0$$

یازدهم ریاضی (مخصوص رشته ریاضی)

هم ارزی های مثلثاتی برای کمان های صفر:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sin^k \alpha = \alpha^k$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \tan^k \alpha = \alpha^k$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos^k \alpha = 1 - \frac{k\alpha^2}{2}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \tan \alpha - \sin \alpha = \frac{\alpha^3}{6}$$

۸۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\frac{1}{8} \quad (4)$$

۸۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

(۱) $-\frac{3}{2}$

(۲) $-\frac{3}{4}$

(۳) $-\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{3}{2}$

۸۷- حد عبارت $\left[\frac{\sin x}{x} \right] + 2 \left[\frac{x}{\sin x} \right]$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) حد ندارد

۸۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos x)}{1 - \cos 2x}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

(۱) $\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) ۲

۸۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ کدام است؟

(۱) -۲

(۲) $-\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) ۲

۹۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \left([2x] + [-2x] \right) \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1+x^2}}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

(۱) -۳

(۲) ۳

(۳) صفر

(۴) حد ندارد

۹۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\left(\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt{\sin x} \right)^2}$ کدام است؟ (برای علاقه مندان)

(۱) ۱۲

(۲) $12\sqrt{2}$

(۳) ۱۴۴

(۴) $144\sqrt{2}$

۹۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos x + \cos a \sin x - \sin a}{x}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۸)

(۱) $-\sin a$

(۲) $-\cos a$

(۳) $\cos a$

(۴) $\sin a$

دوازدهم ریاضی (مخصوص رشته ریاضی)

مجانِب قائم:

خط $x = a$ مجانب قائم تابع است. هر گاه حد تابع در آن نقطه یا یکی از حدود یک طرفه تابع در آن نقطه ∞ شود. نمودار تابع در همسایگی مجانب قائم به شکل های زیر است.

نکته: 

معمولاً ریشه های مخرج و آرگومان لگاریتم ها مجانب قائم هستند. برای نمونه $x = 0$ و $x = 1$ مجانب قائم $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ و $x = 2$ مجانب قائم $g(x) = \log(x - 2)$ است. چون در این نقاط حد تابع دست کم از یک طرف به ∞ میل می کند.

۹۳- حدود a کدام باشد که تابع $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + ax + 2}$ دو مجانب قائم داشته باشد؟

(۱) $-2 < a < 2$

(۲) $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

(۳) $a < -2\sqrt{2}$ یا $a > 2\sqrt{2}$

(۴) $a < -2$ یا $a > 2$

نکته:



اگر تابع در همسایگی یک نقطه تعریف نشده باشد در آن نقطه نمی تواند مجانب قائم داشته باشد.

۹۴- تابع $f(x) = \frac{3-x}{2+x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ چند مجانب قائم دارد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۹۵- تابع های $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+4}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4}}$ به ترتیب از راست به چپ چند مجانب قائم دارد؟

(۱) یک ، صفر

(۲) صفر ، یک

(۳) یک ، یک

(۴) صفر ، صفر

۹۶- تابع $f(x) = \frac{x+1}{2 \sin 3x - 1}$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند مجانب قائم دارد؟

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۷

۹۷- تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x}}$ چند مجانب قائم دارد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۹۸- تابع $f(x) = \frac{1}{[x]}$ چند مجانب قائم دارد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) بی شمار

۹۹- تابع $f(x) = \frac{\left[\frac{x}{4} \right]}{x^2 - 4x}$ چند مجانب قائم دارد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

نکته:



اگر ریشهٔ مخرج، صورت کسر را نیز صفر کند. آن را رفع ابهام می‌کنیم اگر بعد از رفع ابهام حاصل بی نهایت شود آن نقطه مجانب قائم است در غیر این صورت آن نقطه مجانب قائم نیست.

۱۰۰- تابع $f(x) = \frac{1 - \sin \pi x}{(2x - 1)^2}$ چند مجانب قائم دارد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۱۰۱- تابع $f(x) = \frac{x}{x - [x]}$ در بازه $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ چند مجانب قائم دارد؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۱۰۲- تابع $f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{4-x^2}}$ چند مجانب قائم دارد؟

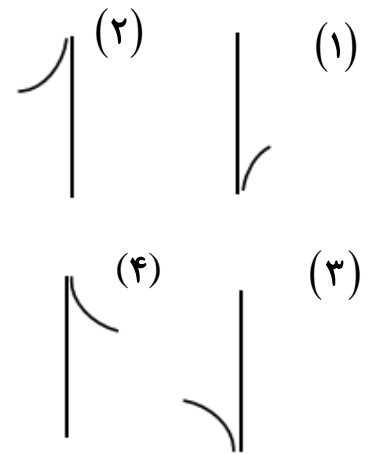
۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۴ بی شمار

۱۰۳- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x|x|}$ در اطراف مجانب قائم آن کدام است؟



۱۰۴- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{2x^2 + ax + b}$ در $x = 3$ به شکل زیر است. $a + b$ کدام است؟



- (۱) ۶
- (۲) -۶
- (۳) ۱۲
- (۴) -۱۲

مجانب افقی:

خط $y = L$ را مجانب افقی $y = f(x)$ می نامیم هر گاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

یعنی هر گاه بخواهیم مجانب افقی تابع را بیابیم باید از آن در بی نهایت حد بگیریم.

برای نمونه مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 3}$ خط $y = 2$ است و مجانب های افقی تابع $g(x) = \frac{x|x| - x}{x^2 + 3}$ خط های $y = 1$ و $y = -1$ هستند.

$$y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x|x| - x}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x|x| - x}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

۱۰۵- نمودار تابع $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{ax^2 + bx + c}$ دارای خط های مجانب $y = -1$ ، $x = -2$ و $x = 1$ است.

$f(-1)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

(۱) $1/25$

(۲) $1/5$

(۳) $1/75$

(۴) $-1/5$

۱۰۶- نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 + 7x}{2x^2 + bx + c}$ فقط یک مجانب قائم $x = 2$ دارد. اگر $f(3) = 6$ باشد،

معادله مجانب افقی آن کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

(۱) $y = -1$

(۲) $y = -\frac{1}{2}$

(۳) $y = \frac{1}{2}$

(۴) $y = \frac{3}{2}$

۱۰۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{4-x^2}}$ چند مجانب افقی دارد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۱۰۸- تابع های $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ و $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ به ترتیب از راست به چپ چند مجانب افقی دارند؟

(۱) صفر، ۱

(۲) ۱، ۱

(۳) ۱، صفر

(۴) صفر، صفر

۱۰۹- تابع $f(x) = \left[\sin \frac{1}{x} \right]$ و $g(x) = \left[\cos \frac{1}{x} \right]$ چند مجانب افقی به ترتیب از راست به چپ دارند؟

(۱) صفر، ۱

(۲) ۱، ۲

(۳) ۱، صفر

(۴) صفر، صفر

۱۱۰- تابع $f(x) = \frac{1}{x + |x - 3|}$ چند مجانب قائم و افقی دارد؟

(۱) ۱

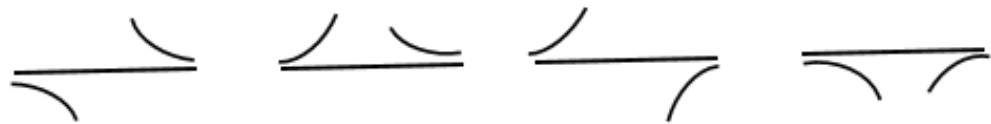
(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

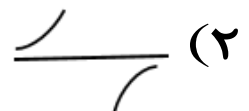


برای تعیین وضعیت منحنی و مجانب افقی آن کافی است مانند آنچه در حد در بی نهایت گفتیم، عددهایی به نمایندگی از بی نهایت به تابع بدهیم اگر حاصل بیش از مجانب افقی شد، منحنی روی آن و اگر کمتر شد زیر آن است. نمودار تابع در اطراف مجانب افقی اش به شکل های زیر می تواند باشد.

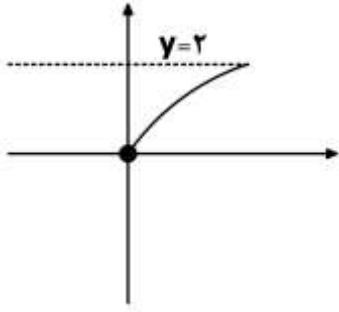


۱۱۱- نمودار تابع $y = \frac{2x^2 - x - 2}{x^2 + 2x}$ نسبت به مجانب افقی خود، در بی نهایت کدام وضع را دارد؟

(ریاضی خارج ۹۸)



۱۱۲- اگر نمودار $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ برای $x \geq 0$ به شکل زیر باشد $a - b$ کدام است؟



۱ (۱)

-۱ (۲)

۲ (۳)

-۲ (۴)

۱۱۳- تابع $f(x) = \frac{ax^3 - bx^2 + 2}{ax^3 - bx + 2}$ در دو نقطه ناپیوسته و فقط دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد. مقدار a, b کدام اند؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

 $b = 2, a = 0$ (۱) $b = 10, a = 8$ (۲) $b = 0, a = -2$ (۳) $b = -6, a = -8$ (۴)