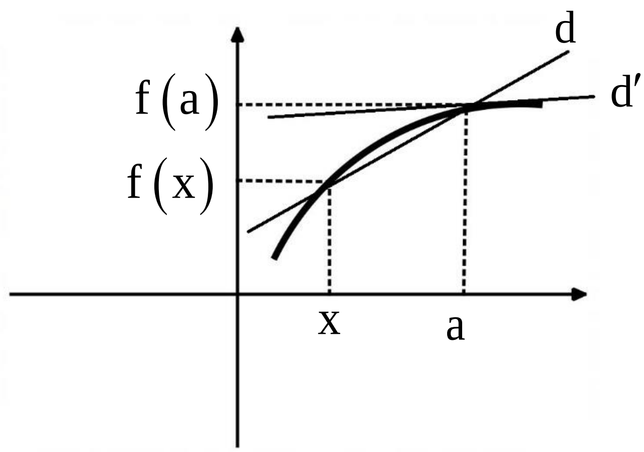
استاد اشرفی

www.mathtest.ir

جزوه مشتق

مشتق :

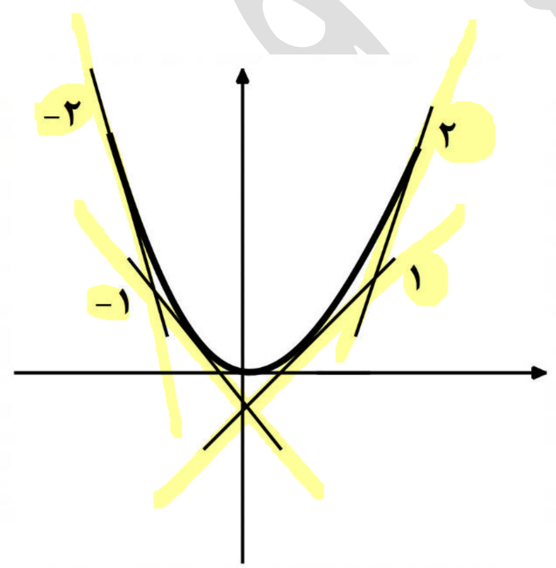


اگر در شکل مقابل x به اندازهٔ کافی به a نزدیک شود خط d بر نمودار تابع f(x) مماس می شود.

$$m=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ شیب خط d در حالت قاطع

$$m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ شیب خط d′ در حالت مماس

نکته:



در خط های با شیب مثبت هر چه خط به محور عرض ها نزدیک شیب بیشتر می شود و در خط های یا شیب منفی هر چه خط به م عرض ها نزدیک تر شود، شیب آن کم تر می شود.

نکته:

خط ها ی موازی محور طول ها شیبی برابر صفر دارند و شیب خط های موازی محور عرض ها تعریف نشده است و خط هایی با شیب بی نهایت به خط های عمودی (موازی محور عرض ها) نزدیک می شوند.

شیب خط مماس بر منحنی تابع پیوستهٔ f را در نقطه ای به طول a،مشتق تابع در x=a می نامیم و آن را با نماد $f'(a)$

نمایش می دهیم.

تغییرمتغیر

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Longrightarrow x=a+h$$

$x\to a \quad h\to 0$

با تغییر متغییر $x=a+h$ و توجه به این که $x\to a$ پس $h\to ۰$ تعریف دیگری از مشتق به شکل زیر ظاهر می شود.

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

برای اثبات و محاسبهٔ مقدار مشتق در امتحان نهایی از یکی از فرمول های بالا به دلخواه استفاده می کنیم.

به مثال زیر توجه کنید :

به کمک تعریف مشتق مقدار مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در $x=۱$ بیابید.

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\overset{0}{\sqrt{x}-۱}}{\underset{0}{x-۱}}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{x-۱}}{(\cancel{x-۱})(\sqrt{x}+۱)}=$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۱}{۲}$$

به مثال زیر توجه کنید :

اکنون با استفاده از تعریف مشتق دوم ثابت کنید مشتق تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ در $x=۲$ برابر $-\frac{۱}{۴}$ است.

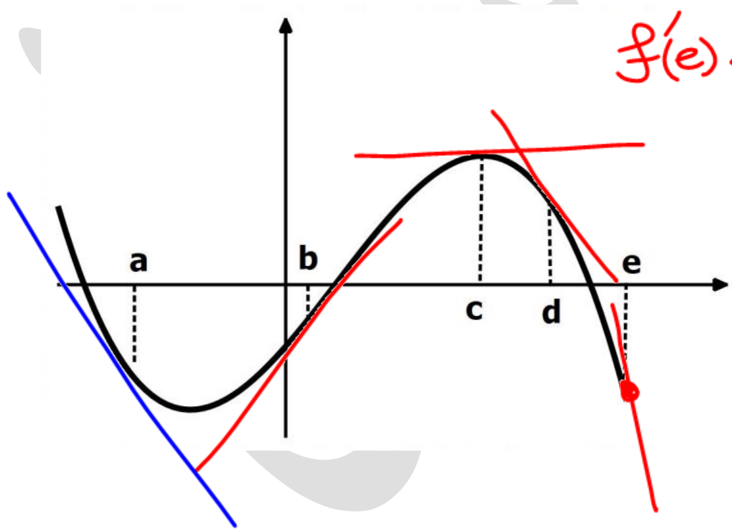
$$\boxed{f'(۲)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲+h}-\frac{۱}{۲}}{h}=$$

$f(\text{انرژی})=\frac{۱}{\text{انرژی}}$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{(۲)-(۲+h)}{(۲+h)۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{-\cancel{h}}{۲(۲+h)}}{\cancel{h}}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۱}{۲(۲+h)}=-\frac{۱}{۴}$$

تست

۱-از بین موارد زیر،چند مورد درست است؟ (علوی ۹۹)



$f'(e)<f'(d)$

الف) $f'(d)\rangle f'(e)$ No

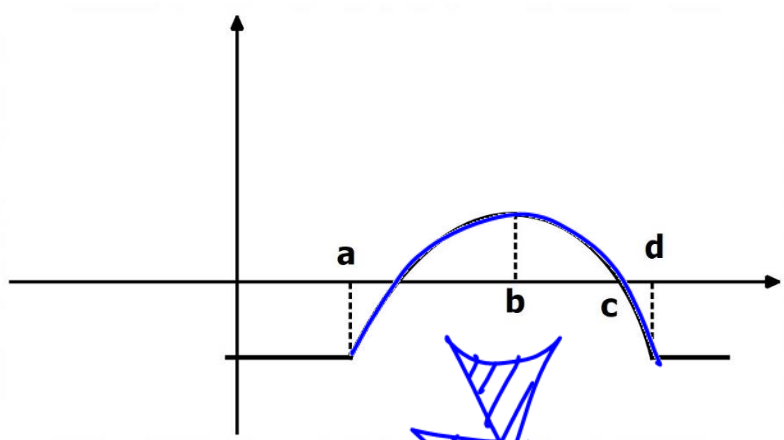
ب) $f'(b)\rangle f'(c)$ ok

پ) $f'(a)\langle f'(b)$ OK

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

۲- با توجه به نمودار تابع f در کدام بازهٔ زیر مقدار مشتق تابع در حال کاهش است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)



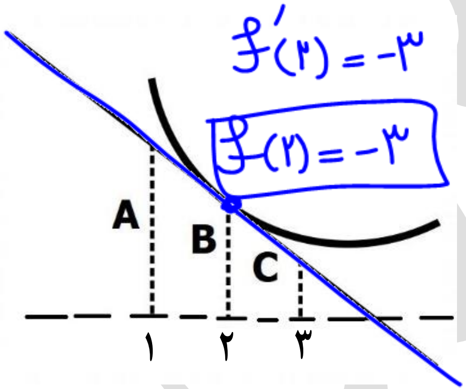
۱) $(۰, b)$

۲) $(b, +\infty)$ ✓

۳) (a, d)

۴) $(a, +\infty)$

۳-برای تابع f در شکل زیر داریم: $f(۲) = f'(۲) = -۳$ مجموع عرض نقاط C, B, A کدام است؟



$f'(۲) = -۳$

$\boxed{f(۲) = -۳}$

۱) -۹

۲) -۶

۳) -۳

۴) صفر

$y = ax + b$

$y = -۳x + b$

$-۳ = -۳(۲) + b \to b = ۳$

$y = -۳x + ۳$

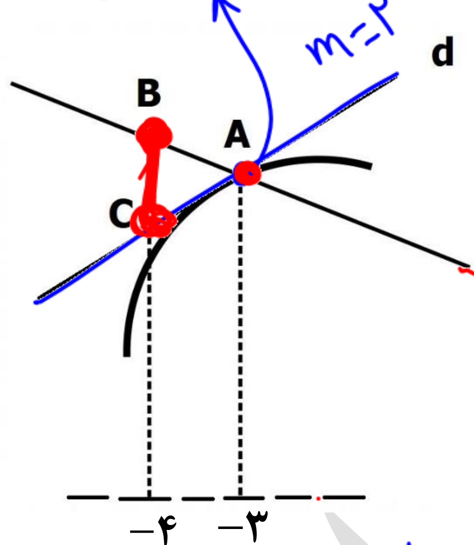
$x_A = ۱ \longrightarrow y_A = -۳(۱) + ۳ = ۰$

$x_C = ۳ \longrightarrow y_C = -۳(۳) + ۳ = -۶$

$y_A + y_B + y_C = ۰ + (-۳) + (-۶) = -۹$

۴— برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(-3)=2$ و $f(-3)=1/5$ اگر d مماس بر f و d' نقطهٔ A را به مبداء مختصات وصل کند. طول BC کدام است؟ (قلم چی ۹۹)

$f(-3)=1/5$



$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1/5-0}{-3-0}=-\frac{1}{2}$

۱) ۱

۲) ۱/۵

۳) ۲

۴) ۲/۵

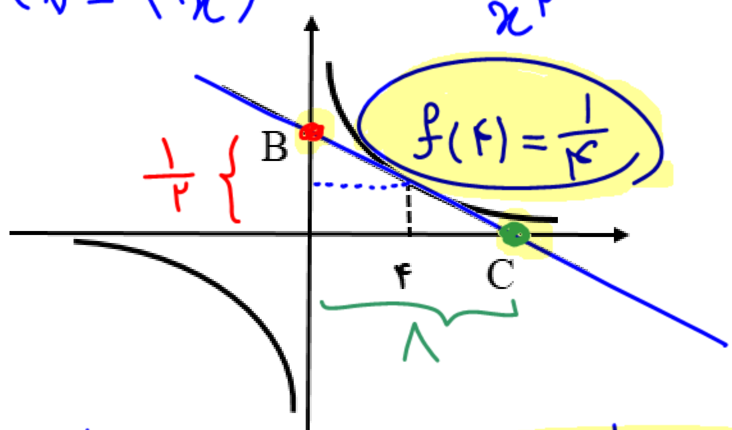
$y=2(-4)+7/5=\boxed{-0/5}$

d خط $\Rightarrow y=2x+b \rightarrow 1/5=2(-3)+b \rightarrow y=2x+7/5$

d' خط $\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x \rightarrow y=-\frac{1}{2}(-4)=\boxed{2}$

۵- درنمودار زیر، خط گذرا از C و B بر تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در نقطه ای به طول ۴ مماس است. فاصلهٔ دو نقطه C و B چقدر است؟ (گاج ۱۴۰۰)

$f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{0x-1(1)}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$



۱) $\sqrt{۲۵۷}$

$f'(4)=-\frac{1}{4^2}=-\frac{1}{16}$

۲) $\sqrt{۲۵۹}$

فیثا

۳) $\frac{\sqrt{۲۵۷}}{۲}$

$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+8^2}=\sqrt{\frac{257}{4}}=\frac{\sqrt{257}}{2}$

۴) $\frac{\sqrt{۲۵۹}}{۲}$

$y=-\frac{1}{16}x+b \Rightarrow \frac{1}{4}=-\frac{1}{16}(4)+b \rightarrow \frac{1}{2}=b$

$\boxed{y=-\frac{1}{16}x+\frac{1}{2}}$

$\rightarrow y_B=-\frac{1}{16}(0)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\rightarrow 0=-\frac{1}{16}x_C+\frac{1}{2} \rightarrow x_C=8$

یافتن مشتق از روی جدول :

شیب های خطوط نقاط سمت چپ و راست نقطهٔ مورد نظر را می یابیم و میانگین آن ها را به دست می آوریم.

۶- با توجه به جدول زیر که برخی از مقادیر $f(x)$ را نشان می دهد. $f'(1)$ به کدام عدد نزدیک تر است؟

x	۱-	۰	۱	۲	۳
f(x)	۹	۶	۵	۳	۰

$m' = \frac{5-3}{1-2} = -2$

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{5-6}{1-0} = -1$

$f'(1) = \frac{m+m'}{2} = \frac{-1+(-2)}{3} = -1/5$

۱) $-\frac{1}{2}$

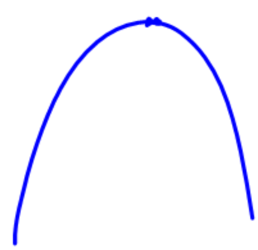
۲) -1

۳) $-\frac{3}{2}$

۴) -2

۷- در تابع $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ طول نقطه ای روی منحنی که بیش ترین شیب مماس را دارد، کدام است؟ (سنجش ۹۹)

$f'(x) = \underline{-3x^2 + 6x - 4}$



$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-3)} = 1$

۱) -1

۲) -2

۳) 1

۴) 3

۸- اگر $f(x)=(2x+1)^2$ حاصل $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ کدام است؟ (گزینه دو ۱۴۰۰)

$$f(x+h)=\left(2(x+h)+1\right)^2=\left(2x+2h+1\right)^2$$

۱) $8x+4$

۲) $8x+4+2h$

۳) $8x+2+4h$

۴) $8x+4+4h$

$$\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}=\frac{(2x+2h+1)^2-(2x+1)^2}{h}$$

$$=\frac{\left((\cancel{2x}+2h+\cancel{1})-(\cancel{2x}+\cancel{1})\right)\left((2x+2h+1)+(2x+1)\right)}{h}=2(4x+2h+1)$$

$$=8x+4h+2$$

۹- تعریف مشتق تابع f در $x=1$ به صورت $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}$ در آمده است. کدام نتیجه گیری الزاماً درست است؟(قلم چی ۱۴۰۰)

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}$$

۱) f در $x=1$ مشتق پذیر است.

۲) خط مماس بر f در $x=1$ موازی محورx ها ست.

۳) خط مماس بر f در $x=1$ موازی محورy ها ست.

۴) خط مماس بر f در $x=1$ وجود ندارد.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}\times\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{0}=\infty$$

۱۰- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$ حاصل $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ کدام است؟(تجربی داخل ۹۸)

۱) $\frac{4}{9}$

۲) $\frac{5}{12}$

۳) $\frac{7}{12}$

۴) $\frac{5}{6}$

$$f'(4)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{4}}(5-8)+2(1+\sqrt{4})}{(5-8)^2}=\frac{-\frac{3}{4}+6}{9}=\frac{\frac{\cancel{21}\,7}{4}}{\cancel{9}\,3}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{1}}$$

$$f'(x)=\frac{\left(0+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(5-2x)-(0-2)(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2}=\frac{7}{12}$$

۱۱-در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{-x-1}{\sqrt{x}}$ حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{4}+h\right)-f\left(\frac{1}{4}\right)}{h}$ کدام است؟(تجربی خارج ۹۸)

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

$$f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{-\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{1}{\cancel{2\sqrt{\frac{1}{4}}}}\left(-\frac{1}{4}-1\right)}{\frac{1}{4}}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\left(-\frac{5}{4}\right)}{\frac{1}{4}}$$

$$f'(x)=\frac{(-1-0)\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{(\sqrt{x})^2=x}$$

$$=\frac{-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3$$

تذکر: در توابع پیوسته، همهٔ تعریف مشتق ها ابهام $\frac{0}{0}$ هستند.

حد های تعریف مشتق :

برای حل حدهایی به صورت تعریف مشتق می توان از دو روش استفاده کرد.

الف) برای حل تست های تعریف مشتق می توان از فرمول زیر استفاده نمود.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{h}=(m-n)f'(a)$$

در این فرمول m و n دو عدد دلخواه هستند که معمولاً در صورت تست داده می شوند.

به مثال زیر توجه کنید :

الف)
$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+۳h)-f(۱-h)}{h}=(۳-(-۱))f'(۱)=۴f'(۱)$$

ب)
$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۳-h)-f(-۳+h)}{h}=(-۱-۱)f'(-۳)=-۲f'(-۳)$$

پ)
$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(h-۳)-f(-h-۳)}{۳h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۳+h)-f(-۳-h)}{۳h}$$

$$=\frac{(۱-(-۱))f'(-۳)}{۳}=\frac{۲}{۳}f'(-۳)$$

۱۲- اگر $f(x)=x^{۲}+۳x$ باشد حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+۲h)-f(۲-h)}{h}$ کدام است؟

۱) ۷

۲) ۷-

۳) ۲۱-

۴) ۲۱

$(۲-(-۱))\,f'(۲)=۳f'(۲)=۳(۷)=۲۱$

$f'(x)=۲x+۳\longrightarrow f'(۲)=۲(۲)+۳=۷$

۱۳- اگر $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ باشد حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۹)-f(۹+۲h)}{۵h}$ کدام است؟

$m=۰$

۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $-\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۳۰}$

۴) $\frac{-۱}{۳۰}$

$\frac{(۰-۲)}{۵}f'(۹)=-\frac{۲}{۵}f'(۹)=-\frac{۲}{۵}\left(\frac{۱}{۱۲}\right)=-\frac{۱}{۳۰}$

$f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱-۰}{۳\sqrt[۳]{(x-۱)^{۲}}}\xrightarrow{x=۹}f'(۹)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۸^{۲}}}=\frac{۱}{۱۲}$

۱۴-در تابع $f(x)=(۱+x^{۲})(۱+x^{۴})(۱+x^{۸})(۱+x^{۱۶})$ حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(h+\sqrt{۲})-f(\sqrt{۲}-h)}{h\sqrt{۲}}$ کدام است؟(سنجش ۹۹)

۱

۱) $۶\times ۲^{۱۶}+۲$

۲) $۷\times ۲^{۱۷}+۲$

۳) $۱۸\times ۲^{۱۶}+۶$

۴) $۱۴\times ۲^{۱۷}+۴$

ب) برای حل سوالات پیچیده تر بهتر است از قاعده هوپیتال استفاده کنیم. برای مشتق گیری از عبارت هایی به شکل $f(u)$ از فرمول زیر استفاده می کنیم. u تابعی بر حسب h یا x یا ... است.

$$\left(f(u)\right)' = u'.f'(u)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x} = \frac{4}{2} = 2$$

برای نمونه به مشتق گیری های زیر توجه کنید.

$$\left(f(2x)\right)' = (2x)' f'(2x) = 2f'(2x)$$

$$\left(f(1-3h)\right)' = (1-3h)' f'(1-3h) = -3f'(1-3h)$$

$$\left(f(h^2-3h)\right)' = (h^2-3h)' f'(h^2-3h) = (2h-3)f'(h^2-3h)$$

همیشه از متغییری که در حال میل کردن است مشتق می گیریم و بقیه را عدد ثابت فرض می کنیم.

۱۵- اگر $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x-h)-f(x+h)}{h^{2}-3h}$ به ازای هر x عضو دامنهٔ تابع $f(x)$ برقرار باشد حاصل $f'(3)$ کدام است؟

h متغیر است و x نقش عدد را بازی می‌کند

۱) $-\frac{9}{4}$

۲) $\frac{9}{4}$

۳) $-\frac{4}{3}$

۴) $\frac{4}{3}$

سمت چپ را هوپیتال می‌گیریم:

$$\underset{h\to 0}{\overset{HOP}{\lim}}\frac{(0-1)f'(x-h)-(0+1)f'(x+h)}{2h-3}=\frac{-f'(x-0)-f'(x+0)}{0-3}$$

$$=\frac{-f'(x)-f'(x)}{-3}=\frac{2f'(x)}{3}=\frac{x}{\sqrt{x+1}}\Rightarrow \frac{3}{2}\times\frac{2f'(3)}{3}=\frac{3}{\sqrt{4}}\times\frac{3}{2}$$

$$f'(3)=\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

۱۶- اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ باشد آن گاه حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1-h^{2})-f(-1+h^{2})}{h^{2}}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) -1

۴) -2

$$f'(x)=\frac{0x-1(1)}{x^2}=\frac{-1}{x^2}\Rightarrow f'(-1)=\frac{-1}{(-1)^2}=-1$$

$$\underset{h\to 0}{\overset{HOP}{\lim}}\frac{-2hf'(-1-h^2)-2hf'(-1+h^2)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{2h}\left(f'(-1-h^2)+f'(-1+h^2)\right)}{\cancel{2h}}$$

$$=-\left(f'(-1)+f'(-1)\right)=-2f'(-1)=-2(-1)=2$$

از این جا به بعد تست هایی از تعریف مشتق می آورم که بهتر است از همهٔ آن ها هوپیتال گرفته شود.

قبل از شروع دقت کنیدکه :

$$\left(f^{n}(x)\right)' = n.f^{n-1}(x).f'(x)$$

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$\left(\sqrt[3]{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f^{2}(x)}}$$

$u^n \rightarrow n u^{n-1} u' \quad f^n \rightarrow n f^{n-1} f'$

۱۷- اگر $f(x) = x^2 + x$ باشد حاصل $\lim_{x\to 1} \frac{f^2(x) - f^2(1)}{x^2 - 1}$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۶

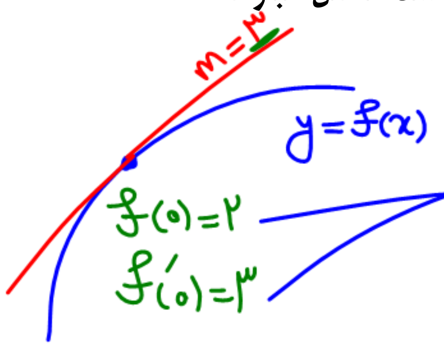
۴) ۱۲

$f'(x) = 2x+1 \rightarrow f'(1) = 2(1)+1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f^2(x) - f^2(1)}{x^2-1} \underset{=}{\text{HoP}} \lim_{x\to 1} \frac{2f^{2-1}(x)\, f'(x) - 0}{2x - 0}$$

$$= \frac{\cancel{2} f(1) f'(1)}{\cancel{2}} = f(1) f'(1) = (1^2+1) \cdot 3 = 6$$

۱۸- اگر شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطهٔ $(0,2)$ برابر ۳ باشد حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^2(x)-4}{x^2+3x}$ کدام است؟



۱) ۲

۲) ۴ ✓

۳) ۶

۴) ۸

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)-4}{x^2+3x}\ \underline{\underline{HoP}}\ \lim_{x\to 0}\frac{2f^{2-1}(x)\,f'(x)-0}{2x+3}=\frac{2f(0)f'(0)}{0+3}=\frac{2(2)(3)}{3}=4$$

۱۹- f تابعی پیوسته و $f(x)\ge 0$ است. ~~اگر f از نقطهٔ $(3,9)$ بگذرد~~ و $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{f(x)}-3}{\sqrt{3x}-3}=2$ باشد آنگاه $f'(3)$ کدام است؟

نمی‌تونستم اینو ندم

صفر

صفر

$\cancel{\boxed{f(3)=9}}$

۱) ۱۲

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۶

$$\underline{\underline{HoP}}\ \lim_{x\to 3}\frac{\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}-0}{\frac{3}{2\sqrt{3x}}-0}=\frac{\frac{f'(3)}{2\sqrt{f(3)}}}{\frac{3}{2\sqrt{9}}}=\frac{\frac{f'(3)}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{f'(3)}{3}=2$$

$f'(3)=6$

$$\sqrt{f(3)}-3=0\longrightarrow\sqrt{f(3)}=3\longrightarrow f(3)=9$$

۲۰- برای تابع پیوستهٔ f می دانیم $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x^{۲}-۱}=-\frac{۱}{۲}$ است . در این صورت $\lim\limits_{h\to۰}\frac{f(۱-۲h)}{h}$ کدام است؟(گزینه دو ۱۴۰۰)

۱) ۲

۲) ۲-

۳) ۱

۴) ۱-

$$\overset{HoP}{=}\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{2x-0}=\frac{f'(1)}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow f'(1)=-1$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)}{h}\overset{HoP}{=}\lim_{h\to0}\frac{(0-2)f'(1-2h)}{1}=\frac{-2f'(1)}{1}=\frac{-2(-1)}{1}=2$$

۲۱- در تابع خطی f، حاصل $\lim\limits_{x\to۲}\frac{\boxed{f(x)-f(f(۱))}}{\boxed{x-۲}}$ برابر ۱- است عرض از مبداء تابع f برابر کدام گزینه است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

صفر

صفر

۱) ۳

۲) ۱

۳) ۱-

۴) ۳-

تابع خطی $f(x)=ax+b$

$\boxed{f'(x)=a}$

$$\overset{HoP}{=}\lim_{x\to2}\frac{f'(x)-0}{1-0}=\boxed{f'(2)=-1}$$

$$a=-1\Rightarrow\boxed{f(x)=-x+b}$$

$$f(2)-f(f(1))=0\Rightarrow \cancel{f}(2)=\cancel{f}(f(1))\Rightarrow 2=f(1)\to 2=-1+b$$

$$3=b$$

۲۲- ضابطهٔ تابع اکیداً صعودی $y=f(x)$ در تساوی $f^{۲}(x)=۶f(x)+۴x^{۲}+۲۰x+۱۶$ صدق می کند. حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{f(۰)-f(x)}{۲x}$ کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۰)

$f^{۲}(x)-۶f(x)=۴x^{۲}+۲۰x+۱۶$

۱) ۵

۲) ۳

۳) ۲-

۴) ۱-

$\underline{\underline{\text{HOP}}}\ \lim\limits_{x\to ۰}\frac{۰-f'(x)}{۲}=\frac{-f'(۰)}{۲}=\frac{-(۲)}{۲}=-۱$ می‌خواهد

$f(x)=۲x+$ عدد ← اکید صعودی

$f(x)=-۲x+$ عدد ← اکید نزولی

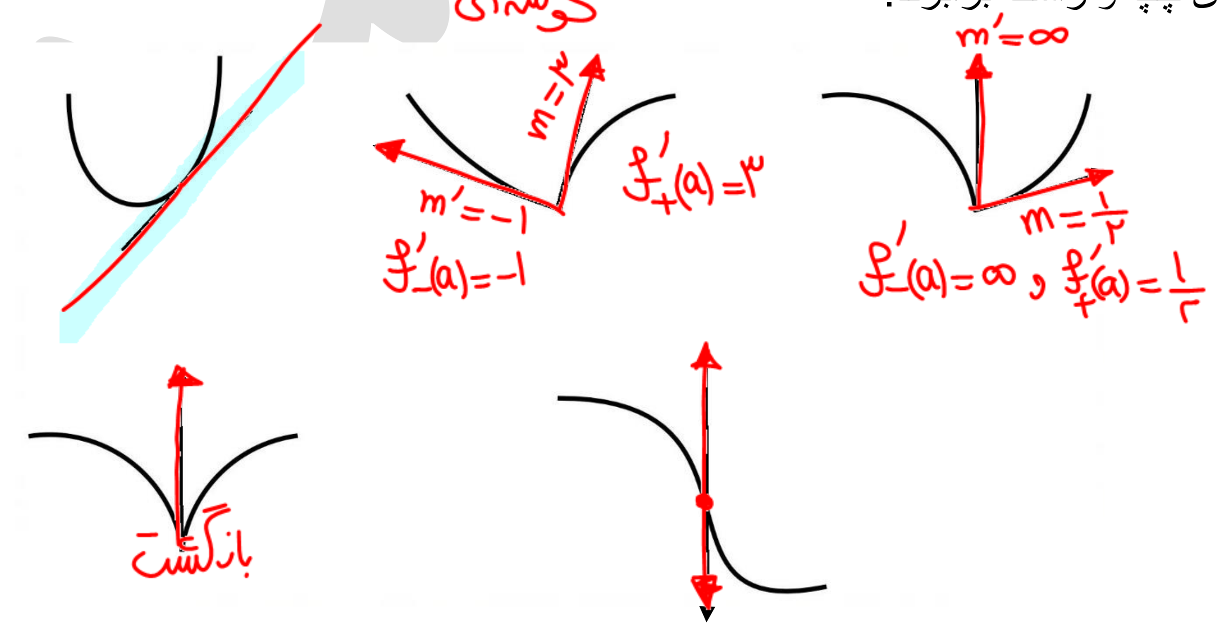
مشتق چپ و راست:

با توجه به این که تعریف مشتق خود نوعی حد است می توان آن را به حد چپ و راست تقسیم و تفکیک نمود.به این حدهای چپ و راست، مشتق چپ و راست می گوئیم.

مشتق چپ: $f'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ یا $f'_-(a)=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

مشتق راست: $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ یا $f'_+(a)=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

در نمودار ها نیز مشتق راست به معنی شیب نیم مماس سمت راست و مشتق چپ به معنی شیب نیم مماس سمت چپ است.بدیهی است در نقاطی از منحنی که شیب مماس چپ و راست یکسان باشد، مشتق های چپ و راست برابرند.



به مثال زیر توجه کنید :

برای نمونه برای یافتن مقدار مشتق راست تابع $f(x)=|x^۲-۱|$ در $x=۱$ می توانیم به کمک تعریف مشتق راست

به شیوهٔ زیر عمل کنیم.

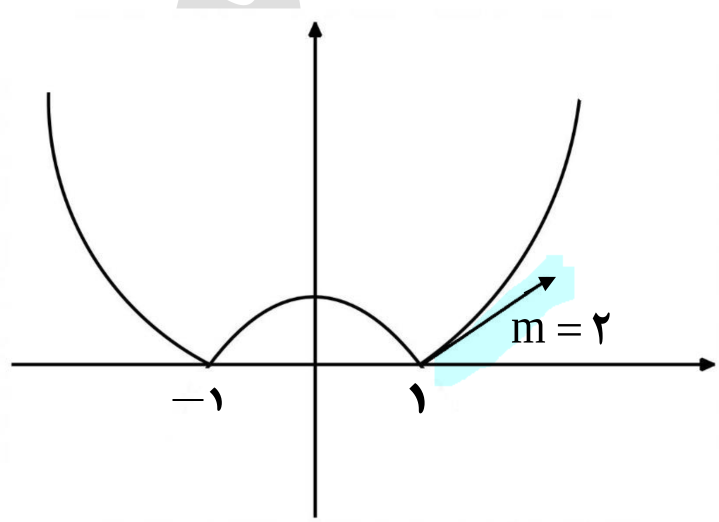
$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{|x^۲-۱|-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{|x^۲-۱|}{x-۱}$$

با توجه به این که x از یک بزرگ تر است حاصل عبارت داخل قدر مطلق مثبت است و خود آن از قدر مطلق خارج می شود.

$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}x+۱=۲$$

بنابراین مشتق راست تابع در $x=۱$ برابر ۲ و شیب نیم مماس راست تابع در $x=۱$ برابر ۲ است.

اگر نمودار تابع $f(x)=|x^۲-۱|$ را رسم کنیم، شیب نیم مماس راست تابع در $x=۱$ به شکل زیر ظاهر می شود.



برای یافتن مشتق چپ و راست در تابع های پیوسته نیازی به محاسبه آن ازروی تعریف نیست و کافی است از ضابطه ها با توجه به شرط ها مشتق بگیریم.

به مثال زیر توجه کنید :

برای نمونه در تابع پیوستهٔ $f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x\geq ۱ \\ x^{۳}+۲ & x<۱ \end{cases}$ مقدار مشتق راست و چپ تابع در $x=۱$ برابر است با:

$$f'_{+}(۱)=(۲x+۱)'=۲$$

$$f'_{-}(۱)=(x^{۳}+۲)'=۳x^{۲}=۳(۱)^{۲}=۳$$

نکته:

در تابع های ناپیوسته، اجازهٔ انجام این کار را نداریم. به عبارت دقیق تر اگر تابع از طرفی ناپیوسته باشد، از همان طرف تابع مشتق ندارد.

به مثال زیر توجه کنید :

2

برای نمونه تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x & x<۱ \\ ۳x+۱ & x\geq ۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ از راست پیوسته است ولی از چپ پیوسته

4

نیست. به همیسن دلیل برای یافتن مشتق راست تابع در $x=۱$ کافی است از $f(x)=۳x+۱$ مشتق بگیریم.

$$f'_{+}(۱)=(۳x+۱)'=۳$$

$\cancel{f'_{-}(1)\neq(3x)'=3}$

ولی اجازهٔ چنین کاری با ضابطهٔ $۲x$ نداریم چون تابع در سمت چپ یک ناپیوسته و درنتیجه از چپ مشتق ندارد.

نکته:

اگردر تابع های قدر مطلقی و براکتی در نقطه ای پیوسته، مشتق چپ و راست را بخواهند به کمک علامت گذاری و عدد گذاری به ترتیب قدر مطلق و براکت را از بین می بریم، سپس از تابع مشتق می گیریم و با جای گذاری x در ان مقدار مشتق را پیدا می کنیم.

به مثال زیر توجه کنید :

در تابع $f(x)=x^{۲}+|x-۱|[x]$ حاصل $f'_-(۱)-f'_+(۱)$ کدام است؟

2 - 3

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۱-

$f'_-(1)=\left(x^2+(-x+1)\times 0\right)'=(x^2)'=2x\overset{x=1}{=}2$

وقتی ایکس از سمت راست به یک نزدیک می شود براکت ایکس برابر یک می شود و عبارت داخل قدر مطلق نیز مثبت است و خودش از قدر مطلق خارج می شود.

$$f'_+(۱)=\left(x^{۲}+(x-۱)\times ۱\right)'=\left(x^{۲}+x-۱\right)'=۲x+۱ \;=\; ۳$$

وقتی ایکس از سمت چپ به یک نزدیک می شود براکت ایکس برابر صفر می شود و عبارت داخل قدر مطلق منفی است و قرینه اش از قدر مطلق خارج می شود.

$$f'_-(۱)=\left(x^{۲}+(-x+۱)\times ۰\right)'=\left(x^{۲}\right)'=۲x \;=\; ۲$$

۲۳- مشتق تابع $f(x)=[\sqrt{x}](x^۲-x)$ در $x=۲$ کدام است ؟

۱) ۳

۲) ۶

۳) ۹

۴) ۱۲

$$f'(x)=\left(\cancel{[\sqrt{۲}]}(x^۲-x)\right)'=\left(x^۲-x\right)'=۲x-۱\xrightarrow{x=۲}۳$$

۲۴-اگر $f(x)=[x]\left|x^۲+x-۲\right|$ باشد حاصل $f'_-(-۲)-f'_+(۱)$ کدام است ؟ (ماز ۱۴۰۰)

۱) ۳

۲) ۶

۳) ۹

۴) ۱۲

$-۳\quad -۲\quad ۱$

$۹-۳$

$$f'_+(۱)=\left([۱^+]\,\big|\underbrace{x^۲+x-۲}_{\text{مثبت}}\big|\right)'=\left(۱\,(x^۲+x-۲)\right)'=۲x+۱\xrightarrow{x=۱}۳$$

$(۱/۱)^۲+(۱/۱)-۲$

$$f'_-(-۲)=\left(\cancel{[-۲^-]}^{\,-۳}\,\left|x^۲+x-۲\right|\right)'=\left(-۳\,(x^۲+x-۲)\right)'=-۳(۲x+۱)\xrightarrow{x=-۲}+۹$$

$(-۲/۱)^۲+(-۲/۱)-۲$

$۴/۴۱-۲/۱-۲$

۲۵- در تابع $f(x)=\sqrt{x^4+2x^3+x^2}$ حاصل $f'_+(0)-f'_-(-1)$ کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

$1-(-1)$

۱) صفر

۲) ۲

۳) -2

۴) -1

اگر زیر رادیکال صفر شد مشتق نگیرید.

مثبت منفی

$$f(x)=\sqrt{x^2(x^2+2x+1)}=\sqrt{x^2(x+1)^2}=|x|\,|x+1|$$

$$f'_+(0)=\big(x(x+1)\big)'=(x^2+x)'=2x+1\xrightarrow{x=0}1$$

$$f'_-(-1)=\big(-x\times-(x+1)\big)'=(x^2+x)'=2x+1\xrightarrow{x=-1}-1$$

$-1=(-1,1)$

۲۶- اگر $f(x)=(x^2-1)([x]+[-x])$ باشد $f'(1)$ کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

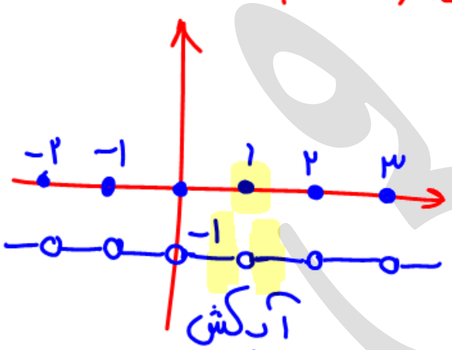
۱) -2

۲) ۲

۳) صفر

۴) وجود ندارد

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$



$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$(x-1)(x+1)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)([x]+[-x])-0}{\cancel{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to1}(x+1)([x]+[-x])=\lim_{x\to1}(x+1)\times(-1)=-2$$

راه دوم

$$f(x)=(x^2-1)([x]+[-x])\Longrightarrow f'(1)=(x^2-1)'([x]+[-x])$$

$$f'(1)=2x([x]+[-x])=2(\cancel{-1})=-2$$

$\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$

۲۷-در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+6x} & 0\le x<4\\ \left[\frac{x}{4}\right](x^2-9x) & 4\le x<8\end{cases}$ مقدار $f'(2)-f'(5)$ کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۹)

$$f'(2)=\left(\sqrt{x^2+6x}\right)'=\frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}}\overset{x=2}{=}\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

$$f'(5)=\left(\left[\frac{5}{4}\right](x^2-9x)\right)'=\left(1(x^2-9x)\right)'=2x-9\overset{x=5}{=}1$$

۱) $\frac{1}{4}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\frac{3}{2}$

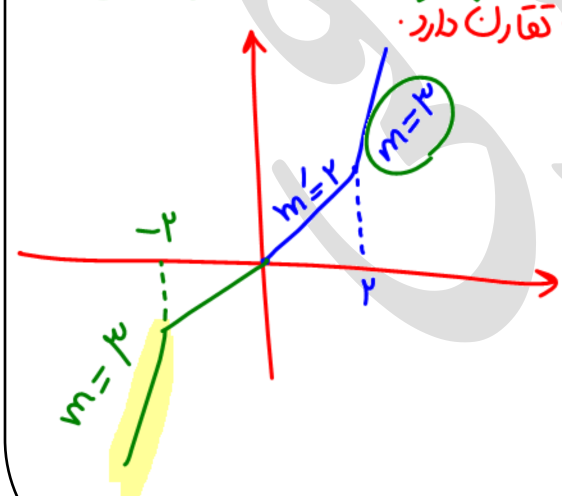
۲۸- اگر به ازاء هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(x)+f(-x)=0$ و $f'_+(2)=3$ و $f'_-(2)=2$ باشد. $f'_-(-2)$ کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۰)

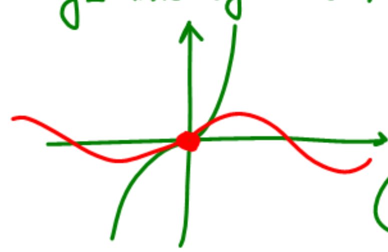
$f(-x)+f(x)=0 \Longleftrightarrow f(-x)=-f(x)$

این تابع نسبت به مبداء تقارن دارد.

$y=x^3\to y=(-x)^3=-x^3$

$y=\sin x\to y=\sin(-x)=-\sin x$





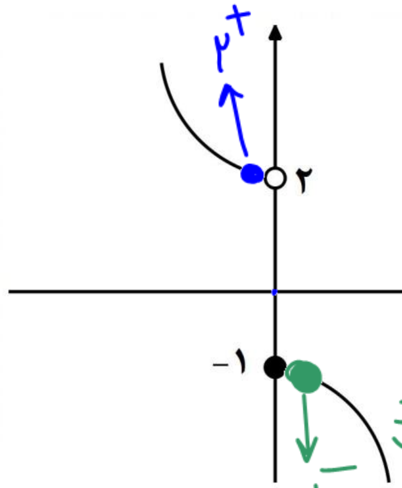
۱) -۳

۲) -۲

۳) ۲

۴) ۳

۲۹- نمودار تابع $f(x)$ به صورت رو به رو است . اختلاف مشتق چپ و راست تابع $y=|x|\left[f(x)\right]$ در نقطهٔ $x=0$ چقدر است ؟(گزینه دو ۱۴۰۰)



۱) صفر
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

$f'_-(0) = \left(|x|\left[f(x)\right]\right)' = \left(-x\times\left[f(0^-)\right]\right)'$

$= \left(-x\left[2^+\right]\right)' = \left(-x(2)\right)' = -2$

$f'_+(0) = \left(|x|\left[f(x)\right]\right)' = \left(x\left[f(0^+)\right]\right)' = \left(x\left[-1^-\right]\right)'$

$\left(-2x\right)' = -2$

تذکر: در تست های مربوط به تعریف مشتق چپ و راست استفاده از قاعدهٔ هوپیتال بسیار مهم است.

۳۰- اگر $f(x)=\begin{cases}3x^2-1 & x\ge 1\\ 5x-3 & x<1\end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+2h)-f(1+h)}{h}$ کدام است؟

تابع پیوسته

۱) ۵
۲) ۶
۳) $\frac{5}{4}$
۴) وجود ندارد

$\underset{h\to 0^-}{\overset{HOP}{=}} \dfrac{(0+2)f'(1+2h)-(0+1)f'(1+h)}{1} = 2f'_-(1) - f'_-(1)$

$= f'_-(1) = \left(5x-3\right)' = 5$

۳۱-اگر $f(x)=x|x-۲|$ باشد حاصل $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(۲-h^۳)-f(۲)}{h^۳}$ کدام است؟

۱) ۴

۲) ۴-

۳) ۲

۴) ۲-

$$\underline{\underline{HOP}}\ \lim_{h\to 0^-}\frac{(0-\cancel{3h^2})f'(2-h^3)-0}{\cancel{3h^2}}=\lim_{h\to 0^-}-f'(2-h^3)=-\boxed{f'_+(2)}=-2$$

$$f'_+(2)=\left(x(x-2)\right)'=\left(x^2-2x\right)'=2x-2=2(2)-2=2$$

$$2-(0^-)^3=2-(-0.1)^3=2.001$$

۳۲- اگر $f(x)=\frac{|x-۲|\sqrt[۳]{۲x^۲}}{x^۳+۲x+۴}$ باشد، حاصل $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(۲+۲h)+f(۲-h)}{h}$ کدام است؟

(سنجش ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۱}{۸}$

۲) $-\frac{۲}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۸}$

۴) $-\frac{۱}{۸}$

تعریف مشتق $\Rightarrow$ HOP

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{(0+2)f'(2+2h)+(0-1)f'(2-h)}{1}$$

$$=2f'_+(2)-f'_-(2)=2\left(\frac{1}{8}\right)-\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{8}$$

$$f'_+(2)=\left(\frac{|x-2|\sqrt[3]{2x^2}}{x^3+2x+4}\right)'=\left(\frac{(x-2)\sqrt[3]{2x^2}}{x^3+2x+4}\right)'$$

مشتق عامل صفرکننده

$$\frac{1\sqrt[3]{2x^2}}{x^3+2x+4}\overset{x=2}{=}\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

$$f'_-(2)=\left(\frac{|x-2|\sqrt[3]{2x^2}}{x^3+2x+4}\right)'=\left(\frac{(-x+2)\sqrt[3]{2x^2}}{x^3+2x+4}\right)'=\frac{-1\sqrt[3]{2x^2}}{x^3+2x+4}\overset{x=2}{=}-\frac{2}{16}=-\frac{1}{8}$$

مشتق پذیری :

تابع پیوستهٔ $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ مشتق پذیر است هر گاه در آن نقطه مشتق های چپ و راست موجود و برابر باشند .

پیوستگی $\quad \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

مشتق پذیری $\quad f'_-(a) = f'_+(a)$

مهم

۳۳– در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{8}{ax+b} & x>2 \\ -x^3+6x & x\le 2 \end{cases}$ اگر $f'(2)$ موجود باشد، a کدام است؟

(۹۸ تجربی خارج)

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

پیوستگی $\quad \dfrac{8}{2a+b} = -8+12 \longrightarrow \dfrac{8}{2a+b} = 4 \longrightarrow \boxed{2a+b=2}$

مشتق $\quad f'_-(2) = f'_+(2) \Rightarrow (-x^3+6x)' = \left(\dfrac{8}{ax+b}\right)'$

$-3x^2+6 = \dfrac{0-a(8)}{(ax+b)^2} \xrightarrow{x=2} -12+6 = \dfrac{-8a}{(2a+b)^2} \to -6 = \dfrac{-8a}{4} \to a=3$

۳۴- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-2x} & x\le -2\\ -\frac{1}{2}x^2+bx+c & x>-2\end{cases}$ در $x=-2$، مشتق پذیر است، مقدار c کدام است؟(تجربی داخل ۹۹)

$\sqrt{9}=-2-2b+c \rightarrow -2b+c=5 \Rightarrow c=\frac{1}{3}$

$\frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{5-2x}}=-x+b \xrightarrow{x=-2} \frac{-1}{\sqrt{9}}=2+b \rightarrow b=-\frac{7}{3}$

۱) $-\frac{2}{3}$

۲) $-\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{3}$

۴) $\frac{2}{3}$

۳۵- $f(x)=\begin{cases}ax^2-2x & x<2\\ x^3-bx & 2\le x<3\\ ax+bx^2-c & x\ge 3\end{cases}$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق پذیر و درنقطهٔ $x=3$ پیوسته است.

مقدار C کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۰)

$4a-4=8-2b \Rightarrow \boxed{4a+2b=12}$

$2ax-2=3x^2-b \xrightarrow{x=2} 4a-2=12-b \Rightarrow \boxed{4a+b=14}$

$b=-2 \longrightarrow a=4$

۱) ۲۴-

۲) ۳۹-

۳) ۴۱-

۴) ۲۴

$27-3b=3a+9b-c$

$27+6=12-18-c \longrightarrow c=-39$

۳۶- فرض کنید $g(x)=ax^{۲}+bx+c$, $f(x)=\begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases}$ باشد . اگر f یک تابع مشتق پذیر باشد. حداکثر مقدار K به شرط $b+c=a$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

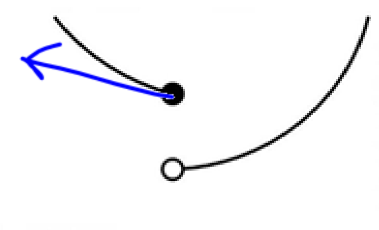
۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) ۱

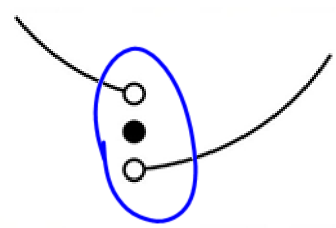
۳) ۳

۴) ۴

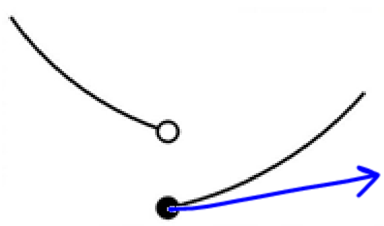
نقاط مشتق ناپذیر مهم بر روی نمودار :



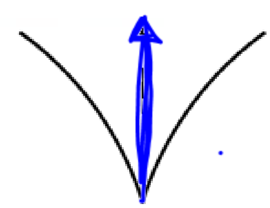
فقط مشتق چپ دارد



از هیچ طرف مشتق پذیر نیست

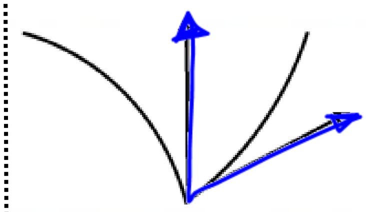


فقط مشتق راست دارد.



مشتق چپ$-\infty$ و مشتق راست $+\infty$ است.

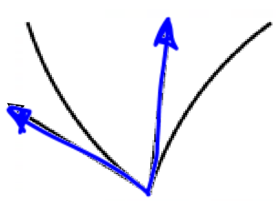
(بازگشت)



مشتق چپ برابر $-\infty$ و مشتق راست دارد.

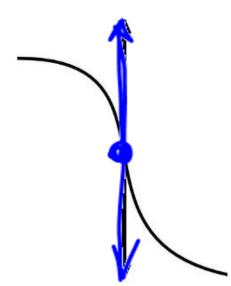
در این نقطه مشتق پذیر نیست.

(گوشه)

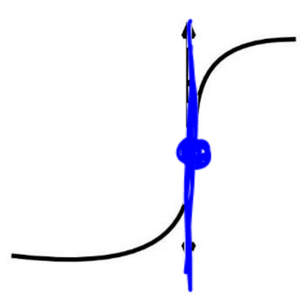


مشتق چپ و راست دارد ولی در این نقطه مشتق پذیر نیست.

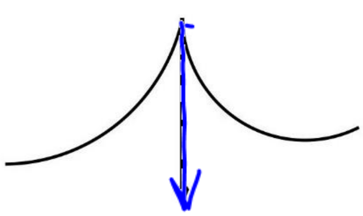
(گوشه)



مشتق چپ و راست هر دو $-\infty$ هستند ولی تابع در این نقطه مشتق ندارد



مشتق چپ و راست هر دو $+\infty$ هستند ولی تابع در این نقطه مشتق ندارد



مشتق چپ$+\infty$ و مشتق راست $-\infty$ است.

(بازگشت)

نقاط مشتق ناپذیر پیوستهٔ مهم :

الف) ریشه های درجه یک داخل قدر مطلق(به شرطی که عبارت کنار آن صفر نشود)مشتق ناپذیرند. برای نمونه تابع $f(x)=x|x-۲|$ در $x=۲$ مشتق ناپذیر است ولی تابع $f(x)=(x-۲)|x-۲|$ در $x=۲$ مشتق پذیر و مشتق آن در این نقطه برابر صفر است.

نکته:

به این گونه نقاط مشتق ناپذیر قدرمطلقی نقاط گوشه ای می گوئیم.

۳۷- تابع $f(x)=||x|-۱|$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

قدر کوچک : $x=0$

قدر بزرگ : $|x|-1=0 \rightarrow |x|=1 \rightarrow x=\pm 1$

تابع در $\{0, 1, -1\}$ مشتق ناپذیر است.

۳۸- تابع $f(x)=(x-1)\left|x^{3}-x^{4}\right|$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

$f(x)=(x-1)\left|x^3(1-x)\right|=(x-1)\left|x^2x(1-x)\right|$

واکسن واکسن $x=0$ $x=1$

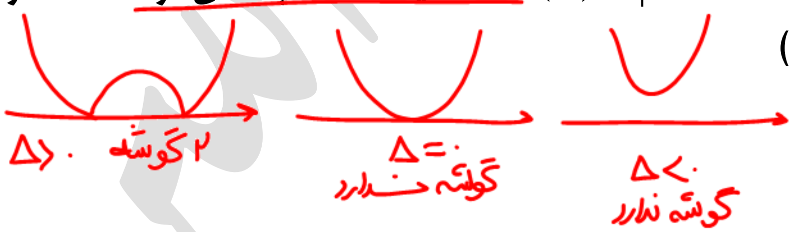
$f(x)=(x-1)x^2\left|x(1-x)\right|$

$x=0$ و $x=1$ ریشه‌های درجه یک داخل قدرمطلق‌اند ولی هردو واکسن Corido را زده‌اند و مشتق‌پذیرند.

۳۹- تابع $f(x)=\left|ax^{2}+bx+4\right|$ فقط یک نقطهٔ گوشه ای در $x=2$ دارد. b کدام است؟

(گزینه دو ۱۴۰۰)

|درجه دوم|



۱) -2

۲) ۲

۳) -4

۴) ۴

$f(x)=\left|0x^2+bx+4\right|=\left|bx+4\right|$

$x=2 \longrightarrow$ داخل قدر را صفر کند $\longrightarrow b(2)+4=0 \rightarrow b=-2$

۴۰-تابع $f(x)=(x-۳)|x^۲+ax+b|$ فقط در نقطهٔ $x=۲$ مشتق ناپذیر می باشد. شیب نیم مماس راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ گوشه ای آن کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۰)

۱) ۱

۲) ۲

۳) −۲

۴) −۱

واکسن

$f(x)=(x-۳)\,|(x-۲)(x-۳)|$

$(۲,۱-۲)\quad(۲,۱-۳)$ +

$f'_+(۲)=\big((x-۳)\times-(x-۲)(x-۳)\big)'=-\big((x-۲)(x-۳)^۲\big)'$

فقط از عامل صفرکننده مشتق میگیریم $=-۱\,(x-۳)^۲\overset{x=۲}{=}-۱$

۴۱- خط مماس بر منحنی $y=|x|\sqrt{a+x}$ در نقطهٔ گوشه ای، برهم عمودند. مقدار a کدام است؟ (ماز ۱۴۰۰)

نقطهٔ گوشه‌ای ریشهٔ درجه یک عبارت داخل قدرمطلق است. $x=۰$

۱) −۱

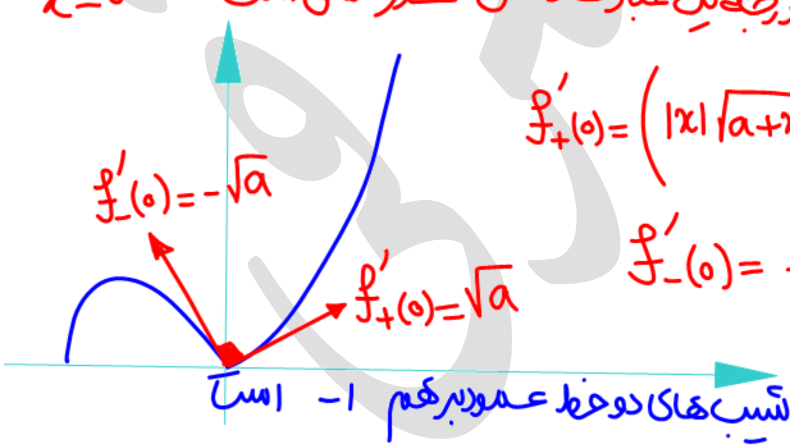
۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۲

۴) ۱

$f'_+(0)=\big(|x|\sqrt{a+x}\big)'=\big(x\sqrt{a+x}\big)'=1\sqrt{a+x}\overset{x=0}{=}\sqrt{a}$

$f'_-(0)=-\sqrt{a}$



$\sqrt{a}\times-\sqrt{a}=-1 \Leftarrow$ حاصل ضرب شیب های دو خط عمود برهم −۱ است

$a=1$

۴۲-اگر $f(x)=\begin{cases}|x-۲|+x & x\le ۳\\ |x^۲+۲x|-۴x+۱ & x>۳\end{cases}$ مجموع عرض نقاط گوشه ای $y=۲f(-۳x+۱)-۴$ کدام است؟(سنجش ۹۹)

$x=۲$

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۸

$f(x)=\begin{cases}|x-۲|+x & x\le ۳\\ (x^۲+۲x)-۴x+۱ & x>۳\end{cases} \longrightarrow f(x)=\begin{cases}|x-۲|+x & x\le ۳\\ x^۲-۲x+۱ & x>۳\end{cases}$

$x=۲$ یک نقطهٔ گوشه‌ای تابع است و نقطهٔ گوشه‌ای دیگر $x=۳$ است.

عرض جدید

$(۲,|۲-۲|+۲)=(۲,۲)\in f(x) \rightarrow ۲(۲)-۴=۰$

$(۳,|۳-۲|+۳)=(۳,۴)\in f(x) \rightarrow ۲(۴)-۴=۴$

$+$

۴

ب) مشتق توابع رادیکالی در نقاطی که عبارت زیر رادیکال را صفر می کند بی نهایت است و وجود ندارد.در صورتی که عامل صفر کننده ای در آن ضرب شود مشتق پذیر می شود. برای نمونه تابع به ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲-۱}$ در $x=۱$ مشتق ناپذیر است ولی تابع $f(x)=(x-۱)\sqrt[۳]{x^۲-۱}$ در $x=۱$ مشتق پذیر است و مشتق آن صفر است.

واکسن $x=۱$

۴۳- در کدام نقطه زیر مماس بر منحنی $y=\sqrt[3]{x^{2}-3x+2}+\sqrt{|x-3|}$ **عمودی نیست؟**

~~۱) ۱~~

مماس بر تابع رادیکالی در ریشه‌های آن عمودی است.

~~۲) ۲~~

~~۳) ۳~~

۴) ۴

$x=1 \longrightarrow \sqrt[3]{1^{2}-3+2}=0$ مماس عمود

$x=2 \longrightarrow \sqrt{2^{2}-3(2)+2}=0$ مماس عمود

$x=3 \longrightarrow \sqrt{|3-3|}=0$ مماس عمود

۴۴- اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x>1\\ -\sqrt{x-1} & x\le 1\end{cases}$ **باشد، نمودار تابع** $y=f^{-1}(x)$ **در نقطهٔ برخورد با محور y ها چه وضعیتی دارد؟ (سنجش ۱۴۰۰)**

۱) مشتق پذیر

۲) گوشه ای

۳) مماس قائم

۴) ناپیوسته

پ) تابع های براکتی در نقاطی که داخل براکت به ازای آن ها عضو $\mathbb{Z}$ (رُند) شود ناپیوسته اند و با ضرب یک عامل صفر کننده در براکت، پیوسته ولی مشتق ناپذیر و با ضرب عامل صفرکنندۀ دوم مشتق پذیر می شوند.برای نمونه تابع $f(x)=[x^۲]$ در $x=۲$ ناپیوسته است. تابع $f(x)=(x-۲)[x^۲]$ در $x=۲$ پیوسته ولی مشتق ناپذیر است .تابع $f(x)=(x-۲)^۲[x^۲]$ در $x=۲$ مشتق پذیر است.

۴۵- تابع $f(x)=(x^۲-ax+b)\left[\frac{۱}{x}\right]$ در $x=۱$ مشتق پذیر است. حاصل $a+b$ کدام است؟

(قلم چی ۱۴۰۰)

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

۴۶- تابع $f(x)=|x^{۲}-x|-۲x[x]$ در بازهٔ $(-۱,۲)$ چند نقطهٔ مشتق ناپذیر دارد؟(ماز۱۴۰۰)

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

مشتق پذیری روی بازه :

تابع $f(x)$ را روی بازهٔ $[a,b]$ مشتق پذیر می گوئیم هر گاه:

۱- تابع در $x=a$ مشتق راست داشته باشد.

۲- تابع روی بازهٔ (a,b) در هر نقطه مشتق پذیر باشد.

۳- تابع در $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.

نکته:

توابع معمولاً روی دامنهٔ تعریفشان مشتق پذیرند مگر موارد **الف**، **ب**،**پ** که در بالا برای تان گفتم.برای نمونه تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ روی $\mathbb{R}-\{۱\}$ مشتق پذیر است.

۴۷- کدام تابع روی بازهٔ $[\cdot, +\infty)$ مشتق پذیر است؟

۱) $y=\sqrt{x}$

۲) $y=\sqrt[3]{x}$

۳) $y=|x|$

۴) $y=[x]$

تست های قواعد مشتق گیری :

فرمول های این بخش را در قسمت هوپیتال جزوهٔ حد کار کردیم

۴۸- مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left(\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}+۲x}}{x^{۲}-x}\right)^{۳}$ در نقطهٔ $x=۲$ کدام است؟ (تجربی داخل ۹۹)

۱) $-\frac{۳}{۴}$

۲) $-\frac{۵}{۴}$

۳) $-\frac{۵}{۲}$

۴) $-\frac{۱۵}{۴}$

۴۹-مقدار مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۳]{\left(\frac{۲x-x^{۲}}{۳x+۵}\right)^{۲}}$ در نقطهٔ $x=-۲$ کدام است؟

(تجربی خارج ۹۹)

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

۵۰- مشتق عبارت $y=\left(\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{۱}{۳}}$ در نقطهٔ $x=۴$ کدام است ؟(ماز۱۴۰۰)

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۶}$

۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۵۱- اگر $f(x)=\sqrt{۲x+۱+۲\sqrt{x^۲+x-۱۲}}$ باشد حاصل $\lim\limits_{x\to ۱۲}\frac{f(x)-f(۱۲)}{x-۱۲}$ کدام است؟

(سنجش ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۷}{۲۴}$

۲) $\frac{۳}{۱۶}$

۳) $\frac{۷}{۱۸}$

۴) $\frac{۳}{۲۲}$

۵۲- تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-۳x+۱}{-۳x+۲}$ در تساوی $g(x)=(-۳x+۲)f'(x)$ صدق می کند. مقدار $g(۱)$ کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۰)

۱) ۱

۲) ۱-

۳) ۲

۴) ۲-

۵۳- خط $y=۲x-۵$ در نقطهٔ $x=۲$ برنمودار تابع $y=f(x)$ و در نقطهٔ $x=۰$ برخط $y=g(x)$ مماس است.اگر $h(x)=f(x+۱)g(۱-x)$ باشد. مقدار $h'(۱)$ کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۰)

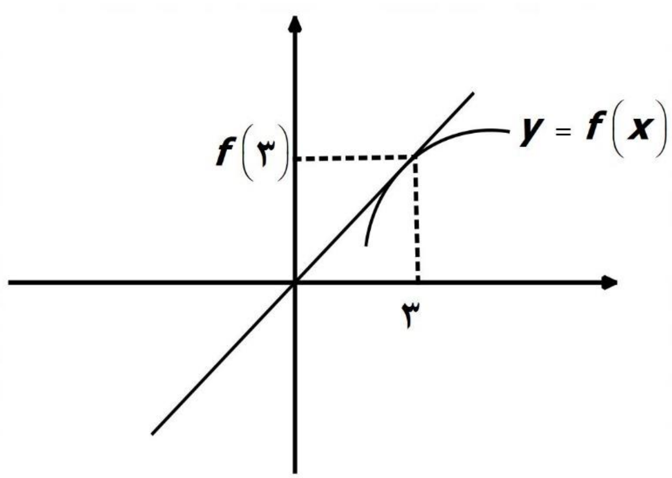
۱) ۱۲-

۲) ۱۰-

۳) ۸-

۴) ۶-

۵۴- اگر نمودار تابع $f(x)$ و مماس بر آن در نقطهٔ به طول ۳ روی منحنی به شکل زیر باشد، مشتق $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ در $x=۳$ کدام است؟(سنجش



۱) صفر

۲) $\frac{۱}{۳}f'(۳)$

۳) $\frac{۱}{۳}f(۳)$

۴) ۳

۵۵- اگر $f(x)=\left(\sqrt{x+۲}-\sqrt{x+۱}\right)^{۶}$ و $g(x)=\left(\sqrt{x+۲}+\sqrt{x+۱}\right)^{۵}$ باشد حاصل $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ در $x=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}-۲}$

۲) $\frac{۱-\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}$

۳) $\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲}$

۴) $\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}}$

۵۶- اگر $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ و $f(x).f''(x)+(f'(x))^۲=\frac{k}{x^n}$ باشد، حاصل اعداد صحیح $k+n$ کدام است؟

۱) ۴

۲) ۲

۳) ۱

۴) صفر

۵۷- اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۱}$ باشد حاصل $(x^۲+۱)f''(x)+xf'(x)$ کدام است؟(سنجش ۱۴۰۰)

۱) $xf''(x)$

۲) $f(x)$

۳) $xf'(x)$

۴) $۲xf(x)$

۵۸- خط d بر منحنی $y=(f.g)(x)$ در نقطهٔ $(۴,۶)$ مماس است و محور x ها را در نقطه ای به طول ۱ قطع می کند . حاصل $\frac{f'(۴)}{f(۴)}+\frac{g'(۴)}{g(۴)}$ کدام است؟(سنجش ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۵}$

مشتق گیری از تابع در نقطهٔ خاص:

مشتق از عامل صفر کننده: در توابع به فرم $f(x)=(x-a)g(x)$ برای مشتق گیری در $x=a$ از تابع $f(x)$ فقط کافی است از عامل صفر کننده مشتق بگیریم.

۵۹- مشتق تابع $f(x)=\frac{(x^{۲}-۴)(x^{۲}-۳)^{۴}}{\sqrt{x^{۳}+۱}}$ **در** $x=۲$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) $-\frac{۹}{۳}$

۳) $\frac{۴}{۹}$

۴) $\frac{۹}{۴}$

مشتق تابع مرکب:

مشتق این تابع برابر است با:

$$(fog)'(x)=g'(x).f'(g(x))$$

برای نمونه اگر $f'(x)=x^۲+x$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشند مشتق تابع fog برابر است با:

$$(fog)'(x)=g'(x).f'(g(x))=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\times f'(\sqrt{x})=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\times\left(\left(\sqrt{x}\right)^۲+\left(\sqrt{x}\right)\right)$$

نکته: مشتق تابع مرکب را به صورت زیر نیز می توان نوشت.

$$(f(u))'=u'.f'(u)$$

برای نمونه اگر $f'(x)=x^۲+x$ باشد مشتق تابع $f(۳x^۲+۱)$ برابر است با:

$$\left(f\left(۳x^۲+۱\right)\right)'=\left(۳x^۲+۱\right)'f'\left(۳x^۲+۱\right)=۶x\left(\left(۳x^۲+۱\right)^۲+\left(۳x^۲+۱\right)\right)$$

۶۰- اگر $g(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ و $(fog)'(۲)=۶$ باشد، $f'(۵)$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۲-

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۶۱- اگر $f(x)=۳x-\sqrt{x}$ و $\frac{۳}{۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{g(x)-g(۲)}{x^۲-۴}$ باشد، مقدار $(gof)'(۱)$ کدام است؟

(سنجش ۹۹)

۱) ۹

۲) ۱۲

۳) ۱۵

۴) ۱۸

۶۲- اگر $(fog)'(۱)=۱۲$ و $(g\times g)'(۱)=۴$ و $g(۱)=-۱$ باشد $f'(-۱)$ کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۰)

۱) ۳

۲) ۳-

۳) ۶-

۴) ۶

۶۳- فرض کنید $f(x)=\left(x\left[x^۲+\frac{۱}{۲}\right]\right)^۲+۱$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$ مقدار مشتق تابع fog در $x=\frac{۳}{\sqrt{۸}}$ چند برابر $-۱۲۸\sqrt{۲}$ است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

۱) ۴-

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۴

نکته: اگر ضابطهٔ g,f را داشته باشیم می توانیم به جای استفاده از فرمول مشتق تابع مرکب، ضابطهٔ fog را ساخت سپس برای یافتن $(fog)'$ از ضابطه به دست آمده مشتق گرفت.

۶۴- تابع خطی $f(x)$ در نقطه ای به طول ۲ بر تابع $y=g(x)$ مماس است. اگر $f(-۴)=۰$ و $(fog)'(۲)=\frac{۱}{۴}$ باشند. مقدار $g(۲)$ کدام است ؟ (سنجش ۱۴۰۰)

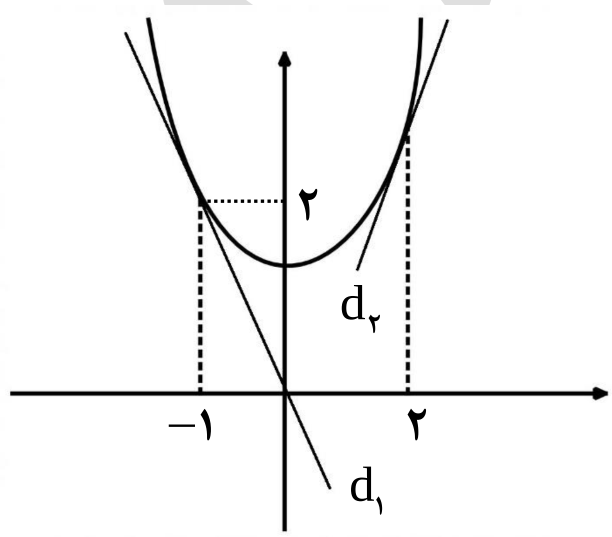
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

۶۵- مطابق شکل زیر، دو خط $d_۱, d_۲$ به ترتیب در نقاطی به طول های ۱-و۲ بر نمودار تابع f مماس هستند. اگر $(fof)'(-۱)=-۵$ باشد شیب خط $d_۲$ کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)



۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) ۲

۳) $\frac{۵}{۲}$

۴) ۳

دامنهٔ تابع مشتق:

دامنهٔ تابع مشتق همان دامنهٔ تابع است مگر نقاطی که در آن ها، مشتق موجود نباشد.

$$D_{f'} = D_f - \left\{ \text{X هایی که تابع درآن مشتق نداشته باشد} \right\}$$

برای نمونه دامنهٔ خود تابع $f(x)=\sqrt{۱-|x|}$ بازهٔ $[-۱,۱]$ است و این تابع در نقطهٔ $x=۰$ به خاطر صفر شدن داخل قدر مطلق و نقطه های $x=\pm ۱$ به خاطر صفر شدن عبارت زیر رادیکال مشتق ناپذیر است. بنابراین دامنهٔ تابع مشتق برابر است با:

$$D_{f'}=[-۱,۱]-\{۰,۱,-۱\}$$

۶۶- دامنهٔ تابع مشتق $f(x)=(x-۱)|x^۲-x^۳|$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$

۲) $\mathbb{R}-\{۱\}$

۳) $\mathbb{R}-\{۰\}$

۴) $\mathbb{R}-\{۰.۱\}$

آهنگ تغییر:

آهنگ متوسط تغییر بین دو نقطه : $\dfrac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$

آهنگ لحظه ای تغییر در یک نقطه: $f'(x_۰)$

نکته:

فقط در تابع درجهٔ دوم، آهنگ لحظه ای در وسط یک بازه با آهنگ متوسط آن بازه برابرند.

۶۷- در تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{x}$ اختلاف آهنگ تغییر لحظه ای در $x=۲$ ، از آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۱,۴]$ کدام است؟ (۹۸ تجربی)

۱) ۰/۲۵

۲) ۰/۵

۳) ۰/۴۵

۴) ۰/۷۵

۶۸- آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sqrt{۲۱-x^{۲}+۴x}$ در بازهٔ $[۵,۶]$ ، برابر آهنگ تغییر لحظه ای این تابع، با کدام مقدار x است؟ (ریاضی داخل ۹۹)

۱) $۴+\sqrt{۲}$

۲) $۳+۲\sqrt{۲}$

۳) $۲+\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$

۴) $۲+\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$

۶۹-آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{۲\sqrt{x}+x+۱}$ در بازهٔ $[۴,۹]$ با آهنگ تغییر لحظه ای آن در نقطهٔ $x=a$ برابر است. مقدار a کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۰)

۱) ۵/ ۷۶

۲) ۶/ ۲۵

۳) ۶/ ۷۶

۴) ۷/ ۲۹

۷۰- در کدام بازه تابع $y = x^۳ - ۶x^۲ - ۱۵x + ۱$ آهنگ تغییر لحظه ای مثبت و در حال کاهش است؟

(سنجش ۹۹)

۱) $(-۱,۲)$

۲) $(۲,۵)$

۳) $(-\infty,-۱)$

۴) $(۵,+\infty)$

معادلهٔ خط مماس:

معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $(\alpha, f(\alpha))$ برابر است با:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

۷۱- خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ در نقطهٔ $x=4$ واقع بر آن محور y ها را با کدام عرض قطع می کند؟(ریاضی داخل ۹۹)

۱) -4

۲) -1

۳) 2

۴) 3

۷۲- تابع $y=f(x)$ همواره مشتق پذیر است. حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-h}{h}$ برابر ۵ است . معادلهٔ خط مماس بر منحنی در $x=1$ کدام است؟

۱) $y=\frac{-5x}{2}+\frac{5}{2}$

۲) $y=-3x+3$

۳) $y=\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}$

۴) $y=-3x-3$

۷۳- برای توابع g, f داریم $g(x^۲+۱)=\sqrt{۲f(x)+۱}$ ، $g'(۱۰)=\frac{۱}{۲}$ و $f'(۳)=۹$ معادلهٔ خط مماس بر منحنی f در $x=۳$ کدام است ؟

۱) $y=۹x-۲۳$

۲) $y=۹x-۲۱$

۳) $y=۹x+۲۱$

۴) $y=۹x+۲۳$

۷۴-خطوط مماس بر منحنی تابع $f(x)=|\sin ۲x|+۱$ را در نقطه ای به طول $x=۰$ رسم می کنیم. اگر B, A به ترتیب نقاط برخورد خطوط مماس با نیمساز ربع دوم و چهارم باشند، طول پاره خط AB کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰- مخصوص رشته ریاضی)

۱) صفر

۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

۳) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$

۴) $۲\sqrt{۲}$

نکته: اگر خط $g(x)$ بر منحنی $f(x)$ در $x=\alpha$ مماس باشد آنگاه: $\begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$

۷۵- خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه های $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=ax^{۲}+bx$ در نقطهٔ $x=۲$ ، مشترک اند. مقدار b کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

۷۶- فرض کنید نمودارهای دو تابع $y=x\sqrt{x}$ و $y=x^{۲}+ax+b$ در یک نقطهٔ مشترک، بر یک خط مماس باشند.اگر طول نقطهٔ مشترک ۴ باشد.مقدار b کدام است؟(ریاضی خارج ۹۹)

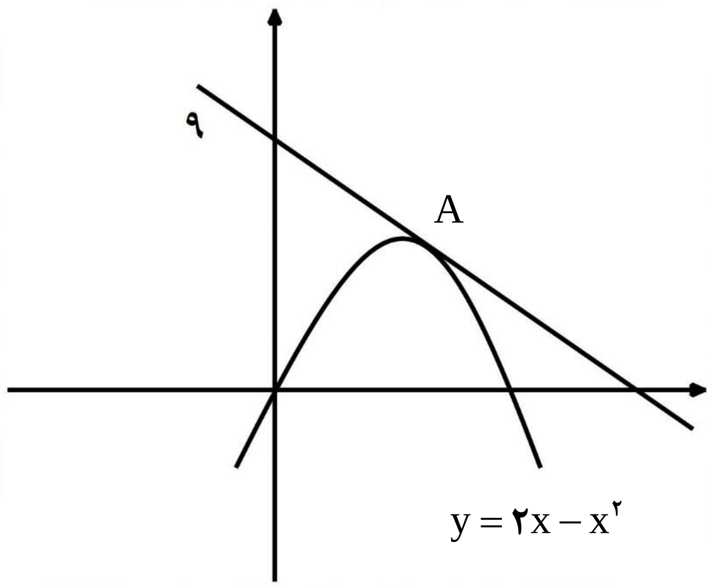
۱) ۸

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۱۲

۷۷- در شکل مقابل خط d بر منحنی تابع $f(x)$



۱) $\frac{۵}{۲}$

۲) $\frac{۷}{۲}$

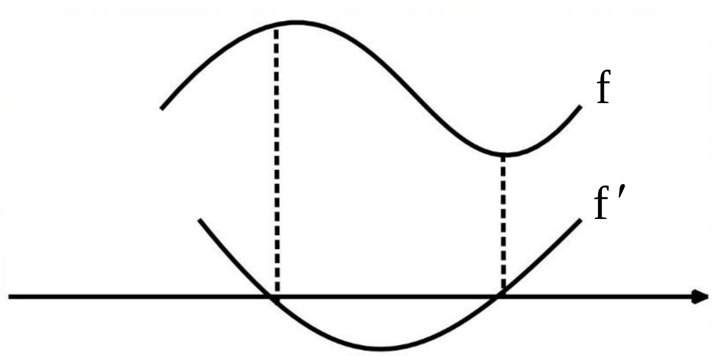
۳) ۳

۴) $\frac{۸}{۳}$

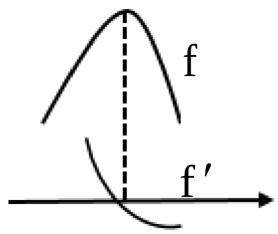
ارتباط بین نمودارهای f', f

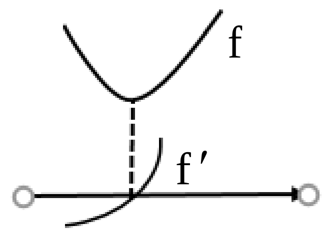
هرگاه نمودار تابع f صعودی اکیدا باشد نمودار f' بالای محور طول هاست.

هر گاه نمودارتابع f نزولی اکید باشد نمودار f' زیر محور طول هاست.

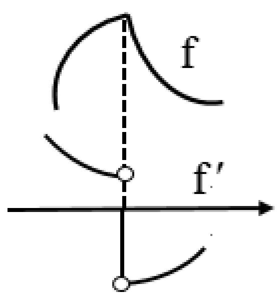


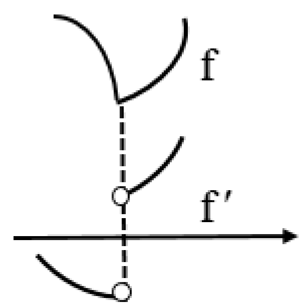
۱- نقاط ماکزیمم یا مینیمم معمولی $(f'=۰)$ تابع، ریشه های نمودار f' است.



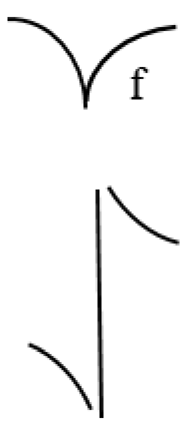


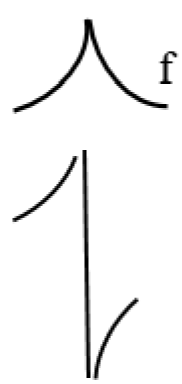
۲- نقاط اکسترمم گوشه تابع، نقطه های ناپیوستگی با تغییر علامت f' است.



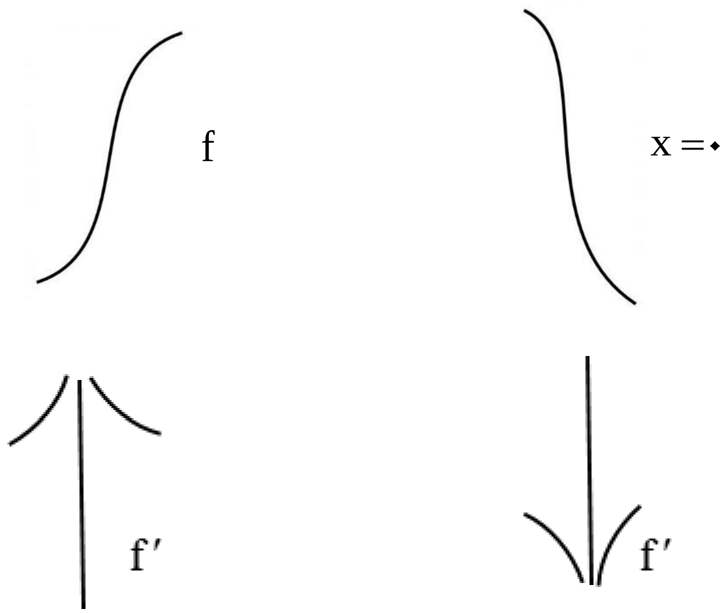


۳- نقاط اکسترمم بازگشت تابع، نقطه های مجانب قائم واگرای تابع مشتق هستند.

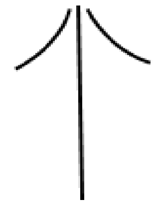


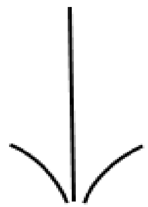


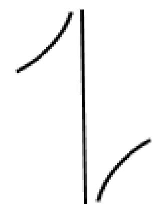
۴- نقطه های لر خوابیده (عطف قائم) تابع، نقاط مجانب قائم همگرای f' هستند.

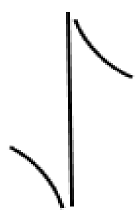


۷۸- نمودار تابع مشتق $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ در اطراف $x=2$ به کدام صورت است؟

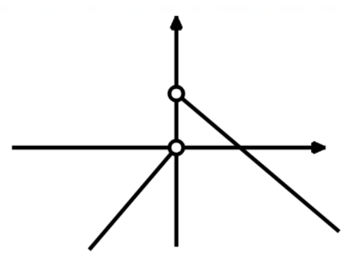
۱) 

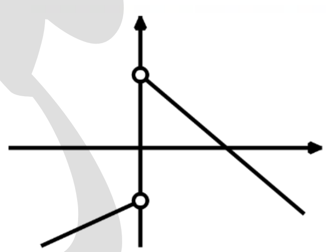
۲) 

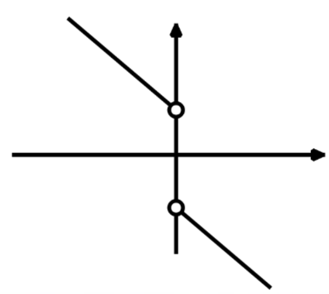
۳) 

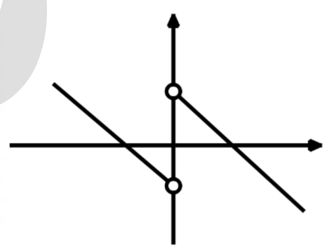
۴) 

۷۹- اگر تابع $f(x)=\left|x^2-3x\right|$ باشد نمودار f' در مجاورت $x=0$ کدام است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

(مخصوص رشته ریاضی)

مشتق مثلثاتی:

قوانین مربوط به این بخش را قبل از قاعدهٔ هوپیتال در فصل حد گفته ام .

۸۰- مقدار مشتق تابع $y=\cos^{۲}\left(\frac{\pi}{۳}+\frac{x}{۴}\right)$ به ازای $x=\frac{\pi}{۳}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$

۲) $-\frac{۱}{۸}$

۳) $\frac{۱}{۸}$

۴) $\frac{۱}{۴}$

۸۱- مقدار مشتق $y=\sqrt{۱+\tan^{۲}\frac{۱}{x}}$ به ازای $x=\frac{۳}{\pi}$ کدام است؟

۱) $\frac{-۲\pi^{۲}\sqrt{۳}}{۹}$

۲) $\frac{-۲\pi^{۲}}{۹}$

۳) $\frac{۲\pi^{۲}}{۹}$

۴) $\frac{۲\pi^{۲}\sqrt{۳}}{۹}$

۸۲- عرض از مبداء خط مماس بر منحنی به معادلۀ $y=\sqrt{\frac{\sin x}{۱+\cos x}}$ در نقطۀ $x=\frac{\pi}{۲}$ واقع برآن کدام است؟

۱) $۱-\frac{\pi}{۴}$

۲) $۱+\frac{\pi}{۴}$

۳) $۱-\frac{\pi}{۲}$

۴) $۱+\frac{\pi}{۲}$

۸۳- اگر θ زاویۀ بین مماس چپ و مماس راست بر نمودار تابع با ضابطۀ $f(x)=\left[۲+\cos\frac{x}{۲}\right]\sin ۲x$ در نقطۀ $x=\pi$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$

۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۹}$

۴) $\frac{۲}{۵}$

۸۴- مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$ در $x=\frac{5\pi}{12}$ چند برابر مقدار تابع در این نقطه است؟

(قلم چی ۱۴۰۰)

۱) $4\sqrt{3}$

۲) $2\sqrt{3}$

۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۴) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

۸۵- مشتق تابع $f(x)=\frac{1-\tan^2 2x}{1+\tan^2 2x}+\frac{2\tan 2x}{1+\tan^2 2x}$ در $x=\frac{\pi}{16}$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}$

۲) $-4\sqrt{2}$

۳) صفر

۴) $2\sqrt{2}$

۸۶- اگر $f(x)=\sin x\cos ۳x$ و $g(x)=\cos x.\sin ۳x$ باشند مقدار $f'\left(\frac{\pi}{۱۲}\right)-g'\left(\frac{\pi}{۱۲}\right)$ برابر کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$

۲) $\sqrt{۳}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۸۷- اگر $f(x)=\frac{۵\sin ۲x}{۱-\cos ۲x}$ و $g(x)=\frac{\tan\frac{x}{۲}}{\tan x}$ باشد، حاصل $f'(x)\times g(x)-f(x)\times g'(x)$ کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۰)

۱) $-\cot^{۲}x\left(۱+\tan^{۲}x\right)$

۲) $-\frac{۵}{۲}\cot^{۲}x\left(۱+\tan^{۲}\frac{x}{۲}\right)$

۳) $\frac{۱۲۵}{۲}\tan^{۲}x\left(۱+\cot^{۲}\frac{x}{۲}\right)$

۴) $\frac{۲۵}{۲}\tan^{۲}x\left(۱+\cot^{۲}\frac{x}{۲}\right)$

۸۸- اگر f یک تابع مشتق پذیر $g(x)=f\left(\sqrt{۱+\tan^{۲} x}\right)$ و $g'\left(\frac{\pi}{۳}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $-\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۱

۸۹-اگر f یک تابع مشتق پذیر، $g(x)=f\left(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}\right)$ و $g'\left(\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشند، مقدار $f'\left(\frac{۱}{۳}\right)$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) $-\frac{۲}{۳}$

۲) $-\frac{۳}{۴}$

۳) $-\frac{۴}{۳}$

۴) $-\frac{۳}{۲}$