جزوه
کاربرد مشتق

استاد اشرفی

www.mathtest.ir

آزمون یکنوایی تابع :

در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آن گاه f در ان بازه اکیداً صعودی است.

در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آن گاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

برای نمونه تابع پیوسته و چند جمله ای $f(x)=x^۳-۳x^۲+۱$ را در نظر بگیرید: مشتق تابع $f'(x)=۳x^۲-۶x$ است.

با تعیین علامت مشتق این تابع، متوجه می شویم تابع $f(x)$ در چه مجموعه ای اکیداً صعودی و در چه مجموعه ای اکیداً نزولی است.

$$f'(x)=۰ \to f'(x)=۳x^۲-۶x=۰ \to ۳x(x-۲)=۰ \to \quad x=۰, \quad x=۲$$

جدول تعیین علامت مشتق را رسم می کنیم.

x		۰		۲	
	+	0	−	0	+
	↗		↘		↗

تابع $f(x)$ روی $[۰,۲]$ اکیداً نزولی است و روی مجموعهٔ $(-\infty,۰],[۲,+\infty)$ صعودی اکید است.

تست

۱- بزرگ ترین بازه ای که تابع $f(x)=\frac{x}{x^{۲}+۱}$ در ان صعودی اکید است را بازهٔ $[a,b]$ می نامیم. $b-a$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

$$f'(x)=\frac{1(x^2+1)-2x(x)}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0$$

$$1-x^2=0 \longrightarrow x=\pm 1$$

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$$[-1,1] \longrightarrow b-a=1-(-1)=2$$

۲- نمودار تابع $f(x)=x^{۳}-۲x^{۲}+۱$ روی کدام بازه اکیداً نزولی است؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

۱) $\left(-\frac{۳}{۴},۱\right)$

۲) $\left(\frac{۱}{۴},+\infty\right)$

۳) $\left(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}\right)$

۴) $\left(۱,\frac{۵}{۳}\right)$

$$f'(x)=3x^2-4x=0 \longrightarrow x(3x-4)=0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{4}{3} \end{cases}$$

x		0		$4/3$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\left[0,\frac{4}{3}\right]$$

تابع در گزینه زیرمجموعه از بازهٔ بالا اکیداً نزولی است.

۳-تابع $f(x)=x^{3}+3x^{2}+ax-1$ همواره اکیداً صعودی است. بزرگ‌ترین مجموعهٔ a کدام است؟

۱) $a \leq 4$

۲) $\boxed{a \geq 3}$

۳) $a \geq 2$

۴) $a \leq 5$

مثال $g(x)=x^3 \longrightarrow$ اکیداً صعودی $\quad g'(x)=3x^2 \geq 0$

$g'(x) \geq 0$:
- $g'(x)=0$ متناهی نقطه $\longrightarrow$ اکیداً صعودی
- $g'(x)=0$ بی‌شمار نقطه $\longrightarrow$ صعودی

$f'(x)=3x^2+6x+a \geq 0 \xrightarrow{\text{سال دهم}} \begin{cases} 3>0 \\ \Delta \leq 0 \to 36-12a \leq 0 \to 12a \geq 36 \to a \geq 3 \end{cases}$

$\cancel{a>3}$

۴- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{2x^{2}-3x}{x^{2}+x+3}$ در بازهٔ $(a,+\infty)$ صعودی اکیداست.حداقل مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$

۲) -3

۳) $-\frac{3}{5}$

۴) 3

$$f'(x)=\frac{(4x-3)(x^2+x+3)-(2x+1)(2x^2-3x)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$f'(x)=(\cancel{4x^3}+4x^2+12x-3x^2-3x-9)-(\cancel{4x^3}-6x^2+2x^2-3x)$$

$$f'(x)=\boxed{5x^2+12x-9}=0 \Longrightarrow \frac{1}{5}(5x+15)(5x-3)=0$$

-45 ضرب   جمع

$x=-3 \ , \ x=\frac{3}{5}$

$-3 \quad 3/5$

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \longrightarrow f'(x)=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

۵- تابع $f(x)=(x-۱)|x|$ در کدام بازه نزولی است؟

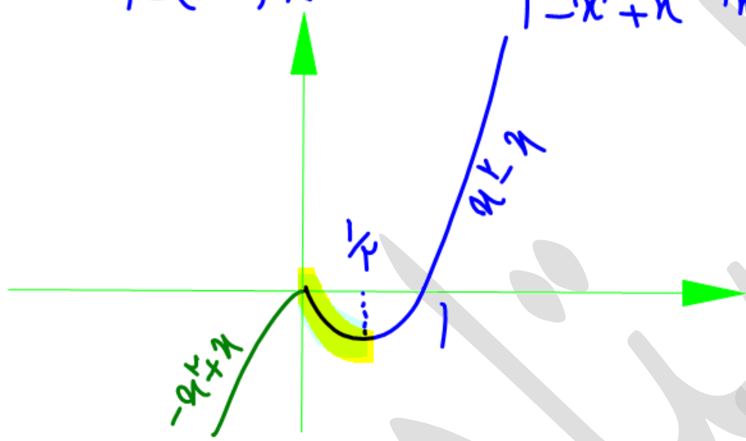
۱) $\left(۰,\frac{۱}{۲}\right)$

۲) $(۰,۱)$

۳) $(-\infty,۰)$

۴) $(۰,+\infty)$

$$f(x)=(x-1)|x|=\begin{cases}(x-1)x & x\geq 0\\ -(x-1)x & x<0\end{cases}=\begin{cases}x^2-x & x\geq 0\\ -x^2+x & x<0\end{cases}$$



نکته:برای بررسی یکنوایی تابع های ناپیوسته و مشتق ناپذیر بهتر است آن ها را رسم کنیم. این موضوع بیش تر در تابع های چند ضابطه ای، قدر مطلقی و براکتی استفاده می شود.

۶- در کدام بازه تابع $f(x)=x^۳-۳|x|$ اکیداً صعودی است ؟ (ماز ۱۴۰۰)

۱) $(-\infty,-۱)$

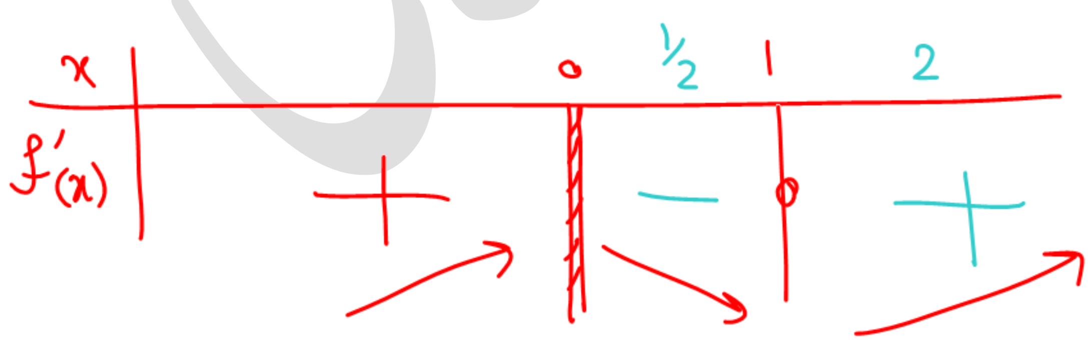
۲) $(-\infty,۱)$

۳) $(۰,+\infty)$

۴) $(-۱,+\infty)$

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x & x\geq 0\\ x^3+3x & x<0\end{cases}\longrightarrow f'(x)=\begin{cases}3x^2-3=0 & x\geq 0\\ 3x^2+3\neq 0 & x<0\end{cases}$$

$$3x^2=3\rightarrow x^2=1\rightarrow x=\pm 1$$



$3\sqrt[3]{x} \rightarrow \frac{3}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

۷-مجموعه مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x) = ۳\sqrt[۳]{x} + |x|$ صعودی باشند، کدام است؟

(ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) $[-۱, +\infty)$

۲) $(-\infty, +\infty)$

۳) $[-۱, ۰) \cup (۰, +\infty)$

۴) $[-۳\sqrt{۳}, ۰]$

$$f(x) = \begin{cases} 3\sqrt[3]{x} + x & x \geq 0 \\ 3\sqrt[3]{x} - x & x < 0 \end{cases} \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 \neq 0 & x > 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 = 0 & x < 0 \end{cases}$$

$\sqrt[3]{x^2} = 1 \rightarrow x = -1$

$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - 1$ دلخواه

$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}} - 1$

x		-2		-1		$-\frac{1}{2}$		0	
$f'(x)$		$-$		0		$+$		‖	$+$

تابع در $x=0$ موجود است و مشتق در این نقطه وجود ندارد بنابراین تابع در بازه $[-1, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۸- تابع $f(x) = \frac{x}{۴ - x^۲}$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟ (ماز ۱۴۰۰)

۱) $\mathbb{R}$

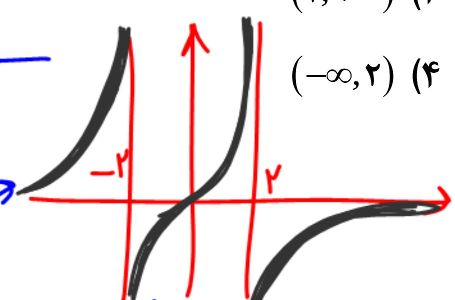
۲) $\mathbb{R} - \{-۲, ۲\}$

۳) $(۲, +\infty)$

۴) $(-\infty, ۲)$

$$f'(x) = \frac{1(4-x^2) - (-2x)x}{(4-x^2)^2} = \frac{4+x^2}{(4-x^2)^2} \neq 0$$

x		-2		2	
$f'(x)$	$+$	‖	$+$	‖	$+$



تابع در بازه‌های $(-\infty, -2)$ و $(-2, 2)$ و $(2, +\infty)$ اکیداً صعودی است

~~$(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$~~ غلط

نکته: اگر توابع در همسایگی محذوف مجانب قائم شان موجود باشند لزوماً غیر یکنوا هستند.

۹- دربارهٔ تابع $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^3-3x}$ کدام مورد درست نیست؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

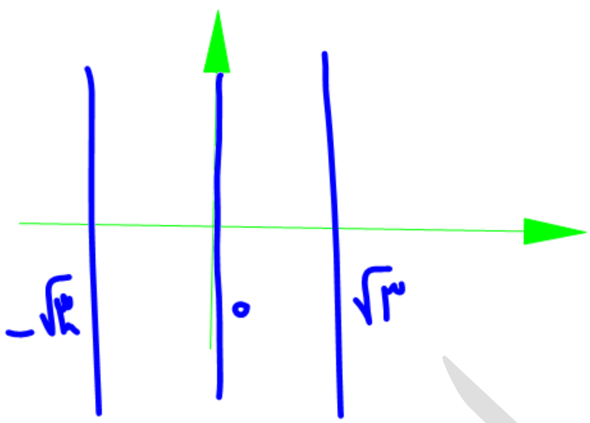
$x^3-3x=0 \longrightarrow x(x^2-3)=0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2=3 \longrightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

۱)روی دامنه اش اکیداً صعودی است.

۲) نمی توان بازه ای یافت که تابع روی آن نزولی باشد.

۳) غیر یکنواست

۴) می توان بازه ای یافت که تابع روی آن اکیداً صعودی است.



۱۰- بازه هایی که تابع $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-8}$ در آن ها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. مینیمم طول این بازه ها کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

$x^3-8=0 \longrightarrow x=2$

$f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-8} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{4x^3(x^3-8)-3x^2(x^4)}{(x^3-8)^2}$

۱) ۲

۲) $\sqrt[3]{4}-1$

۳) $2\sqrt[3]{4}$

۴) $2(\sqrt[3]{4}-1)$

$f'(x)=\dfrac{x^3(4x^3-32-3x^3)}{(x^3-8)^2}=\dfrac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}=0$

$x=0$ و $x^3=32 \longrightarrow x=\sqrt[3]{32}=2\sqrt[3]{4}$

x		0		2		$2\sqrt[3]{4}$	
$f'(x)$	$+$		$-$	‖	$-$		$+$

تابع روی بازه‌های $(0,2)$ و $(2,2\sqrt[3]{4})$ اکیداً نزولی است.

$b-a=2\sqrt[3]{4}-2$

$ax-4=0 \longrightarrow x=\frac{4}{a}$

۱۱- تابع $f(x)=\frac{x+1}{ax-4}$ به ازاء کدام مجموعه ازمقادیر a روی بازهٔ $(2,+\infty)$ اکیداً نزولی است؟

$f'(x)<0 \longrightarrow \frac{1(ax-4)-a(x+1)}{(ax-4)^2}=\frac{-4-a}{(ax-4)^2}<0 \longrightarrow -4-a<0 \longrightarrow a>-4$

۱) $a<-4$ ✗

۲) $-4\leq a\leq 0$

۳) $a\geq 2$

۴) $a>-4$

ریشهٔ مخرج $\notin (2,+\infty) \Longrightarrow$ ریشهٔ مخرج $\in (-\infty,+2]$

$\frac{4}{a}\leq 2 \longrightarrow \frac{4}{a}-2\leq 0$

$\frac{4-2a}{a}\leq 0$

		0		2	
$4-2a$	+		+	0	−
a	−	0	+		+
	−		+		−

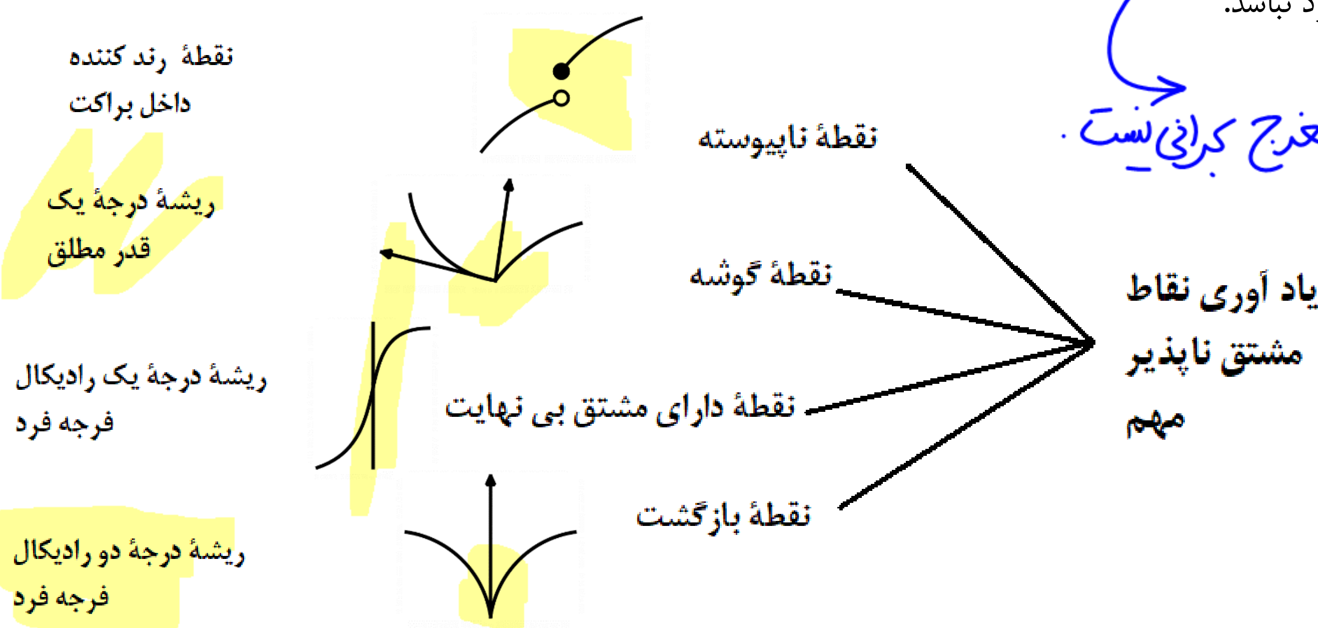
$a<0$ یا $a\geq 2$

جواب نهایی: $\{a>-4\}\cap\{a<0$ یا $a\geq 2\} = \{-4<a<0\}\cup\{a\geq 2\}$

نقطهٔ بحرانی:

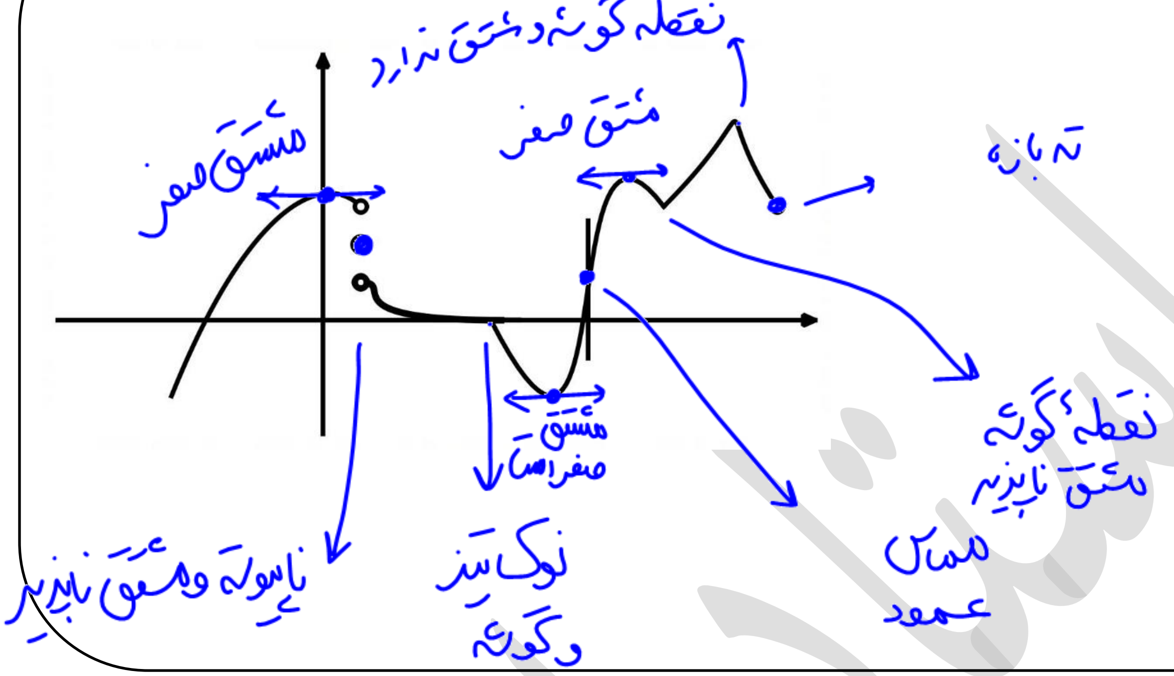
فرض کنید $C \in D_f$، نقطهٔ به طول C را یک نقطهٔ بحرانی برای تابع f می نامیم. هر گاه $f'(C)$ برابر صفر باشد یا موجود نباشد.

ریشه‌ی مخرج بحرانی نیست.



نکته: نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته بحرانی محسوب می شوند.

۱۲- تابع $f(x)$، نموداری به شکل زیر دارد. این تابع چند نقطهٔ بحرانی دارد؟



۱) ۶

۲) ۷

۳) ۸

۴) ۹

۱۳- تابع $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x+1)-1(x^2-x)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2-x+2x-1-x^2+x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0\longrightarrow\begin{cases}x=0 & \text{بحرانی}\\ x=-2 & \text{بحرانی}\end{cases}$$

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

$x=-1$ نقطهٔ مشتق ناپذیر تابع است ولی چون جزو دامنه نیست بحرانی محسوب نمی‌شود.

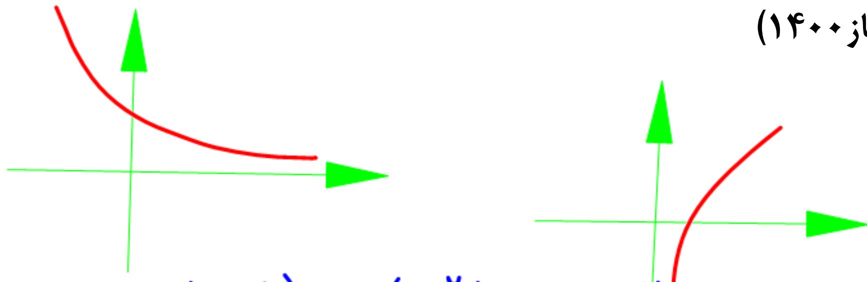
۱۴- کدام تابع نقطهٔ بحرانی دارد؟ (ماز ۱۴۰۰)

۱) $y = 3^{-x}$ $\left(\frac{1}{3}\right)^x$

۲) $y = \log x$

۳) $y = \frac{x^2}{x+5}$ دو بحرانی دارد

۴) $y = \frac{x^2-4}{x-1}$



$$y' = \frac{2x(x+5) - 1(x^2)}{(x+5)^2} = \frac{x^2 + 10x}{(x+5)^2} = 0$$

$x = 0 \ , \ x = -10$

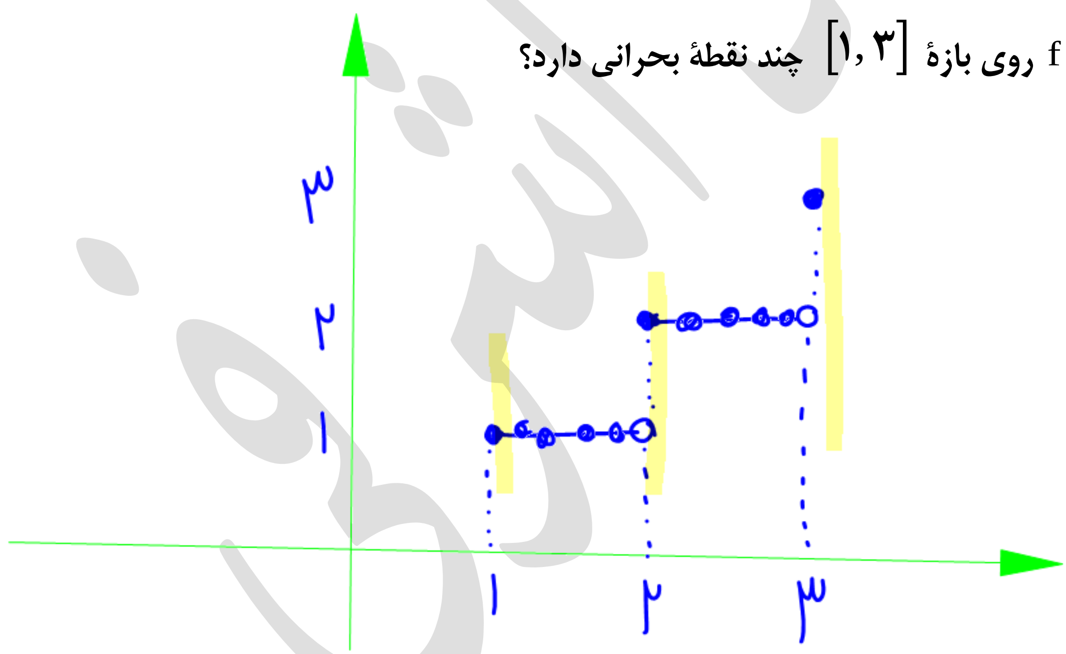
۱۵- تابع $f(x) = [x]$ روی بازهٔ $[1, 3]$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) صفر

۲) ۲

۳) ۳

۴) بی شمار



۱۶- تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-x & x<1 \\ 2x & x\ge 1 \end{cases}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

تابع در $x=1$ ناپیوسته است و در نتیجه مشتق ندارد و بحرانی است.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-1=0 & x<1 \checkmark \text{ OK} \longrightarrow x=\frac{1}{2} \\ 2\neq 0 & x>1 \end{cases}$$

بحرانی

۱۷- تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}\,|x-1|$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

در تابع‌هایی که به صورت ضرب قدرمطلق هستند برای یافتن نقاط بحرانی دارای مشتق صفر می‌توانیم قدر را بی‌خیال شویم

$f(x)=\sqrt[3]{x}\,|x-1|$

این تابع در $x=0$ به دلیل صفر زیر رادیکال و در $x=1$ به دلیل صفر شدن داخل قدرمطلق مشتق ناپذیر است.

$$f(x)=\sqrt[3]{x}(x-1)=x^{1/3}(x-1)=x^{4/3}-x^{1/3}$$

$$f'(x)=\frac{4}{3}x^{1/3}-\frac{1}{3}x^{-2/3}=0 \Longrightarrow \frac{4}{\cancel{3}}x^{1/3}=\frac{1}{\cancel{3}x^{2/3}}$$

$$4x^{1/3}x^{2/3}=1 \longrightarrow 4x=1 \longrightarrow x=\frac{1}{4}$$

۱۸- تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=x\left|x^{2}-x\right|$ کدام است؟

$x^2-x=0 \longrightarrow x(x-1)=0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

۱) ۲

۲) ۳

تابع در $x=1$ مشتق ناپذیر و بحرانی است و در $x=0$ مشتق صفر و بحرانی است.

۳) ۴

$y=|x| \longrightarrow y=x|x|$

۴) ۵

$f(x)=x(x^2-x) \longrightarrow f'(x)=(x^3-x^2)'=3x^2-2x=0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$

تابع در $\{0, 1, \frac{2}{3}\}$ بحرانی دارد.

۱۹- تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=x+\left|x^{2}-1\right|$ کدام است؟

x^2-1: $+$ ، -1 ، $-$ ، $+1$ ، $+$

$|(x-1)(x+1)|$

۱) ۱

۲) ۲

تابع در $x=1$ و $x=-1$ ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق و مشتق ناپذیر و بحرانی است.

۳) ۳

$f(x)=\begin{cases} x+(x^2-1) & x\geq 1 \text{ یا } x\leq -1 \\ x-(x^2-1) & -1<x<1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 1+2x=0 & x>1 \text{ یا } x<-1 \\ 1-2x=0 & -1<x<1 \end{cases}$

۴) ۴

$x=-\frac{1}{2}$ NO

$x=\frac{1}{2}$ OK

تابع سه نقطه‌ی $\{-1, 1, \frac{1}{2}\}$ بحرانی دارد.

۲۰- طول یکی از نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^{\frac{۷}{۶}}-\frac{۷}{۲}x^{\frac{۲}{۳}}+۴$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$

۲) ۲

۳) ۴

۴) $۲\sqrt{۲}$

$f'(x)=\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}-\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)x^{-1/3}=0 \Rightarrow \frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}=\frac{7}{3}x^{-1/3}$

$\frac{\cancel{7}}{\cancel{6}_{2}}x^{\frac{1}{6}}=\frac{\cancel{7}}{\cancel{3}\,x^{1/3}} \Rightarrow \frac{x^{\frac{1}{6}}}{2}=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow$

$x^{\frac{1}{6}}\cdot x^{\frac{1}{3}}=2 \longrightarrow x^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}=2 \longrightarrow x^{\frac{1}{2}}=2 \longrightarrow \sqrt{x}=2 \longrightarrow x=4$

$(x-1)^{4/3}\quad(x+1)^{1/3}$

$\frac{1}{3}\quad + \quad - \quad \times\ \frac{4}{3}$

$\frac{1}{3}+\frac{4}{3}$

$=\frac{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}{5/3}=\frac{-1}{5/3}=\frac{-3}{5}$

۲۱- مجموعه طول های نقاط بحرانی تابع $f(x)=|x-1|\sqrt[3]{x^{۲}-۱}$ کدام است؟(قلم چی ۱۴۰۰)

۱) $\left\{۱,-۱,\frac{۳}{۵}\right\}$

۲) $\left\{۱,-\frac{۳}{۵}\right\}$

۳) $\left\{-۱,\frac{۳}{۵}\right\}$

۴) $\left\{۱,-۱,-\frac{۳}{۵}\right\}$

$f(x)=|x-1|\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}=|x-1|\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x+1}$

تابع در $x=-1$ مشتق ناپذیر است. در $x=1$ زیر رادیکال و داخل قدر مطلق هر دو با هم صفر میشوند پس مشتق در این نقطه صفر و تابع در این بحرانی دارد

$f(x)=(x-1)(x-1)^{1/3}(x+1)^{1/3}=(x-1)^{4/3}(x+1)^{1/3}$

$f'(x)=\frac{4}{3}(x-1)^{1/3}(x+1)^{1/3}+\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}(x-1)^{4/3}=0$

$\frac{4}{3}\cancel{(x-1)^{1/3}}(x+1)^{1/3}=-\frac{1}{3}\frac{\cancel{(x-1)^{4/3}}}{(x+1)^{2/3}} \rightarrow 4(x+1)^{1/3}(x+1)^{2/3}=-(x-1)^{1}$

$4(x+1)^{1}=-x+1 \rightarrow 4x+4=-x+1 \rightarrow 5x=-3 \rightarrow x=-3/5$

۲۲- به ازاء چند مقدار صحیح a تابع $f(x)=\left|ax^{۲}+ax+۱\right|$ فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد؟

(سنجش ۱۴۰۰)

۱) ۶

۲) ۵

۳) ۴

۴) ۳

$\Delta \leqslant 0 \longrightarrow a^2-4(a)(1)\leqslant 0 \longrightarrow a^2-4a\leqslant 0 \longrightarrow a(a-4)\leqslant 0$

	0		4	
$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$

$\Longrightarrow 0 \leqslant a \leqslant 4$

به ازای $a=0$ تابع به صورت $f(x)=|0x^2+0x+1|$ در می‌آید که خط ثابت است

و بی‌شمار نقطهٔ بحرانی دارد.

ماکزیمم مطلق :

نقطه ای به طول C از دامنهٔ تابع f،یک نقطهٔ ماکزیمم مطلق برای تابع نامیده می شود. هر گاه به ازای هرx از دامنهٔ تابع f داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$

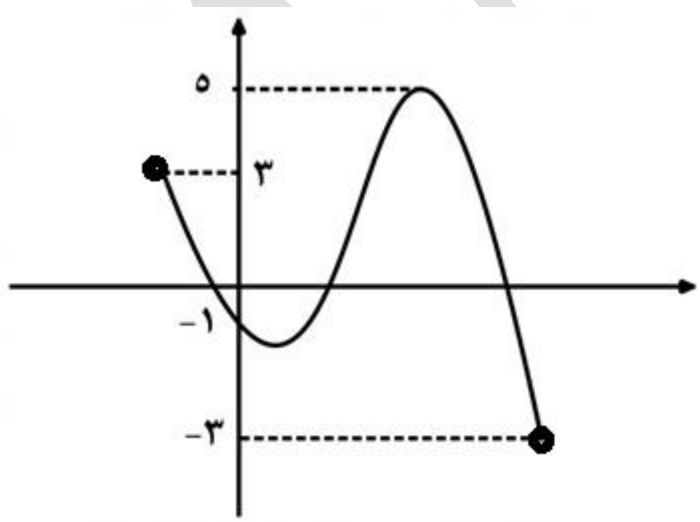
مینیمم مطلق:

نقطه ای به طول C از دامنهٔ تابع f، یک نقطهٔ مینیمم مطلق برای تابع نامیده می شود. هرگاه به ازای هر x از دامنهٔ تابع f داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$

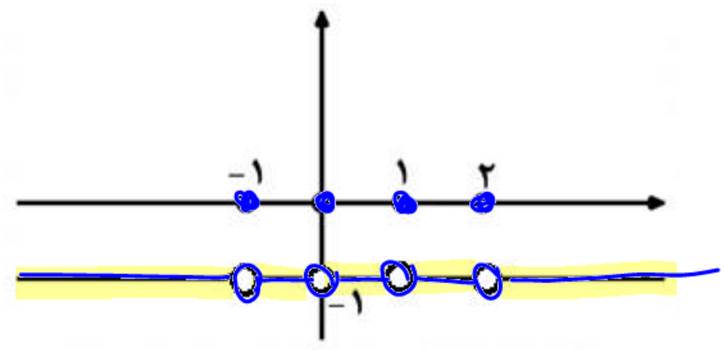
نکته : ابتداو انتهای بازهٔ بسته، می توانند ماکزیمم یا مینیمم مطلق باشند.

به مثال زیر توجه کنید :

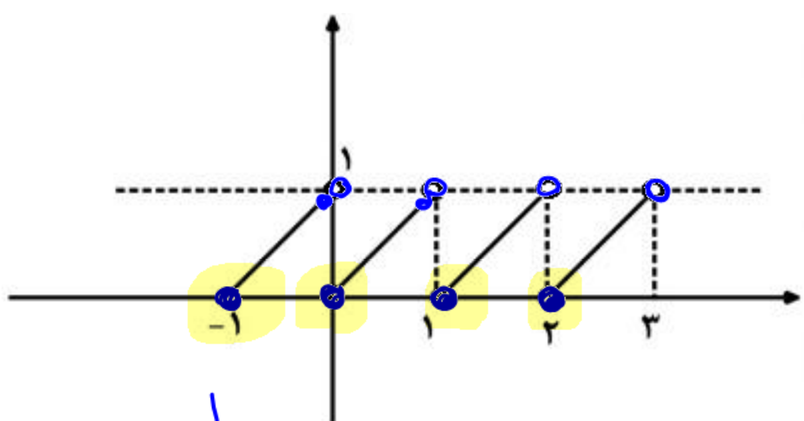
برای نمونه اگر نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر باشد مینیمم و ماکزیمم مطلق تابع $f(x)$ به ترتیب ۵و۳- هست.



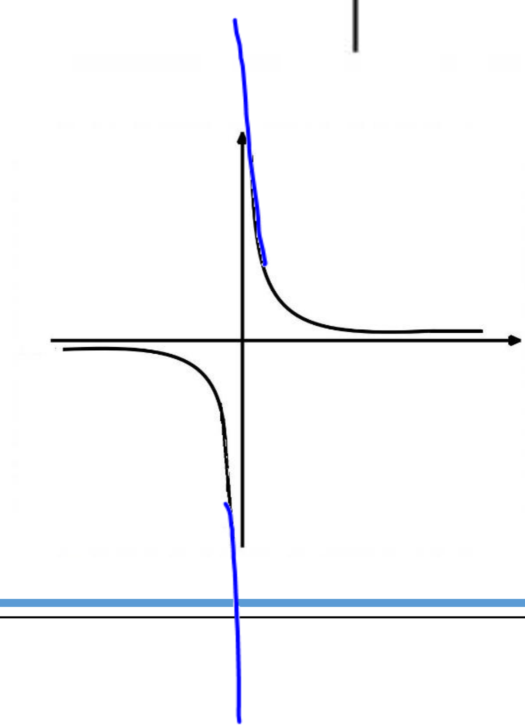
تابعی به نمودار زیر دارای ماکزیممی مطلق برابر صفر و مینیممی مطلق برابر ۱- است.



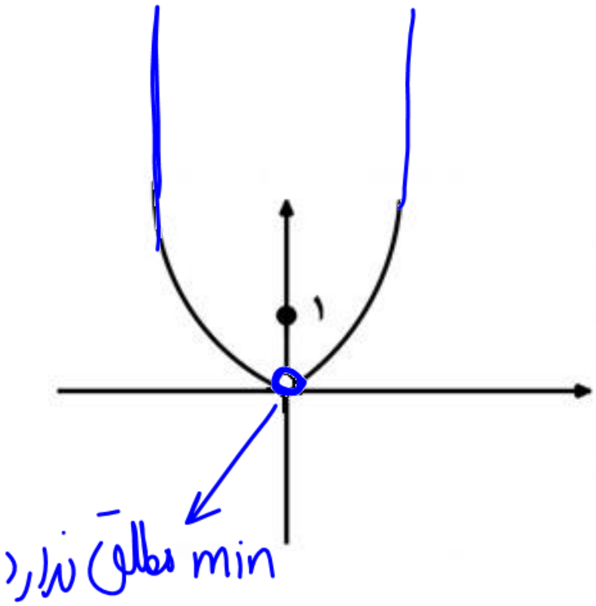
تابعی به نمودار زیر مینیمم مطلقی برابر صفر دارد و ماکزیمم مطلق ندارد.



تابعی به نمودار زیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق ندارد.



تابعی به نمودار زیر ماکزیمم مطلق ومینیمم مطلق ندارد.

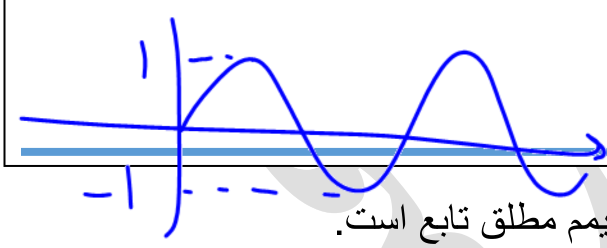


اکسترمم مطلق :

EXT → Max یا min

منظور از اکسترمم مطلق ماکزیمم یا مینیمم مطلق است.

برای نمونه اگر می گوئیم اکسترمم مطلق تابع $y = ۳$ است یعنی یا ماکزیمم مطلق آن ۳ است یا مینیمم مطلق آن ۳ است.



نکته: عرض تابع ثابت، هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق تابع است.

نحوهٔ یافتن اکسترمم های مطلق تابع:

برای یافتن اکسترمم های مطلق تابع روی بازهٔ $[a,b]$ به ترتیب:

الف) طول نقاط بحرانی تابع رابه کمک مشتق می یابیم.توجه نمائید که نقاط ابتدایی و انتهایی بازه نیز جزو نقاط بحرانی محسوب می شوند.

ب) عرض نقاط به دست آمده در قسمت بالا را می یابیم.

پ) بزرگ ترین عرض حاصل را ماکزیمم مطلق و کوچکترین آن ها را مینیمم مطلق در نظر می گیریم.

به مثال زیر توجه کنید :

اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۱$ را در بازهٔ $[-۱,۲]$ بیابید.

از تابع مشتق می گیریم:

$$f'(x)=۳x^{۲}-۶x=۰\rightarrow ۳x(x-۲)=۰\rightarrow x=۰, x=۲$$

طول نقاط بحرانی تابع مجموعهٔ $\{-۱,۰,۲\}$ است. عرض این نقاط را می یابیم

$$f(-۱)=(-۱)^{۳}-۳(-۱)^{۲}+۱=-۳$$
$$f(۰)=۰^{۳}-۳(۰)^{۲}+۱=۱$$
$$f(۲)=۲^{۳}-۳(۲)^{۲}+۱=-۳$$

کم ترین عرض تابع $y=-۳$ و بیش ترین عرض نقاط موجود $y=۱$ است.

۲۳- مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt{۱-x}-\sqrt{x+۱}$ **کدام است؟**

۱) $\sqrt{۲}$

۲) ۱

۳) $-\sqrt{۲}$

۴) ۰

$\begin{cases} ۱-x\geq ۰ \to x\leq ۱ \\ x+۱\geq ۰ \to x\geq -۱ \end{cases} \xrightarrow{\cap} -۱\leq x\leq ۱ \to x\in[-۱,۱]$

منفی   مثبت

$f'(x)=\frac{-۱}{۲\sqrt{۱-x}}-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}=۰ \to \frac{-۱}{۲\sqrt{۱-x}}=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}$

معادله ریشه ندارد.

$f(۱)=۰-\sqrt{۲}=-\sqrt{۲}$ min

$f(-۱)=\sqrt{۲}-۰=\sqrt{۲}$ Max

۲۴- در تابع $f(x)=\sqrt{x+۳}+\sqrt{۹-x}$ **نسبت ماکزیمم مطلق به مینیمم مطلق کدام است؟**

(قلم چی ۱۴۰۰)

۱) $۲\sqrt{۲}$

۲) $\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۳}$

۴) $-\sqrt{۲}$

$\begin{cases} x+۳\geq ۰ \to x\geq -۳ \\ ۹-x\geq ۰ \to x\leq ۹ \end{cases} \xrightarrow{\cap} -۳\leq x\leq ۹ \to [-۳,۹]$

$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}}+\frac{-۱}{۲\sqrt{۹-x}}=۰ \Rightarrow \frac{۱}{\cancel{۲}\sqrt{x+۳}}=\frac{۱}{\cancel{۲}\sqrt{۹-x}}$

$\sqrt{x+۳}=\sqrt{۹-x} \xrightarrow[\text{دو}]{\text{توان}} x+۳=۹-x \to ۲x=۶ \to x=۳$

$f(-۳)=\sqrt{۱۲}$ min

$f(۹)=\sqrt{۱۲}$ min

$f(۳)=\sqrt{۶}+\sqrt{۶}=۲\sqrt{۶}=\sqrt{۲۴}$ Max

$\Rightarrow \frac{Max}{min}=\frac{\sqrt{۲۴}}{\sqrt{۱۲}}=\sqrt{۲}$

$y = \sqrt[3]{x}(x-32)' \Rightarrow \dfrac{1\times 0 + 32\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{32}{3}}{\frac{4}{3}} = 8$

۲۵- مینیمم مطلق تابع $y = \sqrt[3]{x^4} - 32\sqrt[3]{x}$ در بازهٔ $[0, 32]$ کدام است؟ (گزینهٔ دو ۱۴۰۰)

۱) -31

۲) -48

۳) -56

۴) صفر

$f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 32x^{\frac{1}{3}} \longrightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{32}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 0$

$\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{32}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}x^{\frac{1}{3}} = \frac{\cancel{32}^{8}}{\cancel{3}\,x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} = 8$

$\boxed{x = 8}$

$f(0) = 0$

$f(8) = \sqrt[3]{8^4} - 32\sqrt[3]{8} = \sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{12}}} - 32(2) = 2^4 - 64 = 16 - 64 = -48$

$f(32) = \sqrt[3]{32^4} - 32\sqrt[3]{32} = 32\sqrt[3]{32} - 32\sqrt[3]{32} = 0$

۲۶- قدر مطلق تفاضل مقدارهای اکسترمم های مطلق تابع $y = x - \sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}-1$

۲) $\sqrt{2}+1$

۳) $2\sqrt{2}$

۴) $\frac{1}{2}$

$1-x^2 \geqslant 0 \longrightarrow x^2 \leqslant 1 \longrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1 \longrightarrow [-1, 1]$

$f'(x) = 1 - \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0 \longrightarrow 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \longrightarrow \dfrac{\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

$\sqrt{1-x^2} + x = 0 \longrightarrow \sqrt{1-x^2} = -x \xrightarrow{\text{به توان دو}} 1-x^2 = x^2 \longrightarrow 2x^2 = 1 \to x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow[\text{جواب اضافی}]{x = \frac{\sqrt{2}}{2}} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$|Max - min| = |1 - (-\sqrt{2})| = \sqrt{2}+1$

$f(-1) = -1 - \sqrt{0} = -1$

$f(1) = 1 - \sqrt{0} = 1$ Max

$f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{1-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$ min

۲۷- ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt{|2x-1|}$ در بازهٔ $[0,2]$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$

۲) $\sqrt{3}$

۳) $\sqrt{5}$

۴) $\sqrt{6}$

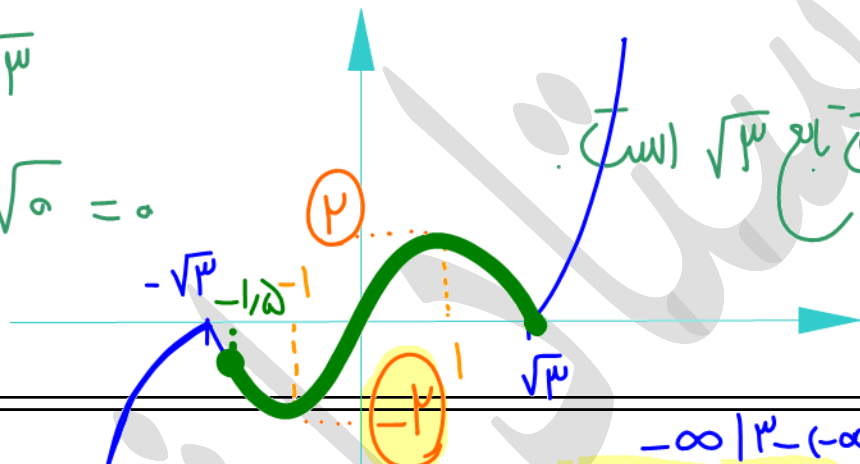
$x=\frac{1}{2}$ به دلیل صفر کردن زیر رادیکال و قدر مطلق (هم زمان) نقطه‌ی بحرانی تابع است.

$f(0)=\sqrt{1}=1$

$f(2)=\sqrt{3}$

$f(\frac{1}{2})=\sqrt{0}=0$

ماکزیمم مطلق تابع $\sqrt{3}$ است.



$-\infty\,|3-(-\infty)^2| = -\infty$

۲۸- مینیمم مطلق تابع $f(x)=x|3-x^2|$ دربازهٔ $[-1/5, \sqrt{3}]$ کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱) $-\frac{9}{4}$

۲) -2

۳) $-\sqrt{3}$

۴) $-\frac{9}{8}$

$f(x)=x|(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)|$

تابع در $x=\sqrt{3}$ و $x=-\sqrt{3}$ مشتق ندارد و بحرانی است.

$f(x)=x|3-x^2| \longrightarrow f(x)=x(3-x^2)=3x-x^3$

$f'(x)=3-3x^2=0 \longrightarrow x=\pm 1$

مجموعه نقطه‌های بحرانی $\{-1/5, \sqrt{3}, -1, 1\}$

$f(-1/5)=-\frac{3}{2}\left|3-\frac{9}{4}\right|=\frac{-9}{8}$

$f(\sqrt{3})=\sqrt{3}|3-3|=0$

$f(-1)=-1\,|3-(-1)^2|=-2$ min

$f(1)=1\,|3-(1)^2|=2$ Max

ماکزیمم نسبی:

می گوئیم تابع f در نقطه ای به طول C ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از آن مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(c) \geq f(x)$

Max نسبی

مینیمم نسبی:

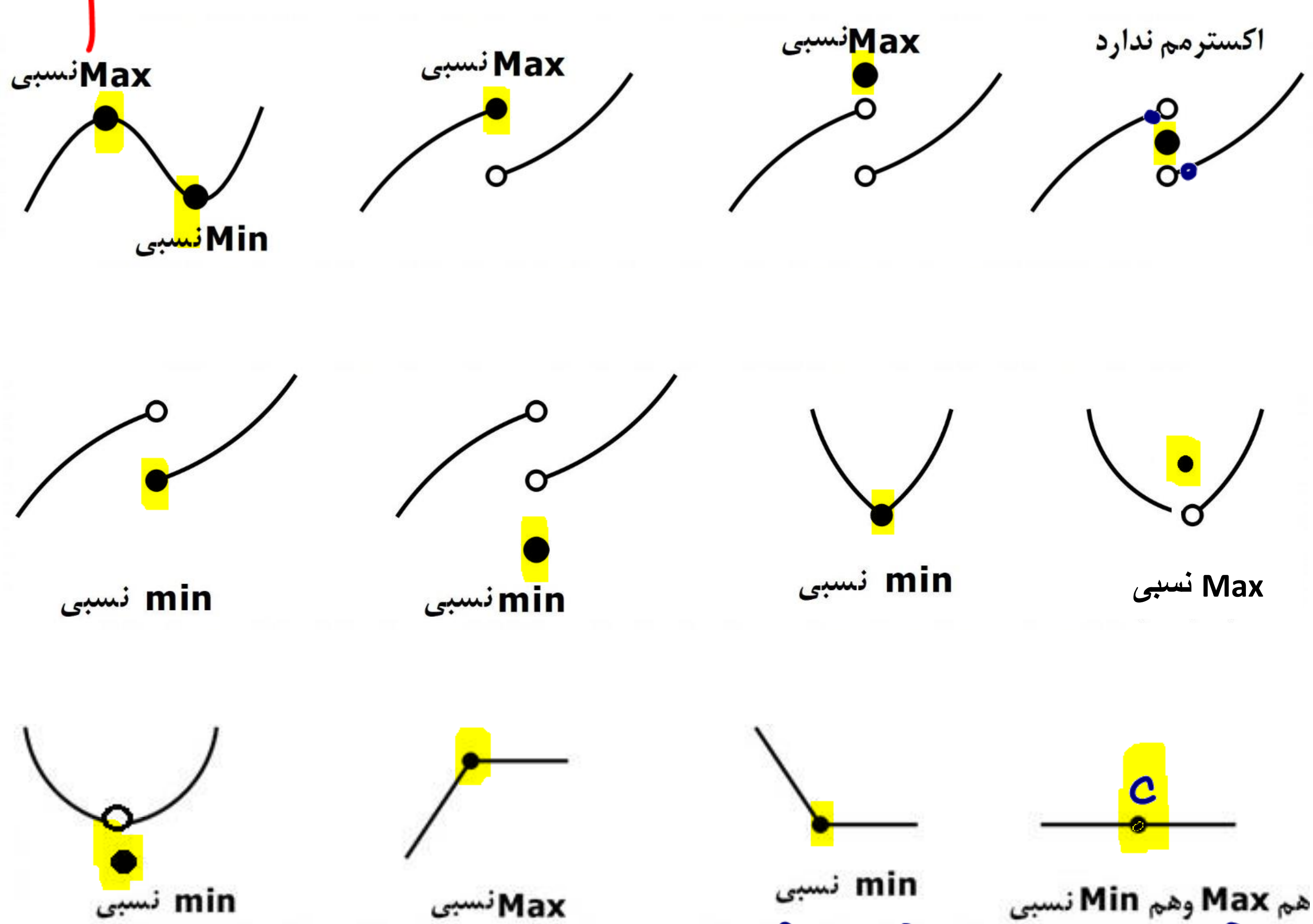
می گوئیم تابع f در نقطه ای به طول C مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از آن مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(c) \leq f(x)$

min نسبی

min نسبی

min مطلق

در شکل های زیر اکسترمم های نسبی و نوع آن ها را ببینید.



$f(c) \leq f(x)$

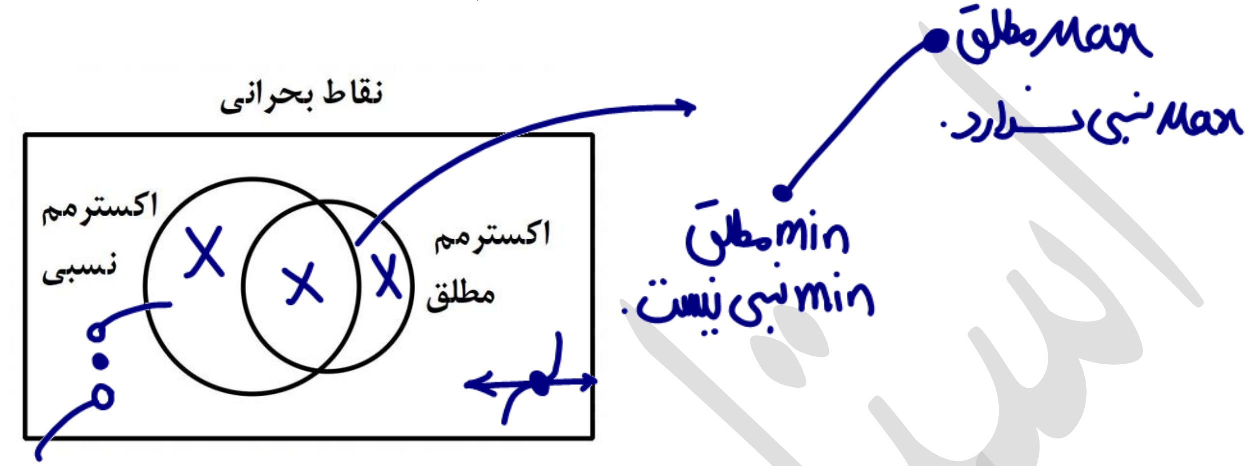
$f(c) \geq f(x)$

$f(c) \leq f(x)$

نکته۱:نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته را اکسترمم نسبی در نظر نمی گیریم.

نکته۲: هر نقطه روی خط افقی هم ماکزیمم و هم مینیمم نسبی است.

نکته۳:نمودار ارتباط بین مجموعه نقاط بحرانی، اکسترمم های نسبی و مطلق:



نکته۴:برای بررسی اکسترمم های مطلق و نسبی در توابع ناپیوسته و گاهی توابع قدر مطلقی بهتر است آن ها را رسم کنیم.

۲۹- در مورد تابع $f(x)=\begin{cases}|x^۲-۱| & x\le ۱\\ -۲x+۱ & x>۱\end{cases}$ **کدام گزینه صحیح است؟ (گاج ۱۴۰۰)**

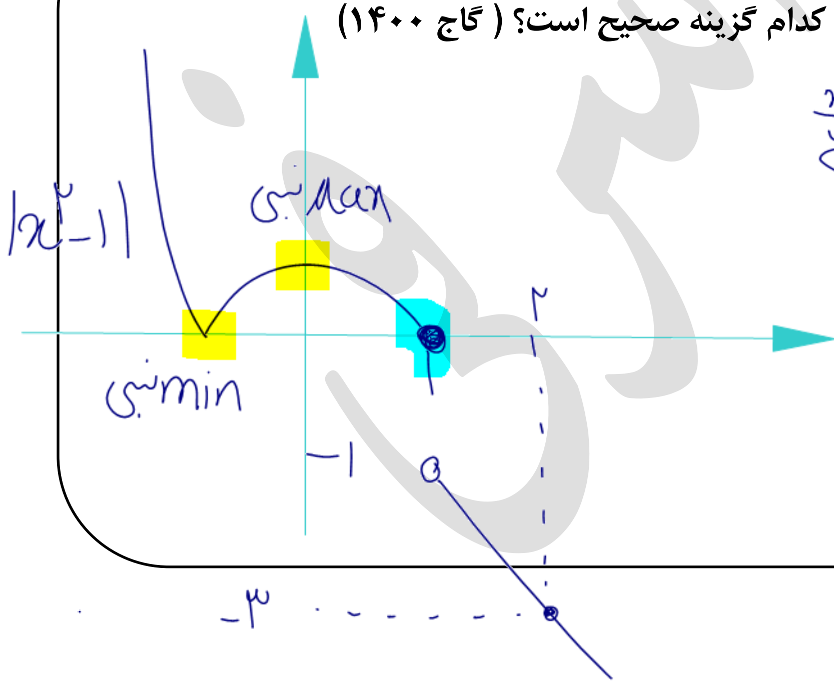
x	۱	۲
y	-۱	-۳

۱) اکسترمم مطلق دارد.

۲) بیش ترین مقدار تابع یک است

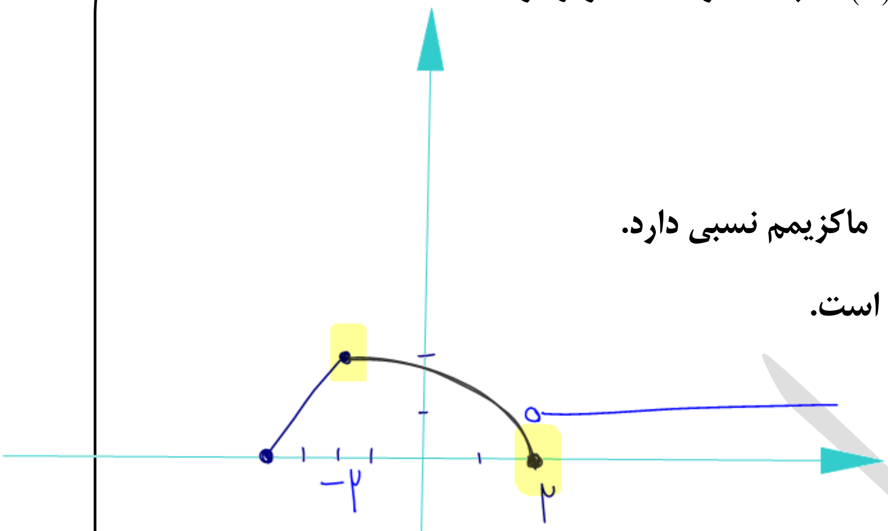
۳) یک ماکزیمم نسبی و یک مینیمم نسبی دارد.

۴) فاقد نقطهٔ بحرانی است



۳۰- در مورد تابع $f(x)=\begin{cases} x+4 & -4\le x\le -2 \\ \sqrt{2-x} & -2<x\le 2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$ چند تا از جملات زیر درست است؟

$2-x\geq 0 \to x\le 2$



الف) تابع بی شمار نقطهٔ بحرانی دارد

ب) تابع در $(2,0)$ مینیمم نسبی و در $(-2,2)$ ماکزیمم نسبی دارد.

پ) کم ترین مقدار تابع صفر و بیش ترین آن ۲ است.

ت) تابع در فاصلهٔ $[-2,2]$ صعودی اکید است.

۲(۱

۳ (۲

۴(۳

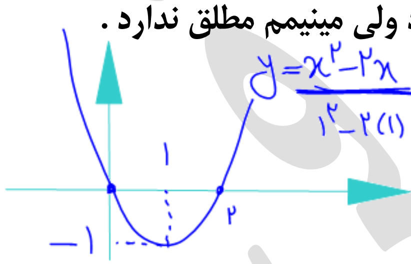
۱(۴

۳۱- تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2|x| & x\ne 0 \\ k & x=0 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ مینیمم نسبی دارد ولی مینیمم مطلق ندارد .

حدود K کدام است ؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

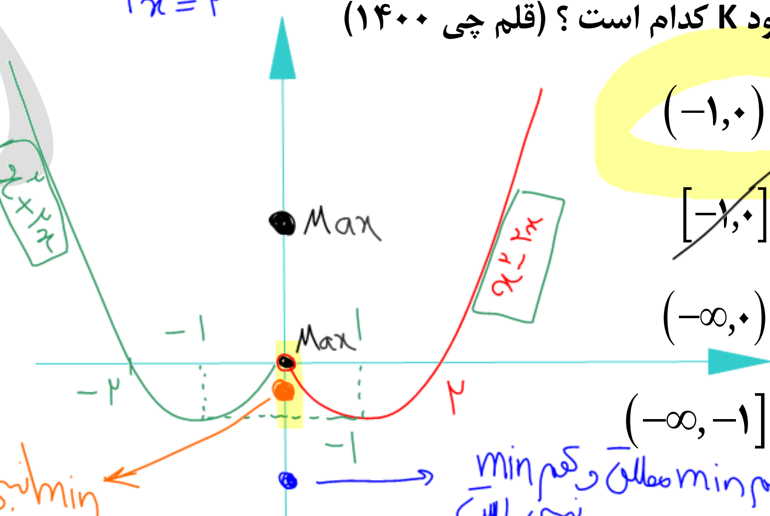
$y=x^2-2x=x(x-2)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

$1^2-2(1)=-1$



$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x>0 \\ x^2+2x=x(x+2)=0 & x<0 \\ K & x=0 \end{cases}$

$x=0, x=-2$



min نسبی هست ولی min مطلق نیست

هم min مطلق و هم min نسبی است.

۱) $(-1,0)$

۲) $[-1,0]$

۳) $(-\infty,0)$

۴) $(-\infty,-1]$

۳۲- به ازاء چند مقدار صحیح a تابع $f(x)=\begin{cases}|1-x| & x>0\\ a & x=0\\ (x-1)^3-2 & x<0\end{cases}$ فقط یک اکسترمم نسبی دارد؟

(قلم چی ۱۴۰۰)

۱) ۵

۲) ۴

۳) ۳

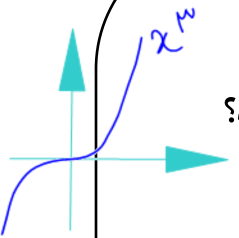
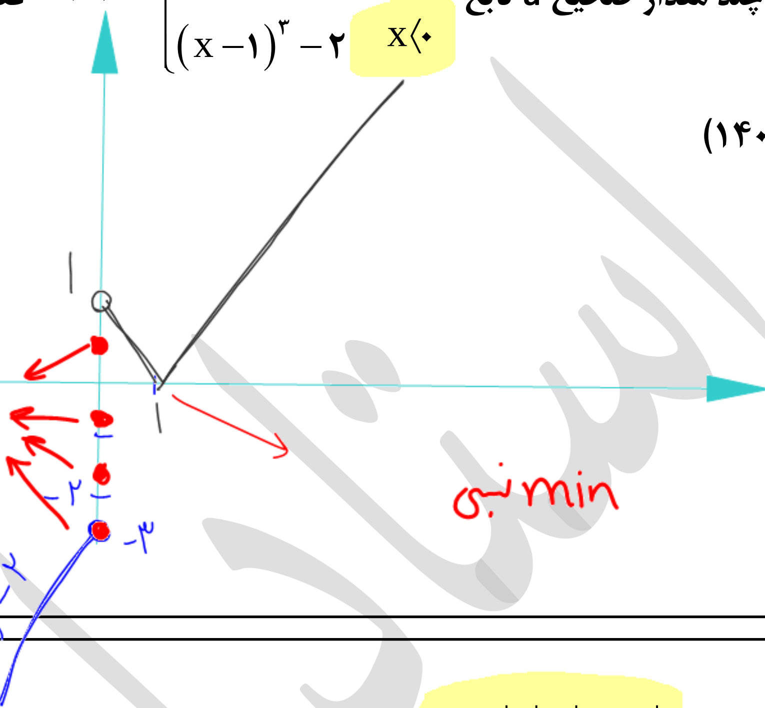
۴) بی شمار

$|x-1|$

$|x-1| \xrightarrow{x=0} |0-1|=1$

$(x-1)^3-2 \xrightarrow{x=0} -1-2=-3$

$a\in[-3,1)$

min نسبی

۳۳- تابع با ضابطهٔ $y=2|x|+|x-2|$ چند نقطهٔ بحرانی و چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟ (گاج ۱۴۰۰)

۱) دو بحرانی – دو اکسترمم نسبی

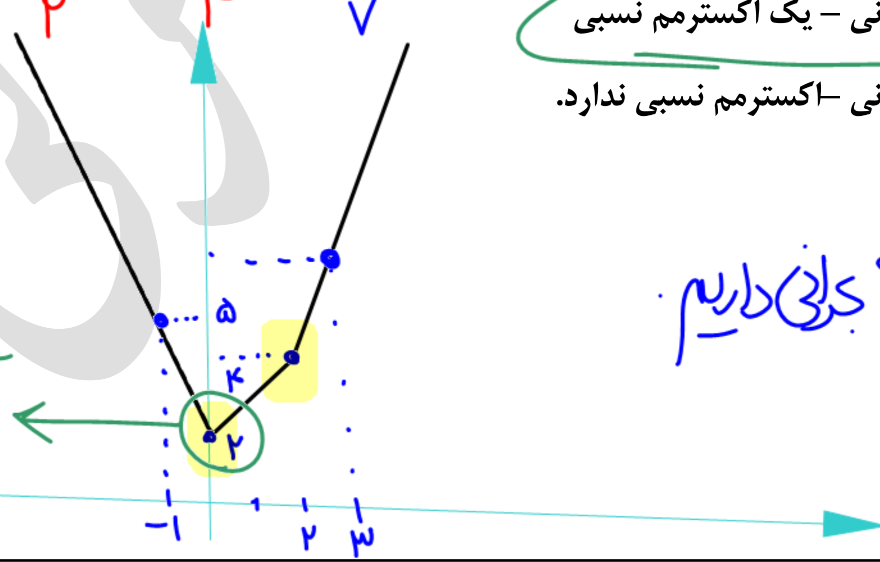
۲) بی شمار بحرانی – بی شمار اکسترمم نسبی

۳) دو بحرانی – یک اکسترمم نسبی

۴) دو بحرانی –اکسترمم نسبی ندارد.

x	-1	0	2	3
y	5	2	4	7

دلخواه دلخواه



۲ نقطه‌ی بحرانی داریم

تنها اکسترمم نسبی تابع

قضیهٔ فرما :

اگر تابع f در نقطه ای به طولc ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد آن گاه $f'(c)=0$است. عکس قضیهٔ فرما درست نیست یعنی اگر در نقطه ای $f'(c)$ صفر باشد لزوماً آن نقطه اکسترمم نسبی نیست.

یافتن اکسترمم های نسبی از روی ضابطه:

اگر تابع در نقطه ای پیوسته باشد(نه لزوماً مشتق پذیر) و مشتق قبل و بعد از آن نقطه تغییر علامت دهد، آن نقطه اکسترمم نسبی است.

x		a	
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

x		a	
$f'(x)$	$+$	$\parallel$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

نکته: اگر مشتق تابع قبل از نقطهٔ $x=a$ منفی و بعد آن مثبت باشد، آن نقطه min نسبی و اگر مشتق تابع قبل از نقطهٔ $x=a$ مثبت و بعد از ان منفی باشد،آن نقطه Max نسبی است.

۳۴- حاصل ضرب اکسترمم های نسبی $\boxed{f(x)=\frac{3x}{x^2+1}}$ کدام است؟

ضرب $= -\frac{9}{4}$

۱) -1
۲) $-\frac{9}{4}$
۳) -4
۴) $-\frac{1}{4}$

$$f'(x)=\frac{3(x^2+1)-2x(3x)}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^2+3-6x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}=0$$

$$-3x^2+3=0 \longrightarrow 3x^2=3 \longrightarrow x^2=1 \longrightarrow x=\pm 1$$

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

$$f(-1)=-\frac{3}{2} \qquad f(+1)=\frac{3}{2}$$

۳۵- مقدار مینیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x-2}{x^2+1}$ کدام است؟(گزینهٔ دو ۱۴۰۰)

۱) $-1+\frac{\sqrt{5}}{2}$
۲) $-1-\frac{\sqrt{5}}{2}$
۳) $-1+\sqrt{5}$
۴) $-1-\sqrt{5}$

$$f'(x)=\frac{1(x^2+1)-2x(x-2)}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2+4x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}=0$$

$$-x^2+4x+1=0 \longrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4(1)(-1)}}{2(-1)}=\frac{-4\pm\sqrt{20}}{-2}=\frac{-4\pm2\sqrt{5}}{-2}=\frac{-2(2\mp\sqrt{5})}{-2}$$

$$x=2\mp\sqrt{5}$$

x		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

$$f(2-\sqrt{5})=\frac{(2-\sqrt{5})-2}{(2-\sqrt{5})^2+1}=\frac{-\sqrt{5}}{4+5-4\sqrt{5}+1}=\frac{-\sqrt{5}}{10-4\sqrt{5}}=\frac{-\sqrt{5}}{2(2\sqrt{5}-5)}\times\frac{2\sqrt{5}+5}{2\sqrt{5}+5}$$

$$\text{min}=\frac{10+5\sqrt{5}}{2(20-25)}=\frac{\cancel{5}(2+\sqrt{5})}{-\cancel{10}}=\frac{2+\sqrt{5}}{-2}=-1-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

~~نکته: در توابع کسری، نقطهٔ اکسترمم تابع روی هوپیتال آن نیز صادق است یعنی اگر طول نقطهٔ اکسترمم را به هوپیتال تابع بدهیم، عرض اکسترمم را به می دهد.~~

۳۶- مقدار ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2+1}$ کدام است؟(تجربی خارج ۹۹)

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2+1)-2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}=\frac{\cancel{2x^3}+2x+2x^2+2-\cancel{2x^3}-4x^2+6x}{(x^2+1)^2}$$

۱) $-1+\sqrt{5}$ ✓

۲) $1+\sqrt{5}$

۳) $-1+\sqrt{3}$

۴) $1+\sqrt{3}$

$$f'(x)=\frac{-2x^2+8x+2}{(x^2+1)^2}=0 \longrightarrow -2x^2+8x+2=0 \xrightarrow{\div 2} -x^2+4x+1=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{20}}{-2}=\frac{-4\pm2\sqrt{5}}{-2}=2\mp\sqrt{5}$$

x		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
	↘		↗	Max	↘

$$f(2+\sqrt{5})=\frac{(4+5+4\sqrt{5})+(4+2\sqrt{5})-3}{(4+5+4\sqrt{5})+1}=\frac{10+6\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}=\frac{(10+4\sqrt{5})+2\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}=1+\frac{2\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}$$

$$1+\frac{2\sqrt{5}(10-4\sqrt{5})}{100-80}=1+\frac{20\sqrt{5}-40}{20}=1+\sqrt{5}-2=-1+\sqrt{5}$$

۳۷-تابع $f(x)=\frac{x^2+3x+m}{2x+5}$ اکسترمم نسبی ندارد. حدود m کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۰)

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(2x+5)-2(x^2+3x+m)}{(2x+5)^2}$$

۱) $m<\frac{5}{4}$

۲) $m<\frac{4}{3}$

$$f'(x)=\frac{4x^2+10x+6x+15-2x^2-6x-2m}{(2x+5)^2}=\frac{2x^2+10x+(15-2m)}{(2x+5)^2}=0$$

۳) $m\le\frac{5}{4}$ ✓

۴) $m\le\frac{4}{3}$

$$\Delta\le 0 \Rightarrow 10^2-4(2)(15-2m)\le 0 \longrightarrow 100-120+16m\le 0$$

$$+20\ge 16m \xRightarrow{\div 16} m\le\frac{5}{4}$$

اگر $\Delta=0$ معادله یک ریشه مضاعف دارد و مشتق تغییر علامت نمی‌دهد و تابع EXT نسبی ندارد.

نکته: در ریشه های مضاعف مشتق به دلیل عدم تغییرعلامت آن، اکسترمم نسبی نداریم.

۳۸- نقطهٔ $A(۳,-۲)$ اکسترمم نسبی تابع $y=f(x)$ است. اگر $f'(۳)$ موجود و $h(x)=\frac{f^۲(x)}{x^۲+۳}$ باشد. مقدار $h'(۳)$ کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۰)

۱) $-\frac{۱}{۶}$

۲) $-\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۷}$

۴) $-\frac{۳}{۷}$

طبق قضیهٔ فرما $\Rightarrow f'(۳)=۰$

$h(x)=\frac{f^۲(x)}{x^۲+۳} \longrightarrow h'(x)=\frac{۲f^{۲-۱}(x)f'(x)(x^۲+۳)-۲xf^۲(x)}{(x^۲+۳)^۲}$

$h'(۳)=\frac{۲f(۳)f'(۳)(۹+۳)-۶f^۲(۳)}{(۹+۳)^۲}=\frac{۲(-۲)(۰)(۱۲)-۶(-۲)^۲}{۱۲^۲}$

$=\frac{-۶\times۴}{۱۲\times۱۲}=-\frac{۱}{۶}$

۳۹- اگر نقطهٔ $(۱,۴)$ مینیمم نسبی تابع $y=\frac{ax^۲+b}{x}$ باشد، مختصات نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $(-۱,-۲)$

۲) $(-۱,-۴)$

۳) $(-۱,۴)$

۴) $(-۲,-۱)$

$f(۱)=۴ \longrightarrow \frac{a(۱)^۲+b}{۱}=۴ \Rightarrow a+b=۴$

$f'(۱)=۰ \Rightarrow f'(x)=\frac{(۲ax)x-۱(ax^۲+b)}{x^۲}$

$f'(۱)=\frac{۲a-(a+b)}{۱}=۰ \Rightarrow a-b=۰ \rightarrow a=b$

$a=۲$
$b=۲$

$f'(x)=\frac{۴x^۲-(۲x^۲+۲)}{x^۲}=\frac{۲x^۲-۲}{x^۲}=۰ \rightarrow x=\pm۱ \longrightarrow x=-۱$

$\text{Max}\ f(-۱)=\frac{۲x^۲+۲}{x}=\frac{۲(-۱)^۲+۲}{-۱}=-۴$

۴۰-طول اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x-\sqrt{x}$ و نوع آن در کدام گزینه آمده است؟

۱) Max , $x=۱$

۲) min , $x=۱$

۳) Max $x=\frac{۱}{۴}$

۴) min , $x=\frac{۱}{۴}$

$$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}=0 \longrightarrow \boxed{\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}}=0$$

$$2\sqrt{x}-1=0 \longrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{2} \longrightarrow x=\frac{1}{4}$$

دلغواه $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{4}$ ، دلغواه 1

$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

min

۴۱- فاصلهٔ نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+\sqrt{۴x-x^{۲}}$ از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) ۱

۲) $\sqrt{۲}$

۳) ۲

۴) $۲\sqrt{۲}$

تابلوی جیغ

$$f'(x)=1+\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}=0 \Rightarrow 1+\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}=0 \Rightarrow \frac{\sqrt{4x-x^2}+2-x}{\sqrt{4x-x^2}}=0$$

$$\boxed{\sqrt{4x-x^2}=x-2 \quad x\geq 2} \xrightarrow[\text{دو}]{\text{توان}} 4x-x^2=(x-2)^2 \Rightarrow 4x-x^2=x^2-4x+4 \Rightarrow$$

$$2x^2-8x+4=0 \xrightarrow{\div 2} x^2-4x+2=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=2\pm\sqrt{2}$$

$x=2+\sqrt{2}$ تنها جواب قابل قبول

$$f(2+\sqrt{2})=2+\sqrt{2}+\sqrt{4(2+\sqrt{2})-(2+\sqrt{2})^2}$$

$$=2+\sqrt{2}+\sqrt{8+\cancel{4\sqrt{2}}-(4+2+\cancel{4\sqrt{2}})}=2+\sqrt{2}+\sqrt{2}=2+2\sqrt{2} \Rightarrow (2+\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2})$$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر $\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ است.

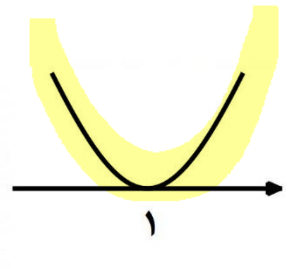
فاصلهٔ نقطهٔ $(2+\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2})$ از خط $x-y=0$ برابر

$$\frac{|(2+\sqrt{2})-(2+2\sqrt{2})|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$$

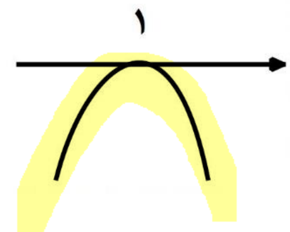
رسم توابع به روش اشرفی:

برخی از توابع را می توان به کمک قواعد زیر رسم نمود.

۱) ریشه های مکرر مرتبهٔ زوج (مضاعف) اکسترمم های تابع بر روی محور طول ها هستند. برای نمونه به موارد زیر توجه کنید:

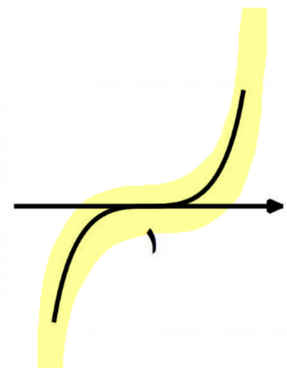


یا

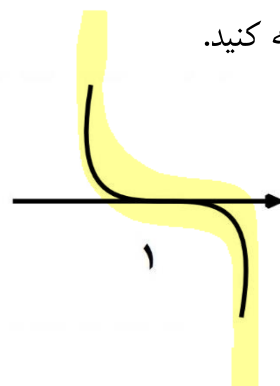


$$y=(x-۱)^{۲}g(x)$$
$$g(۱)\neq ۰$$

۲) ریشه های مکرر مرتبهٔ فرد(ساده به جز توان یک) لرهای نشسته بر روی محور طول ها هستند. برای نمونه به موارد زیر توجه کنید.

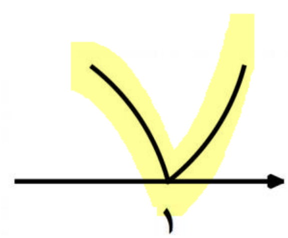


یا

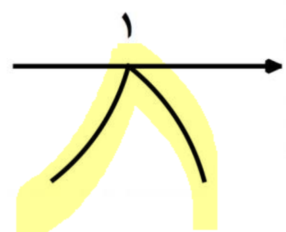


$$y=(x-۱)^{۳}g(x)$$
$$g(۱)\neq ۰$$

۳) ریشه های مرتبهٔ یک عبارت های داخل قدر مطلق، نقطه های گوشه از نوع اکسترمم برروی محور طول ها هستند. برای نمونه به موارد زیر توجه کنید.



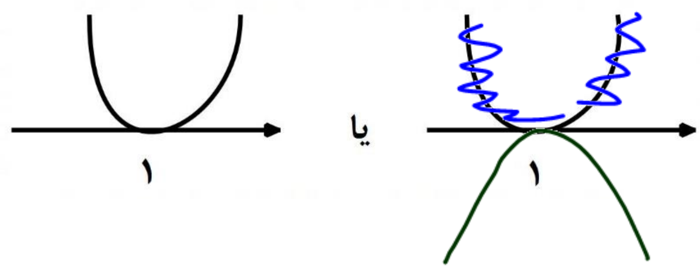
یا



$$y=|x-۱|g(x)$$
$$g(۱)\neq ۰$$

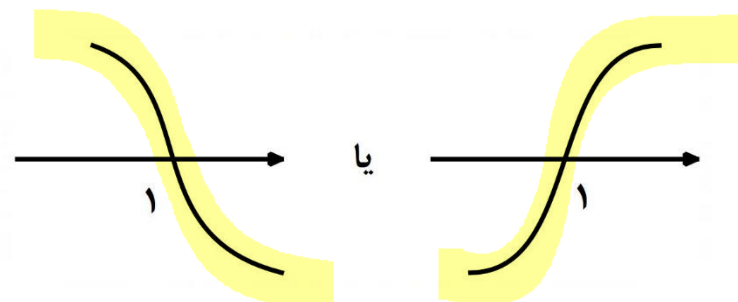
۴) ریشه های مکرر مرتبهٔ فرد داخل قدر مطلق، اکسترمم نشسته بر روی محور طول ها هستند. برای نمونه به موارد زیر توجه کنید.

$$y=\left|(x-۱)^{۳}\right|g(x)$$
$$g(۱)\neq ۰$$



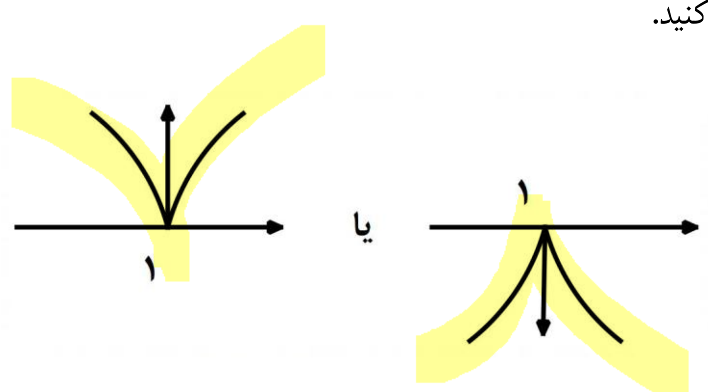
۵) ریشه های درجهٔ فرد زیر رادیکال فرجهٔ فرد، لرهای خوابیده برروی محور طول ها هستند.برای نمونه به موارد زیر توجه کنید:

$$y=\sqrt[۲n+۱]{x-۱}\,.\ g(x)$$
$$g(۱)\neq ۰$$



۶) ریشه های مرتبهٔ زوج زیر رادیکال فرجهٔ فرد،نقاط بازگشت تابع بر روی محورطول ها هستند، برای نمونه به موارد زیر توجه کنید.

$$y=\sqrt[۲n+۱]{(x-۱)^{۲}}\,.\ g(x)$$
$$g(۱)\neq ۰$$



برای رسم ، ابتدا حد تابع را در ∞ها می یابیم و جایگاه آن ها را با نقطه یا نقاطی بر روی محور مختصات تعیین می کنیم.

سپس ریشه های تابع را با توجه به نوع ان ها بر روی محور تعیین و همهٔ نقاط را به هم وصل می کنیم.

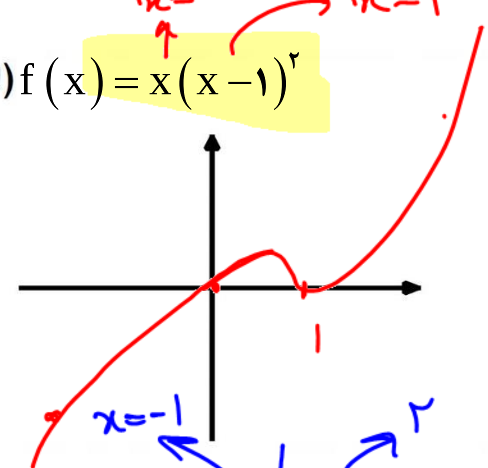
نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

$x=0$ $x=1$

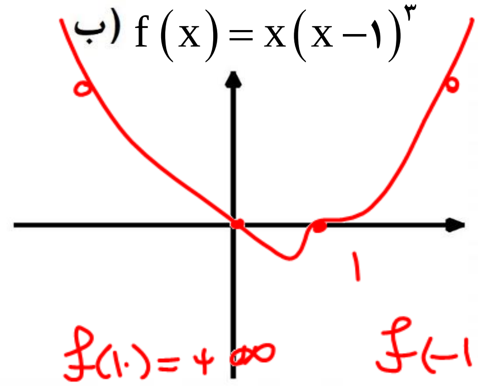
الف) $f(x)=x(x-1)^2$

$f(10)=810$

$f(-10)=-1210$



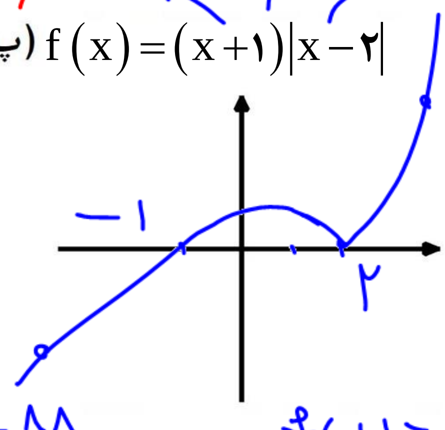
ب) $f(x)=x(x-1)^3$



$f(10)=+\infty$ $f(-10)=+\infty$

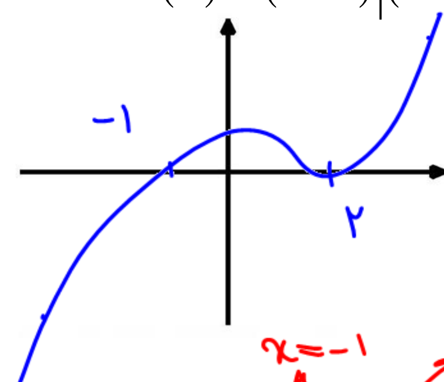
$x=-1$ 2

پ) $f(x)=(x+1)|x-2|$

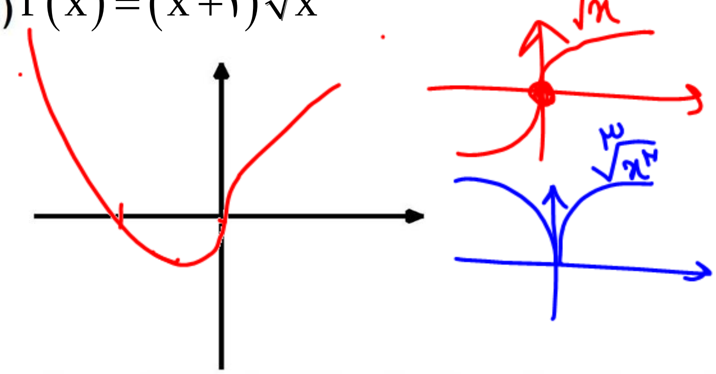


$f(10)=88$ $f(-10)=-\infty$

ت) $f(x)=(x+1)\left|(x-2)^3\right|$

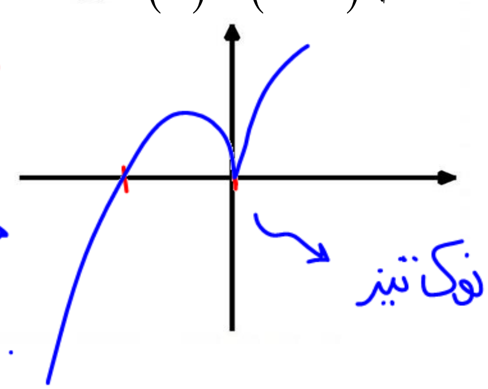


ث) $f(x)=(x+1)\sqrt[3]{x}$



$x=-1$ $x=0$

ج) $f(x)=(x+1)\sqrt[3]{x^2}$



نکته: در توابعی به فرم $f(x)=(x-\alpha)^n|x-\beta|$ یا $f(x)=(x-\alpha)^n\sqrt[k]{(x-\beta)^m}$

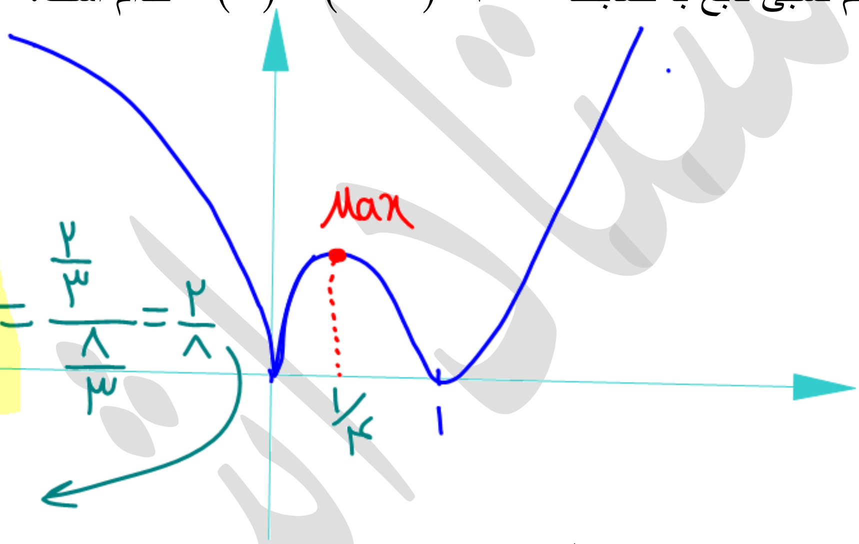
یا $f(x)=|x-\alpha|\sqrt[n]{(x-\beta)^m}$ می توان نقطهٔ بحرانی آخر را به کمک میانگین وزنی معکوس یافت.

$$x=\frac{\text{توان اول}\times\text{ریشهٔ دومی}+\text{توان دومی}\times\text{ریشه اولی}}{\text{مجموع توان ها}}$$

به مثال زیر توجه کنید :

$x=1$ $x=0$

طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x-1)^2\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟



$(x-1)$ ۲ x $\frac{2}{3}$

$$\frac{\frac{2}{3}\times 1+0\times 2}{\frac{2}{3}+2}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{3}}=\frac{2}{8}$$

$x=1/4$

۱) $\frac{1}{4}$

۲) $\frac{1}{3}$

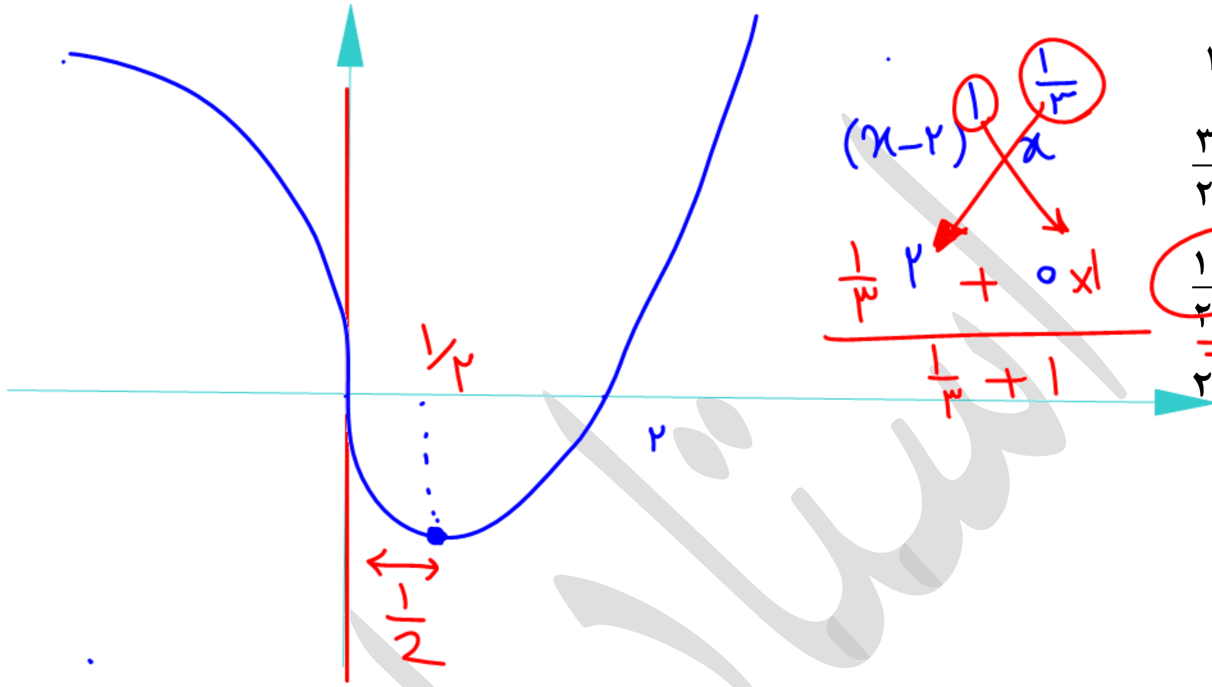
۳) $\frac{1}{2}$

۴) $\frac{2}{3}$

برای یافتن نقطهٔ اکسترمم نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2x^{2/3}$ از روش بالا داریم:

$$x=\frac{\frac{2}{3}\times 1+2\times 0}{\frac{2}{3}+2}=\frac{2/3}{8/3}=1/4$$

۴۲- فاصلهٔ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $y=(x-۲)\sqrt[۳]{x}$ **از مماس قائم آن چقدر است؟(گزینهٔ دو ۱۴۰۰)**



$(x-2)^{1}\,x^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{\frac{1}{3}\times 2+0\times 1}{\frac{1}{3}+1}=1/2$$

۱) ۱

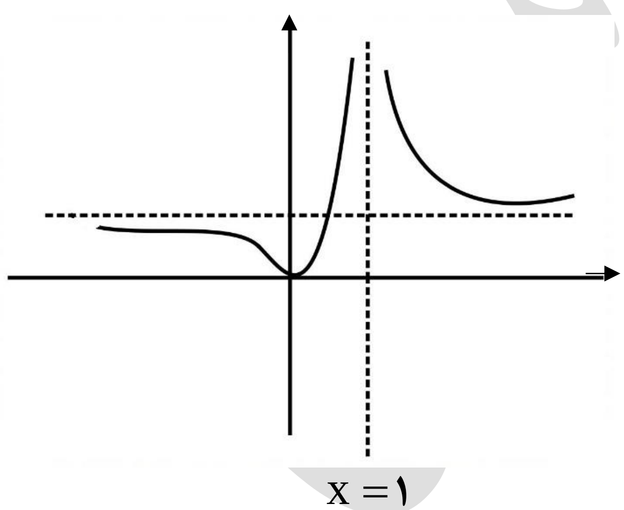
۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۲

۴۳- شکل مقابل نمودار تابع $y=\frac{x^{۲}+ax}{x^{۲}+bx+c}$ **را نشان می دهد. حاصل** $a+b+c$ **کدام است؟**

(قلم چی ۱۴۰۰)



۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) -۱

۴) -۲

۴۴- مجموعه طول ماکزیمم های نسبی تابع $f(x)=x\left|x^{۲}-۳\right|$ **کدام است؟**

۱) $\left\{-\sqrt{۳},-۱\right\}$

۲) $\left\{\sqrt{۳},۱\right\}$

۳) $\left\{-\sqrt{۳},۱\right\}$

۴) $\left\{\sqrt{۳},-۱\right\}$

بهینه سازی:

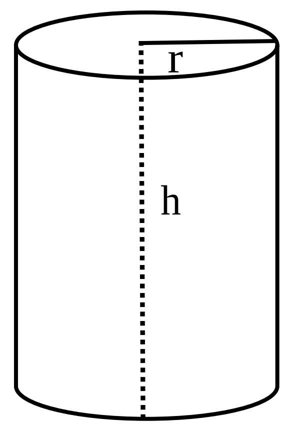
مراحل حل تست های بهینه سازی به دو فاز اصلی تقسیم می شوند.

فاز۱
- الف) ساختن رابطه ای ثابت بین دو متغیر
- ب) پیدا کردن یک متغیر بر حسب دیگری

فاز۲
- پ)جای گذاری متغیر به دست آمده در تابع بهینه شونده و تبدیل آن به تابعی تک متغیره
- ت) مشتق گیری از تابع نهایی و برابر صفر گذاشتن آن

به مثال زیر توجه کنید :

مجموع شعاع و ارتفاع استوانه ای برابر مقدار ثابت ۱۰ است. حداکثر حجم استوانه کدام است؟



فاز۱

الف) $r+h=10$

ب) $r=10-h$

فاز۲

پ) $V=\pi r^2 h=\pi(10-h)^2 h$

ت) $V'=\pi\left(-2(10-h)h+(10-h)^2\right)=0 \rightarrow$

$$(10-h)(-2h+10-h)=(10-h)(10-3h)=0$$

$$h=10 \quad \text{یا} \quad h=\frac{10}{3}$$

بدیهی است مقدار h برابر $\frac{10}{3}$ است و حداکثر حجم برابر است با :

$$V=\pi(10-h)^2 h=\pi\left(10-\frac{10}{3}\right)^2\times\frac{10}{3}=\frac{4000\pi}{27}$$

نکته: اگر $a+b=k$ (یعنی مجموع دو عدد مقدار ثابتی باشد) حاصل ضرب آن دو عدد، زمانی ماکزیمم است که آن دو عدد برابر باشند.

نکته: اگر $a+b=k$، حاصل ضرب $a^m \times b^n$ زمانی ماکزیمم است که $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$ باشد.

۴۵-اگر h و L به ترتیب ارتفاع و قاعدهٔ مثلث هایی باشندو $2h+3L=12$ آن گاه بیش ترین مساحت مثلث ها کدام است ؟

۱) ۳

۲) ۶

۳) ۱۲

۴) ۲۴

۴۶- کوتاه ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵,۰)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{۲x+۷}$ کدام است؟
(تجربی خارج ۹۹)

۱) ۴

۲) ۴/۵

۳) ۵

۴) $۳\sqrt{۲}$

۴۷-بیش ترین حجم مخروط قائم محاط درون نیم کره ای به شعاع $\sqrt{۵}$ به طوری که رآس مخروط بر مرکز نیم کره باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۰\pi}{۳}\sqrt{\frac{۵}{۳}}$

۲) $\frac{۱۰\pi}{۳}\sqrt{\frac{۳}{۵}}$

۳) $\frac{۱۰\pi}{۹}\sqrt{\frac{۳}{۵}}$

۴) $\frac{۱۰\pi}{۹}\sqrt{\frac{۵}{۳}}$

۴۸-حداکثر مساحت جانبی استوانه ای که درون یک کره به شعاع $۴\sqrt{۲}$ محاط می شود کدام است؟

(تجربی ۱۴۰۰)

۱) ۳۲π

۲) ۶۴π

۳) $\frac{۲۵۶\pi}{۳}$

۴) $\frac{۵۱۲\pi}{۳}$

۴۹- مساحت مستطیلی با بیش ترین مساحت کدام است که دو رأس آن روی محور x هاو دو رأس دیگرش بالای محور x ها و روی سهمی $y=۱۲-x^{۲}$ باشند؟

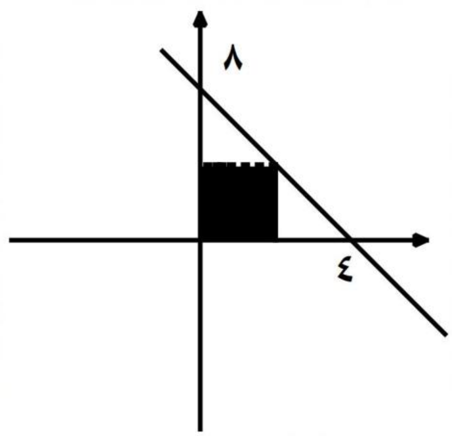
۱) ۸

۲) ۱۶

۳) ۳۲

۴) ۶۴

۵۰- در شکل مقابل، مستطیل رنگی را حول محور y ها دوران می دهیم. بیش ترین مقدار برای حجم جسم حاصل کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۰)



۱) $\frac{۵۱۲\pi}{۲۷}$

۲) $\frac{۶۴\pi}{۵}$

۳) $\frac{۷۲\pi}{۵}$

۴) $\frac{۶۴\pi}{۳}$

۵۱- از بین مثلث های قائم الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیش ترین باشد؟(تجربی ۹۹)

۱) $\frac{۲}{۱}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

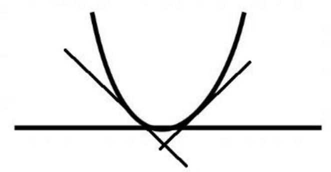
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱}$

تمرین کتاب درسی: فردی درون قایقی در نقطهٔ P قرار دارد که فاصلهٔ آن از نزدیک ترین نقطهٔ ساحل یعنی نقطهٔ A، معادل ۳ کیلومتر است. او می خواهد به نقطهٔ B در ساحل برسد که در ۸ کیلومتری A قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق $۲km/h$ و سرعت پیاده روی در ساحل $۴km/h$ باشد. اگر او بخواهد در کوتاه ترین زمان ممکن به B برسد. در چه نقطه ای از ساحل باید پیاده شده و به سوی B پیاده روی کند؟

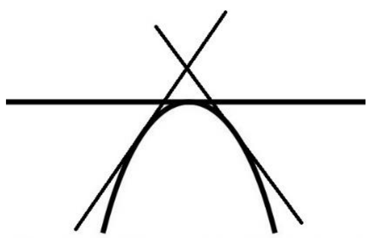
(مخصوص رشته ریاضی)

تقعر:

اگر دهانه منحنی رو به بالا باشد یا به اصطلاح علمی منحنی بالای هر خط مماس بر آن باشد، تقعر منحنی را رو به بالا می گوئیم.



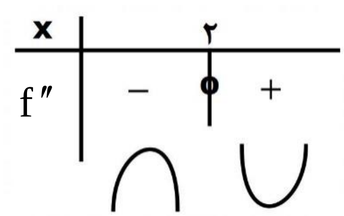
اگر دهانه منحنی رو به پایین باشد یا به اصطلاح علمی منحنی زیر هر خط مماس بر ان باشد، تقعر منحنی را رو به پائین می گوئیم.



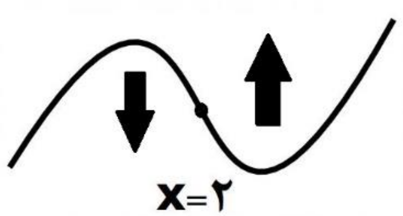
در تابع پیوستهٔ f اگر مشتق دوم مثبت باشد تقعر رو به بالا و اگر مشتق دوم منفی باشد تقعر رو به پایین است. برای نمونه تابع $f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}+۱$ را در نظر بگیرید.

مشتق دوم آن را محاسبه و تعیین علامت می کنیم.

$$f'(x)=۳x^{۲}-۱۲x \rightarrow f''(x)=۶x-۱۲=۰ \rightarrow x=۲$$



اگر نمودار کلی این تابع را رسم کنیم به شکل زیر می شود.



۵۲- منحنی نمایش تابع $y=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲-۳x$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به بالاست؟

۱) $(-۱,۱)$

۲) $(-۱,۲)$

۳) $(۱,۳)$

۴) $(۱,+\infty)$

۵۳-تقعر منحنی $y=(x+۳)\sqrt{x}$ در بازهٔ (a,b) رو به پایین است. بیش ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۵۴- در کدام بازهٔ تقعر منحنی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{x}(x-۸)$ رو به بالاست؟(سنجش ۱۴۰۰)

۱) $(-۲,-۱)$

۲) $(-۲,۲)$

۳) $(-۵,-۲)$

۴) $(-۶,-۵)$

۵۵- نمودار تابع $f(x)=۴x^{\frac{۱}{۳}}-x^{\frac{۴}{۳}}$ در کدام بازه اکید صعودی و تقعر آن رو به بالاست؟

۱) $(-\infty,۱)$

۲) $(-۲,۱)$

۳) $(۰,۱)$

۴) $(-۲,۰)$

۵۶- اگر تقعر تابع $f(x)=ax^{۲}+۲\cos ۲x$ همواره رو به بالا باشد، حدود a کدام است؟ (گزینهٔ دو ۱۴۰۰)

۱) $a \le ۲$

۲) $a \ge ۲$

۳) $a > ۴$

۴) $a < ۴$

۵۷- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\cos^{۲} x-۲\cos x \quad , x\in[۰,۲\pi]$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟ (ریاضی ۹۶)

۱) $\left(\frac{\pi}{۲},\frac{۲\pi}{۳}\right)$

۲) $\left(\pi,\frac{۴\pi}{۳}\right)$

۳) $\left(\frac{۲\pi}{۳},\pi\right)$

۴) $\left(\frac{۴\pi}{۳},\frac{۳\pi}{۲}\right)$

(مخصوص رشته ریاضی)

نقطهٔ عطف:

فرض کنید تابع f در نقطهٔ $x=c$ پیوسته باشد، دراین صورت نقطهٔ $(c,f(c))$ نقطهٔ عطف تابع است اگر نمودار F در این نقطه مماس واحد داشته باشد و جهت تقعر منحنی در این نقطه تغییر کند.

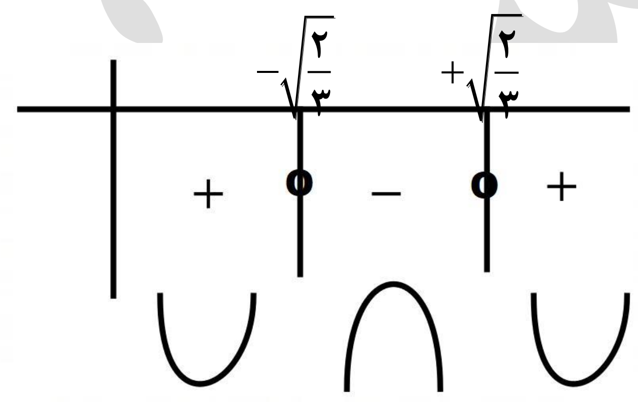
برای یافتن طول نقطهٔ عطف، باید از ضابطهٔ تابع پیوستهٔ f دو بار مشتق بگیریم و آن را برابر صفر قرار دهیم و با رسم جدول تعیین علامت، ریشه هایی که تغییر علامت می دهند را بیابیم.

تذکر:

صفر شدن مشتق دوم برای عطف بودن کافی نیست و باید مشتق دوم در آن نقطه تغییر علامت دهد. به طور کلی بعد از پیوسته بودن و مماس واحد داشتن کافی است مشتق دوم در نقطه ای تغییرعلامت دهد تا درآن نقطه تابع نقطهٔ عطف داشته باشد.

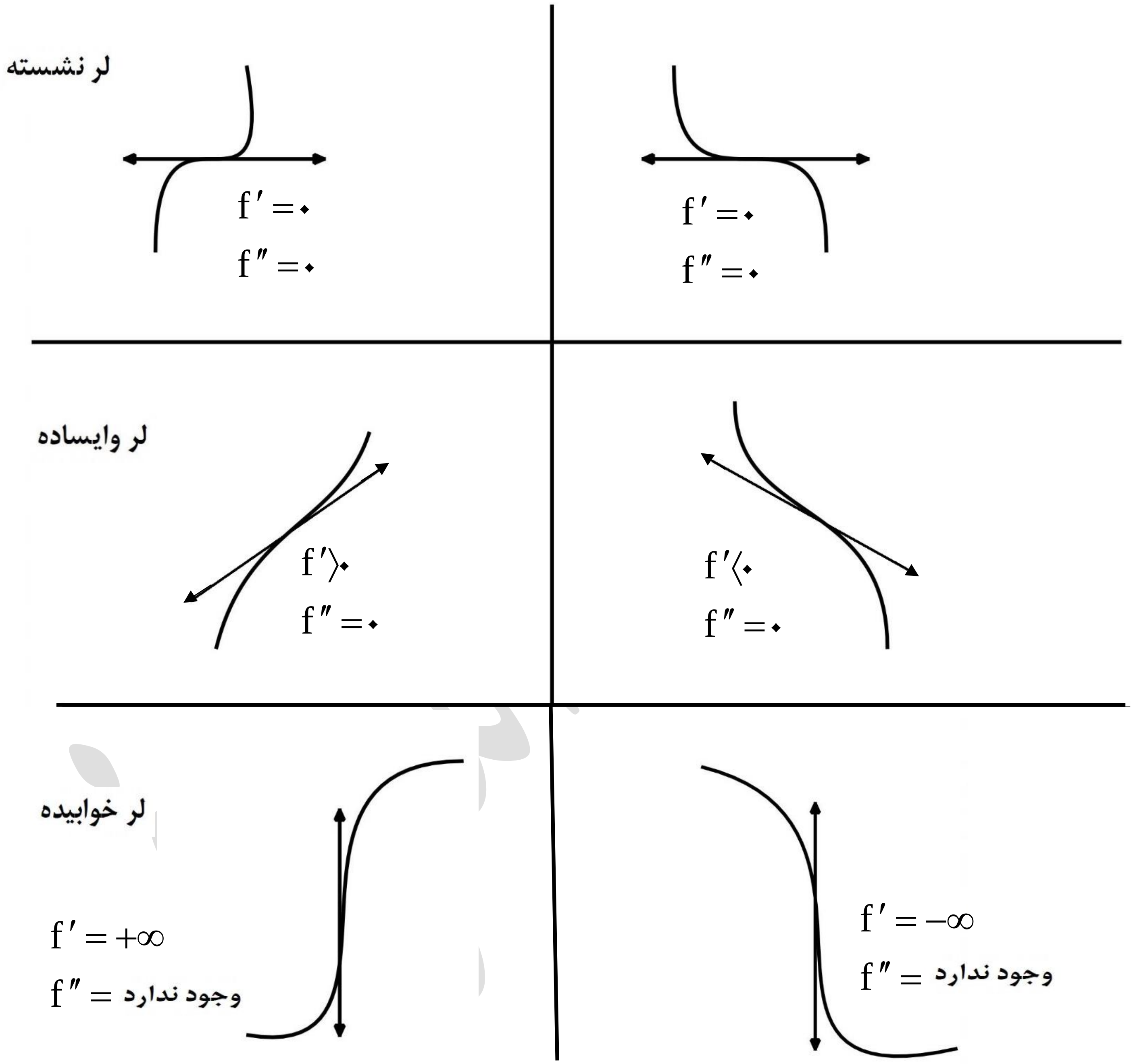
برای نمونه نقطه های عطف تابع $f(x)=x^۴-۴x^۲$ را به روش زیر می یابیم.

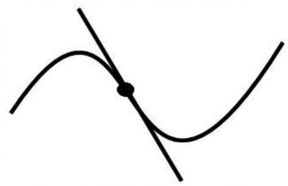
$$f'(x)=۴x^۳-۸x \rightarrow f''(x)=۱۲x^۲-۸=۰ \rightarrow x^۲=\frac{۲}{۳} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$



تابع دارای دو نقطهٔ عطف به طول های $x=\pm\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ دارد.

انواع نقطهٔ عطف:





نکته۱ :نقطه عطف تنها نقطه ای از تابع است که مماس بر منحنی از درون آن عبور می کند.

نکته ۲ : طول نقطهٔ عطف می تواند نقطهٔ اکسترمم تابع مشتق باشد.بنابراین اگر در تست ها ماکزیمم یا مینیمم مشتق را بخواهند باید طول نقطهٔ عطف را بیابیم.

۵۸- به ازای کدام مقدار a ،نقطهٔ عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۲}{۳}x^{۳}-۳x^{۲}+ax$ روی نیمساز ناحیهٔ چهارم قرار دارد؟

۱) ۲−

۲) ۱−

۳) ۱

۴) ۲

۵۹- فرض کنید B,A نقاط مینیمم D,C نقاط عطف تابع $f(x)=x^{۴}-۶x^{۲}+۵$ باشند.زاویهٔ بین پاره خط های CD,AB کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) صفر

۲) ۳۰

۳) ۴۵

۴) ۶۰

۶۰- جهت تقعر نمودار تابع $y=۳x\left|x^{۲}-۸x\right|$ در چند نقطه عوض می شود؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۶۱- مجموعه نقاط عطف تابع $f(x)=(۴x-۴)\left|x^{۲}+x-۲\right|$ کدام است؟ (گاج ۱۴۰۰)

۱) $\{۱,۲\}$

۲) $\{۰,۱\}$

۳) $\{۰,۱,-۲\}$

۴) $\{-۲,۰\}$

۶۲-طول نقطهٔ عطف تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}(x-۴)$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۱-

۳) ۲

۴) ۲-

۶۳- طول نقطهٔ عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{\frac{۵}{۳}}-۱۰x^{\frac{۲}{۳}}$ کدام است؟

۱) ۲-

۲) ۲-و صفر

۳) ۲

۴) ۲ و صفر

۶۴- اگر $(\sqrt[۳]{a}, ۲)$ نقطهٔ عطف تابع $y = \frac{b}{x^۳ - ۱}$ باشد، مقدار b کدام می تواند باشد؟ (قلم چی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $-\frac{۱}{۴}$

۳) -۳

۴) $-\frac{۳}{۲}$

۶۵- مجموعه طول نقاط عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x^۳ - ۳x^۲ & x \geq -۱ \\ -۱۳ - \frac{۹}{x} & x < -۱ \end{cases}$ کدام است؟

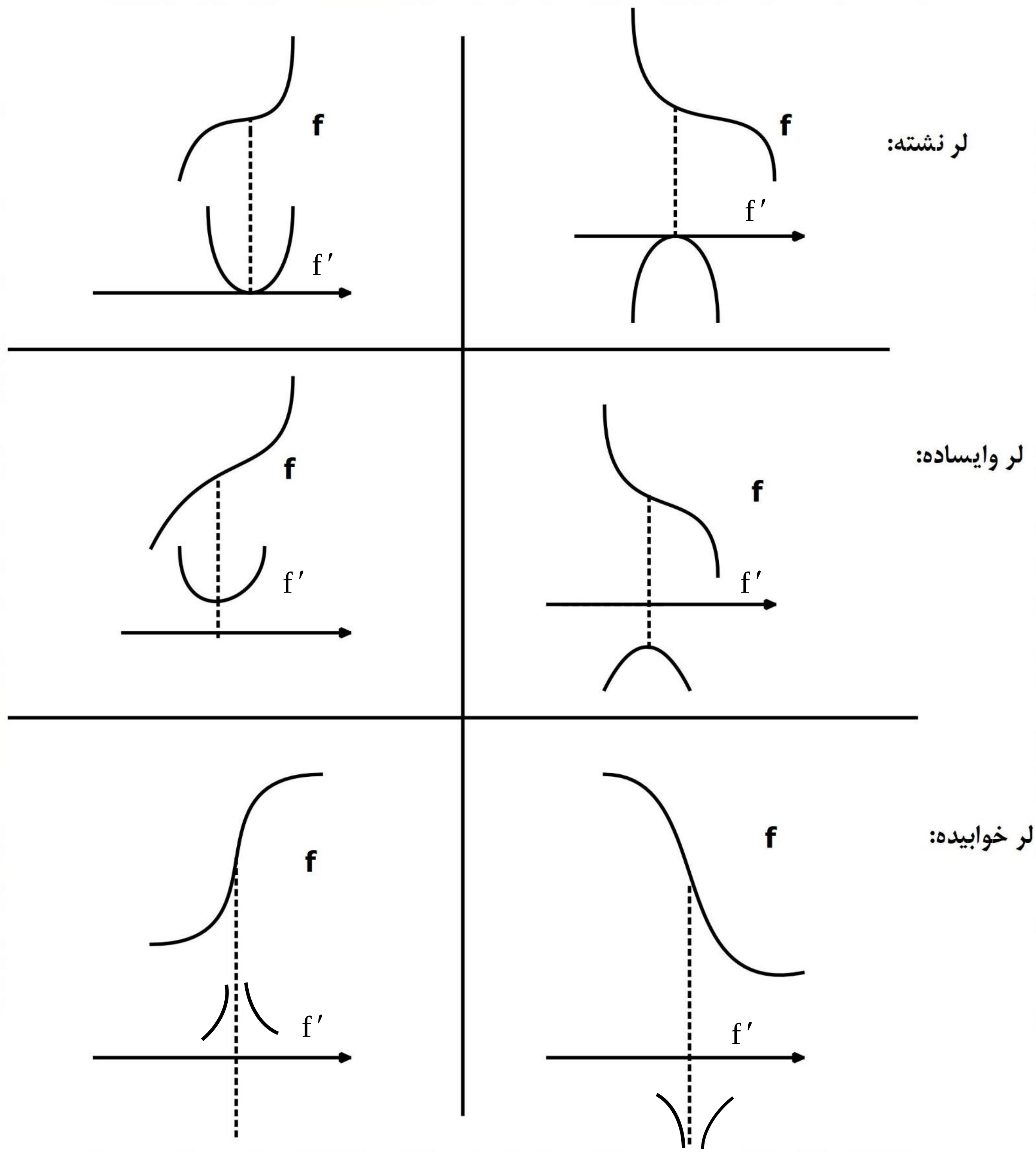
۱) $\{-۱\}$

۲) $\{۱\}$

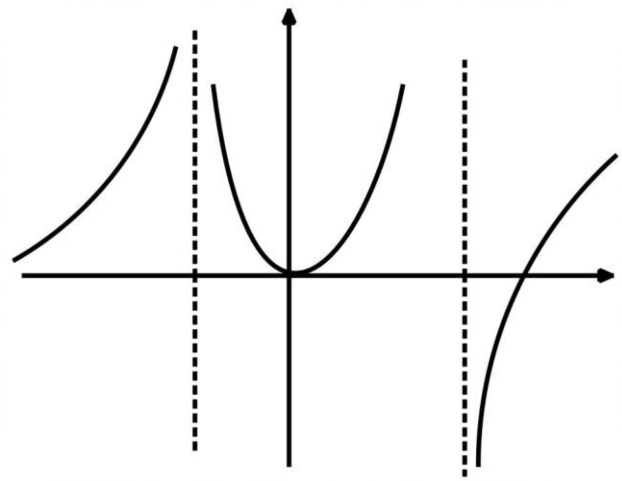
۳) $\{-۱, ۱\}$

۴) $\varnothing$

نکته:ارتباط بین نمودارهای f', f در نقاط عطف به شکل های زیر است.



۶۶-نمودار تابع مشتق، تابع پیوستهٔ f به شکل زیر است در این تابع مجموع تعداد نقاط اکسترمم نسبی و عطف کدام است؟



۱) ۲

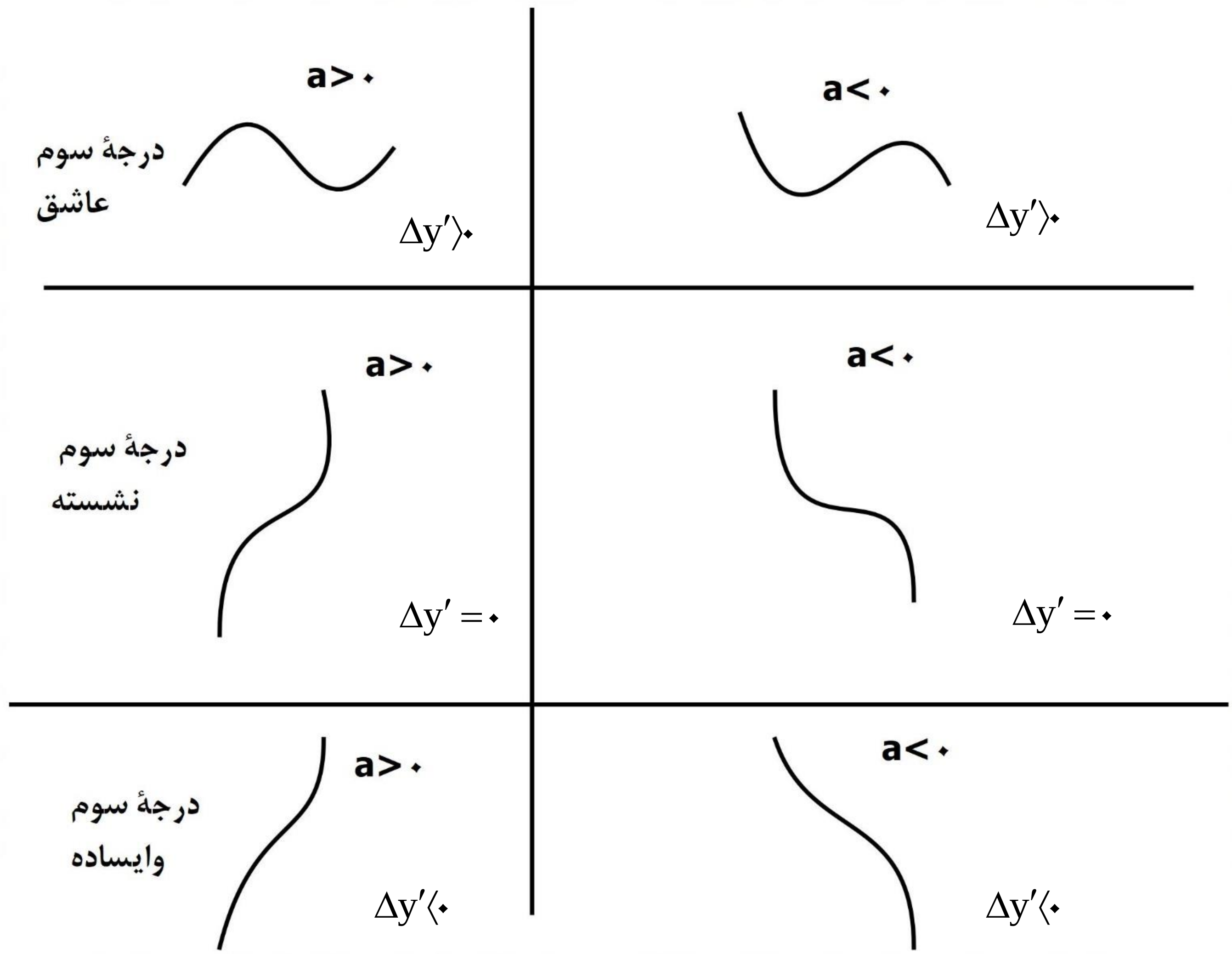
۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

تابع درجهٔ سوم:

تابع $f\left(x\right)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ به یکی از شش شکل زیر است.

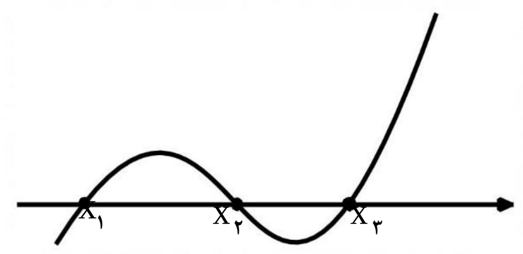


۱) تعداد اکسترمم های این تابع به علامت Δ تابع مشتق آن ارتباط دارد.این تابع در همهٔ شکل ها یک نقطهٔ عطف به طول $x=-\frac{b}{۳a}$ دارد.این نقطهٔ عطف، مرکز تقارن تابع است و به همین دلیل داریم:

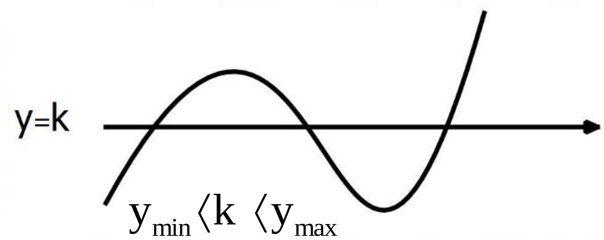
$$\begin{cases} x_{عطف}=\frac{x_{Max}+x_{Min}}{۲} \\ y_{عطف}=\frac{y_{Max}+y_{Min}}{۲} \end{cases}$$

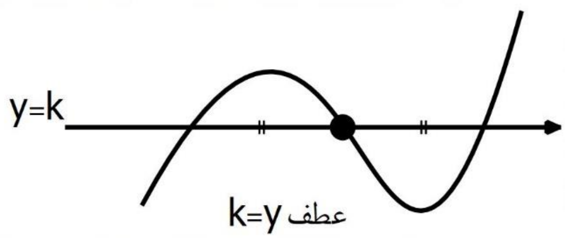
۲) میانگین ۳ ریشهٔ تابع،طول نقطهٔ عطف تابع است.

$$x_{\text{عطف}} = \frac{x_{۱} + x_{۲} + x_{۳}}{۳}$$

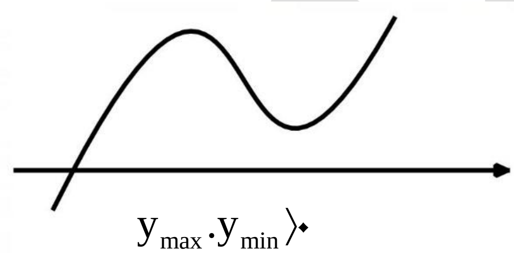


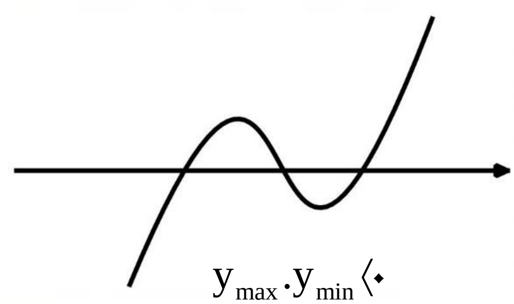
۳) هر خط افقی $y = k$ می تواند منحنی نمودار تابع $f(x) = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d$ را در سه نقطه قطع کند به شرطی که $y_{min} \langle k \langle y_{max}$ و اگر نمودار روی این خط پاره خط های مساوی ایجاد کند باید $k = y_{\text{عطف}}$ باشد.



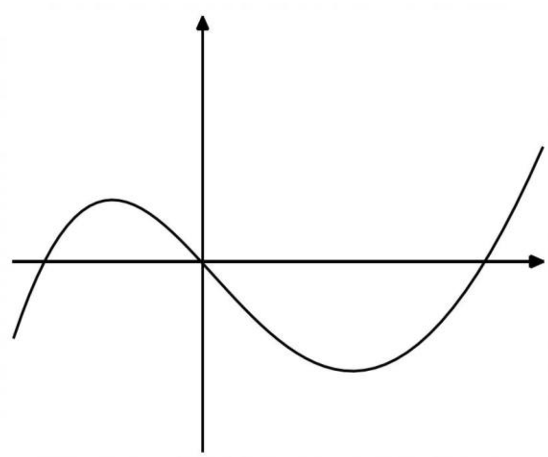


۴) معادلهٔ $ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d = ۰$ در حالتی که $\Delta_{y'} \leq ۰$ باشد فقط یک ریشه (متمایز) و در صورتی که $\Delta_{y'} \rangle ۰$ باشد اگر $y_{max} \cdot y_{min} \rangle ۰$ باشد هم چنان یک ریشه و اگر $y_{max} \cdot y_{min} \langle ۰$ باشد ۳ ریشه دارد.





۶۷- شکل مقابل نمودار تابع $y=\frac{2}{3}x^3+ax^2+bx$ است. زوج مرتب (a,b) به کدام صورت می تواند باشد؟



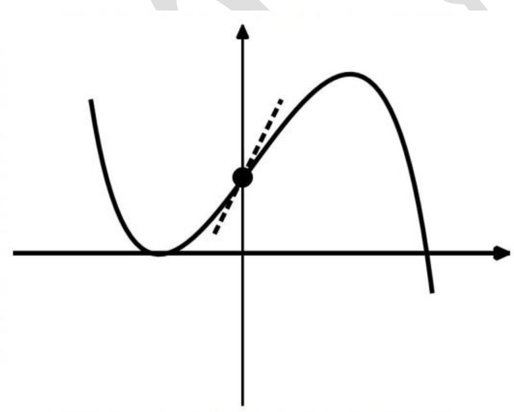
۱) $(1,4)$

۲) $(-1,4)$

۳) $(-1,-4)$

۴) $(1,-4)$

۶۸-شکل زیر نمودار تابع $y=-x^3+ax^2+bx+2$ است. زوج مرتب (a,b) کدام است؟



۱) $(0,-3)$

۲) $(1,-2)$

۳) $(0,3)$

۴) $(0,6)$

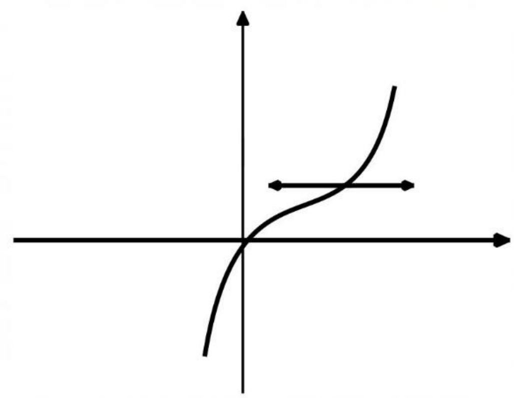
۶۹- شکل زیر نمودار تابع $y = x^۳ + ax^۲ + bx$ **است. دو تایی** (a, b) **به کدام صورت می تواند باشد؟**

۱) $(-۳, ۴)$

۲) $(۶, ۱۲)$

۳) $(-۶, ۱۲)$

۴) $(۳, ۲)$



۷۰-در تابع $y = x^۳ + ۳x^۲ - ۹x + a$ **مجموع عرض نقاط ماکزیمم، مینیمم و عطف برابر ۳۶ می باشد.مقدار** a **کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۰)**

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

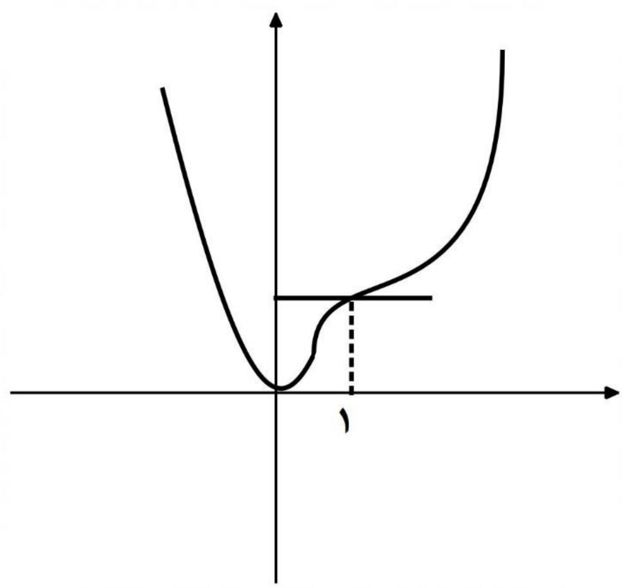
۷۱-شکل زیر نمودار تابع $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx$ **است.** a **کدام است؟ (ریاضی ۹۸)**

۱) ۸-

۲) ۷-

۳) ۵-

۴) ۴-



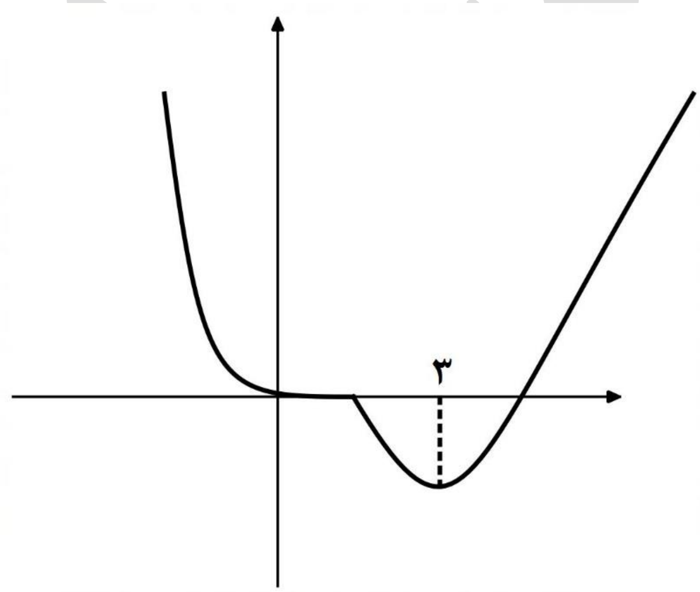
۷۲- شکل زیر نمودار تابع $f(x)=x^4+ax^3+bx^2$ **است.** $f(-2)$ **کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)**

۱) ۳۲

۲) ۳۶

۳) ۴۰

۴) ۴۸



تابع هموگرافیک:

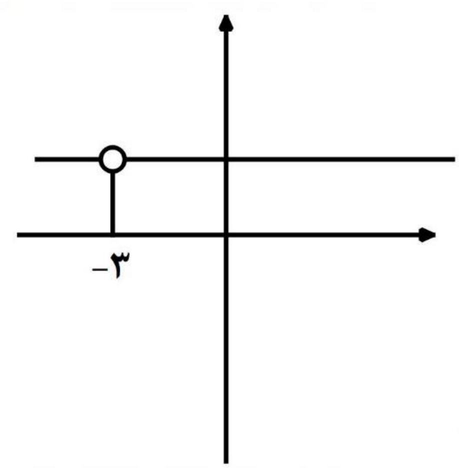
تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ را تابع هموگرافیک می نامیم به شرط آنکه $c\neq ۰$ و $\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$ باشند.

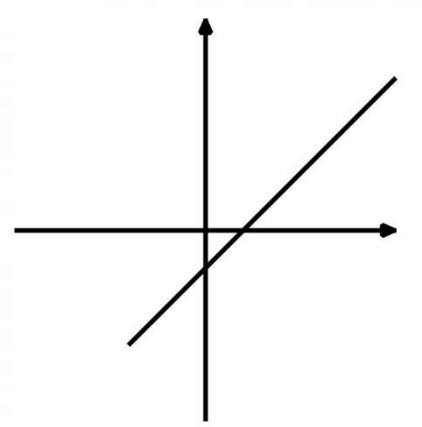
اگر $c=۰$ شود تابع تبدیل به تابع خطی با شیب غیر صفر و اگر $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ آنگاه تابع تبدیل به دو نیم خط افقی می شود برای نمونه:

$$f(x)=\frac{۲x+۶}{x+۳}\xrightarrow[\frac{۲}{۱}=\frac{۶}{۳}]{}f(x)=۲ \quad (x\neq -۳)$$

یا

$$f(x)=\frac{۲x-۱}{۰(x)+۱}=۲x-۱$$





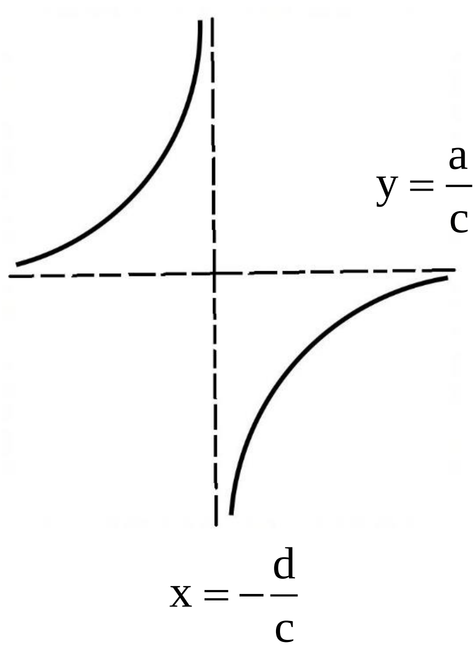
تابع هموگرافیک $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ دارای یک مجانب قائم $x=-\dfrac{d}{c}$ و یک مجانب افقی $y=\dfrac{a}{c}$ است. محل برخورد دو مجانب $w\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$ مرکز تقارن تابع هموگرافیک است.

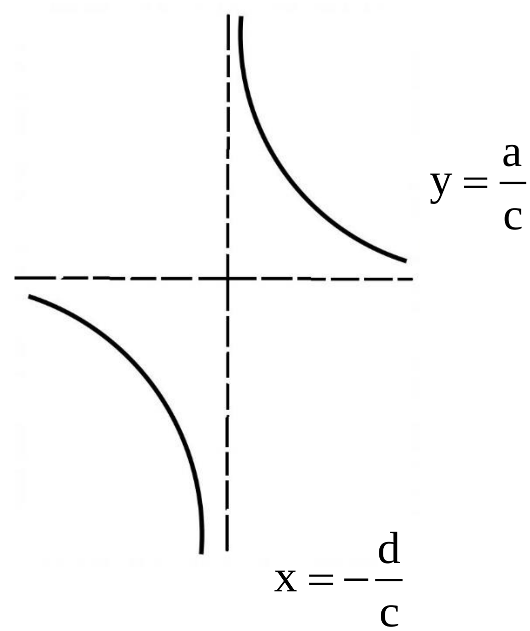
این تابع دارای دو محورتقارن با شیب های ±۱ که از مرکز تقارن تابع $w\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$ می گذرد است.

$$y-\frac{a}{c}=\pm۱\left(x-\left(-\frac{d}{c}\right)\right)$$

مشتق تابع $f'(x)=\frac{\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^{2}}$ است. اگر $\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}>0$ باشد تابع در هر زیر مجموعه ای از بازهٔ باز مجانب قائم تا $+\infty$ یا از $-\infty$ تا مجانب قائم صعودی اکید است.

تابع هموگرافیک در هر همسایگی محذوف مجانب قائم خود غیر یکنواست.





نکته:

تابع وارون $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ برابر $f'(x)=\frac{dx-b}{-cx+a}$ است و در صورتی که $a+d=0$ شود تابع وارون این تابع با خودش مساوی است.همچنین در سایر حالت ها $(a+d\neq 0)$ محل برخورد تابع هموگرافیک و وارون آن بر روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد.

۷۳- معادلهٔ محور تقارن قاطع منحنی $y=\frac{۲x+۲}{۲x-۴}$ **کدام است؟**

۱) $y=x+۱$

۲) $y=x-۱$

۳) $y=-x+۳$

۴) $y=-x-۱$

۷۴- تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax+b+\frac{x^۲}{۲x-۱}$ **تابع هموگرافیکی است که محور** y **ها را در نقطه ای به عرض ۱ قطع می کند.** $a+b$ **کدام است؟**

۱) ۲

۲) ۲-

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $-\frac{۱}{۲}$