جزوه درس

ریاضی دهم

گردآورنده:

محسن داداشی

دبیر دبیرستان های ماندگار البرز، رشد منطقه۱۶

سروش شاهد منطقه ۱۶ و ماندگار الهی

فصل۱: مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه: به دسته ای از اشیا کاملاً مشخص و دو به دو متمایز (غیرتکراری) مجموعه می گویند.

نکته: مجموعه را به صورت آکولاد { } نمایش می دهند و نیز مجموعه را با حروف بزرگ انگلیسی نام گذاری می کنند.

نکته: هر یک از اعداد و عبارات داخل مجموعه را عضو آن مجموعه می گوییم. علامت عضو بودن به صورت $\in$ و علامت عضو نبودن به صورت $\notin$ است.

مجموعه تهی: مجموعه ای که هیچ عضوی ندارد را مجموعه تهی می نامیم. مجموعه تهی را با علامت { } یا ϕ نمایش می دهیم.

زیرمجموعه: مجموعه A را زیرمجموعهٔ B می نامیم هرگاه هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد و آن را به صورت نمایش $A \subseteq B$ می دهیم . اگر مجموعه A زیرمجموعه B نباشد، به این معناست که حداقل یک عضو در A وجود دارد که در B نیست و در این صورت می نویسیم: $A \not\subseteq B$

زیرمجموعه سره (محض): هر زیرمجموعه از یک مجموعه غیر از خودش را، زیرمجموعه سره آن مجموعه می نامیم.

نکات:

۱) تعداد زیرمجموعه های یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با ۲^n

۲) تعداد زیرمجموعه های محض یک مجموعه n عضوی برابر است با $۲^n - ۱$

۳) تعداد زیرمجموعه های ناتهی یک مجموعه n عضوی برابر است با $۲^n - ۱$

۴) تعداد زیرمجموعه های محض ناتهی یک مجموعه n عضوی برابر است با $۲^n - ۲$

تمرین: با توجه به مجموعه $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ مطلوب است:

الف) تعداد زیرمجموعه های A

ب) تعداد زیرمجموعه های ناتهی A

پ) تعداد زیرمجموعه های محض A

ت) تعداد زیرمجموعه های محض ناتهی A

الف) $۲^۵ = ۳۲$ ب) $۲^۵ - ۱ = ۳۱$

پ) $۲^۵ - ۱ = ۳۱$ ت) $۲^۵ - ۲ = ۳۰$

تمرین: اگر ۲ عضو از مجموعه ای حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه های آن ۳۸۴ واحد کم می شود. تعیین کنید این مجموعه چند عضو دارد؟

تمرین: اگر دو عضو به مجموعه ای اضافه کنیم. تعداد زیرمجموعه هایش ۴۸ واحد افزایش می یابد. مشخص کنید این مجموعه چند عضو دارد؟

دو مجموعه مساوی: دو مجموعه A و B را مساوی می گوئیم هرگاه هر عضو از A در B باشد و نیز هر عضو از B در A باشد. اگر A و B دو مجموعه مساوی باشند به صورت A=B نمایش می دهیم.

به عنوان مثال دو مجموعه A و B که به صورت زیر داده شده اند، مساوی اند.

$$A = \{۳,۵,۲\} \text{ و } B = \left\{\frac{۱۰}{۲}, ۳, \sqrt{۴}\right\}$$

نکته: ترتیب قرارگیری اعضا داخل مجموعه ها اهمیتی ندارد.

تمرین: مقادیر x و y چند باشد تا دو مجموعه A و B با هم مساوی شوند؟

$A=\{x-۶,۷\}$ و $B=\{y-۲,۵\}$

$x-۶=۵ \Rightarrow x=۱۱$

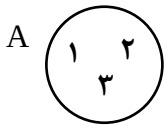
$y-۲=۷ \Rightarrow y=۹$

تمرین: اگر $A=\{۲,x+۲y,۴\}$ و $B=\{۴,۵,x-y\}$ و $A=B$ ، در این صورت مقادیر x و y را بیابید.

$$\begin{cases} x-y=۲ \\ x+۲y=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۲y=۴ \\ x+۲y=۵ \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=۳} \text{ و } \boxed{y=۱}$$

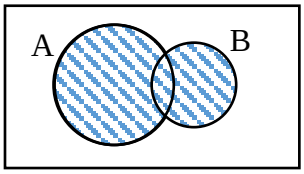
نمودار ون مجموعه ها: مجموعه ها را می توان داخل یک منحنی بسته نمایش داد که نمودار ون نامیده می شود.

به عنوان مثال نمودار ون برای مجموعه $A=\{۱,۲,۳\}$ به صورت زیر است:



اعمال روی مجموعه ها:

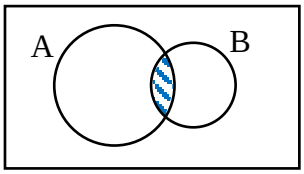
۱ـ اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه A و B را به صورت $A\bigcup B$ نمایش می دهیم و شامل اعضایی است که حداقل در یکی از مجموعه های A یا B قرار دارد. نمایش نمودار ون برای اجتماع دو مجموعه A و B به صورت زیر است:



$A\bigcup B=\{x \mid x\in A \text{ یا } x\in B\}$

نکته: اجتماع چند مجموعه نیز به طریق مشابه تعریف می شود.

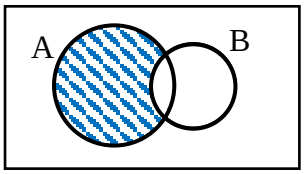
۲ـ اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه مانند A و B را با نماد $A\bigcap B$ نمایش می دهیم و شامل اعضایی است که هم در A و هم در B قرار دارند. نمایش نمودار ون برای اشتراک دو مجموعه A و B به صورت زیر است.



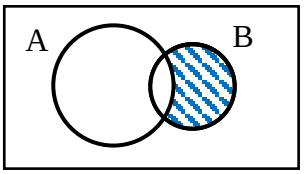
$A\bigcap B=\{x \mid x\in A, x\in B\}$

نکته: اشتراک چند مجموعه نیز به طریق مشابه تعریف می شود.

۳ـ تفاضل دو مجموعه: مجموعه $A-B$ شامل همه عضوهایی است که در A باشند ولی در B نباشند. در واقع برای به دست آوردن $A-B$ کافی است از مجموعه A ، اعضای مشترک را حذف کنیم. مجموعه $B-A$ نیز به طریق مشابه تعریف می شود.



$A-B=\{x \mid x\in A, x\notin B\}$



$B-A=\{x \mid x\in B, x\notin A\}$

مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$ و $C=\{۱,۲,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$ در این صورت مطلوب است:

الف) $A\bigcup B$ ب) $A\bigcap B$

پ) $A-B$ ت) $B-A$

ث) $A\bigcap(B\bigcup C)$ ج) $A-(B-C)$

$B-C=\{۳,۴\}$

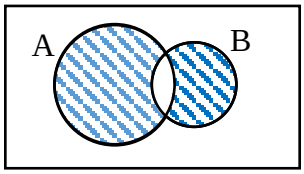
الف) $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ ب) $\{۳,۴\}$ پ) $\{۱,۲\}$ ت) $\{۵,۶,۷\}$

ث) ابتدا $B\cup C$ را حساب می کنیم و سپس حاصل خواسته شده را پیدا می کنیم $\{۱,۲,۳,۴\}$

ج) ابتدا حاصل $B-C$ را پیدا می کنیم و سپس حاصل $A-(B-C)$ را پیدا می کنیم $\{۱,۲\}$

۴ـ تفاضل متقارن دو مجموعه: اگر A و B دو مجموعه باشند، در این صورت تفاضل متقارن آنها را با نماد $A\Delta B$ (A دلتا B) نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود.

$$A\Delta B=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)=\{x\,|\,x\in(A\bigcup B),x\notin(A\bigcap B)\}$$



نمودار ون تفاضل متقارن دو مجموعه

فرمول دوم تفاضل متقارن دو مجموعه: فرمول دوم تفاضل متقارن دو مجموعه مانند A و B به صورت زیر است.

$$A\Delta B=(A-B)\bigcup(B-A)$$

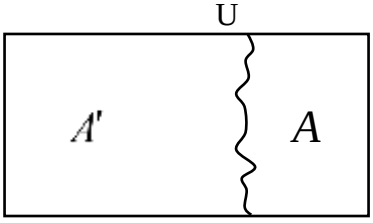
مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع:در هر موضوعی، مجموعه ای که همه مجموعه های مورد بحث زیر مجموعه آن هستند را مجموعه مرجع می نامیم. معمولاً مجموعه مرجع را با نماد U یا M نمایش می دهیم. (مجموعه مادر یا جهانی)

*** متمم یک مجموعه**: اگر A یک مجموعه باشد در این صورت متمم آن را با نماد A' یا A^c نمایش می دهیم و شامل همه اعضایی از مجموعه مرجع است که در A نباشند. در واقع داریم:

$$A'=\{x\,|\,x\in U,x\notin A\}=U-A$$

نمودار ون متمم یک مجموعه مانند A به صورت زیر است:



مثال: در هر یک از موارد زیر با توجه به مجموعه مرجع داده شده، متمم مجموعه را بیابید.

$U=\{۱,۲,...,۱۰\}$

الف) $A=\{۲,۴,۶\}$

حل)

$A'=U-A=\{۱,۲,...,۱۰\}-\{۲,۴,۶\}=\{۱,۳,۵,۷,۸,۹,۱۰\}$

ب) $B=\{x\in Z\,|\,-۱\le x<۲\}$

$B=\{-۱,۰,۱\}$

$B'=U-B=Z-\{-۱,۰,۱\}=\{...,-۲,۲,...\}$

پ) $C=\{x\in N\,|\,۳\le x<۷\}$

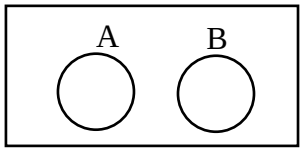
$C=\{۳,۴,۵,۶\}$

$C'=U-C=N-\{۳,۴,۵,۶\}=\{۱,۲,۷,۸,...\}$

دو مجموعه جدا از هم (ناسازگار): دو مجموعه A و B را جدا از هم می نامیم هرگاه اشتراک آنها تهی باشد. یعنی: $A\cap B=\phi$

نکته: اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند در این صورت $n(A\cap B)=۰$ است.

نکته: نمودار ون دو مجموعه جدا ا زهم به صورت زیر است:



عدد اصلی یک مجموعه (کاردینال یک مجموعه): اگر A یک مجموعه باشد در این صورت تعداد اعضای آن را عدد اصلی مجموعه A می نامیم و با نماد $n(A)$ یا $|A|$ نمایش می دهیم.

به عنوان مثال در مجموعه $A=\{a,b,c\}$ داریم: $n(A)=۳$

***مجموعه های متناهی و نا متناهی**: مجموعه ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد را یک مجموعه متناهی می گوئیم. اگر مجموعه ای متناهی نباشد را یک مجموعه نامتناهی می نامیم. (در واقع تعداد اعضای یک مجموعه نامتناهی یک عدد حسابی نیست.)

به عنوان مثال مجموعه $A=\{۱,۲,...,۱۰۰۰\}$ یک مجموعه متناهی است. زیرا $n(A)=۱۰۰۰$ است. ولی مجموعه $N=\{۱,۲,...\}$ یک مجموعه نامتناهی است. زیرا تعداد اعضای آن یک عدد حسابی نیست.

*** معرفی چند مجموعه نامتناهی خاص:**

مجموعه اعداد طبیعی: $N=\{۱,۲,۳,...\}$

مجموعه اعداد طبیعی زوج: $E=\{۲,۴,۶,...\}$

مجموعه اعداد طبیعی فرد: $O=\{۱,۳,۵,...\}$

مجموعه اعداد حسابی: $W=I=\{۰,۱,۲,۳,...\}$

مجموعه اعداد صحیح: $Z=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$

مجموعه اعداد صحیح زوج: $Z_E=\{...,-۲,۰,۲,...\}=\{۲x\,|\,x\in Z\}$

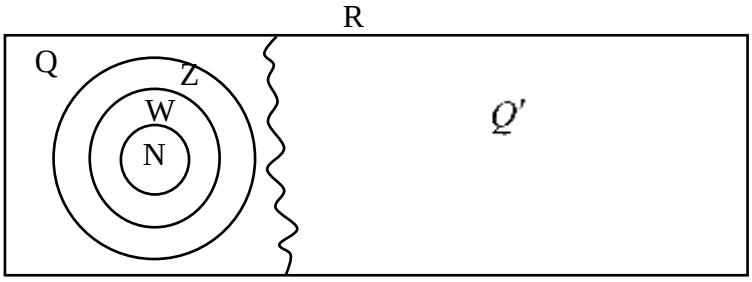
مجموعه اعداد صحیح فرد: $Z_O=\{...,-۱,۱,۳,...\}=\{۲x+۱\,|\,x\in Z\}$

مجموعه اعداد گویا: $Q=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\,a\in Z\ ,\ b\in Z\ ,\ b\neq ۰\right\}$

مجموعه اعداد گنگ $Q'=$ همهٔ اعدادی که گویا نباشند.

مجموعه اعداد حقیقی: $R=Q\cup Q'$

نکته: ارتباط بین مجموعه های معرفی شده به صورت زیر است:



۱) $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ و $Q' \subseteq R$

۲) $Q \cap Q' = \phi$ و ۳) $Q \cup Q' = R$

۴) $Q = R - Q'$ و $Q' = R - Q$

۶) Q و Q' متمم هم هستند.

۷) از لحاظ زیرمجموعه بودن بین مجموعه های Q و Z و W و N با مجموعه Q' رابطه ای وجود ندارد.

۸) اشتراک هر کدام از مجموعه های Q و Z و W و N با مجموعهٔ Q' برابر تهی است.

۹) تفاضل هر کدام از مجموعه های Q و Z و W و N از مجموعه Q' برابر خود آن مجموعه می شود و برعکس. یعنی مثلاً $N - Q' = N$ و $Q' - Z = Q'$

یادآوری چند نکته مهم:

۱ـ اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه همواره داریم:

الف) $A \cup B = B$ ب) $A \cap B = A$ پ) $A - B = \phi$

۲ـ اگر $A \cap B = \phi$ در این صورت همواره داریم:

الف) $A - B = A$ ب) $B - A = B$

نتیجه: تفاضل هر مجموعه از متمم خود می شود خود آن مجموعه.

مثال: حاصل هر یک از اعمال زیر را بدست آورید.

۱) $W - N = \{0\}$

۲) $Z \cap Q = Z$

۳) $Z - W = \{\dots, -2, -1\}$

۴) $Q' - N = Q'$

۵) $W - Q = \{\}$

۶) $W - Z = \{\}$

۷) $W \cap Q = W$

۸) $W \cup Q = Q$

۹) $Z - N = \{\dots, -2, -1, 0\}$

۱۰) $R \cup Q' = R$

۱۱) $Q' \cap Q = \{\}$

۱۲) $Q' \cup Q = R$

۱۳) $Q' \cap R = Q'$

۱۴) $N - R = \{\}$

نکته: بین مجموعه های R و Q و Z و W و N

الف) اشتراک می شود مجموعه کوچک

ب) اجتماع می شود مجموعه بزرگ

پ) تفاضل کوچک از بزرگ می شود تهی

چند نکته مهم دربارهٔ مجموعه های متناهی و نامتناهی:

۱ـ اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند در این صورت:

الف) اجتماع آنها متناهی است. یعنی $A\bigcup B$ متناهی است.

ب) اشتراک آنها متناهی است. یعنی $A\bigcap B$ متناهی است.

پ) تفاضل آنها متناهی است. یعنی $A-B$ و $B-A$ متناهی است.

۲ـ اگر A یک مجموعه متناهی و B یک مجموعه نامتناهی باشد در این صورت:

الف) اجتماع آنها نامتناهی است.

ب) اشتراک آنها متناهی است.

پ) $A-B$ متناهی است.

در واقع تفاضل هر مجموعه متناهی از یک مجموعه نامتناهی می شود متناهی.

ت) $B-A$ نامتناهی است.

در واقع تفاضل هر مجموعه نامتناهی از یک مجموعه متناهی می شود نامتناهی.

۳ـ اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند. در این صورت:

الف) اجتماع آنها نامتناهی است.

ب) راجع به اشتراک آنها نمی توان نظر قطعی داد. یعنی ممکن است اشتراک آنها متناهی باشد مانند W و N و یا ممکن است نامتناهی باشد مانند N و Z

پ) راجع به تفاضل نمی توان نظر داد. یعنی ممکن است تفاضل آنها متناهی باشد مانند $W-N$ و یا ممکن است نامتناهی باشد. مانند: $Z-N$

۴ـ اگر $A\subseteq B$ و A متناهی باشد:

الف) B می تواند متناهی باشد یا نامتناهی باشد.

ب) $A\bigcup B$ می تواند متناهی باشد یا نامتناهی (بستگی به B دارد.)

پ) $A\bigcap B$ حتماً متناهی است.

ت) $A-B$ متناهی است.

ث) $B-A$ می تواند متناهی باشد یا نامتناهی (بستگی به B دارد.)

۵ـ اگر $A\subseteq B$ و B متناهی باشد. در این صورت:

الف) A متناهی است.

ب) $A\bigcup B$ متناهی است.

پ) $A\bigcap B$ متناهی است.

ت) $A-B$ و $B-A$ هر دو متناهی اند.

۶ـ اگر $A\subseteq B$ و B نامتناهی باشد:

الف) A می تواند متناهی باشد یا نامتناهی باشد.

ب) $A\bigcup B$ نامتناهی است.

پ) $A\bigcap B$ می تواند متناهی باشد یا نامتناهی (بستگی به A دارد.)

ت) اگر A متناهی باشد $B-A$ نامتناهی است و اگر A نامتناهی باشد نمی توان نظر قطعی درباره $B-A$ داد. (پس در کل راجع به $B-A$ نمی توان نظر قطعی داد.)

ث) در این صورت $A-B$ متناهی است.

۷ـ اگر $A \subseteq B$ و A نامتناهی باشد. در این صورت:

الف) B نامتناهی است.

ب) $A \bigcup B$ نامتناهی است.

پ) $A \bigcap B$ نامتناهی است.

ت) مجموعهٔ $A - B$ متناهی است و مجموعهٔ $B - A$ می تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

زبان ریاضی مجموعه ها: این موضوع را با یک مثال توضیح می دهیم. فرض کنید مجموعهٔ $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ داده شده است. می توان آن را با نمادهای ریاضی به صورت زیر نوشت. که «زبان ریاضی مجموعه A» نامیده می شود.

$$A = \{۲x \mid x \in N, ۱ \le x \le ۴\}$$

نکته: در نوشتن زبان ریاضی مجموعه ها به مجموعه مرجع حتماً باید توجه شود.

مثال: اعضای هر یک از مجموعه های زیر را بنویسید و متناهی یا نامتناهی بودن هر کدام را تعیین کنید.

الف) $A = \{۲^n + ۱ \mid n \in N\}$ $A = \{۳, ۵, ۹, \dots\}$

ب) $B = \{n^۳ + n \mid n \in W\}$ $B = \{۰, ۲, ۱۰, \dots\}$

پ) $C = \{n^۳ + n \mid n \in Z\}$ $C = \{\dots, -۲, ۰, ۲, ۱۰, \dots\}$

ت) $D = \left\{(-۱)^{n+۱} \frac{۳n+۲}{n^۲+۱} \mid n \in Z\right\}$ $D = \{\dots, -۲, \frac{۵}{۲}, \dots\}$

مثال: هر یک از مجموعه های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) $A = \{۹, ۹۹, ۹۹۹, ۹۹۹۹, \dots\}$ $= \{۱۰^n - ۱ \mid n \in N\}$

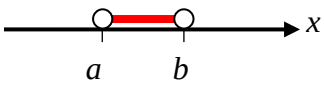
ب) $A = \left\{\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۵}, \dots\right\}$ $= \{\frac{n}{n+۱} \mid n \in N\}$

پ) $C = \left\{\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, -\frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۶}, -\frac{۱}{۷}\right\}$ $= \{(-۱)^{n+۱} \times \frac{۱}{n+۱} \mid n \in N\}$

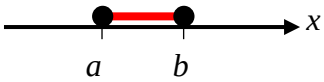
بازه ها (فاصله ها): در نوشتن زبان ریاضی مجموعه ها، اگر مجموعه مرجع اعداد حقیقی باشد نوشتن تک تک اعضا امکان پذیر نیست و باید به صورت یک بازه نمایش دهیم.

انواع بازه ها: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که b>a ، در این صورت انواع بازه ها به صورت زیر هستند.

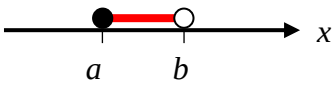
۱) $(a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$ بازهٔ باز



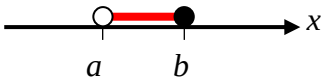
۲) $[a,b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$ بازهٔ بستهٔ



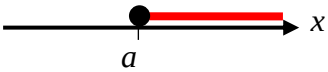
۳) $[a,b)=\{x\in R \mid a\le x<b\}$ بازهٔ نیم باز (نیم بسته)



۴) $(a,b]=\{x\in R \mid a<x\le b\}$ بازهٔ نیم باز (نیم بسته)

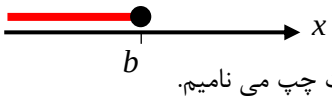


۵) $[a,+\infty)=\{x\in R \mid x\ge a\}$ بازهٔ نیم باز (نیم بسته)



* این حالت را بی کران از سمت راست می نامیم.

۶) $(-\infty,b]=\{x\in R \mid x\le b\}$ بازهٔ نیم باز (نیم بسته)

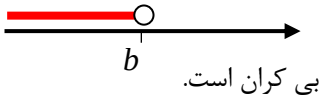


* این حالت را بی کران از سمت چپ می نامیم.

۷) $(a,+\infty)=\{x\in R \mid x>a\}$ بازهٔ باز

* این حالت بی کران است.

۸) $(-\infty,b)=\{x\in R \mid x<b\}$ بازهٔ باز



* این حالت بی کران است.

۹) $(-\infty,+\infty)=R$

* این حالت بی کران است.

مثال: هر یک از مجموعه های زیر را به صورت بازه بنویسید و روی محور نمایش دهید.

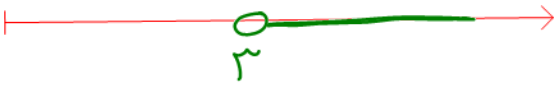
الف) $A=\{x\in R \mid ۱\le x\le ۵\}=[۱,۵]$

ب) $B=\{x\in R \mid -۱<x<۴\}=(-۱,۴)$

پ) $C=\{x\in R \mid ۳<x\le ۸\}=(۳,۸]$

ت) $D=\{x\in R \mid ۰\le x<۴\}=[۰,۴)$

ث) $E=\{x\in R \mid x>۳\}=(۳,+\infty)$



ج) $F=\{x\in R \mid x\le ۷\}=(-\infty,۷]$

چ) $G=\{x\in R \mid x\ge ۵\}=[۵,+\infty)$

نکته: علامت کروشه، یعنی] و [زمانی به کار می روند که خود عدد شامل شود و نیز علامت پرانتز، یعنی (و) زمانی به کار می روند که خود عدد شامل نشود.

مثال: مجموعه جواب A را به صورت یک بازه بنویسید و روی محور نمایش دهید.

$$A=\{x\in R \mid ۲<\frac{x-۱}{۲}+۱<۴\}$$

مثال: مجموعه جواب نامعادله زیر را به صورت بازه بنویسید و روی محور نمایش دهید.

$۲x - ۱ \geq ۰$

$۲x \geq ۱$

$x \geq \frac{۱}{۲}$

$x \in [\frac{۱}{۲}, +\infty)$

اجتماع، اشتراک و تفاضل بازه ها: برای تعیین اجتماع، اشتراک و تفاضل بازه ها، ابتدا آنها را روی محور نمایش می دهیم و سپس عمل خواسته شده را انجام می دهیم.

مثال: حاصل خواسته شده در هر قسمت را به دست آورید.

الف) $(-\infty, ۲) \cup [-۲, ۰)$

ب) $(۱, ۴) \cup [-۱, ۲)$

پ) $(-۳, ۴) - [۱, ۴]$

ت) $[-۳, ۴) - [۱, ۴]$

ث) $[-۳, ۴] - (۱, ۴]$

ج) $[۰, ۱۰] - [۱, ۴]$

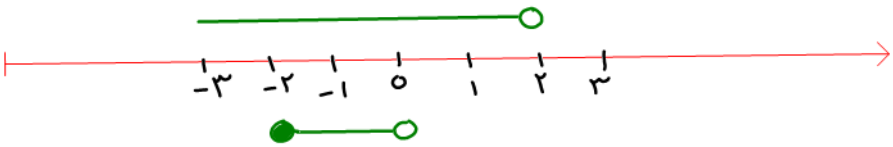
چ) $(۲, +\infty) \cap (۳, ۵]$

ح) $(۲, +\infty) \cap (۳, ۵)$

خ) $(۳, ۵) - (۲, +\infty)$

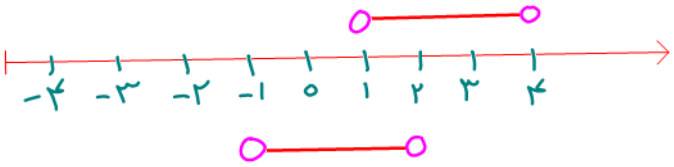
الف)

$(-\infty, ۲) \cup [-۲, ۰) = (-\infty, ۲)$



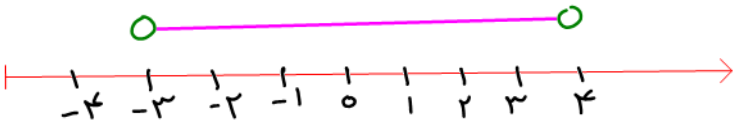
ب)

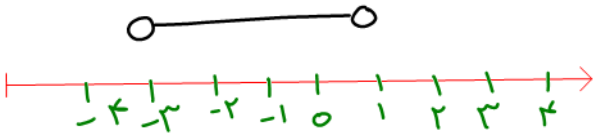
$(۱, ۴) \cup [-۱, ۲) = (-۱, ۴)$



پ)

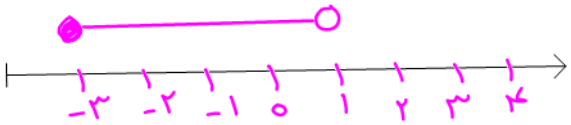
$(-۳, ۴) - [۱, ۴] = (-۳, ۱)$





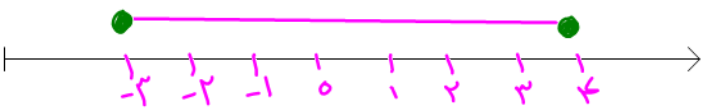
ت)

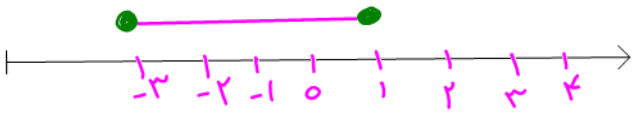
$[-۳, ۴) - [۱, ۴] = [-۳, ۱)$



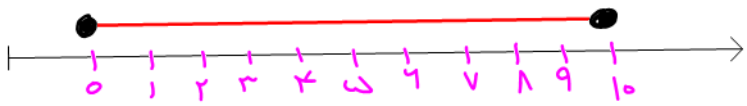
ث)

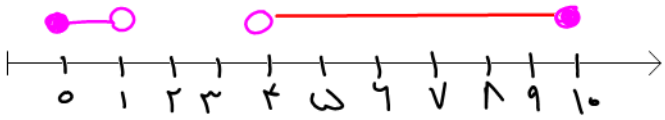
$[-۳, ۴] - (۱, ۴]$





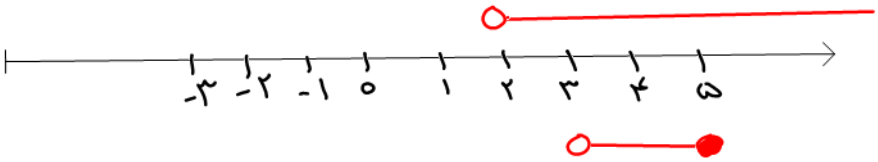
ج) $[0,10] - [1,4] = [0,1) \cup (4,10]$





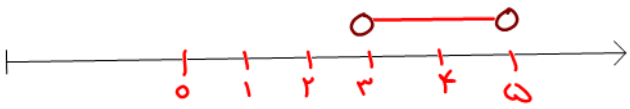
تمرین: حاصل $[-3,4] - [1,4)$ را بیابید.

چ) $(2,+\infty) \cap (3,5] = (3,5]$



ح) $(2,+\infty) \cap (3,5) = (3,5)$

خ) $(3,5) - (2,+\infty) = \{\}$



سوال- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ در این صورت حاصل هر قسمت را بیابید.

الف) $A\cup B$

حل)

$$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$$

ب) $A\cap B$

حل)

$$A\cap B=\{۳,۴,۵\}$$

پ) $A-B$

حل)

$$A=\{۱,۲,۳,۴,۵\} \qquad B=\{۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$$

$$A-B=\{۱,۲,\cancel{۳},\cancel{۴},\cancel{۵}\}=\{۱,۲\}$$

ت) $B-A$

$$A=\{۱,۲,۳,۴,۵\} \qquad B=\{۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$$

$$B-A=\{\cancel{۳},\cancel{۴},\cancel{۵},۶,۷,۸\}=\{۶,۷,۸\}$$

نامعادله توأم:

نکته: برای حل نامعادلات توأم هر کدام از نامعادلات را حل می کنیم و بین مجموعه جواب های به دست آمده اشتراک می گیریم.

مثال: مجموعه جواب نامعادله زیر را به صورت بازه نمایش دهید.

$$\begin{cases} \dfrac{x-۱}{۲} < ۲x-۱ \\ x-\dfrac{۲x}{۳} \geq x-۱ \end{cases}$$

تمرین: حدود a را به نحوی بیابید که $۳ \in (a-۱, ۲a+۱]$

تمرین: حدود a را به نحوی بیابید که $۳ \notin (a-۱, ۲a+۱]$

تمرین: بازه $[۶-a, ۳)$ شامل دقیقاً چهار عدد صحیح است. حدود a را بیابید.

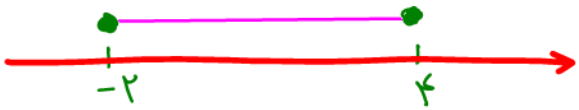
تمرین: اگر مجموعه $(۲m-۱, m+۱)$ یک بازه باشد، حدود m را بیابید.

تمرین: اگر عبارت $\dfrac{-۱-۷x}{۵}$ در بازه $(-\infty, ۴]$ قرار داشته باشد، حدود x را بیابید.

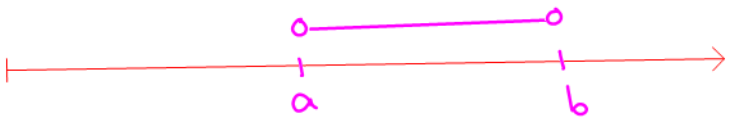
مرور و یادآوری بازه‌ها: اگر $a<b$ آن‌گاه انواع بازه‌ها به صورت زیر است:

۱) $[a,b]$

مثال: $[-2,4]$



۲) (a,b)



مثال $(-2,4)$

۳) $[a,b)$

مثال $[-2,3)$

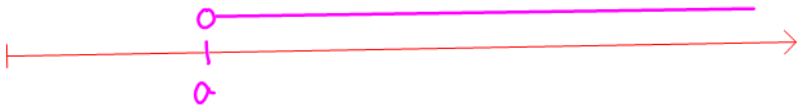
۴) $(a,b]$

مثال $(-2,3]$

۵) $[a,+\infty)$

مثال $[-2,+\infty)$

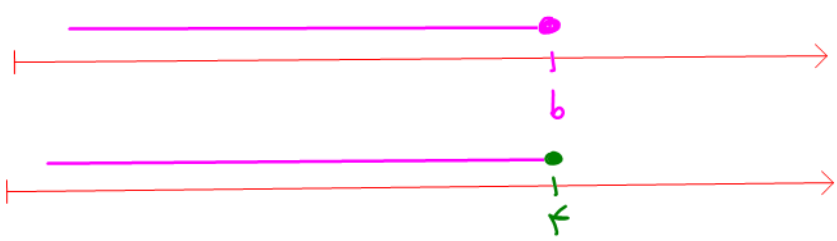
۶) $(a,+\infty)$



مثال $(-2,+\infty)$

۷) $(-\infty, b]$

مثال $(-\infty, ۴]$



۸) $(-\infty, b)$

مثال $(-\infty, ۴)$

۹) $(-\infty, +\infty) = R$

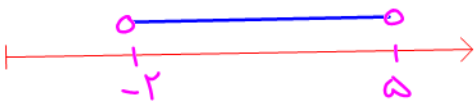
سوال- هر یک از مجموعه های زیر را با اعضا مشخص کنید.

الف) $A = \{x \in N \mid -۲ < x < ۵\}$ $\qquad A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$

ب) $B = \{x \in W \mid -۲ < x < ۵\}$ $\qquad B = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$

پ) $C = \{x \in Z \mid -۲ < x < ۵\}$ $\qquad C = \{-۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$

ت) $D = \{x \in R \mid -۲ < x < ۵\}$ $\qquad D = (-۲, ۵)$



۱- حدود a را به نحوی بیابید که $۳ \in (a-۱, ۲a+۱]$

حل)

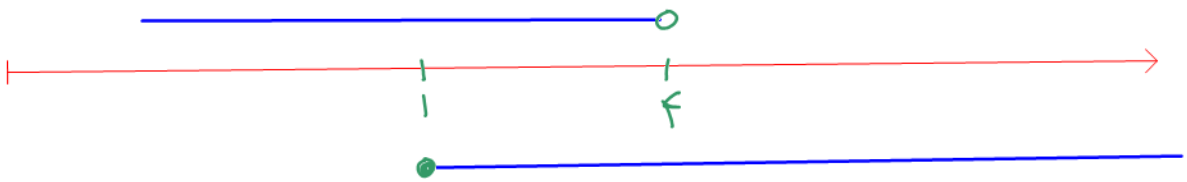
$۳ > a-۱$ و $۳ \leq ۲a+۱$

$۳ > a-۱ \Rightarrow ۴ > a \Rightarrow a \in (-\infty, ۴)$

$۳ \leq ۲a+۱ \Rightarrow ۲ \leq ۲a \Rightarrow ۱ \leq a \Rightarrow a \in [۱, +\infty)$

$[۱, ۴)$

حال باید از دو بازه به دست آمده اشتراک بگیریم.



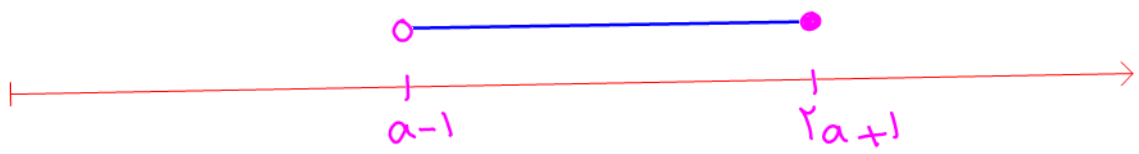
حال باید داشته باشیم $۲a+۱ > a-۱$

$۲a+۱ > a-۱ \Rightarrow ۲a-a > -۲ \Rightarrow a > -۲ \Rightarrow a \in (-۲, +\infty)$

$\Rightarrow$ جواب نهایی $= [۱, ۴) \cap (-۲, +\infty) = [۱, ۴)$

۲- حدود a را به نحوی بیابید که $3 \notin (a-1, 2a+1]$

حل)



$3 \leq a-1$ یا $3 > 2a+1$

$3 \leq a-1 \Rightarrow 4 \leq a \Rightarrow a \in [4, +\infty)$

$3 > 2a+1 \Rightarrow 2 > 2a \Rightarrow 1 > a \Rightarrow a \in (-\infty, 1)$

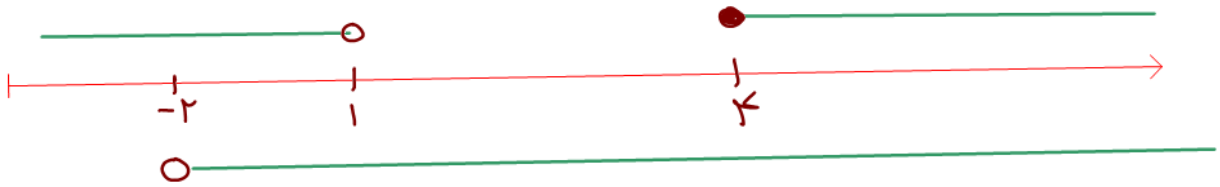
حال بین دو بازه به دست آمده اجتماع می‌گیریم. ①

$\boxed{(-\infty, 1) \cup [4, +\infty)}$

از طرفی باید داشته باشیم:

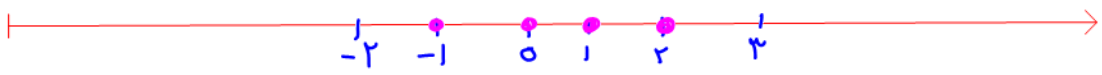
$2a+1 > a-1 \Rightarrow a > -2 \Rightarrow a \in (-2, +\infty)$

حال بین این بازه به دست آمده با رابطه ① اشتراک می‌گیریم تا جواب نهایی پیدا شود.



$\Rightarrow$ جواب نهایی $= (-2, 1) \cup [4, +\infty)$

۳- بازهٔ $[۶-a, ۳)$ شامل دقیقاً ۴ عدد صحیح است. حدود a را بیابید.

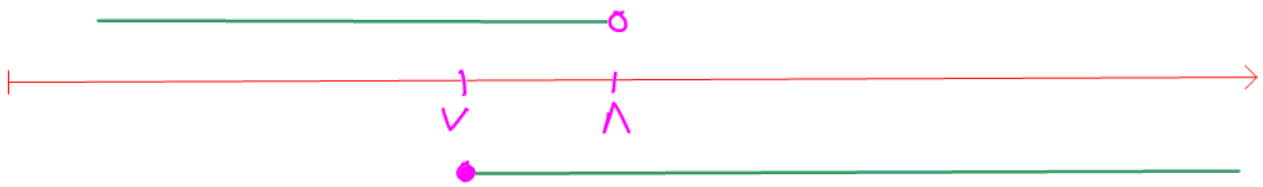


$-۲ < ۶-a \leq -۱$

$-۲ < ۶-a \Rightarrow a < ۶+۲ \Rightarrow a < ۸ \Rightarrow a \in (-\infty, ۸)$

$۶-a \leq -۱ \Rightarrow ۶+۱ \leq a \Rightarrow ۷ \leq a \Rightarrow a \in [۷, +\infty)$

حال از دو بازه به دست آمده اشتراک می‌گیریم. $[۷, ۸)$



از طرفی باید داشته باشیم $۳ > ۶-a$ پس $a > ۳$ پس $a \in (۳, +\infty)$

$\Rightarrow$ جواب نهایی $= [۷, ۸) \cap (۳, +\infty) = [۷, ۸)$

۴- اگر عبارت $\frac{-۱-۷x}{۵}$ در بازهٔ $(-\infty, ۴]$ قرار داشته باشد، حدود x کدام است؟

$\frac{-۱-۷x}{۵} \leq ۴ \Rightarrow -۱-۷x \leq ۲۰ \Rightarrow -۷x \leq ۲۱$

$\boxed{x \geq -۳} \longrightarrow x \in [-۳, +\infty)$

۵- کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

۱) $\{۱و۲و\dots و۲۰\} \subseteq (۱و۲۰]$

۲) $۵ \in [۱و+\infty) - (۱و۵)$

۳) $۵ \in [۱و+\infty) - [۱و۵)$

۴) $\{۷\} \subseteq (۳و۷)$

۵) $\{۷\} \subseteq [۳و۷)$

۶) $\{۷\} \subseteq (۳و۷]$

۷) $\{۱و۲و۳و۴\} \subseteq [۱و۱۰) - (۴و۵]$

۸) $\{۱و۲و۳و۴\} \subseteq [۱و۱۰) - [۴و۵]$

۹) $(۱و۲) \subseteq [۱و۲)$

۱۰) $(۱و۲] \subseteq [۱و۲)$

۱۱) $[۱و۲] \subseteq (۱و۲)$

۱۲) $(۱و۲) \subseteq [۱و۲]$

یادآوری مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه: اگر A یک مجموعه باشد آن‌گاه متمم آن را با نماد A' نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A' = U - A$$

مثال- اگر $A=\{۱و۲و۳\}$ و $U=\{۱و۲و...و۱۰\}$ آن‌گاه A' را بیابید.

$$A' = U - A = \{۱و۲و...و۱۰\} - \{۱و۲و۳\} = \{۴و۵و...و۱۰\}$$

سوال- اگر مجموعه اعداد طبیعی به عنوان مجموعه مرجع گرفته شود و $A=\{x \mid x<۱۰\}$ و $B=\{x \mid x^۲<۲۰\}$ آن‌گاه مجموعه $(A\cap B')'$ کدام است؟

$A=\{۱و۲و...و۹\}$

$B=\{۱و۲و۳و۴\} \Longrightarrow B'=N-B$

$B'=\{۵و۶و...\}$

$\Longrightarrow A\cap B'=\{۵و۶و۷و۸و۹\}$

حال باید متمم $A\cap B'$ را پیدا کنیم تا جواب نهایی به دست آید.

$$A\cap B'=\{۵و۶و۷و۸و۹\} \Longrightarrow (A\cap B')' = N-(A\cap B') = \{۱و۲و۳و۴و۱۰و۱۱و...\}$$

روش دوم: از قانون دمورگان استفاده می‌کنیم. $(A\cap B')' = A'\cup B$

$A=\{۱و۲و...و۹\} \Longrightarrow A'=N-A=\{۱۰و۱۱و...\}$

$B=\{۱و۲و۳و۴\} \Longrightarrow A'\cup B=\{۱و۲و۳و۴و۱۰و۱۱و...\}$

سوال- اگر $U=\{1,2,\dots,10\}$ و $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{4,5,6,7\}$ و $C=\{1,6,7,9\}$ ، آن گاه $(A'\cup B')-C$ شامل چند عدد اول است؟

حل) ابتدا حاصل $A'\cup B'$ را به دست می آوریم.

$$A'\cup B'=(A\cap B)'=\{1,2,3,5,6,7,8,9,10\}$$

$$\Rightarrow (A'\cup B')-C=\{1,2,3,5,6,7,8,9,10\}-\{1,6,7,9\}$$

$$=\{2,3,5,8,10\}$$

شامل ۳ عدد اول است.

یادآوری مجموعه های متناهی و نامتناهی: اگر تعداد اعضای یک مجموعه، عددی حسابی باشد، آن گاه این مجموعه را یک مجموعه متناهی می گوییم مانند مجموعه $A=\{1,2,\dots,1000,200\}$.

اگر تعداد اعضای یک مجموعه، عددی حسابی نباشد، آن گاه این مجموعه را نامتناهی می گوییم. مانند مجموعه اعداد طبیعی $N=\{1,2,\dots\}$

نکته: هر کدام از مجموعه های N و W و Z و Q و Q' و R نامتناهی اند.

نکته: هر بازه ای از اعداد حقیقی یک مجموعه نامتناهی محسوب می شود. مانند $[1,2)$ یا $[3,5]$ یا $(10,11)$

سوال- کدام یک از مجموعه های زیر یک مجموعه متناهی و کدام یک نامتناهی است؟

الف) $A=\{x\in N \mid 3<x\leq 500\}$

ب) $B=\{x\in R \mid -1<x<1\}$

پ) $C=\{x\in W \mid -9<x<200\}$

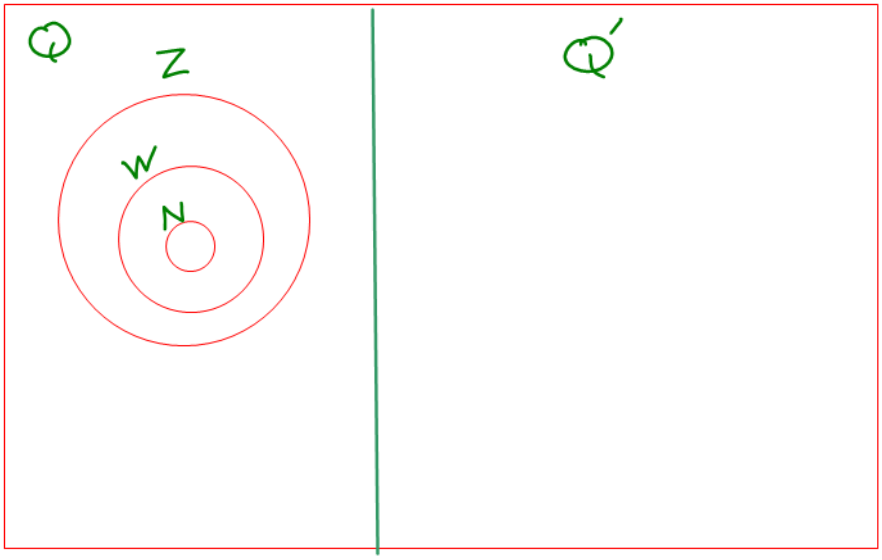
ت) $D=\{x\in Q \mid 1<x<2\}$

ث) $E=\{x\in Q' \mid 1<x<2\}$

نکته: مجموعه اعداد گویا بین هر دو عدد حقیقی متمایز، نامتناهی است.

نکته: مجموعه اعداد گنگ بین هر دو عدد حقیقی متمایز، نامتناهی است.

یادآوری مجموعه های خاص: R



۱) $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ و $Q' \subseteq R$

۲) $Q \cap Q' = \{\}$ و $Q \cup Q' = R$

۳) $Q = R - Q'$ و $Q' = R - Q$

۴) از لحاظ زیرمجموعه بودن بین مجموعه های N و W و Z و Q با مجموعه Q' هیچ ارتباطی نیست.

۵- اشتراک هرکدام از مجموعه های N و W و Z و Q با مجموعه Q' می شود تهی

۶- تفاضل هرکدام از مجموعه های N و W و Z و Q از مجموعه Q' می شود خود آن مجموعه و برعکس

۷- بین مجموعه های N و W و Z و Q و R :

الف) اشتراک می شود مجموعه کوچک

ب) اجتماع می شود مجموعه بزرگ

پ) تفاضل کوچک از بزرگ می شود تهی

سوال- حاصل $(N-Z)-(Z-W)$ کدام است؟

$$(N-Z)-(Z-W) = \phi - \{\dots, -2, -1\} = \phi$$

سوال- کدام یک از مجموعه‌های زیر تهی و کدام یک تهی نیست؟

الف) $N-(Q \cap Q')$

ب) $(Q'-W)-N$

پ) $(N-W)-(Z-Q')$

سوال- اگر مجموعه مرجع باشد حاصل هر یک از عبارات را پیدا کنید.

الف) $(Q' \cap Z')'$

روش اول:

$$(Q' \cap Z')' = (Q')' = Q$$

روش دوم:

$$(Q' \cap Z')' = Q \cup Z = Q$$

ب) $R-(\phi - Q')'$

$$R - \phi' = R - R = \phi$$

خواص اعمال جبری مجموعه ها:

۱) $A\cup\phi=\phi\cup A=A$

۲) $A\cap\phi=\phi\cap A=\phi$

۳) $A\cup A=A$

۴) $A\cap A=A$

۵) $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$

۶) $A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$

۷) $A\cup U=U\cup A=U$

۸) $A\cap U=U\cap A=A$

۹) $A\cap A'=A'\cap A=\phi$

۱۰) $A\cup A'=A'\cup A=U$

۱۱) $(A')'=A$

۱۲) $A\cap B=B\cap A$

۱۳) $A\cup B=B\cup A$

خواص شرکت پذیری:

۱۴) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

۱۵) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

خواص پخشی:

۱۶) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

۱۷) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

۱۸) $A-A=\phi$

۱۹) $A-\phi=A$

۲۰) $\phi-A=\phi$

۲۱) $U-A=A'$

۲۲) $A-U=\phi$

۲۳) $A-A'=A$

۲۴) $A'-A=A'$

۲۵) $\phi'=U$

۲۶) $U'=\phi$

۲۷) $A-B=A\cap B'=A-(A\cap B)$

قانون دمورگان:

۲۸) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

۲۹) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

قانون جذب:

۳۰) $A\cup(A\cap B)=A$

۳۱) $A\cap(A\cup B)=A$

۳۲) $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$
$=(A-B)\cup(B-A)$

۳۳) $(A\cup B\cup C)'=A'\cap B'\cap C'$

۳۴) $(A\cap B\cap C)'=A'\cup B'\cup C'$

عدد اصلی مجموعه: اگر A یک مجموعه باشد، تعداد اعضای آن را عدد اصلی آن مجموعه (کاردینال مجموعه) می نامیم و با نماد $n(A)$ یا $|A|$ نمایش می دهیم.

به عنوان مثال در مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ داریم: $n(A)=۳$

محاسبه عدد اصلی اجتماع دو مجموعه، تفاضل دو مجموعه و تفاضل متقارن دو مجموعه:

۱) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

۲) $n(A-B)=n(A)-n(A\cup B)$

۳) $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

۴) $n(A\Delta B)=n(A-B)+n(B-A)=n(A)+n(B)-۲n(A\cap B)$

۵) $n(A)+n(A')=n(U)$

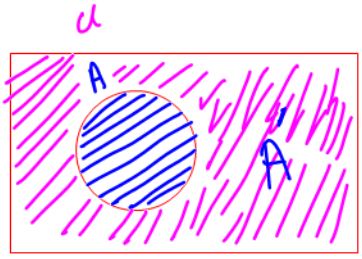
۶) $n(A'\cap B')=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$

۷) $n(A\cap B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

نکته: اگر A و B دو مجوعه جدا از هم باشند در این صورت اشتراک آنها تهی است و بنابراین $n(A\cap B)=۰$ و در نتیجه عدد اصلی اجتماع دو مجموعه جدا از هم A و B به صورت زیر خواهد بود.

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

«نمودار ون مجموعه‌ها»

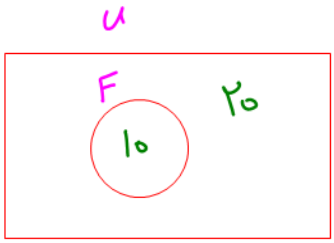


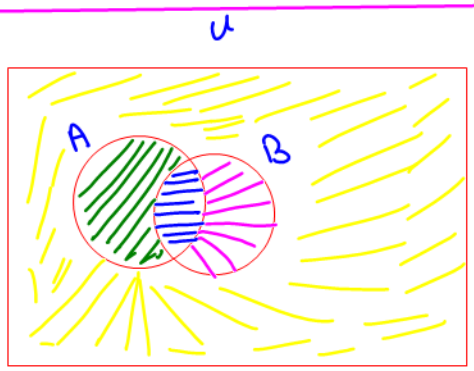
۱- نمودار ون برای یک مجموعه:

آبی: اعضای که در A هستند.

صورتی: اعضایی که در A نیستند = A'

مثال- در یک کلاس ۳۰ نفر حضور دارند. اگر ۱۰ نفر از آن ها به فوتبال علاقه مند باشند، چند نفر در این کلاس به فوتبال علاقه ندارد؟





۲- نمودار ون برای دو مجموعه:

آبی: اعضایی که هم در A و هم در B هستند = $A \cap B$

سبز: اعضایی که فقط در A هستند = $A - B$

صورتی: اعضایی که فقط در B هستند = $B - A$

زرد: اعضایی که نه در A هستند و نه در B هستند = $A' \cap B'$

مثال- در یک مدرسه ۱۱۰ دانش آموز حضور دارند. ۷۰ نفر از آن ها به فوتبال و ۵۷ نفر به والیبال علاقه دارند و نیز ۳۲ نفر به هر دو رشته علاقه دارند. تعداد اعضایی که:

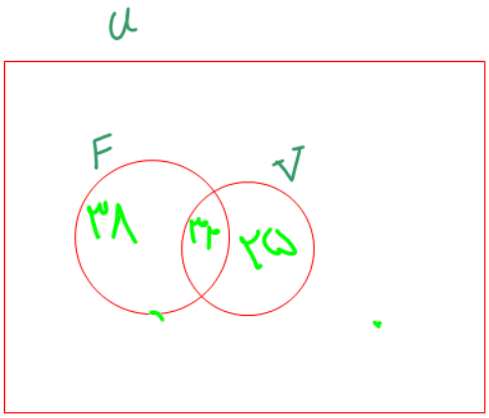
الف) حداقل به یک رشته علاقه مند باشند.

ب) فقط به فوتبال علاقه مند باشند.

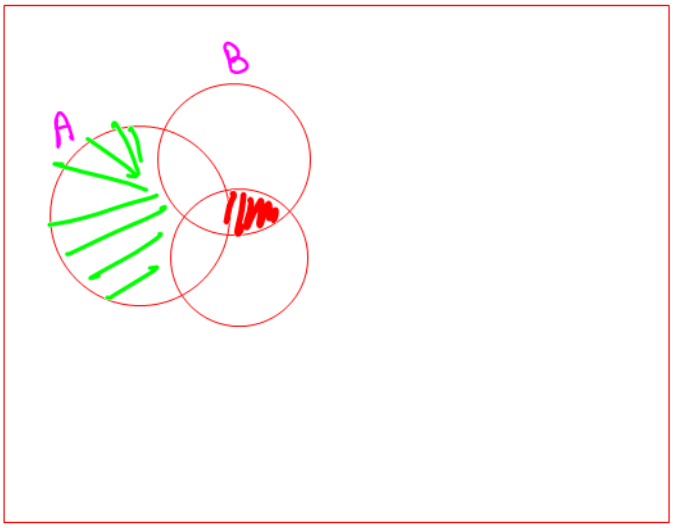
پ) فقط به یک رشته علاقه مند باشند. (دقیقاً به یک رشته)

ت) حداکثر به یک رشته علاقه مند باشند.

ث) به هیچ رشته‌ای علاقه‌مند نباشند.



۳-نمودار ون برای سه مجموعه :



سوال- اگر $U=[-2,20]$ مجموعه مرجع باشد و نیز مجموعه های A و B به صورت زیر داده شده باشند:

$A=\{x\in W \mid -7\leq x<8\}$

$B=\{x\in R \mid -1<x<5\}$

آن گاه $n(A'\cup B)'$ کدام است؟

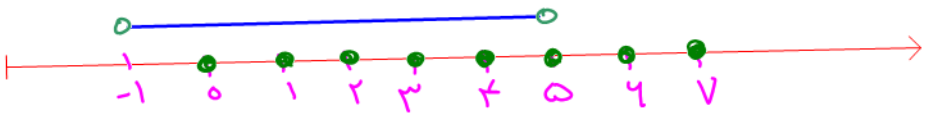
حل)

$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$B=(-1,5)$

$\Longrightarrow A\cap B=\{0,1,2,3,4\}$

$n(A'\cup B)'=n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=8-5=3$



مثال: عدد اصلی هر مجموعه را تعیین کنید.

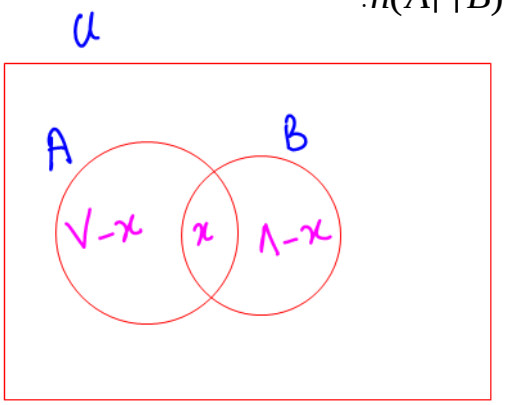
الف) $A=\{x\in N \mid x^{۲}<۱۰\}$

ب) $B=$ مجموعه اعداد اول دو رقمی کمتر از ۵۰

الف) $A=\{۱,۲,۳\} \Rightarrow n(A)=۳$

ب) $B=\{۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹,۳۱,۳۷,۴۱,۴۳,۴۷\} \Rightarrow n(B)=۱۱$

مثال: اگر $n(A)=۷$ و $n(B)=۸$ و $n(A\cup B)=۱۲$، مطلوب است محاسبه $n(A\cap B)$.

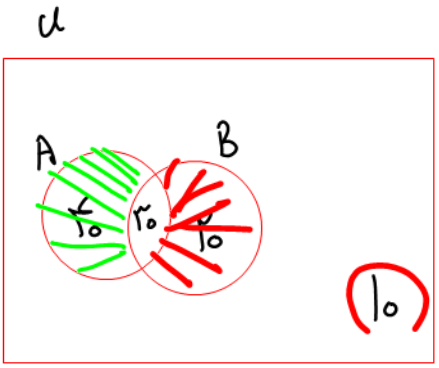


$۷-x+x+۸-x=۱۲$

$-x=۱۲-۱۵ \Rightarrow -x=-۳ \Rightarrow x=۳$

مثال: فرض کنید $n(U)=۱۰۰$ و $n(A)=۷۰$ و $n(B)=۵۰$ و $n(A\cap B)=۳۰$ ، در این صورت حاصل هر یک از موارد زیر را حساب کنید.

الف) $n(A\cup B)$ ب) $n(B'\cap A)$ پ) $n(A'\cap B)$ ت) $n(A'\cap B')$



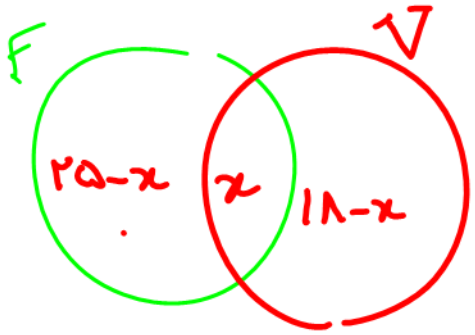
الف) $۴۰+۳۰+۲۰=۹۰$

ب) ۴۰

پ) ۲۰

ت) ۱۰

مثال: در یک کلاس ۳۲ نفری، ۲۵ نفر به فوتبال و ۱۸ نفر به والیبال علاقه دارند. در این کلاس چند نفر هم به فوتبال و هم به والیبال علاقه دارند؟



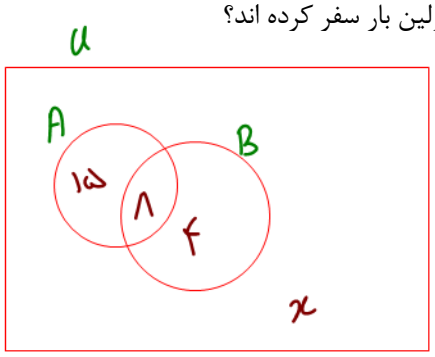
$$\Rightarrow ۲۵-x+x+۱۸-x=۳۲$$

$$x=۱۱$$

مثال: تعداد مسافرین در یک هتل ۷۲ نفر هستند که ۲۳ نفر از آنها تاجر و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده اند. ۸ نفر از این تاجرین برای اولین بار سفر کرده اند. در این هتل چند نفر نه تاجر هستند و نه برای اولین بار سفر کرده اند؟

A: تاجر

B: اولین سفر



$$۱۵+۸+۴+x=۷۲$$

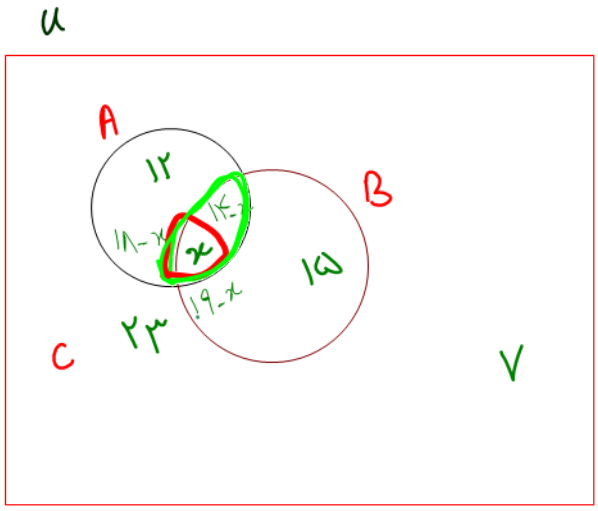
$$x=۴۵$$

مثال: در یک بررسی آماری در استفاده از گرامافون، نوار کاست و سی دی از ۹۰ نفر این نتیجه به دست آمده است که ۱۲ نفر فقط از گرامافون ، ۱۵ نفر فقط از نوار کاست، ۲۳ نفر فقط از سی دی ، ۱۴ نفر از گرامافون و نوار کاست، ۱۹ نفر از نوار کاست و سی دی و ۱۸ نفر گرامافون و سی دی و ۷ نفر از هیچ کدام استفاده نمی کنند. چند نفر از هر سه استفاده می کنند؟

A: گرامافون

B: نوار کاست

C: سی دی



$$۱۲+۲۳+۱۵+۱۴-x+۱۸-x+۱۹-x+x+۷=۹۰$$

$$-۲x=-۱۸ \Rightarrow \boxed{x=۹}$$

الگو و دنباله:

دنباله: هرگاه تعدادی عدد پشت سر هم چیده شوند در این صورت یک دنباله ای از اعداد خواهیم داشت که به آن یک دنباله می گوئیم.

به عنوان مثال در زیر چند دنباله آورده شده است.

الف) $۱,۳,\sqrt{۲},-۱۳,\frac{۱۱}{۵},...$

ب) $۵,\pi,۶,۱۲,۲۵,...$

نکته: به هر یک از اعداد موجود در دنباله یک جمله از آن دنباله می گوئیم. جملات هر دنباله را با حروف کوچک انگلیسی مانند $a_۱, a_۲, \ldots$ یا $b_۱, b_۲, \ldots$ یا ... نمایش می دهیم.

به عنوان مثال دنباله زیر را در نظر بگیرید: ... و ۱۱ و ۸ و ۵ و ۲

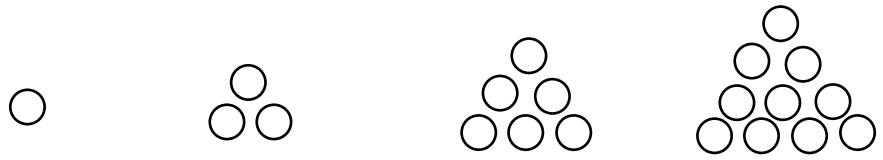
جمله اول $= a_۱ = ۲$ جمله دوم $= a_۲ = ۵$ جمله سوم $= a_۳ = ۸$ جمله چهارم $= a_۴ = ۱۱$ و ...

الگو: اگر در یک دنباله بین جملات ارتباط خاصی وجود داشته باشد را یک الگو می نامیم.

به عنوان مثال دنباله زیر یک الگو است. .... و ۷ و ۵ و ۳ و ۱

زیرا برای به دست آوردن هر جمله کافی است جمله قبلی را با ۲ جمع کنیم.

نکته: اعداد موجود در یک الگو ممکن است به صورت شکل یا تصویر یا ... داده شده باشد. مانند شکل زیر:



$a_۱ = ۱$ $a_۲ = ۳$ $a_۳ = ۶$ $a_۴ = ۱۰$ ...

جمله عمومی یک دنباله: این موضوع را با یک مثال توضیح می دهیم. فرض کنید دنباله مقابل داده شده است. ... و ۷ و ۵ و ۳ و ۱

جمله اول $= a_۱ = ۱ = ۲(۱) - ۱$

جمله دوم $= a_۲ = ۳ = ۲(۲) - ۱$

جمله سوم $= a_۳ = ۵ = ۲(۳) - ۱$

جمله چهارم $= a_۴ = ۷ = ۲(۴) - ۱$

$\vdots$

جمله iام $= a_i = ۲(i) - ۱$

$\vdots$

جمله n ام $= a_n = ۲n - ۱$

رابطهٔ $a_n = ۲n - ۱$ را جمله عمومی (جمله n ام) دنباله فوق می نامیم. مثلاً اگر بخواهیم جمله ۱۰۰ام این دنباله را پیدا کنیم کافی است به جای n قرار دهیم ۱۰۰ تا $a_{۱۰۰}$ به دست آید.

جمله ۱۰۰ام $= ۲(۱۰۰) - ۱ = ۱۹۹$

چند نکته:

۱) همه دنباله ها لزوماً الگوی خاصی ندارند و بنابراین نمی توان در آنها جمله عمومی به دست آورد. مانند دنباله اعداد اول ... و ۵ و ۳ و ۲

۲) در این کتاب طرز به دست آوردن جمله عمومی چند دنباله خاص را معرفی می کنیم. (گاهی به کمک حدس و آزمایش می توان جمله عمومی یک دنباله را پیدا کرد.)

نکته: هرگاه جمله عمومی یک دنباله داده شده باشد و بخواهیم یک جمله از آن را حساب کنیم کافی است شماره آن جمله را به جای n قرار دهیم.

مثال: در دنباله زیر جمله ۱۰۰ ام چند است؟ $a_n = ۳n - ۱۰$

حل) در واقع $a_{۱۰۰}$ را می خواهد.

کافی است به جای n قرار دهیم ۱۰۰ تا $a_{۱۰۰}$ به دست آید.

$$a_{۱۰۰} = ۳(۱۰۰) - ۱۰ = ۲۹۰$$

پس جمله ۱۰۰ام برابر ۲۹۰ است.

نکته: هرگاه جمله عمومی یک دنباله داده شده شده باشد و بخواهیم شماره یک جمله داده شده را تعیین کنیم کافی است به جای a_n، جمله داده شده را قرار دهیم و با حل معادله n را پیدا کنیم.

مثال: در دنباله ای با جمله عمومی $a_n = ۳n - ۱۰$ ، جمله چندم این دنباله برابر ۵۰است؟

$$a_n = ۳n - ۱۰$$

$$۵۰ = ۳n - ۱۰ \Rightarrow n = \frac{۶۰}{۳} = ۲۰$$

پس جمله ۲۰ ام این دنباله برابر ۵۰ است.

تمرین: جملهٔ چندم دنباله $a_n = \frac{۲^{n+۱}}{۴^n - ۱۲}$ بر $\frac{۴}{۱۳}$است؟

تمرین: جمله چندم دنباله $a_n = ۵n^۲ + ۱۲$ با جمله هفتم دنباله $b_n = ۲n^۲ - n + ۱$ برابر است؟

تمرین: جمله چندم دنباله $a_n = ۲^n + ۲^{n+۱} + ۲^{n+۲}$ برابر ۷۱۶۸ است؟

تمرین: جمله ۱۰ ام دنباله $a_n = ۲^n + ۲^{n+۱} + ۲^{n+۲}$ چند است؟

نکته: بعضی مواقع یک جمله از یک دنباله را برحسب متغیر می دهند و جمله n ام را می خواهند. طریق حل این گونه سوالات را با یک مثال توضیح می دهیم.

مثال: در دنباله $a_{۲n+۱} = ۸n^۲ - ۴n + ۳$ مطلوب است:

الف) جمله n ام (a_n)

ب) جمله ۷ ام $(a_۷)$

حل) در این گونه سوالات یکی از روش ها تغییر متغیر است.

$$۲n + ۱ = t$$

$$۲n = t - ۱ \Rightarrow \boxed{n = \frac{t-۱}{۲}}$$

$$a_{۲n+۱} = ۸n^۲ - ۴n + ۳$$

$$a_t = ۸\left(\frac{t-۱}{۲}\right)^۲ - ۴\left(\frac{t-۱}{۲}\right) + ۳$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = ۸\left(\frac{n-۱}{۲}\right)^۲ - ۴\left(\frac{n-۱}{۲}\right) + ۳} \Rightarrow a_n = ۲n^۲ - ۶n + ۷$$

برای پیدا کردن جمله ۷ ام کافی است به جای n قرار دهیم ۷، پس داریم: $a_۷ = ۶۳$

سوال - اگر $a_n = an+b$ و $a_{3n+1} = 15n+3$ ، آن‌گاه مقادیر a و b کدام است؟

$$3n+1 = t \Rightarrow 3n = t-1 \Rightarrow n = \frac{t-1}{3}$$

$$a_{3n+1} = 15n+3 \Rightarrow a_t = 15\left(\frac{t-1}{3}\right)+3 \Rightarrow a_t = 5(t-1)+3$$

$$a_t = 5t-5+3$$

$$a_t = 5t-2$$

پس a_n به صورت زیر است :

$$a_n = 5n-2$$

$$a = 5 \quad , \quad b = -2$$

معرفی چند دنباله خاص

۱ـ دنباله حسابی (الگوی خطی): دنباله ای که در آن هر جمله، غیر از جمله اول، با اضافه کردن عددی ثابت به جمله قبل از آن به دست می آید. این عدد ثابت را «قدر نسبت» دنباله می نامیم و با نماد d نمایش می دهیم.

نکته: برای تعیین این که یک دنباله ای حسابی (الگوی خطی) هست یا خیر، کافی است هر جمله را از جمله قبل خود کم کنیم، اگر همگی مقداری ثابت شد، در این صورت دنباله داده شده یک دنباله حسابی (الگوی خطی) است و در غیر این صورت دنباله داده شده حسابی (الگوی خطی) نیست.

مثال: تعیین کنید کدام یک از دنباله های زیر یک دنباله حسابی (الگوی خطی) است.

الف) ۵ و ۸ و ۱۱ و ۱۴ و ...

۳ ۳ ۳

دنباله حسابی است و $d=3$

ب) ۴ و ۹ و ۱۴ و ۲۰ و ...

۵ ۵ ۶

دنباله حسابی نیست.

نکته: اگر جمله اول دنباله حسابی (الگوی خطی) را با a_1 و قدرنسبت آن را با d نمایش دهیم، در این صورت این دنباله به صورت زیر خواهد بود.

$$a_1, a_1+d, a_1+2d, \ldots$$

نکته: بعضی مواقع جمله اول را با a نمایش می دهند.

نکته: در هر دنباله حسابی (الگوی خطی) تفاضل هر دو جمله متوالی (یعنی تفاضل هر جمله از جمله قبل خود) برابر قدرنسبت دنباله است، یعنی داریم:

$$\text{قدر نسبت} = d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1}$$

جمله عمومی دنباله های حسابی (الگوی های خطی): جمله عمومی هر دنباله حسابی (الگوی خطی) به صورت زیر است:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times d$$

جمله عمومی (جمله n ام) — جمله اول — شماره جمله — قدر نسبت

نکته: برای نوشتن جمله عمومی هر دنباله حسابی (الگوی خطی) کافی است فرمول جمله عمومی را بنویسیم و به جای a_1 و d مقدار قرار دهیم.

مثال: جمله عمومی هر یک از دنباله های زیر را بیابید.

الف) ۳ و ۸ و ۱۳ و ۱۸ و ...

۵ ۵ ۵

$a_n = a_1 + (n-1) \times d$

$a_n = 3 + (n-1) \times 5 \Rightarrow a_n = 5n - 2$

ب) $1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, \ldots$

$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$

$a_n = a_1 + (n-1) \times d$

$a_n = 1 + (n-1) \times (-\frac{1}{2}) \Rightarrow a_n = -\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$

مثال: پنج جمله اول یک دنباله حسابی را بنویسید که در آن جمله اول، یعنی $a_1 = 3$ و قدر نسبت، یعنی $d = 5$ باشد.

۳ و ۸ و ۱۳ و ۱۸ و ۲۳

$a_n = a_1 + (n-1) \times d$

$a_n = 6 + (n-1) \times 3$

$a_n = 3n + 3$

مثال: دنباله زیر را در نظر بگیرید و به سوالات خواسته شده پاسخ دهید.

... و ۱۵ و ۱۲ و ۹ و ۶

۳ ۳ ۳

الف) نوع دنباله را بیابید. حسابی است و $d=3$

ب) جمله ۲۰ ام دنباله را بیابید.

$a_{20} = 3(20) + 3 = 63$

پ) جمله چندم این دنباله برابر ۹۹ است؟

$99 = 3n + 3$

$96 = 3n \Rightarrow n = 32$

مثال: دنباله زیر یک دنباله حسابی (الگوی خطی) است. مقادیر x و y را بیابید.

... و y و ۳۵ و x و ۱۲۵

$x - 125 = 35 - x \Rightarrow 2x = 160 \Rightarrow x = 80$

$35 - x = y - 35 \Rightarrow 35 - 80 = y - 35 \Rightarrow y = -10$

مثال: اگر در یک دنباله حسابی (الگوی خطی) داشته باشیم: $a_2 = 7$ و $a_5 + a_{13} = 40$ ، قدرنسبت این دنباله را بیابید.

$a_2 = 7 \Rightarrow a_1 + d = 7$

$a_5 + a_{13} = 40 \Rightarrow a_1 + 4d + a_1 + 12d = 40 \Rightarrow 2a_1 + 16d = 40$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + d = 7 \\ 2a_1 + 16d = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1 - 2d = -14 \\ 2a_1 + 16d = 40 \end{cases}$

$14d = 26$ پس $d = \frac{13}{7}$ و بنابراین a_1 به دست می آید

$a_1 + d = 7 \Rightarrow a_1 = \frac{36}{7}$

نکته: اگر a_n و a_m دو جمله دلخواه از یک دنباله حسابی (الگوی خطی) باشد $(m \neq n)$، در این صورت قدرنسبت از رابطه زیر به دست می آید.

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

تمرین: نکته فوق را ثابت کنید.

$d = \frac{28 - 16}{16 - 4} = \frac{12}{12} = 1$

مثال: در یک الگوی خطی، جملات چهارم و شانزدهم به ترتیب برابر ۱۶ و ۲۸ است. این دنباله را مشخص کنید.

$a_4 = 16 \Rightarrow a_1 + 3d = 16$

$a_{16} = 28 \Rightarrow a_1 + 15d = 28$

$\Rightarrow \begin{cases} -a_1 - 3d = -16 \\ a_1 + 15d = 28 \end{cases} \Rightarrow 12d = 12 \Rightarrow d = 1$

$a_1 + 3d = 16 \Rightarrow a_1 = 13$

$a_n = a_1 + (n-1) \times d$

$a_n = n + 12$

مثال: C_n جمله عمومی یک الگوی خطی است که در آن $C_3 = 33$ و $C_7 = 43$ ، جمله دهم این دنباله را بیابید.

$c_1 + 2d = 33$

$c_1 + 6d = 43$

$\Rightarrow \begin{cases} -c_1 - 2d = -33 \\ c_1 + 6d = 43 \end{cases} \Rightarrow 4d = 10 \Rightarrow d = \frac{5}{2}$

$c_1 + 2d = 33$

$c_1 = 28$

جمله دهم $= a_{10} = a_1 + 9d = 28 + 9\left(\frac{5}{2}\right)$

$= \frac{101}{2} = 50.5$

مثال: در یک دنباله حسابی، جمله هفتم برابر ۱۷ و جمله یازدهم برابر ۳۷ است. جمله عمومی این دنباله را بیابید.

$a_7 = 17 \Rightarrow a_1 + 6d = 17$

$a_{11} = 37 \Rightarrow a_1 + 10d = 37$

$\Rightarrow \begin{cases} -\cancel{a_1} - 6d = -17 \\ \cancel{a_1} + 10d = 37 \end{cases} \Rightarrow \boxed{d = 5}$

$a_1 + 6d = 17 \Rightarrow \boxed{a_1 = -13}$

جمله عمومی: $a_n = a_1 + (n-1) \times d$

$a_n = 5n - 18$

مثال: اعداد b و ۲ و a و ۱۶ به همین ترتیب تشکیل یک دنباله حسابی می دهند. حاصل $a+b$ را بیابید.

$a - 16 = 2 - a \Rightarrow 2a = 18 \Rightarrow \boxed{a = 9}$

$2 - a = b - 2 \Rightarrow 2 - 9 = b - 2 \Rightarrow -7 = b - 2 \Rightarrow \boxed{b = -5}$

$a + b = 9 + (-5) = 4$

نکته: گاهی جمله عمومی دنباله حسابی (الگوی خطی) را به صورت زیر نیز نمایش می دهند.

$$\boxed{t_n = an + b}$$

که در آن a برابر قدرنسبت دنباله می شود.

مثال: اگر در یک دنباله حسابی (الگوی خطی) داشته باشیم: $a_2 + a_7 = 14$ و $a_2^2 - a_7^2 = 20$ ، در این صورت مقادیر a_1 و d را بیابید.

$(a_2 - a_7)(a_2 + a_7) = 20 \Rightarrow \begin{cases} a_2 - a_7 = \frac{10}{7} \\ a_2 + a_7 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + d - (a_1 + 6d) = \frac{10}{7} \\ a_1 + 6d = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5d = \frac{10}{7} \Rightarrow d = -\frac{2}{7} \\ a_1 + 6\left(-\frac{2}{7}\right) = 14 \Rightarrow a_1 = \frac{110}{7} \end{cases}$

مثال: جمله عمومی یک دنباله حسابی به صورت $a_n = (k-2)n^2 - 3kn + 1$ است. قدر نسبت این دنباله را تعیین کنید. (نشر الگو)

$k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow$ جمله عمومی $= a_n = -6n + 1$

قدرنسبت $= d = -6$

مثال: عبارت های $x^2 + 13$ و $2x^2 + 3$ و $x^2 + 1$ ، سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند. مقدار x را بیابید.

$2x^2 + 3 - (x^2 + 1) = x^2 + 13 - (2x^2 + 3)$

$x^2 + 2 = -x^2 + 10 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

واسطه حسابی: اگر a و b و c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، در این صورت b را واسطه حسابی (واسطه عددی) a و c می نامیم.

مثلاً سه عدد ۱۳ و ۸ و ۳ تشکیل یک دنباله حسابی داده اند پس ۸ واسطه حسابی بین ۳ و ۱۳ است.

نکته: اگر b واسطه حسابی بین a و c باشد در این صورت همواره داریم: $b = \frac{a+c}{2}$

a و b و c $\Rightarrow b - a = c - b \Rightarrow 2b = a + c \Rightarrow \boxed{b = \frac{a+c}{2}}$

مثال: اگر $3x + 4$ و $x + 3$ و x سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، در این صورت واسطه حسابی بین x و $x + 3$ را پیدا کنید.

$x + 3 = \frac{x + 3x + 4}{2}$

$2x + 6 = 4x + 4 \Rightarrow -2x = -2$

$\boxed{x = 1}$

حال واسطه حسابی بین x و $x+3$ را حساب می کنیم.

x و b و $x+3 \Rightarrow b = \frac{x + x + 3}{2} = \frac{5}{2}$

درج k واسطه حسابی بین دو عدد: فرض کنید a و b دو عدد باشند در این صورت منظور از درج k واسطه حسابی بین آنها این است که k عدد را بین a و b طوری قرار دهیم که این $k+۲$ عدد همگی با هم تشکیل یک دنباله حسابی دهند.

طرز درج k واسطه حسابی بین دو عدد را با یک مثال توضیح می دهیم و سپس یک نکته کلی برای آن مطرح می کنیم.

مثال: بین دو عدد ۸- و ۲۲ پنج واسطه حسابی درج کنید.

$-۸, _, _, _, _, _, ۲۲$

$a_۱ = -۸$

$a_۷ = ۲۲ \Rightarrow a_۱ + ۶d = ۲۲ \Rightarrow -۸ + ۶d = ۲۲ \Rightarrow d = ۵$

$-۸, -۳, ۲, ۷, ۱۲, ۱۷, ۲۲$

نکته کلی: برای درج k واسطه حسابی بین دو عدد a و b که این $k+۲$ عدد تشکیل دنباله حسابی دهند، ابتدا از فرمول زیر قدرنسبت (یعنی d) را پیدا می کنیم و سپس k عدد را به دست می آوریم.

$$\boxed{d = \frac{b-a}{k+۱}}$$

روش دوم: $d = \frac{۲۲-(-۸)}{۵+۱} = ۵$

$-۸, -۳, ۲, ۷, ۱۲, ۱۷, ۲۲$

تمرین: نکته فوق را ثابت کنید.

تمرین: بین دو عدد ۱۱ و ۱۱۱ چند واسطه حسابی درج کنیم که بزرگترین آنها از کوچکترین آنها ۹۲ واحد بیشتر باشد؟

تمرین: اگر بین دو عدد ۸ و ۹۸ بتوانیم ۱۴ واسطه حسابی درج کنیم، در این صورت جمله هفتم از جملات درج شده را بیابید.

تمرین: بین دو عدد a و $۲a+۱$ چهار واسطه حسابی درج کرده ایم. اگر اختلاف کوچکترین و بزرگترین جملات درج شده برابر ۹ باشد. مقدار a را بیابید.

نکته: هرگاه چند عدد دنباله ای حسابی تشکیل دهند، برای سادگی در محاسبات می توانیم آنها را به صورت زیر در نظر بگیریم.

سه عدد متوالی دنباله حسابی : $a-d$ و a و $a+d$ — d= قدر نسبت

چهار عدد متوالی دنباله حسابی : $a-۳d$ و $a-d$ و $a+d$ و $a+۳d$ — ۲d= قدر نسبت

پنج عدد متوالی دنباله حسابی : $a-۲d$ و $a-d$ و a و $a+d$ و $a+۲d$ — d= قدر نسبت

مثال: پنج عدد تشکیل دنباله ای حسابی داده اند و عدد بزرگ تر برابر ۲۰ است. اگر مجموع آنها برابر ۳۰ باشد، این پنج عدد را بیابید.

مثال: سه عدد تشکیل دنباله ای حسابی داده اند. اگر مجموع آنها برابر ۲۱ و حاصل ضرب آنها برابر ۱۶۸ باشد، این سه عدد را بیابید. (نشر الگو)

نکته: اگر a_s, a_r, a_n, a_m چهار جمله از یک دنباله حسابی باشند و داشته باشیم $m+n=r+s$ ، در این صورت همواره داریم: $a_m+a_n=a_r+a_s$

مثال: در یک دنباله حسابی $a_۷+a_{۱۳}=۱۴$، در این صورت مقدار $a_۵+۲a_{۱۰}+a_{۱۵}$ را بیابید. (نشر الگو)

نکته: اگر دو دنباله حسابی داشته باشیم، در این صورت جملات مشترک آنها نیز یک دنباله حسابی است که قدرنسبت این دنباله برابر است با ک.م.م قدر نسبت دو دنباله حسابی داده شده.

مثال: دنباله حسابی ....و۸ و ۵ و ۲ و دنباله حسابی ... و ۱۱ و ۵ و ۱- چند جمله مشترک سه رقمی دارند؟ (نشر الگو)

نکته: تعداد جملات یک دنباله حسابی که جمله اول آن x و جمله آخر آن y و قدر نسبت آن d باشد برابر است با:

$$\boxed{\frac{y-x}{d}+۱}$$

مثال: در دنباله زیر چند عدد دو رقمی وجود دارد؟

۵ و ۸ و ۱۱ و ۱۴ و ...

مثال: چند عدد سه رقمی مضرب ۷ وجود دارد؟ (بخش پذیر بر ۷)

مثال: از مجموعه $\{۱,۲,...,۲۰۰\}$ چند عضو مضرب ۳ یا مضرب ۹ هستند؟

مثال: چند عضو از مجموعه $\{۱,۲,...,۱۵۰\}$ بر ۷ بخش پذیر هستند ولی بر ۱۱ بخش پذیر نیستند؟

دنباله های درجه دوم:

دنباله زیر را در نظر بگیرید.

۵ و ۸ و ۱۳ و ۲۰ و ۲۹ و ...

اگر جملات متوالی را از هم کم کنید عددی ثابت به دست نمی آید. اما اگر یک بار دیگر اختلاف ها را از هم کم کنید، مقداری ثابت خواهد شد.

به چنین دنباله هایی، دنباله درجه دوم می گوییم.

۵ و ۸ و ۱۳ و ۲۰ و ۲۹ و ...

۳ ۵ ۷ ۹

۲ ۲ ۲

$۲a = ۲ \Rightarrow \boxed{a=۱}$

$۳a+b = ۳ \Rightarrow \boxed{b=۰}$

$a+b+c = ۵ \Rightarrow c = ۴$

$\Rightarrow$ جمله عمومی $= t_n = ۱n^۲ + ۰n + ۴$

$t_n = n^۲ + ۴$

$۲a =$ اختلاف اختلاف ها

$۳a+b =$ اختلاف جمله اول و دوم

$a+b+c =$ جمله اول

نکته: جمله عمومی دنباله های درجه دوم به صورت زیر است:

$$\boxed{t_n = an^۲ + bn + c}$$

مثال: ضابطه (جمله عمومی) دنباله زیر را بیابید.

۳ و ۱۳ و ۲۹ و ۵۱ و ...

۱۰ ۱۶ ۲۲

۶ ۶

مثال: جمله عمومی دنباله زیر را بیابید.

۳ و ۱۱ و ۲۵ و ۴۵ و ...

مثال: اگر $A_1=\{1\}$ و $A_2=\{2,3\}$ و $A_3=\{4,5,6\}$ و $A_4=\{7,8,9,10\}$ و... ، در این صورت تعیین کنید.

الف) A_{10} از چه عددی شروع می شود؟

ب) مجموع جملات واقع در A_{20} چند عدد است؟

۱و۲و۴و۷و ...

۱ ۲ ۳

۱ ۱

$2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

$3a+b=1 \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$

$a+b+c=1 \Rightarrow c=1$

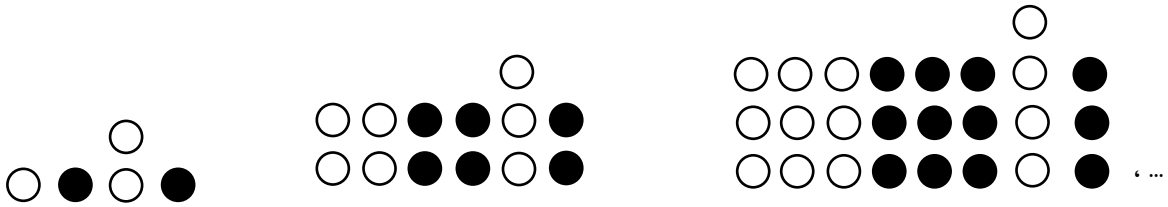
$t_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1$

الف) $t_{10}=\frac{1}{2}(10)^2-\frac{1}{2}(10)+1=46$

ب) $A_{20}=\{191, 192, \dots, 210\}$

به دست آوردن الگوی n ام (جمله عمومی) از روی شکل داده شده:

مثال: در الگوی دنباله شکل زیر، نسبت تعداد دایره های سیاه به تعداد دایره های سفید در شکل دوازدهم، کدام است؟



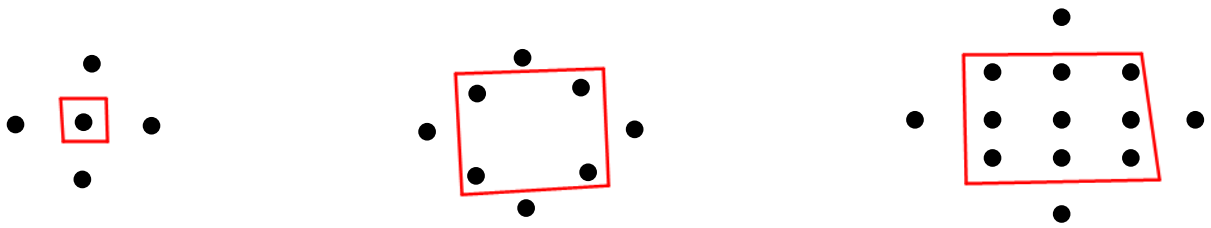
شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

جمله عمومی دایره های سفید: $n^2+(n+1) \Rightarrow$ شکل دوازدهم $=12^2+(12+1)=157$

جمله عمومی دایره های سیاه: $n^2+n \Rightarrow$ شکل دوازدهم $=12^2+12=156$

$\Rightarrow$ جواب $=\frac{156}{157}$

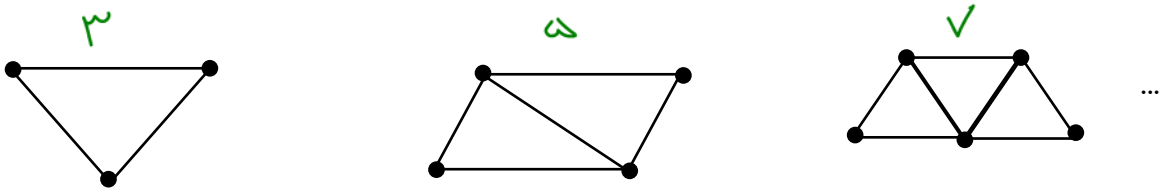
مثال: تعداد نقاط در شکل ۲۰ ام را بیابید.



(۱) (۲) (۳)

جمله عمومی $=a_n=n^2+4 \Rightarrow a_{20}=(20)^2+4=400+4=404$

مثال: الگوی تعداد چوب کبریت های زیر را تعیین کنید.

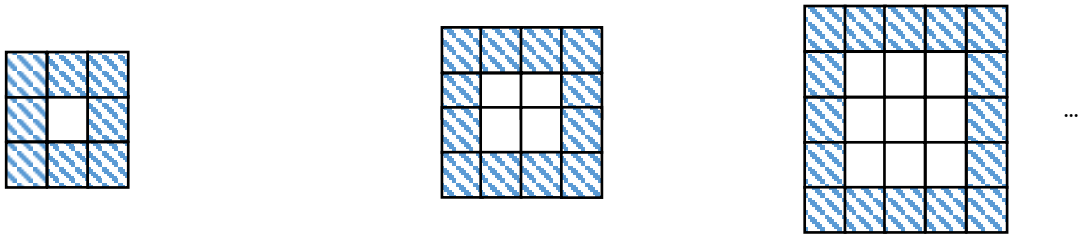


۳ ۵ ۷

(۱) (۲) (۳)

جمله عمومی: $a_n=2n+1$

مثال: الگوی متناظر با مربع های رنگی و سفید را در شکل زیر تعیین کنید.

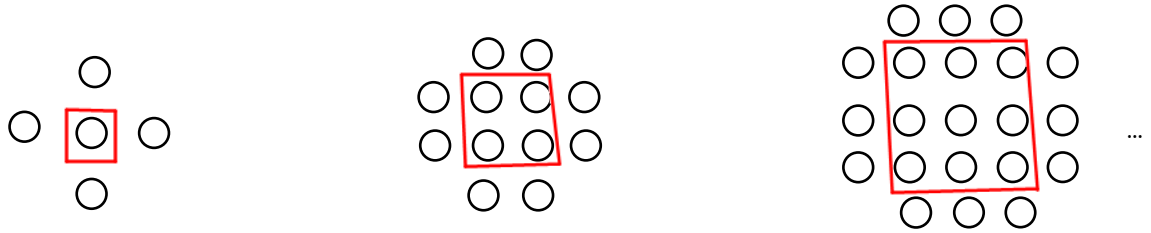


(۱) (۲) (۳)

مربع های سفید : $a_n = n^2$

مربع های رنگی : $b_n = (n+2)^2 - n^2 = 4n+4$

مثال: با توجه به الگوی شکل زیر مطلوب است:



(۱) (۲) (۳)

الف) تعداد دایره ها در شکل n ام را بیابید.

ب) تعداد دایره ها در شکل دهم چند تاست؟

پ) در شکل شماره چندم تعداد دایره ها برابر ۴۵ است؟

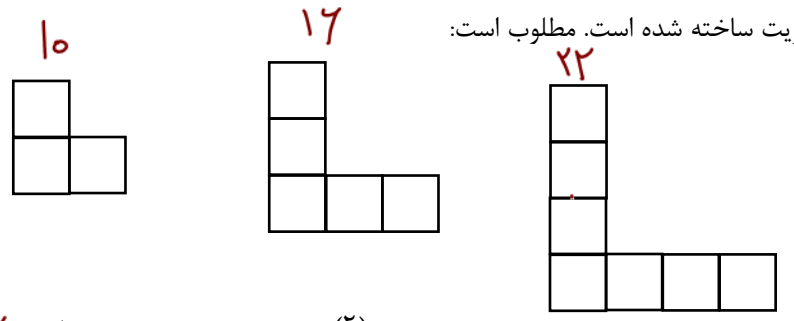
جمله عمومی : $a_n = n^2 + 4n$

$a_{10} = (10)^2 + 4(10) = 100 + 40 = 140$

$45 = n^2 + 4n \Rightarrow n^2 + 4n - 45 = 0 \Rightarrow (n+9)(n-5) = 0$

$\begin{cases} n+9 = 0 \Rightarrow n = -9 \times \\ n-5 = 0 \Rightarrow n = 5 \checkmark \end{cases}$

مثال: شکل های زیر با چوب کبریت ساخته شده است. مطلوب است:



(۱) (۲) (۳)

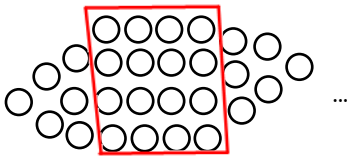
الف) تعداد چوب کبریت های شکل شماره n ام چند است؟

ب) تعداد مربع های شکل شماره n ام چند تاست؟

جمله عمومی چوب کبریت ها : $a_n = 6n+4$

جمله عمومی مربع ها : $b_n = 2n+1$

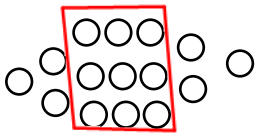
مثال: با توجه به الگوی زیر مطلوب است:



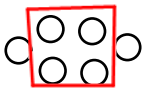
$t_4 = 4^2 + 3\times 4$

الف) تعداد دایره ها در مرحله n ام را بیابید.

ب) تعداد دایره ها در مرحله ۲۰ ام را بیابید.



$t_3 = 3^2 + 2\times 3$



$t_2 = 2^2 + 1\times 2$

$t_1 = 1^2 + 0\times 1$

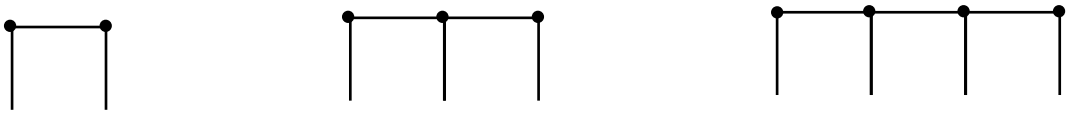
جمله عمومی: $t_n = n^2 + (n-1)\times n = 2n^2 - n$

$t_{20} = 2(20)^2 - 20 = 800 - 20 = 780$

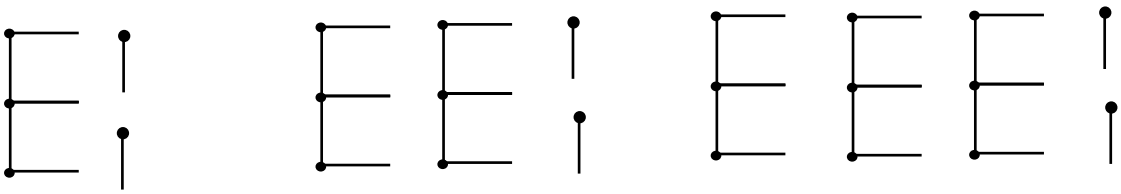
مثال : در هر قسمت تعداد چوب کبریت های مرحله n ام را بیابید.

الف)

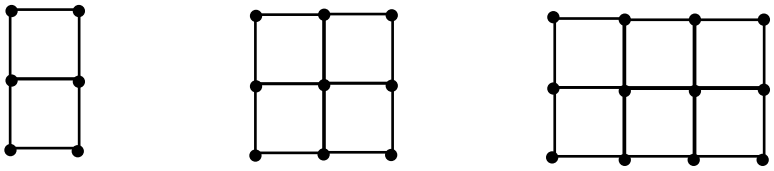
ب)



پ)



ت)



سوال- اگر نتوان از روی شکل داده شده الگوئی پیدا کرد چاره چیست؟

۲۸ و ۱۵ و ۶ و ۱

نکته: بعضی مواقع یک دنباله می دهند و می خواهند برای آن یک شکل هندسی نظیر و به کمک آن جمله عمومی را پیدا کنیم. این کار معمولاً به صورت ابتکاری انجام می شود.

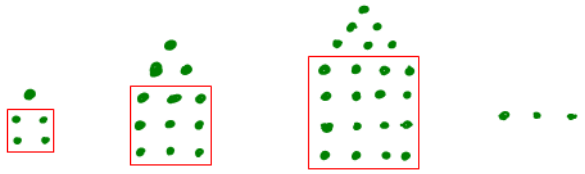
مثال: برای دنباله های زیر یک الگوی هندسی نظیر کنید و جمله عمومی آن را بیابید.

الف) ۵ و ۱۲ و ۲۱ و ۳۲ و ....

ب) ۳ و ۶ و ۱۱ و ۱۸ و ...

پ) ۲ و ۵ و ۱۰ و ۱۷ و ....

الف)



$$t_n=(n+1)^2+\frac{n(n+1)}{2}$$

دنباله های مهم درجه دوم

۱و۳و۶و ...

۱ـ دنباله مثلثی:

نکته: جمله عمومی دنباله مثلثی به صورت مقابل است: $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$

اثبات نکته:

۲ـ دنباله مربعی:

نکته: جمله عمومی دنباله مربعی به صورت زیر است:

$$a_n=n^2$$

مثال: جمله بیستم دنباله مربعی چقدر بیشتر از جمله بیستم دنباله مثلثی است؟

جمله ۲۰ ام دنباله مربعی $=20^2=400$

جمله ۲۰ ام دنباله مثلثی $=\frac{20(20+1)}{2}=210$

$\Rightarrow$ جواب $=400-210=190$

دنباله هندسی: دنباله ای که در آن هر جمله (به غیر از جمله اول) از ضرب کردن جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست می آید. این عدد ثابت را در دنباله هندسی قدر نسبت می نامیم و با نماد r نماش می دهیم.

به عنوان مثال دنباله زیر یک دنباله هندسی است که قدر نسبت آن برابر r =۳ است.

۲ و ۶ و ۱۸ و ...

نتیجه: اگر جمله اول یک دنباله هندسی برابر a_1 و قدر نسبت آن برابر r باشد، در این صورت جملات این دنباله به صورت زیر است.

$$a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, \dots$$

جمله عمومی دنباله های هندسی: جمله عمومی هر دنباله هندسی به صورت زیر است:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

جمله عمومی (جمله n ام) جمله اول قدر نسبت شماره جمله

نکته: در هر دنباله هندسی همواره حاصل تقسیم هر جمله بر جمله قبلی خود مقداری ثابت است.

نکته: در هر دنباله هندسی، برای به‌دست آوردن جمله عمومی، کافی است فرمول‌آن را بنویسید و به‌جای a_1 و r مقدار قرار دهیم.

مثال: کدام یک از دنباله های زیر یک دنباله هندسی است؟ قدرنسبت هر دنباله هندسی را بیابید و جمله عمومی آن را بنویسید.

الف) $5, 10, 20, \dots$ ($\frac{10}{5}=2$ ، $\frac{20}{10}=2$)

دنباله هندسی است و $r=2$

$a_n = a_1 \times r^{n-1} \Rightarrow a_n = 5 \times 2^{n-1}$

ب) $18, 6, 2, \dots$ ($\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$)

دنباله هندسی است و $r=\frac{1}{3}$

$a_n = a_1 \times r^{n-1}$

$a_n = 18 \times (\frac{1}{3})^{n-1} = 2 \times 3^2 \times \frac{1}{3^{n-1}} = 2 \times 3^{-n+3}$

پ) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \dots$ ($-\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{2}$)

دنباله هندسی است و $r=-\frac{1}{2}$

$a_n = a_1 \times r^{n-1}$

$a_n = 1 \times (-\frac{1}{2})^{n-1} \Rightarrow a_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}$

ت) $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$ ($\frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=2$ ، $\frac{6\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=\frac{3}{2}$ ، $\frac{8\sqrt{5}}{6\sqrt{5}}=\frac{4}{3}$)

دنباله هندسی نیست.

ث) $\sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}, \dots$ ($\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\sqrt{2}$ ، $\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{2}$)

دنباله هندسی است و $r=\sqrt{2}$

$a_n = a_1 \times r^{n-1}$

$a_n = \sqrt{6} \times (\sqrt{2})^{n-1} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times (\sqrt{2})^{n-1} = \sqrt{3} \times (\sqrt{2})^n$

نکته: اگر در یک دنباله ای جمله i ام را بخواهد باید در جمله عمومی به جای n قرار دهیم i ، تا جمله i ام به دست آید.

نکته: اگر در یک دنباله ای شماره جمله a_i را خواست باید آن را به جای a_n قرار دهیم و با حل معادله n را پیدا کنیم.

مثال: دنباله زیر را در نظر بگیرید و به سوالات خواسته شده پاسخ دهید.

۴ و ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ...

۲ ۲ ۲

هندسی است و $r=2$

$a_n = a_1 \times r^{n-1}$

$a_n = 4 \times 2^{n-1}$

$a_n = 2^{n+1}$

الف) جمله دهم این دنباله را بیابید.

ب) جمله چندم این دنباله برابر ۱۲۸ است؟

الف) جمله دهم $= a_{10} = 2^{10+1} = 2^{11}$

ب) $128 = 2^{n+1}$

$2^7 = 2^{n+1}$

$n+1 = 7 \Rightarrow \boxed{n=6}$

مثال: در دنباله زیر مطلوب است :

۱۲۸ و ۶۴ و ۳۲ و ...

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

هندسی است و $r=\frac{1}{2}$

$a_n = a_1 \times r^{n-1}$

$a_n = 128 \times (\frac{1}{2})^{n-1}$

$a_n = 2^7 \times (\frac{1}{2})^{n-1} \Rightarrow a_n = 2^{-n+8}$

الف) جمله هفتم این دنباله را بیابید.

ب) جمله چندم این دنباله برابر 16^{-2} است.

الف) جمله هفتم $= a_7 = 2^{-7+8} = 2$

ب) $16^{-2} = 2^{-n+8}$

$(2^4)^{-2} = 2^{-n+8}$

$2^{-8} = 2^{-n+8} \Rightarrow -8 = -n+8 \Rightarrow n = 8+8$

$n = 16$

نکته: در هر دنباله هندسی همواره حاصل تقسیم هر جمله بر جمله قبلی از خود برابر است با قدرنسبت، یعنی داریم:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

مثال: اگر عبارت های $12x-4$ و $5x$ و $2x+1$ جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را بیابید.

$2x+1$ و $5x$ و $12x-4$

$\frac{5x}{2x+1} = \frac{12x-4}{5x} \Rightarrow 25x^2 = (2x+1)(12x-4) \Rightarrow 25x^2 = 24x^2 - 8x + 12x - 4$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

تمرین: اگر عبارت های 3^{x^2+x} و 3^{x^2-x} و 3^x جملات متوالی یک دنباله هندسی با قدرنسبت بزرگتر از واحد باشند، در این صورت x را بیابید. (نشر الگو)

نکته: هرگاه دو جمله از یک دنباله هندسی را بدهند و اطلاعاتی درباره این دنباله از ما بخواهند به این صورت عمل می کنیم که.... ابتدا از نکته طلائی استفاده می کنیم و سپس طرفین را برهم تقسیم می کنیم.

مثال: در یک دنباله هندسی جملات سوم و ششم به ترتیب برابر ۱۲ و ۹۶ است. این دنباله را مشخص کنید.

$a_3 = 12 \Rightarrow a_1 r^2 = 12$

$a_6 = 96 \Rightarrow a_1 r^5 = 96$

$\Longrightarrow \frac{96}{12} = \frac{a_1 r^5}{a_1 r^3} \Rightarrow 8 = r^3 \Rightarrow \boxed{r=2}$

$a_1 r^2 = 12 \Rightarrow a_1 \times 4 = 12 \Rightarrow \boxed{a_1 = 3}$

جمله عمومی: $a_n = a_1 \times r^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$

مثال: اگر در یک دنباله هندسی، روابط زیر برقرار باشند. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 5184$ و $a_3 \times a_5 = 576$

$\frac{a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4}{a_3 \times a_5} = \frac{5184}{576} \Rightarrow \frac{a_1 \times a_1 r \times a_1 r^2 \times a_1 r^3}{a_1 r^2 \times a_1 r^4} = 9 \Rightarrow a_1^2 = 9 \Rightarrow \boxed{a_1 = 3}$

$a_1 r^2 \times a_1 r^4 = 576 \Rightarrow r^6 = 64 \Rightarrow \boxed{r=2}$

حاصل ضرب k جمله از یک دنباله هندسی:

حاصل ضرب n جمله اول از یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت r برابر است با:

$$\boxed{a_1^n \times r^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

مثال: حاصل ضرب ۳۰ جمله اول دنباله هندسی زیر را بیابید.

۱ و ۳ و ۹ و ۲۷ و ...

$1^{30} \times 3^{\frac{30 \times 29}{2}} = 3^{15 \times 29} = 3^{435}$ جواب

واسطه هندسی: اگر سه عدد a و b و c تشکیل یک دنباله هندسی دهند، در این صورت b را واسطه هندسی a و c می نامیم.

$a, b, c \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = ac$

نکته: اگر b واسطه هندسی a و c باشد، آنگاه داریم: $b^2 = ac$

مثال: واسطه هندسی بین دو عدد ۳ و ۷۵ را بیابید.

$3, b, 75 \Rightarrow b^2 = 3 \times 75 \Rightarrow b^2 = 9 \times 25 \Rightarrow \boxed{b = 15}$

درج k واسطه هندسی بین دو عدد a و b:

هرگاه بخواهیم بین دو عدد a و b به تعداد k عدد قرار دهیم که این k+2 عدد تشکیل دنباله هندسی دهند، در این صورت می گوئیم k واسطه هندسی بین a و b درج کرده ایم.

نکته:

هرگاه بخواهیم بین دو عدد a و b به تعداد k واسطه هندسی درج کنیم، قدر نسبت برابر است با:

$$r^{k+1} = \frac{b}{a}$$

مثال: بین دو عدد ۳ و ۲۱۸۷ پنج واسطه هندسی درج کنید.

روش ۲

$r^{5+1} = \frac{2187}{3} \Rightarrow r^6 = 729 \Rightarrow \boxed{r=3}$

۳ و ۹ و ۲۷ و ۸۱ و ۲۴۳ و ۷۲۹ و ۲۱۸۷

۳ و — و — و — و — و ۲۱۸۷

$a_1 = 3$

$a_7 = 2187$

$a_1 r^6 = 2187$

$r^6 = 729 \Rightarrow \boxed{r=3}$

۳ و ۹ و ۲۷ و ۸۱ و ۲۴۳ و ۷۲۹ و ۲۱۸۷

مثال: بین دو عدد ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید و دنباله های ایجاد شده را بنویسید.

نکته: اگر جملات a_n, a_m, a_p سه جمله دلخواه از یک دنباله حسابی باشند که تشکیل دنباله هندسی دهند، در این صورت قدر نسبت این دنباله هندسی برابر است با: $r = \frac{p-m}{m-n}$

مثال: جملات پنجم، هفتم و یازدهم یک دنباله عددی (حسابی)، تشکیل دنبالهٔ هندسی می دهند. قدر نسبت این دنباله هندسی را بیابید.

a_5 و a_7 و a_{11}

a_1+4d و a_1+6d و a_1+10d

$\frac{a_1+6d}{a_1+4d} = \frac{a_1+10d}{a_1+6d} \Rightarrow (a_1+6d)^2 = (a_1+4d)(a_1+10d)$

$\cancel{a_1^2} + 12a_1d + 36d^2 = \cancel{a_1^2} + 14a_1d + 40d^2$

$-2a_1d = 4d^2 \Rightarrow -a_1 = 2d \Rightarrow a_1 = -2d$

قدر نسبت $= \frac{a_1+6d}{a_1+4d} = \frac{-2d+6d}{-2d+4d} = \frac{4d}{2d} = 2$

نکته: اگر در یک دنباله هندسی مانند $a_1, a_2, \ldots$ داشته باشیم $m+n=r+s$ در این صورت همواره داریم:

$$a_m \times a_n = a_s \times a_t$$

مثال: در یک دنباله هندسی داریم $a_3 a_{12} = 4$، در این صورت حاصل $a_2 a_5 a_{10} a_{13}$ را بیابید.

تمرین: سه عدد تشکیل یک دنباله هندسی می دهند که حاصل ضرب آنها ۱۰۰ و حاصل جمع آنها ۳۵ است. این سه عدد را بیابید.

تمرین: آرمان دوچرخه ای را به قیمت ۸۰۰ هزار تومان خریده است. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم در هر سال ۵ درصد نسبت به سال قبل از خود کاهش می یابد.

الف) اگر او بعد از چهار سال قصد فروش دوچرخه اش را داشته باشد، به چه قیمتی می تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوچرخه بعد از n سال از چه رابطه ای به دست می آید؟

دنباله ثابت: دنباله ثابت دنباله ای است که هم حسابی باشد و هم هندسی. مانند دنباله زیر:

۳ و ۳ و ۳ و ....

نکته:

مثال: دنباله زیر یک دنباله ثابت است (هم حسابی و هم هندسی)

$۲x-۱, ۵x, ۳, y-۷$

مقدار $x^۲-y^۲$ چند است؟