فصل ۲: مثلثات

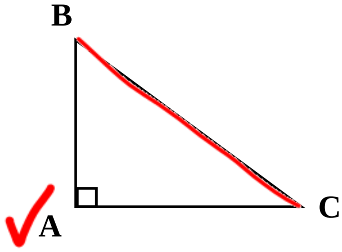
درس ۱: نسبت های مثلثاتی

مثلثات شاخه ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه گیری فاصله ها به صورت غیرمستقیم است. به مسأله زیر دقت کنید:

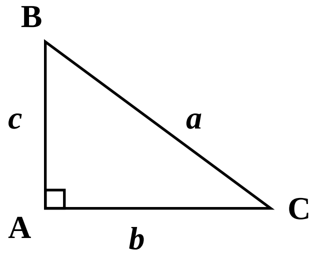
مسأله: فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق ۱۳° باشد، محل دقیق فرود هواپیما را تعیین کنید.

حل این مسأله نیازمند علم مثلثات است که در این درس به معرفی آن می پردازیم.

مثلث قائم الزاویه: مثلثی است که یک زاویه قائمه (۹۰°) داشته باشد. در هر مثلث قائم الزاویه ضلع رو به روی زاویه قائمه را وتر می نامیم.



رابطهٔ فیثاغورس: در هر مثلث قائم الزاویه رابطه زیر بین اضلاع برقرار است . این رابطه را رابطه فیثاغورس می نامیم.

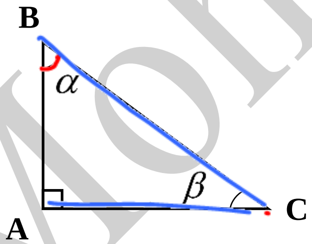


$$\boxed{a^۲ = b^۲ + c^۲}$$

تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه

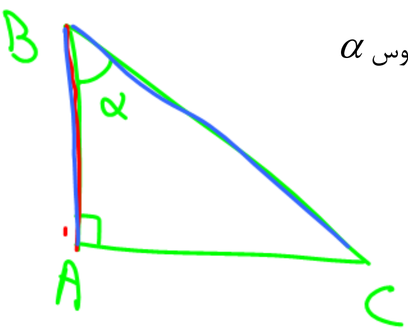
بین ۰ تا ۹۰

۱ـ سینوس زاویه: در هر مثلث قائم الزاویه، اگر α یک زاویه حاده باشد، در این صورت سینوس آن به صورت زیر تعریف می شود.



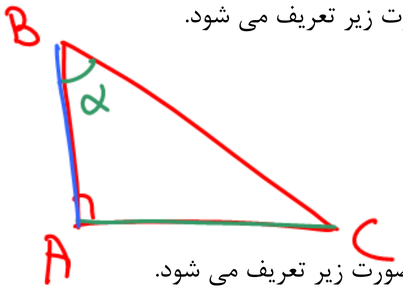
$$\text{سینوس } \alpha = \sin\alpha = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } \alpha}{\text{اندازه وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

۲ـ کسینوس زاویه: در هر مثلث قائم الزاویه، اگر α یک زاویه حاده باشد، در این صورت کسینوس آن به صورت زیر تعریف می شود.



$$\text{کسینوس } \alpha = \cos\alpha = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } \alpha \text{ (غیر از وتر)}}{\text{اندازه وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos\alpha = \frac{AB}{BC}$$



۳ـ تانژانت زاویه: در هر مثلث قائم الزاویه، اگر α یک زاویه حاده باشد، در این صورت تانژانت آن به صورت زیر تعریف می شود.

$$\text{تانژانت}\ \alpha = \tan\alpha = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } \alpha}{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } \alpha \text{ (غیر از وتر)}} = \frac{AC}{AB}$$

$\tan\alpha = \frac{AC}{AB}$

۴ـ کتانژانت زاویه: در هر مثلث قائم الزاویه، اگر α یک زاویه حاده باشد، در این صورت کتانژانت آن به صورت زیر تعریف می شود.

$$\text{کتانژانت}\ \alpha = \cot\alpha = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } \alpha \text{ (غیر از وتر)}}{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } \alpha} = \frac{AB}{AC}$$

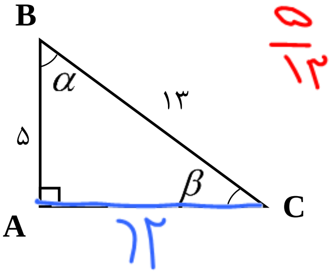
$\cot\alpha = \frac{AB}{AC}$

✍ **مثال**: در مثلث قائم الزاویه ABC نسبت های مثلثاتی زوایای α و β را بیابید.

$\frac{\frac{۱۲}{۱۳}}{\frac{۵}{۱۳}}$

$۱۳^۲ = ۵^۲ + x^۲$

$\boxed{x = ۱۲}$



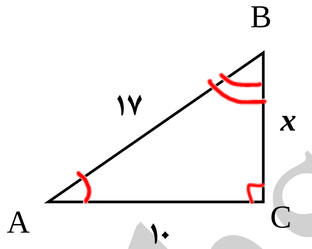
$\sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳}$ $\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$ $\tan\alpha = \frac{۱۲}{۵}$ $\cot\alpha = \frac{۵}{۱۲}$

$\sin\beta = \frac{۵}{۱۳}$ $\cos\beta = \frac{۱۲}{۱۳}$ $\tan\beta = \frac{۵}{۱۲}$ $\cot\beta = \frac{۱۲}{۵}$

✍ **تمرین**: در هر یک از شکل های زیر نسبت های مثلثاتی زوایای A و B را بیابید.

$۱۷^۲ = ۱۰^۲ + x^۲ \Rightarrow \boxed{x = ۳\sqrt{۲۱}}$

الف)



$\sin A = \frac{۳\sqrt{۲۱}}{۱۷}$

$\cos A = \frac{۱۰}{۱۷}$

$\tan A = \frac{۳\sqrt{۱۷}}{۱۰}$

$\cot A = \frac{۱۰}{۳\sqrt{۱۷}}$

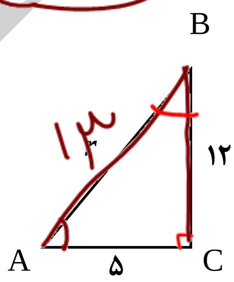
$\sin B = \frac{۱۰}{۱۷}$

$\cos B = \frac{۳\sqrt{۱۷}}{۱۷}$

$\tan B = \frac{۱۰}{۳\sqrt{۱۷}}$

$\cot B = \frac{۳\sqrt{۱۷}}{۱۰}$

ب)



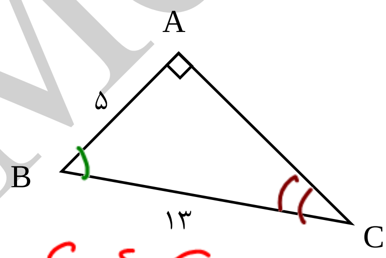
$\sin A = \frac{۱۲}{۱۳}$

$\cos A = \frac{۵}{۱۳}$

$\tan A = \frac{۱۲}{۵}$

$\cot A = \frac{۵}{۱۲}$

✍ **تمرین**: در شکل مقابل حاصل $\tan B + \cos C$ را بیابید.



حل) ابتدا طول ضلع AC را به دست می آوریم.

$۱۳^۲ = ۵^۲ + AC^۲ \Rightarrow AC = ۱۲$

$\tan B + \cos C$

$\frac{۱۲}{۵} + \frac{۱۲}{۱۳} = \frac{۱۵۶ + ۶۰}{۶۵} = \frac{۲۱۶}{۶۵}$

$\tan B + \cos C$

$\frac{AC}{AB} + \frac{AC}{BC} = \frac{۱۲}{۵} + \frac{۱۲}{۱۳}$

تمرین: در شکل مقابل $\tan x = \frac{۳}{۴}$ است. مقدار a را بیابید.

حل

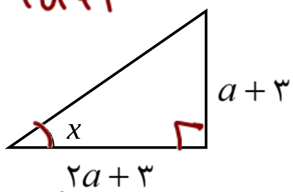
$$\tan x = \frac{a+۳}{۲a+۳} = \frac{۳}{۴}$$

$$۴a + ۱۲ = ۶a + ۹ \Rightarrow -۲a = -۳$$

$$a = \frac{۳}{۲}$$

$$\tan x = \frac{a+۳}{۲a+۳}$$

$$\frac{a+۳}{۲a+۳} = \frac{۳}{۴}$$



تمرین: در شکل مقابل $\tan \alpha = \frac{۳}{۷}$ است. مقادیر x و y را حساب کنید.

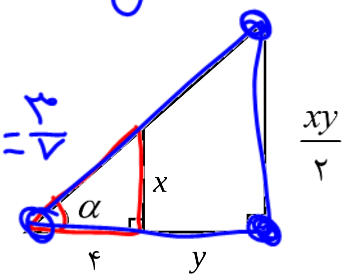
$$\tan \alpha = \frac{x}{۴} = \frac{۳}{۷}$$

$$۷x = ۱۲$$

$$\boxed{x = \frac{۱۲}{۷}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{xy}{۲}}{۴+y} = \frac{۳}{۷}$$

$$\frac{\frac{\frac{۱۲}{۷}y}{۲}}{۴+y} = \frac{۳}{۷}$$



چند رابطه مهم: اگر α یک زاویه دلخواه باشد، در این صورت همواره داریم:

۱) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ۲) $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

نتیجه: $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ همواره معکوس هم هستند. یعنی داریم:

$\tan\alpha = \frac{۱}{\cot\alpha}$ و $\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha}$

معکوس

$$\frac{۵}{۱۲} \qquad \frac{۱۲}{۵}$$

نتیجه: اگر α یک زاویه دلخواه باشد، در این صورت همواره داریم:

$\tan\alpha \times \cot\alpha = ۱$

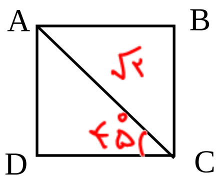
نسبت های مثلثاتی زوایای معروف:

زوایای ۳۰° و ۴۵° و ۶۰° زوایای معروف هستند. در این قسمت طریقه به دست آوردن نسبت های مثلثاتی آنها را بیان می کنیم.

محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه ۴۵°: مربعی به طول ضلع ۱ واحد را در نظر بگیرید. یکی از قطرهای آن را رسم کرده و طول آن را محاسبه کنید و در نهایت نسبت های مثلثاتی زاویه ۴۵° را حساب کنید. (در صورت لزوم کسرها را گویا کنید.)

$$AC^۲ = ۱^۲ + ۱^۲$$

$$AC = \sqrt{۲}$$

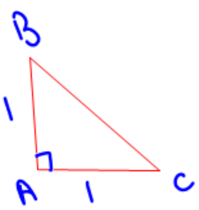


$$\sin ۴۵^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \tan ۴۵^\circ = \frac{۱}{۱} = ۱$$

$$\cos ۴۵^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \cot ۴۵^\circ = \frac{۱}{۱} = ۱$$

نکته: روش های دیگری نیز برای محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه ۴۵° وجود دارد.

تمرین: با رسم یک مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین، نسبت های مثلثاتی زاویه ۴۵° را بیابید.



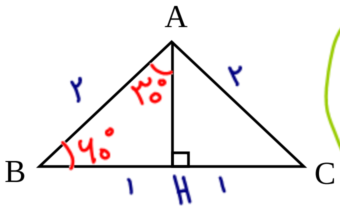
$$BC^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ \Rightarrow BC = ۱$$

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \tan ۴۵^\circ = \frac{۱}{۱} = ۱$$

$$\cos ۴۵^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \cot ۴۵^\circ = \frac{۱}{۱} = ۱$$

محاسبه نسبت های مثلثاتی زوایای ۳۰° و ۶۰°: یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲ واحد در نظر بگیرید. نیمساز یکی از زاویه ها را رسم کنید. (می دانیم در مثلث متساوی الاضلاع نیمساز هر زاویه، عمود منصف نیز است.) حال نسبت های مثلثاتی زوایای ۳۰° و ۶۰° را حساب کنید. (در صورت لزوم کسرها را گویا کنید)

$AB^2 = AH^2 + BH^2$



$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cot 30° = \sqrt{3}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1}$

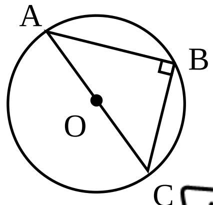
$\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

نکته: روش های دیگری نیز برای محاسبهٔ نسبت های مثلثاتی زوایای ۳۰° و ۶۰° وجود دارد.

تمرین: در مثلث ABC ، اگر O مرکز دایره و BC=OC ، در این صورت:

الف) اندازهٔ زوایای A و C را بیابید.

ب) نسبت های مثلثاتی زوایای A و C را بیابید.



$\sin = \frac{\sqrt{\text{تعداد انگشتان}}}{2}$ $\cos = \frac{\sqrt{\text{تعداد انگشتان پایین}}}{2}$ ۰ ۹۰

نتیجه : جدول مربوط به نسبت های مثلثاتی زوایای ۳۰° ، ۴۵° و ۶۰° به صورت زیر است:

$\tan = \frac{\sin}{\cos}$

$\cot = \frac{\cos}{\sin}$

زاویه / نسبت	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۰°	۹۰°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۰	۱
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	۰
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	۰	ن.ت
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	ن.ت	۰

نکته: در محاسبات با نسبت های مثلثاتی، گاهی نیازمند محاسبهٔ توان هایی از آن ها هستیم. برای سادگی، عبارت $(\sin\alpha)^2$ را به صورت $\sin^2\alpha$ می نویسیم. به همین ترتیب برای هر توانی مانند n و هر نسبت مثلثاتی به طریق مشابه خواهد بود.

مثال: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\sin^2 30° + \cos^2 30° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

ب) $\tan 60° \times \tan 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3}{3} = 1$

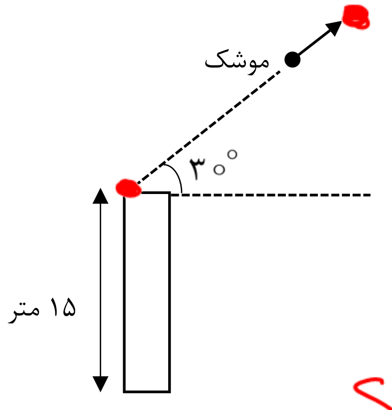
پ) $\tan 45° \times \sin 60° + \cos 30° \times \cos 45° = (1) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{4}$

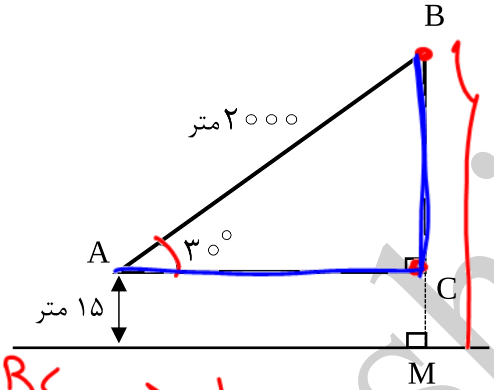
ت) $2\sin 30° \tan 45° - 2\sqrt{3}\cot 30° \cos^2 60° = 2\left(\frac{1}{2}\right) \times (1) - 2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$1 - 6 \times \frac{1}{4} = 1 - \frac{6}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

مثال: یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه 30° پرتاب می شود. تعیین کنید پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟

حل)





$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{2000} \Rightarrow 2BC = 2000$$

$$\boxed{BC = 1000}$$

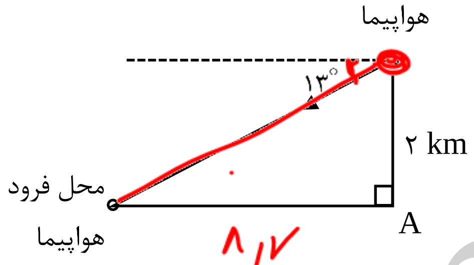
فاصله موشک تا زمین $= 1000 + 15 =$

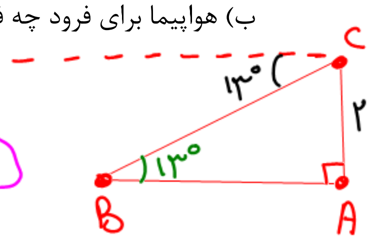
تمرین: یک هواپیما در ارتفاع ۲ km از سطح زمین با زاویه 13° در حال فرود آمدن است. با توجه به شکل تعیین کنید:

$(\tan 13^\circ = 0/23)$

الف) هواپیما درچه فاصله ای از نقطه A فرود می آید؟

ب) هواپیما برای فرود چه فاصلهٔ افقی را طی می کند؟





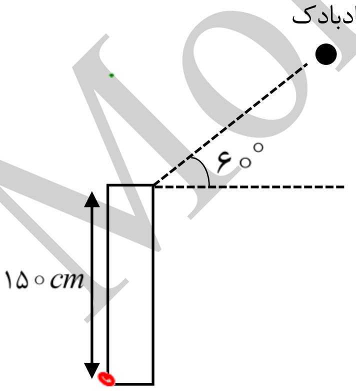
الف) $\tan 13^\circ = \frac{AC}{AB}$

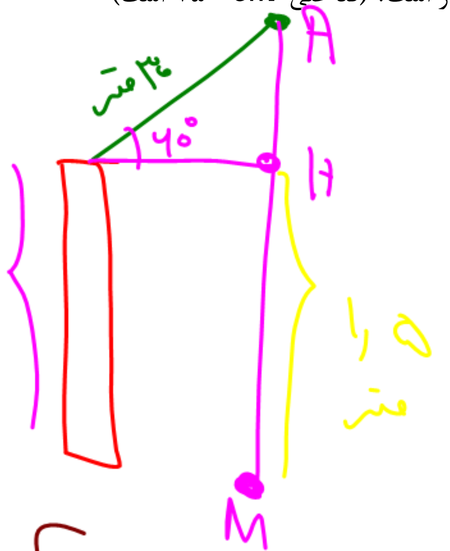
$0/23 = \frac{2}{AB} \Rightarrow AB \simeq 8/7$

ب) $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = (8/7)^2 + 2^2 \Rightarrow BC \simeq 8/9$

تمرین: علی بادبادکی را از روی زمین با نخی به طول ۳۰ متر به هوا فرستاده است. اگر زاویه نخ با خط افقی برابر با 60° باشد، ارتفاع بادبادک از زمین چقدر است؟ (قد علی $150\,cm$ است)





$AM = ?$

$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{30}$$

$$\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{30}}$$

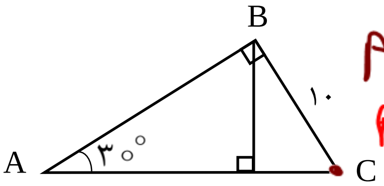
$$2AH = 30\sqrt{3}$$

$$AH = \frac{\overset{15}{\cancel{30}}\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{AH = 15\sqrt{3}}$$

فاصله بادبادک از زمین $= 1/5 + 15\sqrt{3} =$

تمرین: با توجه به شکل مقابل، طول اضلاع خواسته شده را بیابید.



الف) AC

ب) AB

پ) BH

ت) CH

ث) AH

$ABC: \sin ۳۰^\circ = \frac{۱۰}{AC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱۰}{AC} \Rightarrow AC = ۲۰$

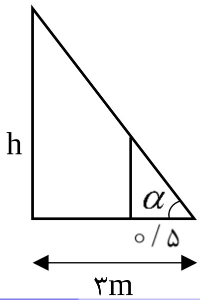
$ABC: \sin ۶۰ = \frac{AB}{۲۰} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{AB}{۲۰} \Rightarrow AB = ۱۰\sqrt{۳}$

$\sin ۳۰ = \frac{BH}{۱۰\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{BH}{۱۰\sqrt{۳}} \Rightarrow BH = ۵\sqrt{۳}$

$BC^۲ = BH^۲ + CH^۲ \Rightarrow ۱۰۰ = ۷۵ + CH^۲ \Rightarrow CH = ۵$

$AH = AC - CH \Rightarrow AH = ۲۰ - ۵ \Rightarrow AH = ۱۵$

تمرین: نسرین می خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایه آن درخت در آن لحظه برابر ۳ متر است، حساب کند. اگر قد نسرین برابر ۱/۵ متر و در همان لحظه طول سایه اش ۰/۵ متر باشد. ارتفاع این درخت چقدر است؟



$\tan\alpha = \frac{۱/۵}{۰/۵} \Rightarrow \tan\alpha = ۳$

$\tan\alpha = \frac{h}{۳} \Rightarrow ۳ = \frac{h}{۳} \Rightarrow h = ۹$

$\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{BH}{۱۰} \Rightarrow BH = ۶$

$\overset{\Delta}{ABH}: AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow AH = ۸$

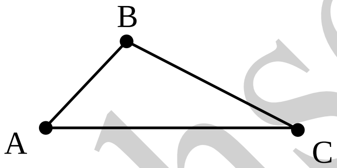
$\tan C = \frac{BH}{CH} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۶}{CH} \Rightarrow CH = ۱۲$

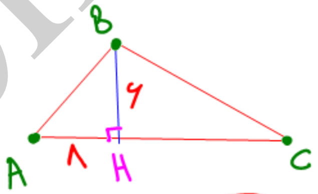
$\overset{\Delta}{BCH}: BC^۲ = BH^۲ + CH^۲ \Rightarrow BC = ۶\sqrt{۵}$

تمرین: اگر در مثلث مقابل داشته باشیم $\sin A = \frac{۳}{۵}$و $\tan C = \frac{۱}{۲}$ و $AB = ۱۰\,cm$، در این صورت مطلوب است:

الف) محیط مثلث

ب) مساحت مثلث





محیط $= AB + BC + AC$
$= ۳۰ + ۶\sqrt{۵}$

مساحت $= \frac{۱}{۲} \times BH \times AC = ۶۰$

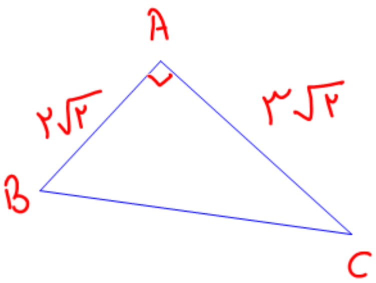
تمرین: در مثلث ABC، اگر $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $AB = ۲\sqrt{۲}$ و $AC = ۳\sqrt{۲}$ باشند، آن گاه حاصل هر یک از عبارات زیر را حساب کنید.

الف) $\sin^۲ B - \cos^۲ B = \left(\frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۲۶}}\right)^۲ - \left(\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۲۶}}\right)^۲ = \frac{۱۸}{۲۶} - \frac{۸}{۲۶} = \frac{۱۰}{۲۶} = \frac{۵}{۱۳}$

ب) $\cos^۲ C - \sin^۲ C = \left(\frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۲۶}}\right)^۲ - \left(\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۲۶}}\right)^۲ = \frac{۱۸}{۲۶} - \frac{۸}{۲۶} = \frac{۱۰}{۲۶} = \frac{۵}{۱۳}$

پ) $\cot B.\cot C$

$= \frac{۲\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}} \times \frac{۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}} = ۱$



$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۱۸ + ۸$

$BC = \sqrt{۲۶}$

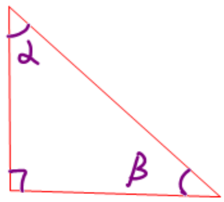
زوایای متمم: هرگاه مجموع دو زاویه مانند α و β برابر ۹۰° باشد، در این صورت این دو زاویه را متمم یکدیگر می نامیم.

نکته: اگر α و β دو زاویه متمم همدیگر باشند $(\alpha+\beta=۹۰^\circ)$ در این صورت داریم:

$$\boxed{\cos\alpha=\sin\beta} \qquad \boxed{\sin\alpha=\cos\beta}$$

$$\boxed{\cot\alpha=\tan\beta} \qquad \boxed{\tan\alpha=\cot\beta}$$

اثبات نکته:



مثال: اگر $\alpha+\beta=۹۰^\circ$، حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{۲\sin\alpha+\cos\beta}{\cos\beta}-\frac{\tan\alpha}{\cot\beta}$$

حل) $\dfrac{۲\sin\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cancel{\tan\alpha}}{\cancel{\tan\alpha}}=\dfrac{۳\cancel{\sin\alpha}}{\cancel{\sin\alpha}}-۱=۳-۱=۲$

یادآوری یک نکته مهم : $\tan x\times\cot x=۱$

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $\tan ۱۰^\circ\times\tan ۱۱^\circ\times\ldots\times\tan ۸۰^\circ$

ب) $\tan^۲ ۱^\circ\times\tan^۲ ۲^\circ\times\ldots\times\tan^۲ ۸۹^\circ$

الف) $\underbrace{\tan۱۰^\circ}_{\cot۸۰^\circ}\times\underbrace{\tan۱۱^\circ}_{\cot۷۹^\circ}\times\underbrace{\tan۱۲^\circ}_{\cot۷۸^\circ}\times\ldots\times\tan۷۸^\circ\times\tan۷۹^\circ\times\tan۸۰^\circ$

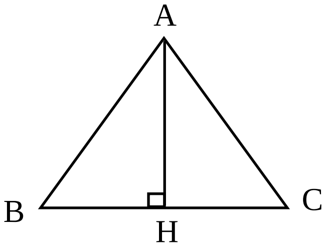
پس جواب برابر است با ۱

ب) $\underbrace{\tan^۲۱^\circ}_{\cot^۲۸۹^\circ}\times\underbrace{\tan^۲۲}_{\cot^۲۸۸^\circ}\times\underbrace{\tan^۲۳^\circ}_{\cot^۲۸۷^\circ}\times\ldots\times\tan^۲۸۷^\circ\times\tan^۲۸۸^\circ\times\tan^۲۸۹^\circ$

$۱^\circ, ۲^\circ, ۳^\circ, \ldots, ۴۰^\circ, ۴۱^\circ, ۴۲^\circ, ۴۳^\circ, ۴۴^\circ$ ، $۴۵, ۴۶^\circ, ۴۷^\circ, ۴۸^\circ, ۴۹^\circ, ۵۰^\circ, ۵۱^\circ, ۵۲^\circ, \ldots, ۸۹^\circ$

مساحت مثلث:

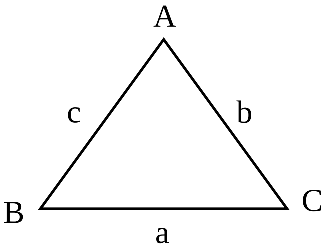
یادآوری: فرض کنید ABC یک مثلث دلخواه باشد، در این صورت مساحت آن از رابطه زیر به دست می آید.



قاعده نظیر آن ارتفاع × ارتفاع × $\frac{۱}{۲}$ = $S_{\overset{\Delta}{ABC}}$ = **مساحت مثلث ABC**

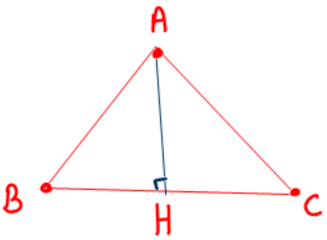
در این درس می خواهیم مساحت مثلث را به کمک نسبت های مثلثاتی بیان کنیم.

رابطه مثلثاتی برای مساحت مثلث ABC : در هر مثلث دلخواه ABC مساحت برابر است با:



«نصف حاصل ضرب اندازه دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها»

اثبات:



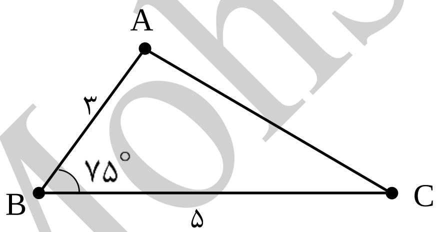
$\overset{\Delta}{ABC}$ مساحت $= \frac{1}{۲} \times AH \times BC$ ①

از طرفی می‌دانیم $\sin B = \frac{AH}{AB}$ پس $AH = AB \times \sin B$

① $\Longrightarrow$ $\overset{\Delta}{ABC}$ مساحت $= \frac{1}{۲} \times AB \times \sin B \times BC = \frac{1}{۲} \times AB \times BC \times \sin B$

✍ **مثال**: مساحت مثلث ABC را بیابید. $(\sin ۷۵^\circ = ۰/۹۶)$

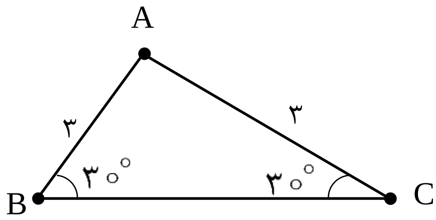
الف)



$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{۲} \times AB \times BC \times \sin ۷۵^\circ$

$= \frac{1}{۲} \times ۳ \times ۵ \times ۰/۹۶ = ۷/۲$

ب)

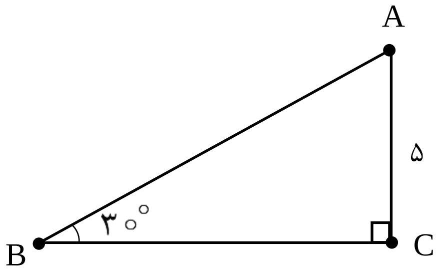


$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{۲} \times AB \times AC \times \sin \hat{A}$

$= \frac{1}{۲} \times ۳ \times ۳ \times \sin ۱۲۰^\circ$

$= \frac{1}{۲} \times ۹ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$

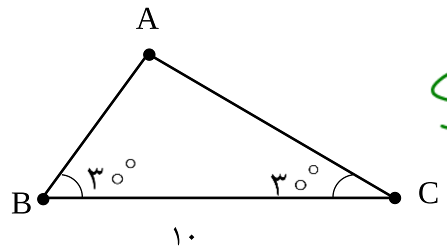
پ)



حل) $AB = 10$

$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2}\times 10\times 5\times \sin 60 = 25\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

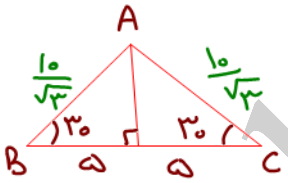
ت)



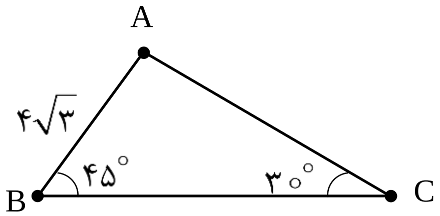
$S = \frac{1}{2}\times AB\times BC\times \sin 30$

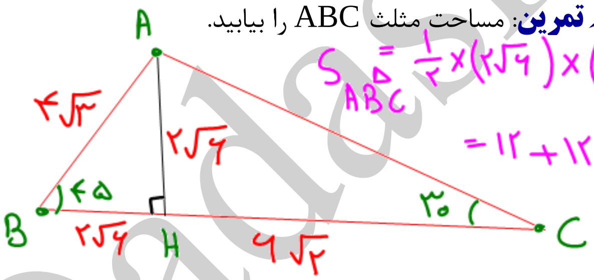
$= \frac{1}{2}\times\frac{10}{\sqrt{3}}\times 10\times\frac{1}{2}$

$= \frac{25}{\sqrt{3}}$



تمرین: مساحت مثلث ABC را بیابید.

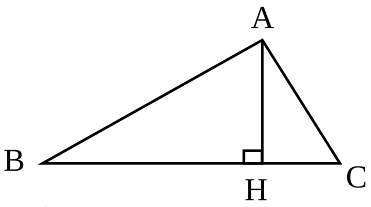




$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2}\times(2\sqrt{6})\times(2\sqrt{6}+6\sqrt{2})$

$= 12+12\sqrt{3}$

نکته: در مثلث ABC همواره داریم:



$$BH = AB\times\cos B$$
$$CH = AC\times\cos C$$
$$BC = AB\times\cos B + AC\times\cos C$$

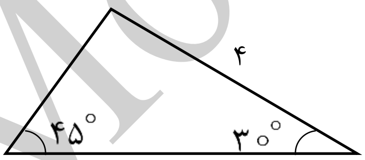
اثبات:

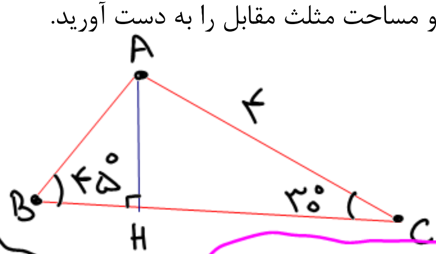
$\cos B = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB\times\cos B$

$\cos C = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC\times\cos C$

$BC = BH + CH = AB\times\cos B + AC\times\cos C$

مثال: محیط و مساحت مثلث مقابل را به دست آورید.





$\cos 30 = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CH}{4} \Rightarrow CH = 2\sqrt{3}$

$\sin 30 = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{4} \Rightarrow AH = 2$

$\sin 45 = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{AB} \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$

$\cos 45 = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BH}{2\sqrt{2}} \Rightarrow BH = 2$

مساحت $= \frac{1}{2}\times AH\times BC$

$= \frac{1}{2}\times 2\times(2+2\sqrt{3})$

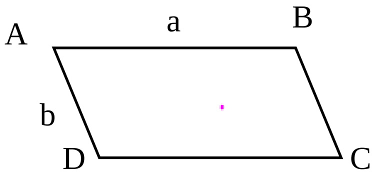
$= 2+2\sqrt{3}$

محیط $= AB + AC + BC$

$= 2\sqrt{2}+4+2+2\sqrt{3}$

$= 6+2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

مساحت متوازی الاضلاع به کمک نسبت های مثلثاتی:



مثال: طول اضلاع متوازی الاضلاعی برابر ۴ و ۶ واحد است. اگر یکی از زوایای آن ۱۲۰° باشد، مساحت شکل را بیابید.

مساحت متوازی الاضلاع به کمک قطرهای آن: اگر طول دو قطر متوازی الاضلاعی برابر d و d' و زاویه بین آنها برابر α باشد
مساحت برابر است با:

$$\boxed{S=\frac{۱}{۲}\times d\times d'\times \sin\alpha}$$

۰٬۳۰٬۴۵٬۶۰٬۹۰

اثبات:

$\sin = \frac{\sqrt{\text{تعداد انگشتان بالا}}}{۲}$

$\cos = \frac{\sqrt{\text{تعداد انگشتان پایین}}}{۲}$

$\sin ۰ = \frac{\sqrt{۰}}{۲} = \frac{۰}{۲} = ۰$

$\cos ۰ = \frac{\sqrt{۴}}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$

$\tan ۰ = \frac{۰}{۱} = ۰$

$\cot ۰ = \frac{۱}{۰}$

~~**مثال**: اگر زاویه بین دو قطر متوازی الاضلاعی برابر ۱۲۰° و طول این دو قطر ۵ و ۹ واحد باشند، مساحت آن را بیابید.~~

$\cot = \frac{\cos}{\sin}$, $\tan = \frac{\sin}{\cos}$

نکته: در حالت کلی اگر d و d' دو قطر یک چهارضلعی دلخواه باشند و زاویه بین آنها α باشد در این صورت داریم:

$$\boxed{S=\frac{۱}{۲}\times d\times d'\times \sin\alpha}$$