

معادله درجه اول

درس‌های پیش با معادله درجه اول آشناسدید

* فرم کلی هر معادله درجه اول پس از ساده شدن به صورت زیر است.

$$ax + b = 0$$

این فرم را فرم استاندارد معادله درجه اول می‌نامیم.

* توجه کنید a و b اعدادی حقیقی هستند و $a \neq 0$.

تعریف معادله درجه اول: هر معادله‌ای که بتوان مجهول آن را با شد، معادله درجه اول می‌نامیم.

سوال- هر یک از معادله‌های زیر را به فرم استاندارد بنویسید و a و b را تعیین کنید.

الف) $3x - 4 = 4x - 7$

$$ax + b = 0$$

حل) $3x - 4x - 4 + 7 = 0$

$$-x + 3 = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ و } b = 3$$

ب) $\frac{1}{2}x = 12x$

حل) $\frac{1}{2}x - 12x = 0$

$$-\frac{23}{2}x = 0 \Rightarrow a = -\frac{23}{2} \text{ و } b = 0$$

* حل معادله‌های درجه اول: منظور از حل معادله‌های درجه اول این است

که به جای متغیر (مجهول) عدد یا اعدادی قرار دهیم که در رابطه داده شده صدق کنند. هر یک از این اعداد را جواب (ریشه) معادله می‌گویند.

مثال - معادله زیر را حل کنید.

$$3x+1=7$$

حل) منظور از حل معادله این است که به جای x چه عددی قرار دهیم تا تساوی برقرار شود. مثلاً اگر $x=2$ قرار دهیم تساوی برقرار می شود.

$$3(2)+1=7$$

$$7=7 \text{ سمت راست}$$

* عدد $x=2$ را جواب (ریشه) این معادله می گوئیم.

* روش حل معادله های درجه اول: ابتدا آن را به فرم استاندارد $ax+b=0$

تبدیل می کنیم که در این صورت معادله x برابر است با:

$$x = \frac{-b}{a}$$

سوال - هر یک از معادله های زیر را حل کنید.

$$15 = 10 - 6b \quad \text{ب}$$

$$3x+1=7x-4 \quad \text{الف}$$

$$3x-7x+1+4=0$$

$$\begin{array}{c} -4x+5=0 \Rightarrow x = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ a \quad b \end{array}$$

مثال

: کم کم

کوچک ترین منفی مشترک

$$2, 3 \xrightarrow{\text{کم کم}} 6$$

$$5, 4 \xrightarrow{\text{کم کم}} 20$$

$$6, 4 \xrightarrow{\text{کم کم}} 12$$

$$4, 6, 3 \xrightarrow{\text{کم کم}} 12$$

* حل معادلات درجه اولی که ضرایب مجهول یا اعداد تنها به صورت کسری هستند: در این مواقع ابتدا کم مخرج ها را حساب می کنیم و کم م به دست آمده را در دو طرف معادله ضرب می کنیم و سپس معادله را حل می کنیم.

مثال - معادله زیر را حل کنید.

حل) کم م مخرج ها ۱۵ است.

$$\frac{3}{5}x + \frac{2}{3} = \frac{4}{5}$$

$$15 \left(\frac{3}{5}x + \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \right)$$

$$9x + 10 = 12$$

$$9x = 12 - 10 \Rightarrow x = \frac{2}{9}$$

مسائل کاربردی معادله درجه اول: بعضی مسائل را می توان با در نظر گرفتن مجهول مناسب به معادله تبدیل کرد و با حل معادله مقدار مجهول را به دست آورد.

سوال- چه عددی است که وقتی با ۶ جمع می شود حاصل ۱۰ برابر خودش شود؟
 حل- این عدد را x فرض می کنیم. پس خواهیم داشت:

$$x + 6 = 10x$$

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

کافی است این معادله را حل کنیم و x را به دست آوریم.

$$x - 10x + 6 = 0$$

$$-9x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6}{-9} \Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

سوال- مجموع سه عدد طبیعی فرد متوالی برابر ۲۷ است. این سه عدد را بیابید.

$$x+2, x+4, x+6$$

حل) سه عدد طبیعی فرد متوالی به صورت زیر هستند

$$x, x+2, x+4$$

$$x + x + 2 + x + 4 = 27$$

$$7, 9, 11$$

$$3x + 6 - 27 = 0$$

$$3x - 21 = 0$$

$$x = 7$$

نکته: هر ریشه (جواب) معادله، در آن معادله صدق می‌کند.

به عنوان مثال $x=2$ ریشه معادله است. پس باید در آن صدق کند.

$$3x+1=7$$

$$3(2)+1=7 \quad \checkmark$$

$$7=7 \quad \checkmark$$

سوال - a را چنان بیابید که $x=\frac{1}{3}$ ریشه معادله زیر باشد.

$$ax+4=10x-a$$

حالا چون $x=\frac{1}{3}$ ریشه معادله است، پس باید در آن صدق کند.

$$x=\frac{1}{3} \Rightarrow a\left(\frac{1}{3}\right)+4=10\left(\frac{1}{3}\right)-a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}a + \frac{4}{1} = \frac{10}{3} - \frac{a}{1}$$

حالا باید با حل این معادله a را پیدا کنیم.

$$3\left(\frac{1}{3}a + 4 = \frac{10}{3} - a\right) \Rightarrow a + 12 = 10 - 3a$$

$$a + 3a + 12 - 10 = 0$$

$$4a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

نکته: کم چند عدد یعنی عددی که بر صفر آنجا بخش پذیر باشد.

«معادله های درجه دوم»

تا این جا با معادله های درجه اول آشنا شده اید. منظور از یک معادله، یک تساوی است که شامل مجهول است و می خواهیم مقدار مجهول را پیدا کنیم که در تساوی داده شده صدق کند.

تعریف معادله درجه دوم: هر معادله ای که پس از ساده شدن به فرم زیر باشد یک معادله درجه دوم می نامیم.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

* در واقع بزرگ ترین توان مجهول برابر ۲ است.

* توجه کنید که a و b و c اعدادی حقیقی هستند و $a \neq 0$ (زیرا اگر a صفر باشد معادله فوق تبدیل به یک معادله درجه اول می شود)

نکته: رابطه $ax^2 + bx + c = 0$ را فرم استاندارد (فرم کلی) معادله های درجه دوم می نامیم. اگر معادله ای استاندارد نباشد، می توانیم آن را استاندارد کنیم.

تذکره: برای تشخیص درجه اول یا دوم بودن یک معادله عموماً آن را به صورت استاندارد بنویسید و سپس نظر دهید.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(سوال) درجه هر کدام از معادله های زیر را تعیین کنید.

الف) $2x^2 + 4x - 4 = 12x$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2 & -8 & -4 \end{matrix}$$

$$2x^2 + 4x - 12x - 4 = 0 \rightarrow 2x^2 - 8x - 4 = 0$$

معادله درجه دوم است.

ب) $x^2 - 4x + 10 = x^2$

$$0x^2 + 0x + 10 = 0$$

معادله درجه اول است $\rightarrow -4x + 10 = 0$

سوال - هر یک از معادله های زیر را به فرم استاندارد بنویسید و a و b و c را تعیین کنید.

الف) $2x^2 - 4x = 7$

حل) $2x^2 - 4x - 7 = 0 \rightarrow a = 2$ و $b = -4$ و $c = -7$

ب) $(2 + \sqrt{5})x^2 - \sqrt{4} = 9x$

$ax^2 + bx + c = 0$

حل) $(2 + \sqrt{5})x^2 - 9x - \sqrt{4} = 0$

$a = 2 + \sqrt{5}$ و $b = -9$ و $c = -\sqrt{4}$

ج) $4x^2 = 4x$

$4x^2 - 4x + 0 = 0$

حل) $4x^2 - 4x = 0 \rightarrow a = 4$ و $b = -4$ و $c = 0$

د) $-\sqrt{5}x^2 - 7 = 0$

$-\sqrt{5}x^2 + 0x - 7$

حل) $a = -\sqrt{5}$ و $b = 0$ و $c = -7$

در حالت کلی برای تعیین a و b و c در معادله درجه دوم ابتدا آن را به صورت استاندارد می نویسیم

$ax^2 + bx + c = 0$

- * عدد پست توان دوم مجهول می شود a
- * عدد پست توان اول مجهول می شود b
- * عدد تنها می شود c

* جواب های (ریشه های) معادله درجه دوم: منظور از جواب های

معادله درجه دوم عدد یا اعدادی هستند که در معادله صدق می کنند.
به عنوان مثال جواب های معادله درجه دوم

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

به صورت $x = -2$ و $x = -3$ هستند زیرا در معادله صدق می کنند

$$x = -2 \Rightarrow \begin{cases} \text{سمت چپ} = (-2)^2 + 5(-2) + 6 = 0 \\ \text{سمت راست} = 0 \end{cases}$$

$$x = -3 \Rightarrow \begin{cases} \text{سمت چپ} = (-3)^2 + 5(-3) + 6 = 0 \\ \text{سمت راست} = 0 \end{cases}$$

* اصطلاحاً می گوئیم مجموعه جواب های معادله $x^2 + 5x + 6 = 0$ به صورت $\{-2, -3\}$ است.

* معادله $x^2 + 5x + 6 = 0$ جواب دیگری ندارد. یعنی غیر از -2 و -3 هیچ عدد دیگری در این معادله صدق نمی کند.

* در ادامه درس روش تعیین تعداد جواب ها و پیدا کردن جواب ها را توضیح خواهیم داد.

نکته: هر جوابی از یک معادله در آن معادله صدق می‌کند.
سوال: اگر $x = -1$ یک ریشه معادله زیر باشد، m کدام است؟

$$4x^2 - mx - 7 = 0$$

سمت راست = 0

$$4(-1)^2 - m(-1) - 7 = 0$$

$$4 + m - 7 = 0 \Rightarrow m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$$

حل

سوال: به ازای کدام مقدار m یکی از جواب‌های معادله زیر $x = 2$ است؟

$$(3m-1)x^2 + (3-m)x + 5m - 13 = 0$$

$$15m - 11 = 0$$

$$m = \frac{11}{15}$$

سمت راست = 0

$$x = 2 \Rightarrow (3m-1)(4) + (3-m)(2) + 5m - 13 = 0$$

$$12m - 4 + 6 - 2m + 5m - 13 = 0 \Rightarrow m = \frac{11}{15}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

سوال: اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم باشند، در این صورت حاصل $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha - 4\beta + 4$ را بیابید.

حل: چون α ریشه معادله است، پس باید در آن صدق کند.

$$x = \alpha \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \quad (1)$$

و هم چنین چون β ریشه معادله است، پس باید در آن صدق کند.

$$x = \beta \Rightarrow \beta^2 - 4\beta + 4 = 0 \Rightarrow \beta^2 - 4\beta = -4$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha - 4\beta + 4 \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 + \beta^2 - 4\beta = -4 + 4 = 0$$

حل معادله درجه دوم: منظور از حل یک معادله درجه دوم پیدا کردن مقدار مجهول است که در تساوی داده شده صدق کند. در واقع هدف از حل یک معادله درجه دوم پیدا کردن جواب ها (ریشه ها) است.

نکته: هر معادله درجه دوم دقیقاً دو جواب دارد یا فقط یک جواب دارد یا هیچ جوابی ندارد.

نکته: برای یک معادله درجه دوم غیر از سه حالت فوق، حالت دیگری وجود ندارد.

* برای حل (به دست آوردن جواب ها) معادلات درجه دوم روش های مختلفی وجود دارد که برخی از آن ها را در این جا توضیح می دهیم.

روش های حل معادلات درجه دوم: (به دست آوردن جواب ها)

✓ ۱- روش تجزیه:

* می دانیم اگر حاصل ضرب دو عبارت A و B صفر باشد در این صورت حداقل یکی از آن ها صفر است.

$$A \times B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

نکته: مطلب فوق برای چند عبارت نیز صحیح است. یعنی اگر حاصل ضرب چند عبارت صفر شود در این صورت حداقل یکی از آن ها صفر است.

فرم استاندارد: $ax^2 + bx + c = 0$

* حل معادله درجه دوم به روش تجزیه به این به این صورت است ابتدا معادله داده شده را به فرم استاندارد تبدیل می کنیم و آن را به کمک یکی از روش های تجزیه (فاکتورگیری، جمله مشترک و ...)، تجزیه کنیم و از نکته گفته شده استفاده می کنیم تا جواب های معادله به دست آید.

سوال - معادله زیر را به روش تجزیه حل کنید.

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

حل $x^2 + 5x + 6 = 0$

$$(x+2)(x+3) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ \text{یا} \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

مجموعه جواب های معادله $= \{-2, -3\}$

فرم استاندارد: $ax^2 + bx + c = 0$

سوال - معادله زیر را به روش تجزیه حل کنید.

$$x^2 = 4$$

حل $x^2 - 4 = 0$

$$(x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ \text{یا} \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

مجموعه جواب های معادله $= \{-2, 2\}$

$$x^2 = 25$$

$$(\pm 5)^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

۲- حل معادله به روش ریشه گیری :

$$x^2 = t \Rightarrow \begin{cases} 0 = \sqrt{t} \\ 0 = -\sqrt{t} \end{cases} \quad \begin{matrix} a^2 = 100 \Rightarrow \\ a = \sqrt{100} \\ a = -\sqrt{100} \end{matrix}$$

تایید عدد

سوال- هر یک از معادلات زیر را به روش ریشه گیری حل کنید.

الف $x^2 = 5$

حل $x^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases}$

سوال- معادله زیر را به روش ریشه گیری حل کنید.

الف $(2t-1)^2 = 9$

حل $(2t-1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} 2t-1=3 \Rightarrow 2t=4 \Rightarrow t=2 \\ 2t-1=-3 \Rightarrow 2t=-2 \Rightarrow t=-1 \end{cases}$

۳- روش مربع کامل کردن:

باید مثال این موضوع را برای شما توضیح می دهم.

مثلاً فرض کنید می خواهید معادله $x^2 + 5x + 6 = 0$ را حل کنید. ابتدا عبارت های شامل x و x^2 را نگه می دارید و عدد تنها را سمت راست می برید

$$x^2 + 5x = -6$$

۲- طرفین معادله را به عددیست x^2 تقسیم می کنید.

$$\frac{x^2 + 5x}{1} = \frac{-6}{1} \Rightarrow x^2 + 5x = -6$$

۳- عددیست x را به توان ۲ می رسانیم و بر ۴ تقسیم می کنیم.

۴- عددیست x را به توان ۲ می رسانیم و بر ۴ تقسیم می کنیم.

$$\frac{25}{4} \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۴}} 25 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 625 = \text{عددیست}$$

۵- عدد به دست آمده را به طرفین معادله اضافه می کنیم.

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = -6 + \frac{25}{4}$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -2 \\ x + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \xrightarrow{\text{به توان ۲ و تقسیم بر ۴}}$$

خلاصه:

سوال - معادله زیر را به روش مربع کامل کردن حل کنید.

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$a = 1, \quad b = 5, \quad c = 6$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 + 20x + 24 = 0$$

$$4x^2 + 20x = -24$$

$$\xrightarrow{+5^2} 4x^2 + 20x + 25 = 25 - 24$$

$$(2x + 5)^2 = 1$$

چون مثبت است پس این معادله دو جواب حقیقی دارد.

$$2x + 5 = 1 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

$$2x + 5 = -1 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

سوال - معادله زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$$\frac{2x^2 + 5x - 3}{2} = 0$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = \frac{25}{16} + \frac{25}{16} \Rightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \Rightarrow \dots$$

سوال- اگر معادله $2x^2 + x - 2 = 0$ را به صورت $(x+m)^2 = n$ بنویسیم،

حاصل $\frac{m}{n}$ کدام است؟

$$\frac{2x^2 + x - 2}{2} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$$

(ص)

$$x^2 + \frac{1}{2}x = +1 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = +1 + \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{16} \quad n$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{17}{16}} = \frac{16}{17 \times 4} = \frac{4}{17}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

۴- روش دلتا (Δ) (روش کلی یا روش مبتنی)

در روش مربع کامل عبارت ax^2+bx+c را با Δ نمایش می دهیم و به نتایج زیر می رسم:

برای حل معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ ابتدا a و b و c را تعیین می کنیم و دلتا (Δ) را برای آن حساب می کنیم.

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{فرمول دلتا}$$

برای دلتا (Δ) سه حالت پیش می آید

حالت اول: اگر $\Delta > 0$ ، آن گاه معادله دارای دو جواب (ریشه) حقیقی متمایز است و به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

حالت دوم: اگر $\Delta = 0$ ، آن گاه معادله دارای یک جواب (ریشه) حقیقی است و از رابطه زیر به دست می آید.

$$x = \frac{-b}{2a}$$

نکته: در این حالت اصطلاحاً

می گوئیم معادله دارای ریشه مضاعف است. پس شرط این که معادله ریشه مضاعف داشته باشد این است که $\Delta = 0$ باشد.
حالت سوم: اگر $\Delta < 0$ ، می گوئیم معادله جواب (ریشه) حقیقی ندارد.

سوال - معرک از معادله‌های زیر را به روش دلتا حل کنید.

الف) $x^2 + 5x + 6 = 0$

ب) $x^2 + 4x = -4$

پ) $2x^2 - x + 10 = 0$

حل) $a=1$ و $b=5$ و $c=6$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 5^2 - 4(1)(6) = 1 > 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm 1}{2} = (-2)$

$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 1}{2} = -\frac{6}{2} = (-3)$

$(x+4)(x^2+2x+m)=0$

$\Rightarrow x+4=0 \Rightarrow x=-4$
یا
 $x^2+2x+m=0$

~~$\Delta=0$
 $4-4m=0 \Rightarrow m=1$
 $x^2+2x+1=0 \rightarrow x=-1$~~

حالت اول: $\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0$
 $4 - 4(1)(m) < 0$
 $4 - 4m < 0$
 $-4m < -4 \Rightarrow m > 1$

روش دلتا در حل معادلات درجه دوم:

در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر b زوج باشد می توان از روش دلتا استفاده کرد. به صورت زیر:

$$b' = \frac{b}{2}$$

$$\Delta' = b'^2 - ac \Rightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \Rightarrow x = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \text{ و } x = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \\ \Delta' = 0 \Rightarrow x = \frac{-b'}{a} \\ \Delta' < 0 \Rightarrow \text{معادله ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$$

نکته: از این روش زمانی استفاده کنید که b زوج باشد.
سوال: معادله زیر را به روش دلتا حل کنید.

$$x^2 - 12x - 1 = 0$$

روش دلتا در حل معادله درجه دوم:

$$ax^2+bx+c=0 \xrightarrow{\Delta=b^2-4ac} \begin{cases} \Delta > 0 & \text{معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد} \\ & x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 & \text{معادله فقط یک ریشه دارد (ریشه مضاعف)} \\ & x = \frac{-b}{2a} \\ \Delta < 0 & \text{معادله ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$$

نتایج: با توجه به معادله $ax^2 + bx + c = 0$ داریم:

- ۱- شرط این که معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد $\Delta > 0$
- ۲- شرط این که معادله دارای ریشه مضاعف (تکراری) باشد $\Delta = 0$
- ۳- شرط این که معادله دارای ریشه حقیقی نباشد $\Delta < 0$
- ۴- شرط این که معادله دارای ریشه حقیقی باشد $\Delta \geq 0$

سوال- m را چنان بیابید که معادله $mx^2 + (2m+1)x + m = 0$

- الف) دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد.
- ب) دارای ریشه مضاعف باشد.
- پ) ریشه حقیقی نداشته باشد.
- ت) ریشه حقیقی داشته باشد.

(حل)

الف)

$$mx^2 + (2m+1)x + m = 0 \rightarrow a=m, b=2m+1, c=m$$

$$\text{شرط: } \Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (2m+1)^2 - 4(m)(m) > 0$$

$$4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 > 0$$

$$4m + 1 > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{4} \Rightarrow m \in (-\frac{1}{4}, +\infty)$$

$$\text{شرط: } \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (2m+1)^2 - 4(m)(m) = 0$$

$$4m + 1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 4m + 1 < 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{4} \quad (۱)$$

$$m \in (-\infty, -\frac{1}{4})$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 4m + 1 > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$m \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$$

سوال- اگر معادله زیر فقط یک جواب داشته باشد، m کدام است؟
 $(x+4)(x^2+2x+m)=0 \quad (۱۰۰)$

حل) وقتی ضرب دو عبارت صفر است، حداقل یکی از آنها باید صفر باشد.

$$\begin{cases} x+4=0 \Rightarrow x=-4 \\ x^2+2x+m=0 \end{cases}$$

$x=-4$ یک جواب معادله است. پس باید پیرامون دوم یا باید ریشه حقیقی نداشته باشد یا ریشه مضاعف $x=-4$ داشته باشد. پس دو حالت داریم:

حالت اول: معادله $x^2+2x+m=0$ ریشه حقیقی نداشته باشد.

$$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 4 - 4(1)(m) < 0 \Rightarrow 4 - 4m < 0 \Rightarrow m > 1$$

$$m \in (1, +\infty)$$

حالت دوم: معادله $x^2+2x+m=0$ دارای ریشه مضاعف باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 4 - 4(1)(m) = 0 \Rightarrow m = 1$$

پس معادله به صورت زیر می شود

$$x^2+2x+1=0$$

که این معادله ریشه مضاعف $x=-1$ ندارد.

پس حدود m برابر است با: $m \in (1, +\infty)$

سوال- اگر معادله زیر فقط یک ریشه داشته باشد، m کدام است؟

$$(x+1)(x^2+2x+m)=0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ \text{یا} \\ x^2+2x+m=0 \end{array} \right\}$$

$$x^2+2x+m=0$$

حالت دوم:

$$\Delta=0 \Rightarrow 4-4m=0 \Rightarrow m=1$$

$$x^2+2x+1=0$$

ریشه مضاعف -۱ دارد

$$\Rightarrow m > 1$$

حالت اول:
ریشه حقیقی نداشته باشد

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4-4m < 0$$

$$-4m < -4$$

$$(m > 1)$$

سوال- m را طوری بیابید که معادله زیر دارای ریشه مضاعف باشد.

$$(m-1)x^2 + (m-1)x + m+7 = 0$$

$$\Delta=0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4(m-1)(m+7) = 0$$

حله

$$m^2 - 14m + 44 - 4m^2 - 24m + 28 = 0$$

$$-3m^2 - 40m + 72 = 0$$

$$m = \frac{-40}{-3} \checkmark$$

$$m = 2 \checkmark$$

با حل معادله m به دست می آید.

توجه کنید $m \neq 1$ پس $m \neq 1$

سوال- a را چنان بیابید که معادله زیر دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد

$$(4a+1)x^2 - 4ax + a-3 = 0$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_a \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_b \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_c$

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0$$

(حل)

$$a = 4a+1, \quad b = -4a, \quad c = a-3$$

$$\Rightarrow (-4a)^2 - 4(4a+1)(a-3) > 0$$

$$16a^2 - 4(4a^2 - 11a - 3) > 0$$

$$16a^2 - 16a^2 + 44a + 12 > 0$$

$$44a + 12 > 0 \Rightarrow a > \frac{-12}{44} \Rightarrow a > \frac{-3}{11}$$

از مخرجی صفری که نباید صفر باشد. پس

$$4a+1 \neq 0$$
$$a \neq \frac{-1}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{a \neq \frac{-1}{4}} \quad \text{و} \quad \underline{a > \frac{-3}{11}} : \text{حدود } a$$

تذکره: در برخی سوالات قید می شود، معادله ریشه مضاعف داشته باشد، که شرط آن این است که $\Delta = 0$ باشد. اما اگر قید شود دارای ریشه مضاعف ت باشد در این صورت باید داشته باشیم:

$$\underline{\underline{\Delta = 0}} \quad \text{و} \quad \underline{\underline{t = \frac{-b}{2a}}}$$

سوال - m کدام باشد تا معادله زیر دارای ریشه مضاعف باشد.

$$\frac{m^2 x^2}{a} + \frac{4x}{b} + \frac{4}{c} = 0$$

روش اول: $\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$

$$\textcircled{+} -\frac{b}{2a}$$

$$16 - 4(m^2)(4) = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

$$\frac{-b}{2a} = -2 \Rightarrow \frac{-4}{2m^2} = -2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

پس m می تواند ایا - باشد.
توجه کنید که $m^2 \neq 0$ پس $m \neq 0$ باید باشد ممت.

سوال - m و n را طوری بیابید که معادله زیر دارای ریشه مضاعف $\frac{3}{4}$ باشد.

$$m^2 x^2 - 4mx + 2m + n = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \dots$$

$$t = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{-b}{2a} \dots$$

Mohsen Dadashi

دو نکته مهم درباره حل معادله درجه دوم: $ax^2 + bx + c = 0$:

۱- اگر $a + b + c = 0$ باشد آن گاه معادله دارای دو ریشه است

که یکی $x = 1$ است و دیگری $x = \frac{c}{a}$

۲- اگر $a + c = b$ باشد آن گاه معادله دارای دو ریشه است که

یکی $x = -1$ است و دیگری $x = \frac{-c}{a}$

سوال - معادله زیر را حل کنید.

$$(1 - \sqrt{2})x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x + 3 + 3\sqrt{2} = 0$$

حل) $a = 1 - \sqrt{2}$ ، $b = -2 - 2\sqrt{2}$ و $c = 3 + 3\sqrt{2}$

$$a + b + c = (1 - \sqrt{2}) + (-2 - 2\sqrt{2}) + (3 + 3\sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ و } x = \frac{c}{a} = \frac{3 + 3\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$

سوال - اگر α و β دو ریشه معادله $4x^2 - (4 - 3\sqrt{2})x - \sqrt{18} = 0$ باشد

آن گاه حاصل $4\alpha + \beta$ را بیابید. ($\beta > \alpha$)

حل) $a = 4$ و $b = -4 + 3\sqrt{2}$ و $c = -\sqrt{18} \Rightarrow a + b + c = 0$

$$x = 1 = \beta \Rightarrow 4\alpha + \beta$$

$$x = \frac{c}{a} = \frac{-\sqrt{18}}{4} = \alpha \Rightarrow 4\left(-\frac{\sqrt{18}}{4}\right) + 1 = -\sqrt{18} + 1$$

نکته: اگر بخواهیم معادله درجه دومی تشکیل دهیم که ریشه های آن α و β باشند، این معادله برابر است با:

$$= 0 \quad (\text{قرب دومی}) + x (\text{جمع دومی}) - x^2$$

سوال - معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن ۲- و ۳- باشد.

(حل)

$$x^2 - (-5)x + (6) = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

سوال - معادله درجه دومی بنویسید که مجموعه جواب های آن

$\left\{ \frac{2}{3} \text{ و } \frac{3}{4} \right\}$ باشند

(حل)

$$\text{جمع ریشه ها} = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$$

$$\text{ضرب ریشه ها} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

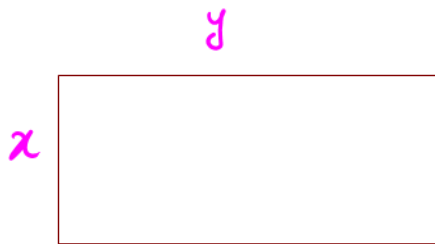
$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{17}{12} \right)x + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{معادله}$$

می توان مخرج را در ۱۲ ضرب کرد تا مخرج ها از بین بروند.

$$12x^2 - 17x + 6 = 0$$

حل مسائل کاربردی به کمک معادله:

سوال- از یک رسته سیم به طول ۵۰ متر می خواصیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را بیابید.



حل) طبق فرض باید محیط این مستطیل ۵۰ متر باشد.

$$2(x+y) = 50 \Rightarrow x+y = 25$$

از طرفی باید مساحت آن برابر ۱۴۴ متر مربع باشد

$$xy = 144 \xrightarrow{y = 25 - x} x(50 - x) = 144$$

$$\Rightarrow -x^2 + 50x = 144 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \checkmark \\ x = 16 \end{cases}$$

با توجه به شکل $x=9$ مقبول است (چون عرض مستطیل است).

$$\Rightarrow \text{طول مستطیل} = y = 25 - 9 = 16 \Rightarrow y = 16$$

سوال- مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است.
این دو عدد را بیابید.

حل) دو عدد فرد متوالی به صورت زیر هستند.

$$x \text{ و } x+2$$

$$x^2 + (x+2)^2 = 290 \Rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 286 = 0$$

طرفین معادله را بر ۲ تقسیم می کنیم تا ساده تر شود و آن
را حل می کنیم تا x به دست آید.

$$x^2 + 2x - 143 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = -13 \end{cases}$$

$$x = 11 \Rightarrow x+2 = 13 \Rightarrow \text{دو عدد فرد متوالی ۱۱ و ۱۳}$$

$$x = -13 \Rightarrow x+2 = -11 \Rightarrow \text{دو عدد فرد متوالی -۱۳ و -۱۱}$$

سوال- طول یک مستطیل ۳ واحد بیش تر از ۴ برابر عرض آن است.
اگر مساحت این مستطیل ۴۵ واحد مربع باشد، ابعاد آن را بیابید.

حل

$$4x + 3$$

x



$4x^2 + 3x - 45 = 0 \Rightarrow x(4x + 3) = 45$ مساحت مستطیل
با روش دلتا این معادله را حل می کنیم تا x به دست آید.

$$\Delta = 9 - 4(4)(-45) = 729$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-3 + 27}{8} = \frac{24}{8} = 3 \checkmark \\ x = \frac{-3 - 27}{8} = \frac{-30}{8} \times \end{array} \right.$$

* توجه کنید که اندازه یک باره خط نمی تواند منفی باشد پس $x = \frac{-30}{8}$ قبول نیست.

$$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow \text{طول} = 4x + 3 = 4(3) + 3 = 15$$

سوال- اختلاف سن دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، سن هر کدام را بیابید.

$$\begin{array}{lcl} \text{سن برادر کوچک} = x & \xrightarrow{\text{بعد از چهار سال}} & \text{سن برادر کوچک} = x + 4 \\ \text{سن برادر بزرگ} = x + 4 & & \text{سن برادر بزرگ} = x + 8 \end{array}$$

$$(x+4)(x+8) = 60 \Rightarrow x^2 + 12x + 32 - 60 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 12x - 28 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \checkmark \\ x = -14 \times \end{cases}$$

سن یک فرد نمی تواند منفی باشد پس $x = -14$ قبول نیست.

$$x = 2 = \text{سن برادر کوچک}$$

$$\text{سن برادر بزرگ} = x + 4 = 2 + 4 = 6$$

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi