

«معادله درجه اول»

درس‌های پیش با معادله درجه اول آشناسدید

* فرم کلی هر معادله درجه اول پس از ساده شدن به صورت زیر است.

$$ax + b = 0$$

این فرم را فرم استاندارد معادله درجه اول می‌نامیم.

* توجه کنید a و b اعدادی حقیقی هستند و $a \neq 0$

تعریف معادله درجه اول: هر معادله‌ای که بتوان مجهول آن را با a و b معادله درجه اول می‌نامیم.

سوال - هر یک از معادله‌های زیر را به فرم استاندارد بنویسید و a و b را تعیین کنید.

الف) $3x - 4 = 4x - 7$

$$ax + b = 0$$

حل) $3x - 4x - 4 + 7 = 0$

$$-x + 3 = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ و } b = 3$$

ب) $\frac{1}{2}x = 12x$

حل) $\frac{1}{2}x - 12x = 0$

$$-\frac{23}{2}x = 0 \Rightarrow a = -\frac{23}{2} \text{ و } b = 0$$

* حل معادله‌های درجه اول: منظور از حل معادله‌های درجه اول این است

که به جای متغیر (مجهول) عدد یا اعدادی قرار دهیم که در رابطه داده شده صدق کنند. هر یک از این اعداد را جواب (ریشه) معادله می‌گویند.

مثال - معادله زیر را حل کنید.

$$3x+1=7$$

حلی منظور از حل معادله این است که به جای x چه اعدادی قرار دهیم تا تساوی برقرار شود. مثلاً اگر $x=2$ قرار دهیم تساوی برقرار می‌شود.

$$3(2)+1=7$$

$$7=7$$

* عدد $x=2$ را جواب (ریشه) این معادله می‌گوئیم.

* روش حل معادله‌های درجه اول: ابتدا آن را به فرم استاندارد $ax+b=0$

تبدیل می‌کنیم که در این صورت محصول x برابر است با:

$$x = \frac{-b}{a}$$

سوال - هر یک از معادله‌های زیر را حل کنید.

$$3x+1=7x-4$$

$$15 = 10 - 6b$$

* حل معادلات درجه اولی که ضرایب صحیح و یا اعداد تنها به صورت کسری هستند: در این مواقع ابتدا ک مخرج ها را حساب می کنیم و ک م به دست آمده را در دو طرف معادله ضرب می کنیم و سپس معادله را حل می کنیم.

مثال - معادله زیر را حل کنید:

حل) ک م مخرج ها ۱۵ است.

$$\frac{3}{5}x + \frac{2}{3} = 4$$

$$15 \left(\frac{3}{5}x + \frac{2}{3} = 4 \right)$$

$$9x + 10 = 60$$

$$9x = 60 - 10 \Rightarrow x = \frac{50}{9}$$

Mohsen Dadashi

مسائل کاربردی معادله درجه اول: بعضی مسائل را می توان با در نظر گرفتن مجهول مناسب به معادله تبدیل کرد و با حل معادله مقدار مجهول را به دست آورد.

سوال - چه عددی است که وقتی با ۶ جمع می شود حاصل ۱۰ برابر خودش شود؟
 حل این عدد را x فرض می کنیم. پس خواهیم داشت:

$$x + 6 = 10x$$

کافی است این معادله را حل کنیم و x را به دست آوریم.

$$x - 10x + 6 = 0$$

$$-9x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6}{-9} \Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

سوال - مجموع سه عدد طبیعی فرد متوالی برابر ۲۷ است. این سه عدد را بیابید.

حل) سه عدد طبیعی فرد متوالی به صورت زیر هستند

$$x \text{ و } x+2 \text{ و } x+4$$

$$7, 9, 11$$

$$x + x + 2 + x + 4 = 27$$

$$3x + 6 - 27 = 0$$

$$3x - 21 = 0$$

$$x = 7$$

نکته: هر ریشه (جواب) معادله، در آن معادله صدق می‌کند.
 به عنوان مثال $x=2$ ریشه معادله
 است پس باید در آن صدق کند.

$$3x+1=7$$

$$\text{سمت چپ} = 3(2) + 1 = 7$$

$$\text{سمت راست} = 7$$

سوال - a را چنان بیابید که $x = \frac{1}{3}$ ریشه معادله زیر باشد.

$$ax + 4 = 10x - a$$

حل) چون $x = \frac{1}{3}$ ریشه معادله است، پس باید در آن صدق کند.

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow a\left(\frac{1}{3}\right) + 4 = 10\left(\frac{1}{3}\right) - a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}a + 4 = \frac{10}{3} - a$$

$$3 = 3 \text{ کم کم مخرج ها}$$

حال باید با حل این معادله a را پیدا کنیم.

$$3\left(\frac{1}{3}a + 4 = \frac{10}{3} - a\right) \Rightarrow a + 12 = 10 - 3a$$

$$a + 3a + 12 - 10 = 0$$

$$4a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

نکته: کم کم چند عدد یعنی عددی که بر همه آنها بخش پذیر باشد.

«معادله های درجه دوم»

تا این جا با معادله های درجه اول آشنا شده اید. منظور از یک معادله، یک تساوی است که شامل **مجهول** است و می خواهیم مقدار مجهول را پیدا کنیم که در تساوی داده شده صدق کند.

تعریف معادله درجه دوم: هر معادله ای که پس از ساده شدن به فرم زیر باشد یک معادله درجه دوم می نامیم.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

* در واقع بزرگ ترین توان مجهول برابر ۲ است.

* توجه کنید که a و b و c اعدادی حقیقی هستند و $a \neq 0$ (زیرا اگر a صفر باشد معادله فوق تبدیل به یک معادله درجه اول می شود)

نکته: رابطه $ax^2 + bx + c = 0$ را فرم استاندارد (فرم کلی) معادله های درجه دوم می نامیم. اگر معادله ای استاندارد نباشد، می توانیم آن را استاندارد کنیم.

تذکره: برای تشخیص درجه اول یا دوم بودن یک معادله عموماً آن را به صورت استاندارد بنویسید و سپس نظر دهید.
سوال) درجه هر کدام از معادله های زیر را تعیین کنید.

الف) $2x^2 + 4x - 4 = 12x$

معادله درجه دوم است $\rightarrow 2x^2 - 8x - 4 = 0$

ب) $x^2 - 4x + 10 = x^2$

معادله درجه اول است $\rightarrow -4x + 10 = 0$

سوال - هر یک از معادله های زیر را به فرم استاندارد بنویسید و a و b و c را تعیین کنید.

الف) $2x^2 - 4x = 7$

حل) $2x^2 - 4x - 7 = 0 \rightarrow a = 2$ و $b = -4$ و $c = -7$

ب) $(2 + \sqrt{5})x^2 - \sqrt{4} = 9x$

حل) $(2 + \sqrt{5})x^2 - 9x - \sqrt{4} = 0$

$a = 2 + \sqrt{5}$ و $b = -9$ و $c = -\sqrt{4}$

ج) $4x^2 = 4x$

حل) $4x^2 - 4x = 0 \rightarrow a = 4$ و $b = -4$ و $c = 0$

د) $-\sqrt{5}x^2 - 7 = 0$

حل) $a = -\sqrt{5}$ و $b = 0$ و $c = -7$

در حالت کلی برای تعیین a و b و c در معادله درجه دوم ابتدا آن را به صورت استاندارد می نویسیم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- * عدد پست توان دوم مجهول می شود a
- * عدد پست توان اول مجهول می شود b
- * عدد تنها می شود c

* جواب های (ریشه های) معادله درجه دوم: منظور از جواب های

معادله درجه دوم عدد یا اعدادی هستند که در معادله صدق می کنند.
به عنوان مثال جواب های معادله درجه دوم $x^2 + 5x + 6 = 0$

به صورت $x = -2$ و $x = -3$ هستند زیرا در معادله صدق می کنند

$$x = -2 \Rightarrow \begin{cases} \text{سمت چپ} = (-2)^2 + 5(-2) + 6 = 0 \\ \text{سمت راست} = 0 \end{cases}$$

$$x = -3 \Rightarrow \begin{cases} \text{سمت چپ} = (-3)^2 + 5(-3) + 6 = 0 \\ \text{سمت راست} = 0 \end{cases}$$

* اصطلاحاً می گوئیم مجموعه جواب های معادله $x^2 + 5x + 6 = 0$ به صورت $\{-2, -3\}$ است.

* معادله $x^2 + 5x + 6 = 0$ جواب دیگری ندارد. یعنی غیر از -2 و -3 هیچ عدد دیگری در این معادله صدق نمی کند.

* در ادامه درس روش تعیین تعداد جواب ها و پیدا کردن جواب ها را توضیح خواهیم داد.

نکته: هر جوابی از یک معادله در آن معادله صدق می‌کند.
سوال- اگر $x = -1$ یک ریشه معادله زیر باشد، m کدام است؟
 $4x^2 - mx - 7 = 0$

حل)

$$x = -1 \Rightarrow 4(-1)^2 - m(-1) - 7 = 0$$

$$4 + m - 7 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

سوال- به ازای کدام مقدار m یکی از جواب‌های معادله زیر $x = 2$ است؟
 $(3m-1)x^2 + (3-m)x + 5m - 13 = 0$

حل)

$$x = 2 \Rightarrow (3m-1)(4) + (3-m)(2) + 5m - 13 = 0$$

$$12m - 4 + 6 - 2m + 5m - 13 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

سوال- اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 4x + 4 = 0$

باشند، در این صورت حاصل $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha - 4\beta + 4$ را بیابید

حل) چون α ریشه معادله است، پس باید در آن صدق کند.

$$x = \alpha \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \quad (1)$$

و همچنین چون β ریشه معادله است، پس باید در آن صدق کند.

$$x = \beta \Rightarrow \beta^2 - 4\beta + 4 = 0 \quad (2) \Rightarrow \beta^2 - 4\beta = -4$$

$$\text{مطلوب سوال} = \alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha - 4\beta + 4 = \underbrace{(\alpha^2 - 4\alpha + 4)}_0 + \underbrace{(\beta^2 - 4\beta)}_{-4} = 0 + (-4) = -4$$



حل معادله درجه دوم: منظور از حل یک معادله درجه دوم پیدا کردن مقدار مجهول است که در تساوی داده شده صدق کند. در واقع هدف از حل یک معادله درجه دوم پیدا کردن جواب‌ها (ریشه‌ها) است.

نکته: هر معادله درجه دوم دقیقاً دو جواب دارد یا فقط یک جواب دارد یا هیچ جوابی ندارد.

نکته: برای یک معادله درجه دوم غیر از سه حالت فوق، حالت دیگری وجود ندارد.

* برای حل (به دست آوردن جواب‌ها) معادلات درجه دوم روش‌های مختلفی وجود دارد که برخی از آن‌ها را در این جا توضیح می‌دهیم.

روش‌های حل معادلات درجه دوم: (به دست آوردن جواب‌ها)
۱- روش تجزیه:

* می‌دانیم اگر حاصل ضرب دو عبارت A و B صفر باشد در این صورت حداقل یکی از آن‌ها صفر است.

$$A \times B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

نکته: مطلب فوق برای چند عبارت نیز صحیح است. یعنی اگر حاصل ضرب چند عبارت صفر شود در این صورت حداقل یکی از آن‌ها صفر است.

* حل معادله درجه دوم به روش تجزیه به این به این صورت است ابتدا معادله داده شده را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم و آن را به کمک یکی از روش‌های تجزیه (فاکتورگیری، جمله سه‌گانه و ...)، تجزیه کنیم و از نکته گفته شده استفاده می‌کنیم تا جواب های معادله به دست آید.

سوال - معادله زیر را به روش تجزیه حل کنید.

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{حل} \quad x^2 + 5x + 6 = 0 \\ (x+2)(x+3) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ \text{یا} \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\text{مجموعه جواب‌های معادله} = \{-2, -3\}$$

سوال - معادله زیر را به روش تجزیه حل کنید.

$$x^2 = 4$$

$$\begin{aligned} \text{حل} \quad x^2 - 4 = 0 \\ (x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ \text{یا} \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\text{مجموعه جواب‌های معادله} = \{-2, 2\}$$

۲- حل معادله به روش ریشه گیری:

$$0^2 = t \Rightarrow \begin{cases} 0 = \sqrt{t} \\ 0 = -\sqrt{t} \end{cases}$$

سوال- هر یک از معادلات زیر را به روش ریشه گیری حل کنید.

الف $x^2 = 5$

حل $x^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases}$

سوال- معادله زیر را به روش ریشه گیری حل کنید.

الف $(2t-1)^2 = 9$

حل $(2t-1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} 2t-1=3 \Rightarrow 2t=4 \Rightarrow t=2 \\ 2t-1=-3 \Rightarrow 2t=-2 \Rightarrow t=-1 \end{cases}$

۳- روش مربع کامل کردن:

Mohsen Dadashi

سوال - معادله زیر را به روش مربع کامل کردن حل کنید.

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

حل $a=1$, $b=5$, $c=6$

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 + 20x + 24 = 0$$

$$4x^2 + 20x = -24$$

$$\xrightarrow{+5^2} 4x^2 + 20x + 25 = 25 - 24$$

$$(2x + 5)^2 = 1$$

چون مثبت است پس این معادله دو جواب حقیقی دارد.

$$2x + 5 = 1 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

$$2x + 5 = -1 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

سوال - معادله زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$$(a+m)^2 = n \text{ بنویسیم}$$

سوال- اگر معادله $2x^2 + x - 2 = 0$ را به صورت حاصل $\frac{m}{n}$ کدام است؟

حل

۴- روش دلتا (Δ) (روش کلی یا روش مبتنی)

در روش مربع کامل عبارت $b^2 - 4ac$ را با Δ نمایش می دهیم و به نتایج زیر می رسم:

برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ابتدا a و b و c را تعیین می کنیم و دلتا (Δ) را برای آن حساب می کنیم.

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{فرمول دلتا}$$

برای دلتا (Δ) سه حالت پیش می آید

حالت اول: اگر $\Delta > 0$ ، آن گاه معادله دارای دو جواب (ریشه) حقیقی متمایز است و به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

حالت دوم: اگر $\Delta = 0$ ، آن گاه معادله دارای یک جواب (ریشه) حقیقی است و از رابطه زیر به دست می آید.

$$x = \frac{-b}{2a}$$

نکته: در این حالت اصطلاحاً

می گوئیم معادله دارای ریشه مضاعف

است. پس شرط این که معادله ریشه مضاعف داشته باشد این است که $\Delta = 0$ باشد.

حالت سوم: اگر $\Delta < 0$ ، می گوئیم معادله جواب (ریشه) حقیقی ندارد.

سوال - هر یک از معادله‌های زیر را به روش دست‌حل کنید.

الف $x^2 + 5x + 4 = 0$

ب) $x^2 + 4x = -4$

پ) $2x^2 - x + 10 = 0$

Mohsen Dadashi

روش Δ در حل معادلات درجه دوم:

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر b زوج باشد می توان از روش Δ استفاده کرد. به صورت زیر:

$$b' = \frac{b}{2}$$
$$\Delta' = b'^2 - ac \Rightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \Rightarrow x = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \text{ و } x = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \\ \Delta' = 0 \Rightarrow x = \frac{-b'}{a} \\ \Delta' < 0 \Rightarrow \text{معادله ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$$

نکته: از این روش زمانی استفاده کنید که b زوج باشد.

سوال - معادله زیر را به روش Δ حل کنید.

$$x^2 - 12x - 1 = 0$$

نتایج: با توجه به معادله $ax^2 + bx + c = 0$ داریم:

- ۱- شرط این که معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد $\Delta > 0$
- ۲- شرط این که معادله دارای ریشه مضاعف (تکراری) باشد $\Delta = 0$
- ۳- شرط این که معادله دارای ریشه حقیقی نباشد $\Delta < 0$
- ۴- شرط این که معادله دارای ریشه حقیقی باشد $\Delta \geq 0$

سوال- m را چنان بیابید که معادله $m x^2 + (2m + 1)x + m = 0$

(الف) دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد.

(ب) دارای ریشه مضاعف باشد.

(ج) ریشه حقیقی نداشته باشد.

(د) ریشه حقیقی داشته باشد.

(حل)

(الف)

$$m x^2 + (2m + 1)x + m = 0 \rightarrow a = m, b = 2m + 1, c = m$$

$$\text{شرط: } \Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (2m + 1)^2 - 4(m)(m) > 0$$

$$4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 > 0$$

$$4m + 1 > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{4} \Rightarrow m \in (-\frac{1}{4}, +\infty)$$

$$\text{شرط: } \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (2m + 1)^2 - 4(m)(m) = 0$$

$$4m + 1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

$$\text{شرط: } \Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 4m + 1 < 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{4} \quad (ب)$$

$$m \in (-\infty, -\frac{1}{4})$$

$$\text{شرط: } \Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 4m + 1 > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{4} \quad (ت)$$

$$m \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$$

سوال- اگر معادله زیر فقط یک جواب داشته باشد، m کدام است؟
 $(x+4)(x^2+2x+m) = 0$

حل) وقتی ضرب دو عبارت صفر است، حداقل یکی از آنها باید صفر باشد

$$\begin{cases} x+4=0 \Rightarrow x=-4 \\ x^2+2x+m=0 \end{cases}$$

$x = -4$ یک جواب معادله است. پس باید بر آن شرط دوم یا باید ریشه حقیقی نداشته باشد یا ریشه مضاعف $x = -4$ داشته باشد. پس دو حالت داریم:

حالت اول: معادله $x^2+2x+m=0$ ریشه حقیقی نداشته باشد

$$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 4 - 4(1)(m) < 0 \Rightarrow 4 - 4m < 0 \Rightarrow m > 1$$

$$m \in (1, +\infty)$$

حالت دوم: معادله $x^2+2x+m=0$ دارای ریشه مضاعف باشد

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 4 - 4(1)(m) = 0 \Rightarrow \boxed{m=1}$$

پس معادله به صورت زیر می شود

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

که این معادله ریشه مضاعف $x = -1$ ندارد.

پس حدود m برابر است با: $m \in (1, +\infty)$

سوال- اگر معادله زیر فقط یک ریشه داشته باشد، m کدام است؟

$$(x+1)(x^2+2x+m)$$

سوال- m را طوری بیابید که معادله زیر دارای ریشه مضاعف باشد.

$$(m-1)x^2 + (m-1)x + m + 7 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4(m-1)(m+7) = 0$$

حله

$$m^2 - 14m + 44 - 4m^2 - 24m + 28 = 0$$

$$-3m^2 - 40m + 92 = 0$$

$$m = \frac{-44}{-3} \checkmark$$

$$m = 2 \checkmark$$

با حل معادله m به دست می آید.

توجه کنید $m-1 \neq 0$ پس $m \neq 1$

سوال- a را چنان بیابید که معادله زیر دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد
 $(4a+1)x^2 - 4ax + a - 3 = 0$

شرط: $\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0$

(حل)

$a = 4a + 1$, $b = -4a$, $c = a - 3$

$\Rightarrow (-4a)^2 - 4(4a+1)(a-3) > 0$

$16a^2 - 4(4a^2 - 11a - 3) > 0$

$16a^2 - 16a^2 + 44a + 12 > 0$

$44a + 12 > 0 \Rightarrow a > \frac{-12}{44} \Rightarrow a > \frac{-3}{11}$

از طرفی ضریب x^2 نباید صفر باشد. پس
 $4a + 1 \neq 0$

$a \neq \frac{-1}{4}$

$\Rightarrow a \neq \frac{-1}{4}$ و $a > \frac{-3}{11}$: حدود

تذکره: در برخی سوالات قید می شود، معادله ریشه مضاعف داشته باشد، که شرط آن این است که $\Delta = 0$ باشد. اما اگر قید شود دارای ریشه مضاعف t باشد در این صورت باید داشته باشیم:

$\Delta = 0$ و $t = \frac{-b}{2a}$

سوال - m کدوم باشد تا معادله زیر دارای ریشه مضاعف باشد.

$$m^2 x^2 + 4x + 4 = 0$$

روش اول:

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$$

$$16 - 4(m^2)(4) = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array} \right\}$$

$$\frac{-b}{2a} = -2 \Rightarrow \frac{-4}{2m^2} = -2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array} \right\}$$

پس m می تواند 1 یا -1 باشد.
توجه کنید که $m^2 \neq 0$ پس $m \neq 0$ باید باشد.

سوال - m و n را طوری بیابید که معادله زیر دارای ریشه مضاعف $\frac{3}{4}$ باشد.

$$m^2 x^2 - 4mx + 2m + n = 0$$

Mohsen Dadashi

دو نکته مهم در باره حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

۱- اگر $a + b + c = 0$ باشد آن گاه معادله دارای دو ریشه است که یکی $x = 1$ است و دیگری $x = \frac{c}{a}$

۲- اگر $a + c = b$ باشد آن گاه معادله دارای دو ریشه است که یکی $x = -1$ است و دیگری $x = \frac{-c}{a}$ است

سوال - معادله زیر را حل کنید.

$$(1 - \sqrt{2})x^2 - 2(2 + \sqrt{2})x + 3 + 3\sqrt{2} = 0$$

$$a = 1 - \sqrt{2}, \quad b = -4 - 2\sqrt{2}, \quad c = 3 + 3\sqrt{2} \quad (\text{حل})$$

$$a + b + c = (1 - \sqrt{2}) + (-4 - 2\sqrt{2}) + (3 + 3\sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \quad \text{و} \quad x = \frac{c}{a} = \frac{3 + 3\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$

سوال - اگر α و β دو ریشه معادله $4x^2 - (4 - 3\sqrt{2})x - \sqrt{18} = 0$ باشد آن گاه حاصل $4\alpha + \beta$ را بیابید: ($\beta > \alpha$)

$$a = 4, \quad b = -4 + 3\sqrt{2}, \quad c = -\sqrt{18} \Rightarrow a + b + c = 0 \quad (\text{حل})$$

$$x = 1 = \beta \Rightarrow 4\alpha + \beta = -\sqrt{18} + 1$$

$$x = \frac{c}{a} = \frac{-\sqrt{18}}{4} = \alpha$$

نکته: اگر بخواهیم معادله درجه دومی تشکیل دهیم که ریشه های آن α و β باشند، این معادله برابر است با:

$$x^2 - (\text{جمع دو ریشه})x + (\text{ضرب دو ریشه}) = 0$$

سوال - معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن ۲- و ۳- باشد.

$$x^2 - (-5)x + (6) = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

سوال - معادله درجه دومی بنویسید که مجموعه جواب های آن

$$\text{جمع ریشه ها} = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$$

$$\left\{ \frac{2}{3} \text{ و } \frac{3}{4} \right\} \text{ باشند}$$

$$\text{ضرب ریشه ها} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

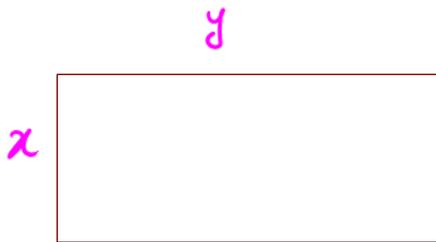
$$\Rightarrow \text{معادله: } x^2 - \left(\frac{17}{12}\right)x + \frac{1}{2} = 0$$

می توان مخرج را در ۱۲ ضرب کرد تا مخرج ها از بین بروند.

$$12x^2 - 17x + 6 = 0$$

حل مسائل کاربردی به کمک معادله:

سوال- از یک رسته سیم به طول ۵۰ متر می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را بیابید.



حل) طبق فرض باید محیط این مستطیل ۵۰ متر باشد.

$$2(x+y) = 50 \Rightarrow x+y = 25$$

از طرفی باید مساحت آن برابر ۱۴۴ متر مربع باشد

$$xy = 144 \xrightarrow{y = 25 - x} x(50 - x) = 144$$

$$\Rightarrow -x^2 + 50x = 144 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 9 \checkmark \\ x = 16 \times \end{array} \right\}$$

با توجه به شکل $x=9$ مقبول است (چون عرض مستطیل) است.

$$\Rightarrow \text{طول مستطیل} = y = 25 - 9 = 16 \Rightarrow y = 16$$

سوال- مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است.
این دو عدد را بیابید.

حل) دو عدد فرد متوالی به صورت زیر هستند.

$$x \text{ و } x+2$$

$$x^2 + (x+2)^2 = 290 \Rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 286 = 0$$

طرفین معادله را بر ۲ تقسیم می کنیم تا ساده تر شود و آن
را حل می کنیم تا x به دست آید.

$$x^2 + 2x - 143 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 11 \\ x = -13 \end{array} \right\}$$

$$x = 11 \Rightarrow x + 2 = 13 \Rightarrow \text{دو عدد فرد متوالی ۱۱ و ۱۳}$$

$$x = -13 \Rightarrow x + 2 = -11 \Rightarrow \text{دو عدد فرد متوالی -۱۱ و -۱۳}$$

سوال - طول یک مستطیل ۳ واحد بیش تر از ۴ برابر عرض آن است.
اگر مساحت این مستطیل ۴۵ واحد مربع باشد، ابعاد آن را بیابید.

$$4x + 3$$

حل

x



با روش دلتا این معادله را حل می کنیم تا x به دست آید.
 $4x^2 + 3x - 45 = 0$
 مساحت مستطیل = $x(4x + 3) = 45 \Rightarrow 4x^2 + 3x - 45 = 0$

$$\Delta = 9 - 4(4)(-45) = 729$$

$$x = \frac{-3 + 27}{8} = \frac{24}{8} = 3 \quad \checkmark$$

$$x = \frac{-3 - 27}{8} = \frac{-30}{8} \quad \times$$

* توجه کنید که اندازه یک باره خط نمی تواند منفی باشد پس $x = \frac{-30}{8}$ قبول نیست.

$$\Rightarrow x = 3 = \text{عرض} \quad \text{طول} = 4x + 3 = 4(3) + 3 = 15$$

سوال- اختلاف سن دو برادر بابت دیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، سن هر کدام را بیابید.

سن برادر کوچک $x + 4$ بعد از چهار سال سن برادر کوچک x
 سن برادر بزرگ $x + 8$ سن برادر بزرگ $x + 4$

$$x^2 + 12x + 22 - 60 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x + 8) = 60 \quad \text{طبق فرض}$$

$$\Rightarrow x^2 + 12x - 22 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \checkmark \\ x = -14 \times \end{cases}$$

سن یک فرد نمی تواند منفی باشد پس $x = -14$ قبول نیست.

$$x = 2 = \text{سن برادر کوچک}$$

$$\text{سن برادر بزرگ} = x + 4 = 2 + 4 = 6$$

$$y = 2x - 1$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$$

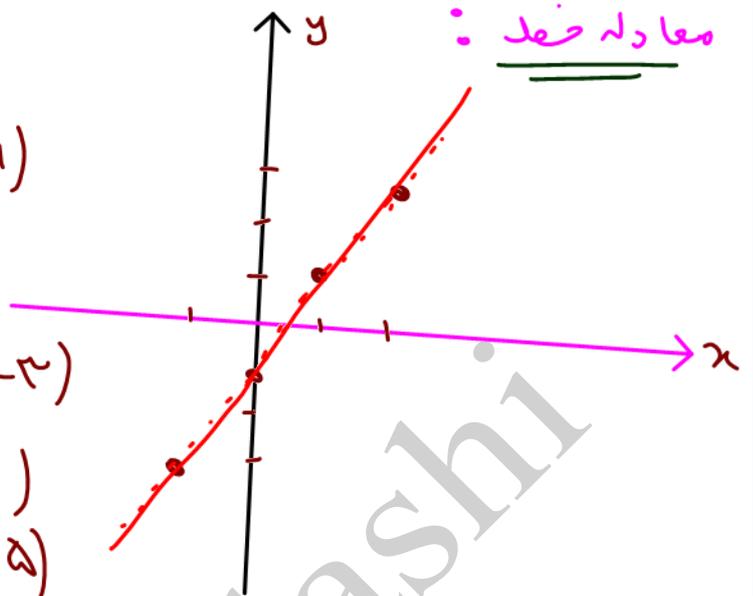
$$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (1, 1)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow (-1, -3)$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (2, 3)$$

$$x = -2 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow (-2, -5)$$

$$x = -2 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow (-2, -5)$$



* هر رابطه ای به صورت $y = ax + b$ در دستگاه مختصات یک خط راست است. (a و b دو عدد حقیقی هستند)

$$y = -2x - 1$$

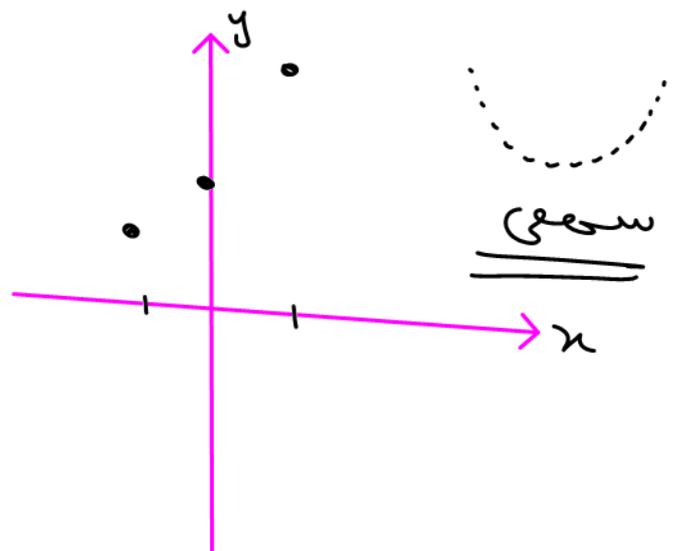
$$y = 10x + \sqrt{2}$$

$$y = x^2 + 5x + 4$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (0, 4)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 12 \Rightarrow (1, 12)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (-1, 2)$$



* معادله هر کعبی به صورت زیر است. (a و b و c هر کدام یک عدد هستند و $a \neq 0$)

$$y = 2x^2 + 2x - 1$$

$$S \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{2a} \right)$$

$$\text{طول} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\text{عرض} = \frac{-(2+1)}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{8} \right)$$

«**در سهمی**»

۱- نمودار سهمی به صورت \cup یا \cap است.

۲- معادله هر سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است که در آن a داده هر کدام یک عدد حقیقی هستند و $a \neq 0$

۳- اگر $a > 0$ باشد، سهمی به صورت \cup است که اصطلاحاً می گوئیم دهانه سهمی رو به بالاست و اگر $a < 0$ باشد، سهمی به صورت \cap است که اصطلاحاً می گوئیم دهانه سهمی رو به پایین است.

۴- در سهمی هایی که رو به بالا باز می شوند، نقطه ای وجود دارد که از همه نقاط آن سهمی پایین تر است. این نقطه را **رأس** سهمی می نامیم و معمولاً با K نمایش می دهیم.

۵- در سهمی هایی که رو به پایین باز می شوند، نقطه ای وجود دارد که از همه نقاط سهمی بالاتر است. این نقطه را **رأس** سهمی می نامیم و معمولاً با K نمایش می دهیم.



نتیجه ۱: سهمی هایی که رو به بالا باز می شوند دارای کمترین مقدار هستند و این کمترین مقدار همان عرض رأس سهمی است.

کمترین مقدار $= \frac{-\Delta}{4a}$

* توجه کنید شرط این سهمی دارای کمترین مقدار باشد این است که $a > 0$ باشد.

نتیجه ۲: سهمی هایی که رو به پایین باز می شوند بیش ترین مقدار هستند و این بیش ترین مقدار همان عرض رأس سهمی است.

بیش ترین مقدار $= \frac{-\Delta}{4a}$

* توجه کنید شرط این سهمی دارای بیش ترین مقدار باشد این است که $a < 0$ باشد.



۶- خطی که به عوارزات محور y ها از رأس سهمی عبور می کنند، **محور تقارن** آن سهمی نامیم.

نکته: معادله محور تقارن سهمی به صورت زیر است. $y = \frac{-b}{2a}$ = طول رأس سهمی

۷- معادله دوم سهمی: اگر $a > 0$ سهمی رو به بالاست و اگر $a < 0$ سهمی رو به پایین است.

$$y = a(x - \text{○})^2 + \text{□}$$

(خردش و قرینه)

* البته می توان ساده کرد تا به فرم $y = ax^2 + bx + c$ تبدیل شوند و سپس اجزای خواسته شده را حساب کرد.

۸- برای رسم یک سهمی مختصات رأس آن را پیدا می کنیم و سپس با توجه به علامت a

دهانه سهمی را تعیین می کنیم (رو به بالا یا پایین) و سپس آن سهمی را رسم می کنیم.

مثال- موارد گفته شده را روی سهمی های زیر پیاده کنید

الف) $y = 2x^2 + 4x + 1$

ب) $y = -2x^2 + 8x + 3$

پ) $y = -3(x+1)^2 - 2$

ت) $y = 2(x-3)^2 + 4$

$y = ax^2 + bx + c$

حل الف) $y = 2x^2 + 4x + 1$

$a = 2$ و $b = 4$ و $c = 1$

چون $a = 2$ عدد + است پس سهمی رو به بالاست

پس این سهمی دارای کمترین مقدار است.

کمترین مقدار $= \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16-8)}{8} = \frac{-8}{8} = -1$

مختصات رأس: $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$

محور تقارن: $y = -\frac{b}{2a}$



ت) $y = (x-3)^2 + 4$

$y = ax^2 + bx + c$

مختصات رأس (۳ و ۴)

محور تقارن: $y = 3$ طول رأس = ۳
 کمترین مقدار = ۴

Mohsen Dadashi

$y = ax^2 + bx + c$ $\xrightarrow[\text{مقدار}]{\text{بیشترین}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{شرط اول: } a < 0 \\ \text{شرط دوم: } -\frac{\Delta}{4a} = \text{بیشترین مقدار است} \end{array} \right.$

$y = ax^2 + bx + c$ $\xrightarrow[\text{مقدار}]{\text{کمترین}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{شرط اول: } a > 0 \\ \text{شرط دوم: } -\frac{\Delta}{4a} = \text{کمترین مقدار است} \end{array} \right.$

سوال داده است.

سوال داده است.

سوال - m را طوری بیابید که سهمی $y = mx^2 - 2mx + 4m^2 + 1$ دارای بیشترین مقدار 4 باشد.

حل) $a = m, b = -2m, c = 4m^2 + 1$

شماره اول: $a < 0 \Rightarrow m < 0$ (۱)

شماره دوم: $-\frac{\Delta}{4a} = 4 \Rightarrow \frac{-(4m^2 - 14m^2 - 4m)}{4m} = 4$

$-14m^2 + 4m^2 + 12m = 0$
 $4m(-4m^2 + m + 3) = 0$

$4m = 0 \Rightarrow m = 0$ (قبول نیست)
 $-4m^2 + m + 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{-8} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{-8}$
 $m = \frac{-1 + \sqrt{13}}{-8} = \frac{1 - \sqrt{13}}{8}$ (قبول نیست)
 $m = \frac{-1 - \sqrt{13}}{-8} = \frac{1 + \sqrt{13}}{8}$ (قبول نیست)

$a = m - 1, b = m, c = 1$

دارای کمترین مقدار 2 باشد $y = (m-1)x^2 + mx + 1$

سوال - m را بیابید که سهمی

$a > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1$
 $-\frac{\Delta}{4a} = 2 \Rightarrow \frac{m^2 - 4m + 4}{4m - 4} = -\frac{2}{1}$

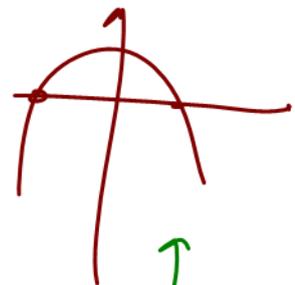
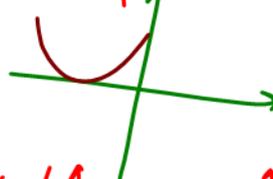
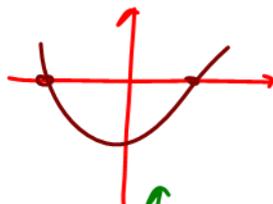
$m^2 - 4m + 4 = -8m + 8$
 $m^2 + 4m - 4 = 0$

ارائه دهید و m را به دست آورید

$y = ax^2 + bx + c$

$ax^2 + bx + c = 0$

معادله توانی جواب داشت
 معادله بدون جواب داشت
 معادله جواب نداشت



$$y = ax^2 + bx + c$$

* وضعیت یک سهمی با محور x ها: $y=0$

$\Delta < 0$
 $a > 0$

سهمی بالای محور x ها

$\Delta = 0$
 $a > 0$

سهمی مماس بر محور x ها

$\Delta > 0$
 $a > 0$

سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع می کند

$\Delta < 0$
 $a < 0$

سهمی پایین محور x ها

$\Delta = 0$
 $a < 0$

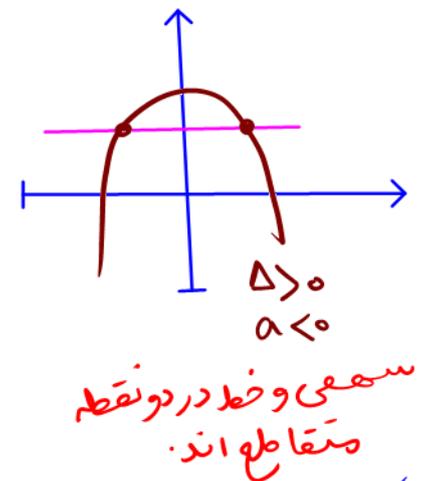
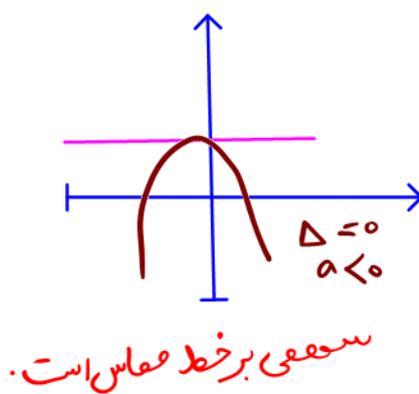
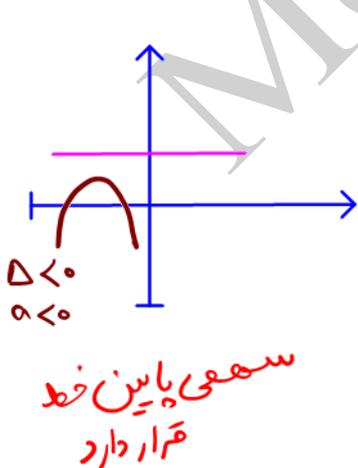
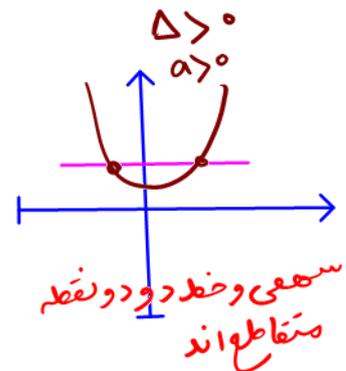
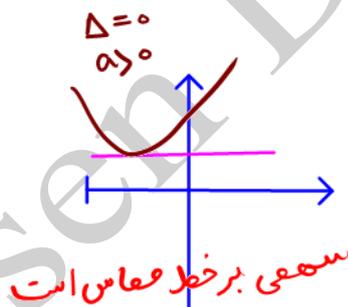
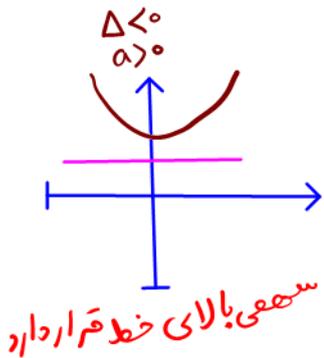
سهمی مماس بر محور x ها

$\Delta > 0$
 $a < 0$

سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع می کند

* در حالت کلی وضعیت سهمی $y = ax^2 + bx + c$ و خط $y = k$ یک عدد

ابتداءً k را در معادله $ax^2 + bx + c - k = 0$ جایگزین می کنیم

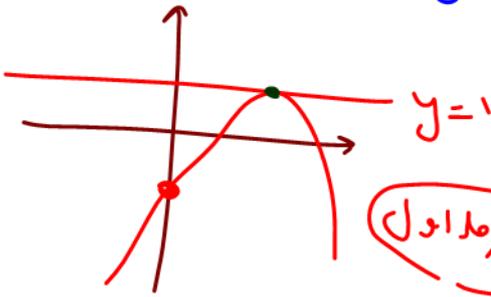


تذکر: در این گونه سوالات Δ باید در معادله $ax^2 + bx + c - k = 0$ حساب شود نه در سهمی $y = ax^2 + bx + c$

$$y = ax^2 + bx + c$$

تذکر: در این گونه سوالات Δ باید در معادله $ax^2 + bx + c - k = 0$ حساب شود نه در سهمی $y = ax^2 + bx + c$

سوال - خط $y=1$ بر سهمی $y = -2mx^2 - mx - 2$ مماس است. m کدام است؟



$$-2mx^2 - mx - 2 - 1 = 0$$

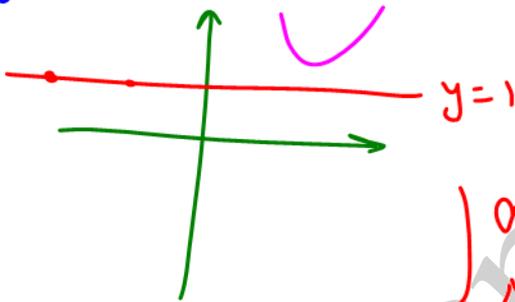
$$-2mx^2 - mx - 3 = 0$$

شماره اول: $a < 0 \rightarrow -2m < 0 \rightarrow m > 0$

$$\Delta = 0 \rightarrow m^2 - 4(-2m)(-3) = 0 \rightarrow m^2 - 24m = 0$$

$$m(m - 24) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} m = 0 \quad \times \\ m - 24 = 0 \rightarrow m = 24 \quad \checkmark \end{array} \right\}$$

سوال - حدود m را چنان بیابید تا سهمی $y = mx^2 + 2mx + 3$ بالای خط $y=1$ باشد.



سوال - حدود m را چنان بیابید تا سهمی $y = mx^2 + 2mx + 3$ بالای خط $y=1$ باشد.

$$mx^2 + 2mx + 3 - 1 = 0$$

$$mx^2 + 2mx + 2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow m > 0$$

$$\Delta < 0 \rightarrow 4m^2 - 4m < 0$$

Mohsen

تعیین علامت:

یعنی این که تعیین کنیم عبارت داده شده به ازای چه x هایی

* مثبت می شود

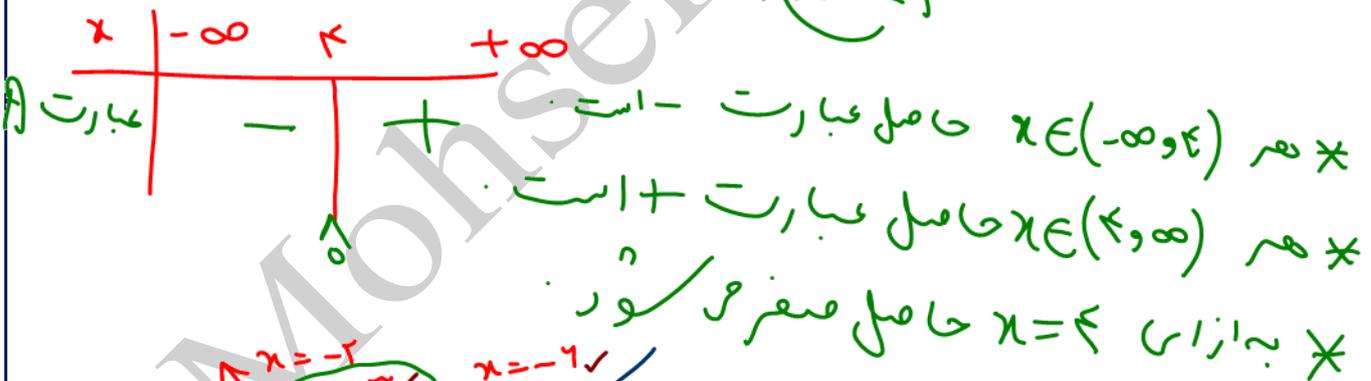
* منفی می شود

* به ازای چه x هایی صفر می شود

روش تعیین علامت عبارت ها: ابتدا تک تک عبارت ها را مساوی صفر قرار می دهیم و با حل معادله x ها را پیدا می کنیم و آن ها را از کوچک به بزرگ در جدول قرار می دهیم و سپس با مقداردهی علامت ها را تعیین می کنیم.

مثال - عبارت $A = 2x - 8$ را تعیین علامت کنید.

$$2x - 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

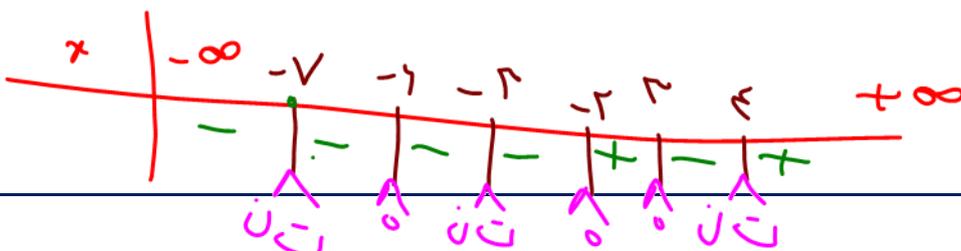


مثال - عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$A = \frac{(x^2 + 5x + 4)(x + 6)(3x - 9)}{(x^2 - x - 12)(x + 7)}$$

$x = 4$
 $x = -3$

$x = -7$
 $x = -2$
 $x = 3$
 $x = 4$

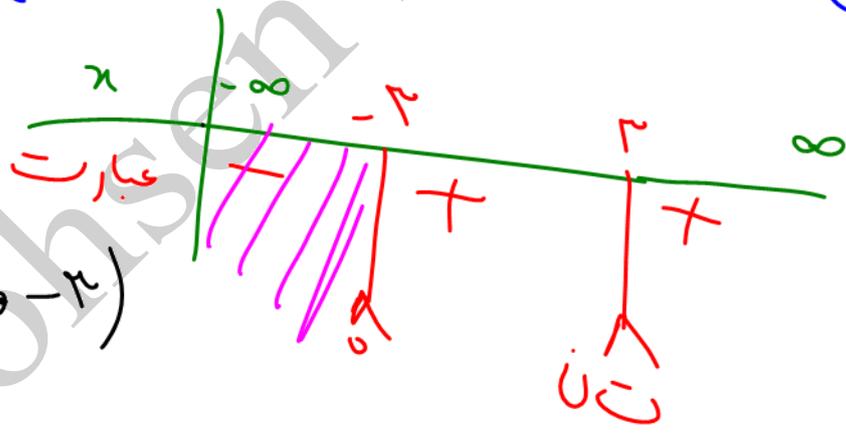


روش سریع تعیین علامت:
 ابتدا علامت یکی از خانه‌ها را به کمک مقداردهی به دست می‌آوریم.
 * از هر ریشه‌ای که زوج بار تکرار شده است. خواهیم رد شویم علامت عوض نمی‌شود.
 * از هر ریشه‌ای که فرد بار تکرار شده باشد. خواهیم رد شویم علامت عوض می‌شود.
 * از ریشه قدر مطلق خواهیم رد شویم علامت عوض نمی‌شود.

نامعادله:
 در هر نامعادله ابتدا همه اعداد و عبارت‌ها را سمت چپ
 مشتق می‌کنیم تا سمت راست صفر باشد. سپس عبارت
 سمت چپ را تعیین علامت می‌کنیم تا نامعادله حل شود.

$x = 2$
 $x = -2$
 $x^2 - 9$
 $4x - 12$
 $x = 2$

مثال - نامعادله زیر را حل کنید.



حج = $(-\infty, -2)$

سوال - نامعادله زیر را حل کنید.

$$\frac{x^3(3-2x)}{x^2+1} \geq 2$$

حل) $\frac{x^3(3-2x)}{(x^2+1)x} - \frac{2}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^3(3-2x) - 2(x^2+1)}{x^2+1} \geq 0$

$$\frac{3x - 2x^2 - 2x^2 - 2}{x^2+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{-4x^2 + 3x - 2}{x^2+1} \geq 0$$

فقداریه

فقداریه



$$S = \emptyset$$

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi