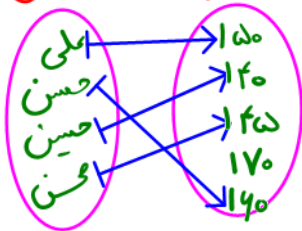


زوج مرتب :

تعریف تابع: تابع رابطه ای از یک مجموعه مانند A به مجموعه ای دیگر مانند B است که به هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B نسبت داده شود.

دانش آموزان



- * قد ۱۵۰ نسبت داده شده است به علی
- * قد ۱۴۰ نسبت داده شده است به حسن
- * قد ۱۴۵ نسبت داده شده است به حسین
- * قد ۱۶۰ نسبت داده شده است به عمن
- * قد ۱۷۰ به هیچ کس نسبت داده نشده است

نماینده های مختلف یک تابع: تابع نمایش های مختلفی دارد که در زیر آنها را توضیح می دهیم

۱- نمایش تابع به صورت نمودار ون (نمودار پیکانی)

A



B

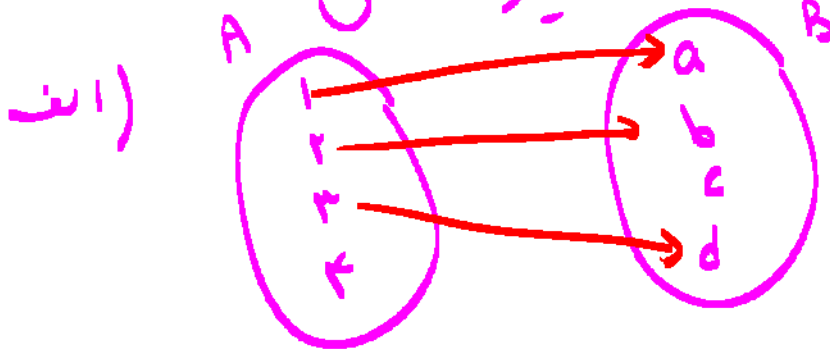


* رابطه ای از روی نمودار ون زمانی تابع است که به هر عضو از مؤلفه های اول دقیقاً یک عضو از مؤلفه های دوم نسبت دهد.

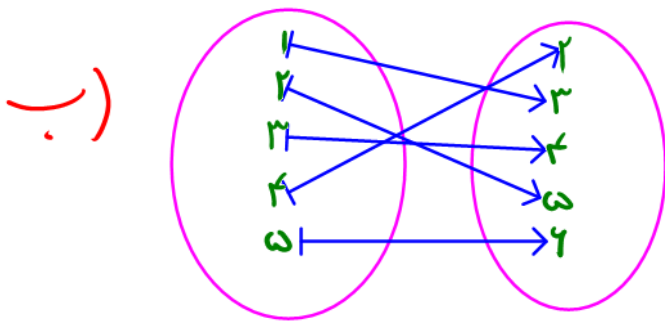
(نه کمتر نه بیش تر)

(در واقع رابطه ای از روی نمودار ون تابع است هم گاه از هر کدام از اعضای مؤلفه های اول فقط یک پیکان خارج شده باشد)

مثال - کدام یک از رابطه های زیر یک تابع است؟

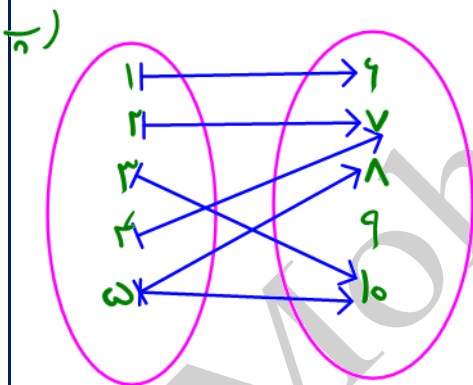


تابع نیست. چون از هر کدام از اعضای مخرج اول باید فقط یک بیگانه خارج شده باشد. (از ۴ بیگانه خارج نشده است)



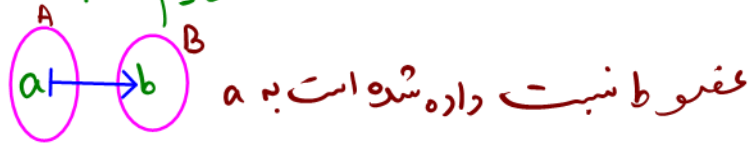
تابع هست.

چون از هم عضو مولفه ها اول فقط یک بیگانه خارج شده است.



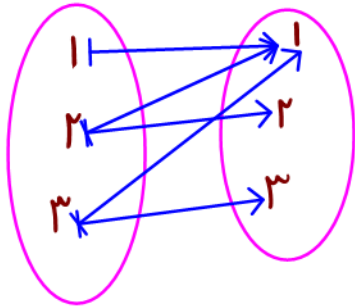
تابع نیست. چون از هم عضو مولفه ها اول فقط یک بیگانه خارج شده است.

نکته: در نمودار دیکرانی وقتی یکسانی از a به b وصل می شود، می گوئیم b به a نسبت داده شده است.



عضو b نسبت داده شده است به a

سوال- آیا رابطه ای که به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم علیه آن عدد را نسبت می دهد نهائس گریک تابع است؟



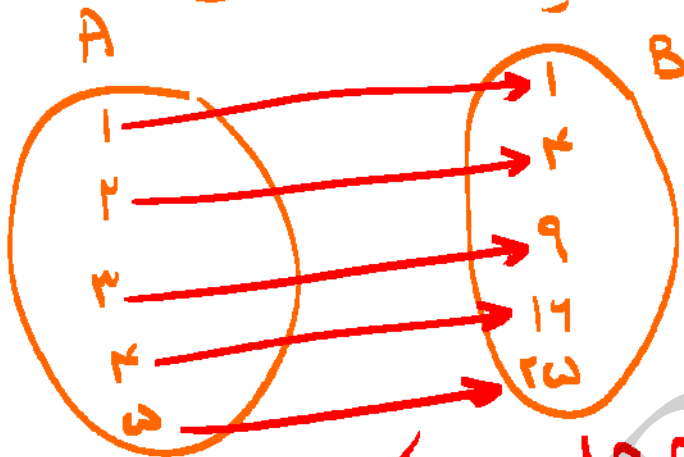
حل) تابع نیست. چون برای تابع بودن باید از هر کدام از اعضای طرف اول فقط یک یکسان خارج شود.
(به هر عضو طرف اول دقیقاً یک عضو از طرف دوم نسبت دهد)

نکته: رابطه ای از مجموعه A به B نهائس گریک تابع است هرگاه:

- * به هر عضو A باید عضوی از B نسبت داده شود
- * به هیچ عضوی از A نباید بیش از یک عضو متمایز از B نسبت داده شود.
- * ممکن است عضوی از B وجود داشته باشد که به هیچ عضوی از A نسبت داده نشده باشد.
- * ممکن است به دو یا چند عضو از A یک عضو از B نسبت داده شده باشد.

۲- نهائس یک تابع به صورت یک جدول دوسطری:

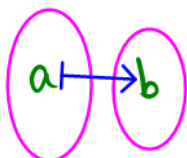
۳- نمایش تابع به صورت زوج مرتب : در صفحات قبلی نمایش تابع به صورت نمودار و ... را متوجه شده‌اید. مثال زیر را نگاه کنید.



حال بعضی مواقع به جای این که نمودار و نمایش دهند با زوج مرتب نمایش می‌دهند.

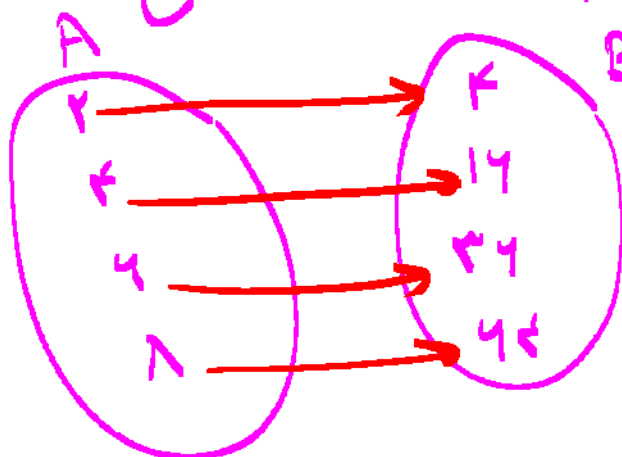
$f = \{(1,1), (2,4), (3,9), (4,16), (5,25)\}$
که به این طرز نمایش تابع نمایش زوج مرتب نمایش می‌دهند.

نکته : در نمودار و وقتی a با یکسانی به b وصل می‌شود (مانند داده می‌شود به a) در این صورت آن را در نمایش زوج مرتب به صورت (a,b) نشان می‌دهند.



(a,b)

سوال - نمودار ون تابع f به صورت زیر داده شده است. آن را به صورت زوج مرتب بنویسید.



حل:

$$f = \{(2, 4), (4, 16), (6, 36), (8, 64)\}$$

*** تشخیص تابع بودن یا نبودن از روی زوج مرتب :**

برای این که تشخیص دهیم یک رابطه ای از روی زوج مرتب تابع هست یا خیر دورش وجود دارد.

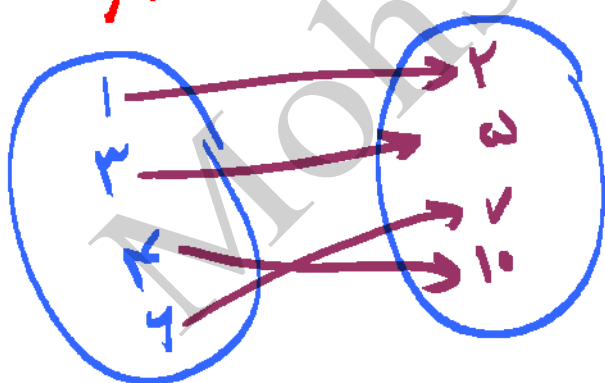
*** روش اول :** در این روش زوج مرتب داده شده را به نمودارون تبدیل می کنیم و تابع بودن یا نبودن را بررسی می کنیم.

تذکره - حواستان باشد که تکراری ها فقط یک بار بنویسید.

مثال - تعیین کنید رابطه زیر یک تابع است یا خیر.

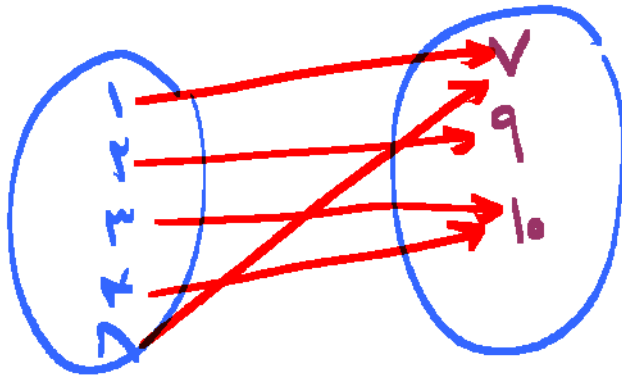
(است) $\{ (4, 10), (6, 7), (3, 5), (1, 2) \} = f$

روش اول :



تابع است .

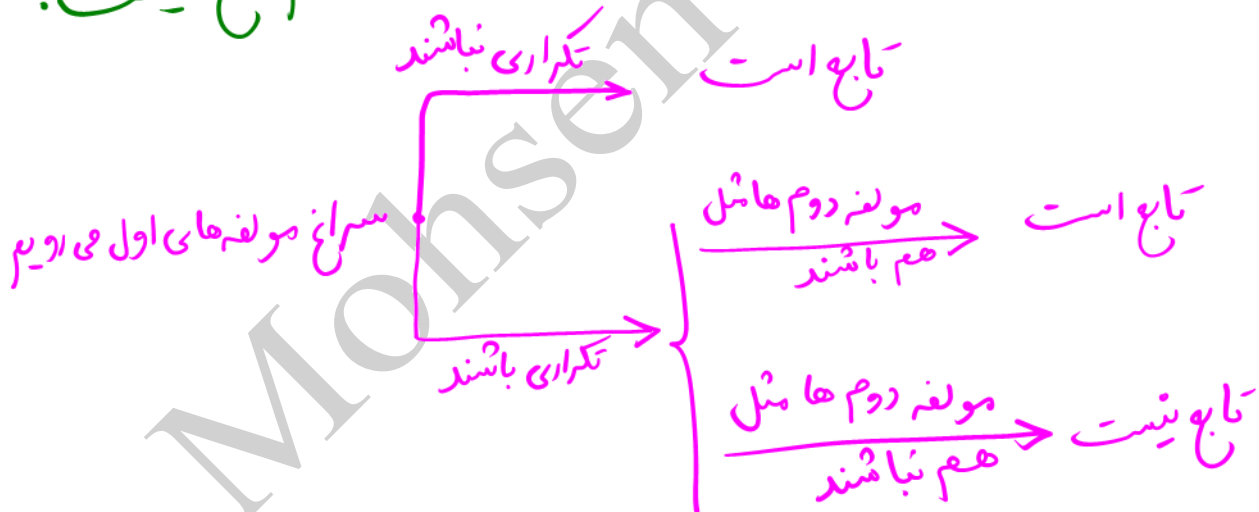
ب) $G = \{(1, 7), (2, 9), (3, 10), (4, 10), (8, 7)\}$



تابع است.

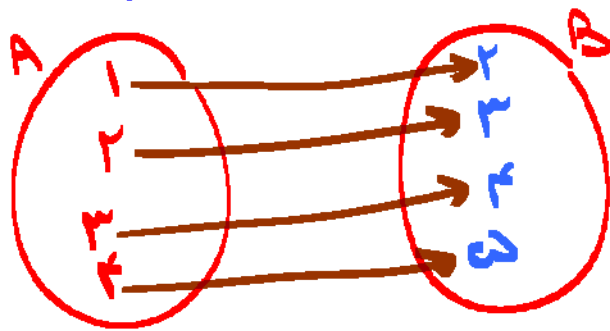
روش دوم تشخیص تابع از روی زوج مرتب:

ابتدا سراغ مولفه های اول می رویم. اگر هیچ کدام تکراری نبودند، می گوئیم تابع است و تمام. اما اگر مولفه اول تکراری داشتیم سراغ مولفه دوم همان ها می رویم، اگر آن ها هم مثل هم بودند می گوئیم تابع است و اگر مثل هم نبودند می گوئیم تابع نیست.



مثال - تعیین کنید کدام یک از روابط زیر تابع است

الف) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$



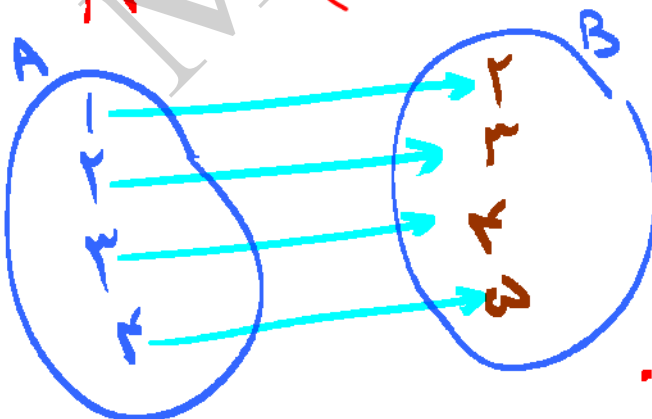
روش اول: تابع هست.

روش دوم:

$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

چون مولفه‌ها را اول تکرار نمی‌کنند پس تابع است.

ب) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (1, 2)\}$



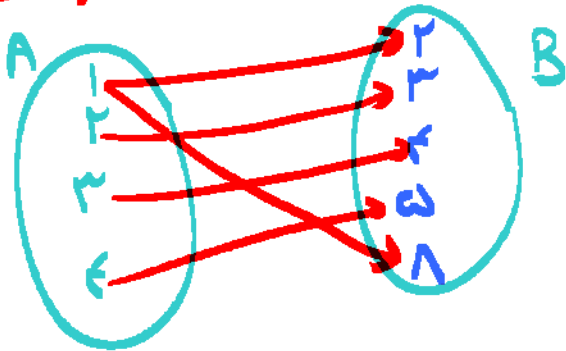
روش اول: تابع است.

روش دوم: تابع هست.

$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (1, 2)\}$

ب- $g = \{(1, 8), (4, 5), (3, 4), (2, 3), (1, 2)\}$

روش اول -



تابع سِت -

روش دوم -

$f = \{(1, 8), (4, 5), (3, 4), (2, 3), (1, 2)\}$

تابع سِت -

سوال مهم: متادری x و y را چنان بیابید که رابطه f که به صورت زیر داده شده است نمایشگر یک تابع باشد.

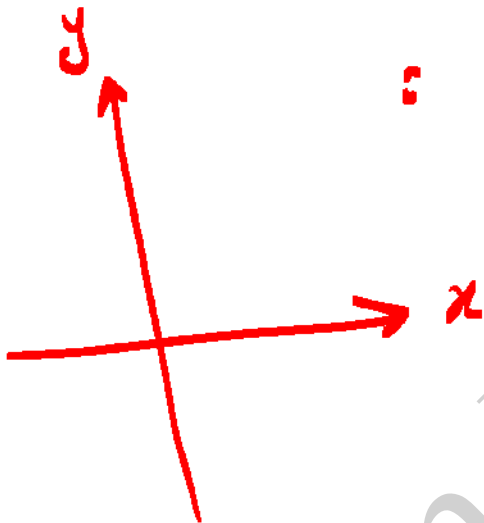
$f = \{(x-y, 5), (3, 4), (5, 2), (2, 4), (2, x+y)\}$

حل $\left\{ \begin{array}{l} x+y=4 \\ x-y=2 \end{array} \right. \Rightarrow 2x=6 \rightarrow \boxed{x=3}$

$x+y=4 \xrightarrow{x=3} 3+y=4$
 $y=1$

* نما یس یک تابع به صورت نمودار مختصات :
قبل از این که این قسمت را توضیح دهیم، ابتدا
مفاهیم را از سال های پیش یادآوری می کنیم.

* محورها و مختصات :



نکته = هر نقطه باشد $A(a, b)$ روی دستگاه
مختصات جایگاه مشخصی دارد

$A(a, b)$

y ها = عمق ها

x ها = طول ها

مثال - هم‌رنگ از نقاط زیر را در صفحه مختصات نمایش دهید.

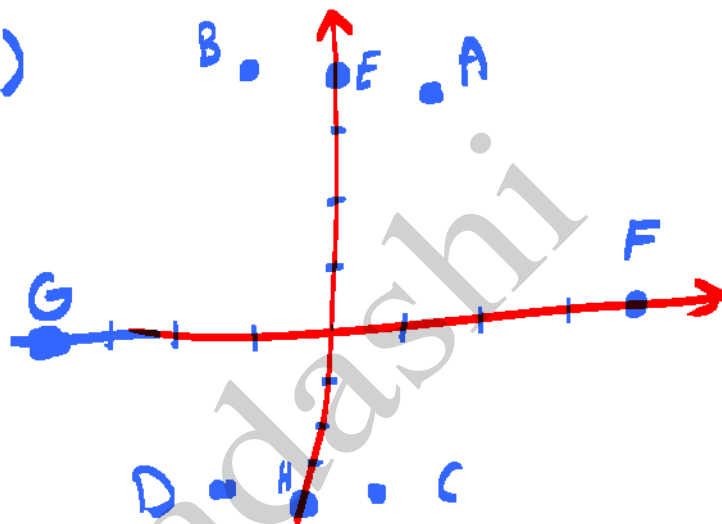
$$A(1, 4) \quad C(1, -4)$$

$$B(-1, 4) \quad D(-1, -4)$$

$$E(0, 4) \quad F(4, 0)$$

$$G(-4, 0)$$

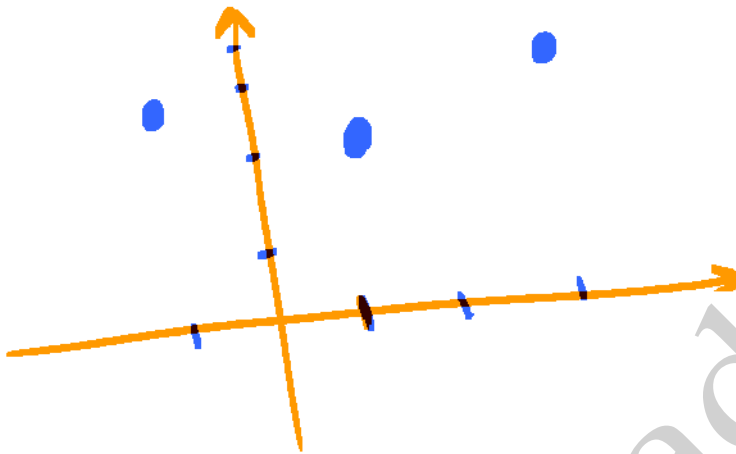
$$H(0, -4)$$



نمایش مختصات یک تابع: فرض کنید یک تابع به صورت
 نمودار و نه یا زوج مرتب داده شده است.
 در این صورت کافی است هم‌رنگ از نقاط آن را
 در صفحه مختصات پیدا کنیم تا نمایش
 مختصات تابع به دست آید.

سؤال - نمایش مختصاتی تابع f را به دست آوریم.

$$f = \{(1, 2), (3, 4), (-1, 3)\}$$

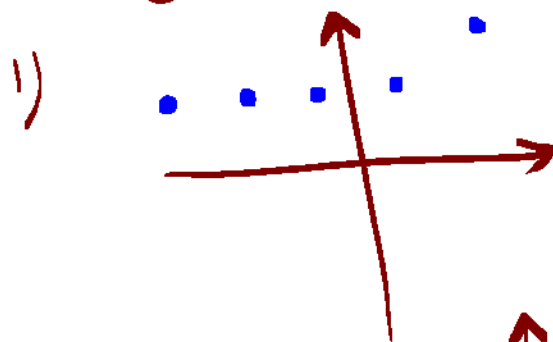


حل :

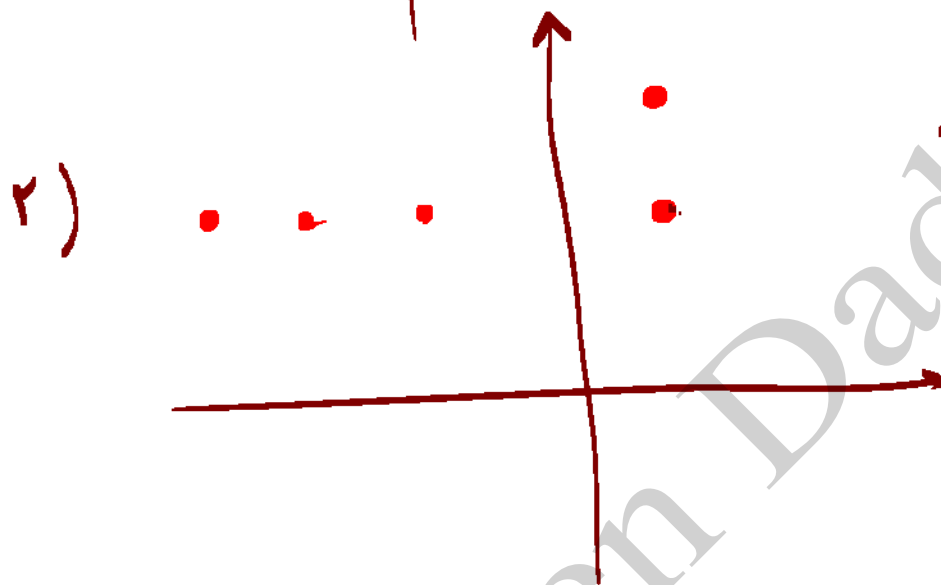
نکته - برای تشخیص تابع بودن از روی نمودار مختصاتی به این صورت عمل می‌کنیم که هرگاه رابطه‌ای از لحاظ نمودار مختصاتی تابع است هرگاه هیچ دو نقطه‌ای از آن در یک راستای عمودی نباشند

بیان دیگر : رابطه‌ای از لحاظ نمودار مختصاتی زمانی تابع است هرگاه هیچ خط عمودی وجود نداشته باشد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کرده باشد.

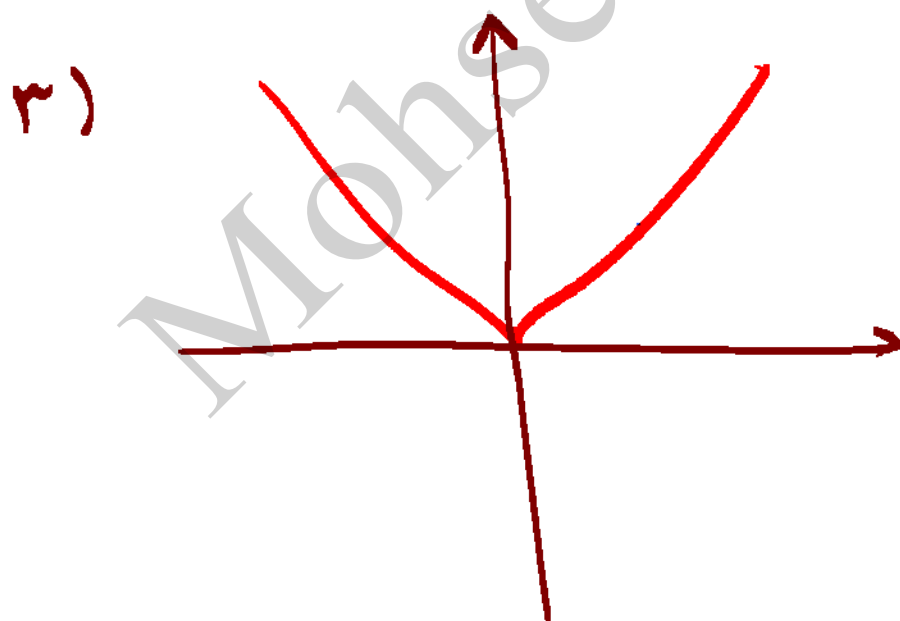
سؤال - یقین کنید کدام یک از روابط زیر یک تابع است؟



تابع هست

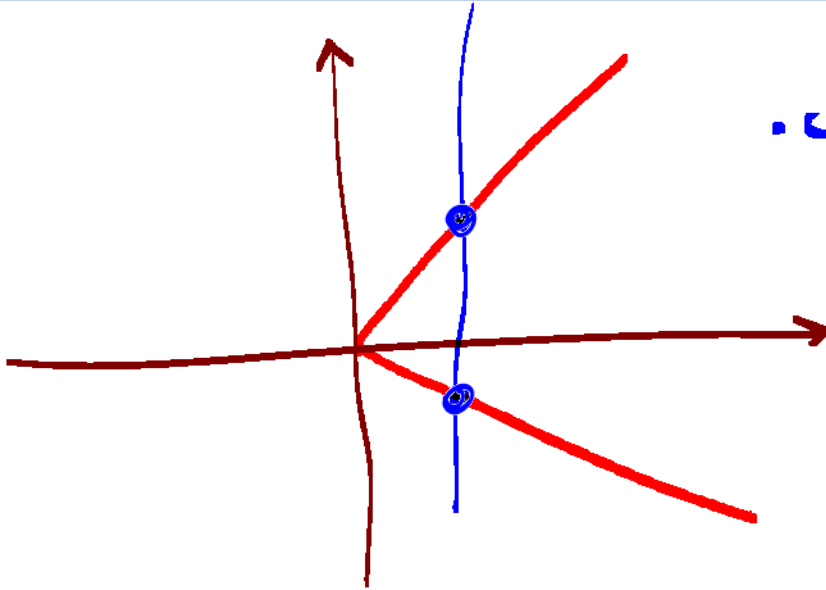


تابع نیست



تابع نیست.

۴)



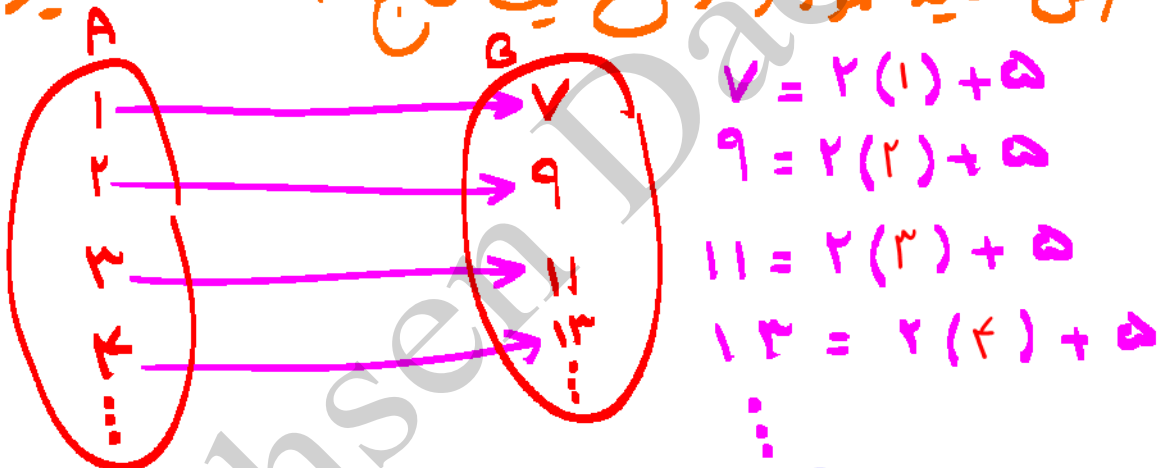
Mohsen Dadashi

«جلسه دوم تابع»

جلسه پیش درباره نمودار ون تابع ، زوج متبوع
نمودار مختصاتی بحث کردیم .

مابطه تابع : این قسمت را با یک مثال شروع می کنیم .
قانون

* فرض کنید نمودار ون یک تابع به صورت زیر داده است .



قانون این : $y = 2x + 5$
نمودار ون

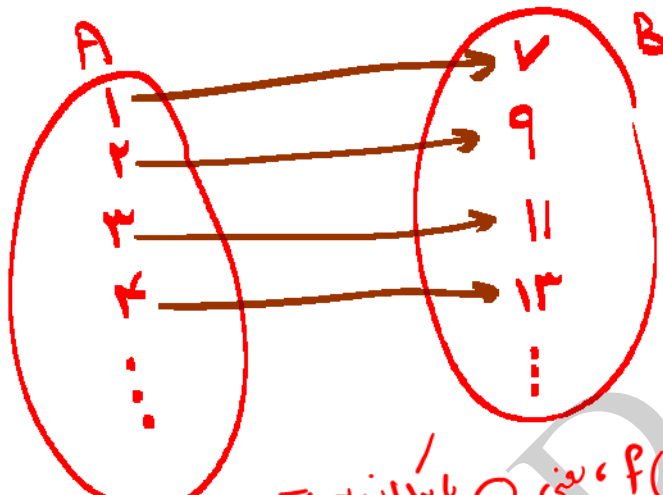
نکته = در نمودار ون مولفه های اول را x در نظر می گیریم
و مولفه های دوم را y در نظر می گیریم .

مثلاً در نمودار ون فوق می نویسیم : $y = 2x + 5$

نکته = اکثر مواقع تابع را با اسم خاصی مانند

f یا g یا ... نمایش می دهند.

نمودار آن زیر را در نظر بگیرید. در این صورت داریم:



$$f(1) = 7$$

$$f(2) = 9$$

$$f(3) = 11$$

$$f(4) = 13$$

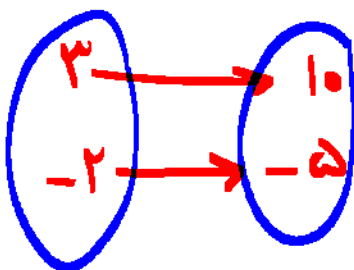
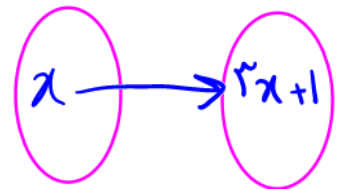
در حالت کلی وقتی می نویسیم $f(0) = \square$ ، یعنی $\square$ با 0 بیگانه است و مثل شواست $\square$ ثبت داده شده است.

سوال - اگر $f(x) = 3x + 1$ یک تابع باشد در این صورت مطلوب است:

الف) $f(3)$ و $f(-2)$ را بیابید.

$$f(3) = 3(3) + 1 = 10$$

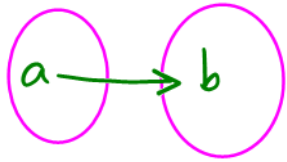
$$f(-2) = 3(-2) + 1 = -5$$



* تشخیص تابع بودن یا نبودن از روی ضابطه تابع:

سوال - کدام یک از روابط زیر نمایشگر یک تابع است؟
 $x^2 + y = 4$ $x^2 + y^2 = 7$

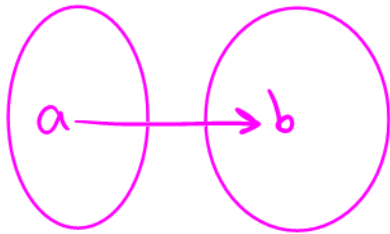
الف) $x^2 + y = 4$



الف) $a^2 + b = 4 \Rightarrow b = 4 - a^2$

پس به ازای هر a فقط یک مقدار b به دست می آید. پس نمایشگر تابع است.

الف)

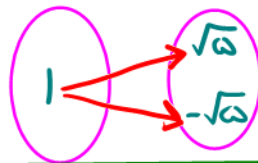


ب) $2a + b^2 = 7 \Rightarrow b^2 = 7 - 2a$

مثلاً برای $a = 1$ دو مقدار b به دست می آید

ب)

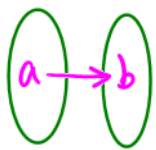
$a = 1 \Rightarrow b^2 = 7 - 2(1) \Rightarrow b^2 = 5 \Rightarrow b = \pm\sqrt{5}$



$x + 2|y| = 10$

سوال - آیا رابطه زیر نمایشگر یک تابع است؟

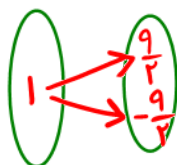
ج) $a + 2|b| = 10$



مثلاً اگر $a = 1$ باشد آن گاه برای b دو مقدار به دست می آید.

$a = 1 \Rightarrow 1 + 2|b| = 10 \Rightarrow |b| = \frac{9}{2}$

$\Rightarrow b = \frac{9}{2} \text{ یا } b = -\frac{9}{2}$



تابع نیست

سوال) آیا رابطه زیر نمایش گریک تابع است؟ $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 0$

نکته: مجموع دو عبارت نامنفی زمانی صفر است که تک تک آن ها صفر باشند.

$$\begin{aligned} (x-3)^2 = 0 &\Rightarrow x=3 \\ (y+7)^2 = 0 &\Rightarrow y=-7 \end{aligned} \Rightarrow \{(3, -7)\}$$

یعنی تنها نقطه ای که در رابطه داده شده صدق می کند، نقطه $(3, -7)$ است که نمایش گریک تابع است.

سوال- آیا رابطه $|x+9| + (y-8)^2 = 0$ نمایش گریک تابع است؟

سوال- آیا رابطه $|x^2-16| + |y^2+2y| = 0$ نمایش گریک تابع است؟

سوال) آیا رابطه زیر نمایش گریک تابع است؟ $x^2 + y^2 + 6x - 2y = -10$ (حل)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10 = 0 &\Rightarrow (x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 0 \\ (x+3)^2 + (y-1)^2 = 0 &\Rightarrow \begin{cases} (x+3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

پس رابطه داده شده به صورت $\{(-3, 1)\}$ است که نمایش گریک تابع است.

دامنه و برد تابع:

* در هر نمودار و ن (نمودار میکانی) داریم:

مجموعه مولفه های اول $D = \text{دامنه}$
 مجموعه مولفه های دوم که به آن عناصر میکانی وارد شده است $R = \text{بردار}$

* در نمایش تابع به صورت زوج مرتب داریم:

مجموعه مولفه های اول $D = \text{دامنه}$
 مجموعه مولفه های دوم $R = \text{بردار}$

* در نمایش تابع به صورت مختصاتی (در دستگاه مختصات) داریم:

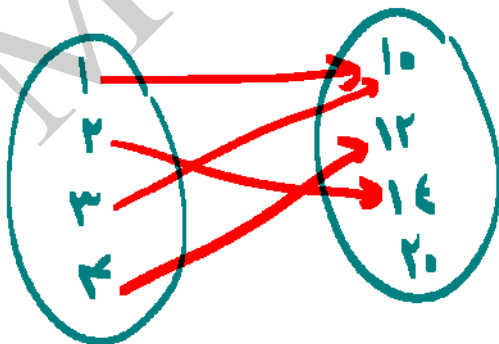
x ها $D = \text{دامنه}$

y ها $R = \text{بردار}$

نکته: در هر تابع، برد آن تابع را «مجموعه مقادیر» آن تابع می نامیم.

مثال - در هر یک از توابع زیر دامنه و برد را تعیین کنید

$D = \{1, 2, 3, 4\}$ دامنه
 $R = \{10, 12, 14\}$ برد

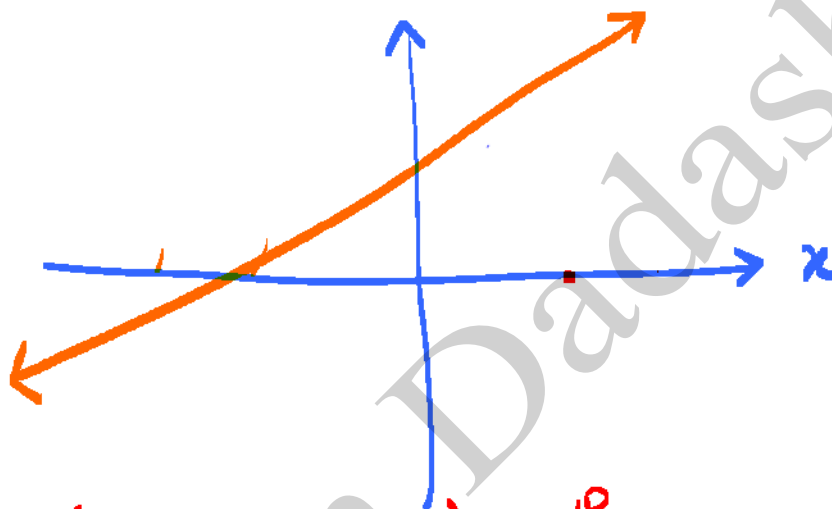


$$۲) f = \{(۲, ۳), (۳, ۸), (۵, ۱۲), (۴, ۸)\}$$

$$\text{دامنه} = D = \{۲, ۳, ۵, ۴\}$$

$$\text{بردار} = R = \{۳, ۸, ۱۲\}$$

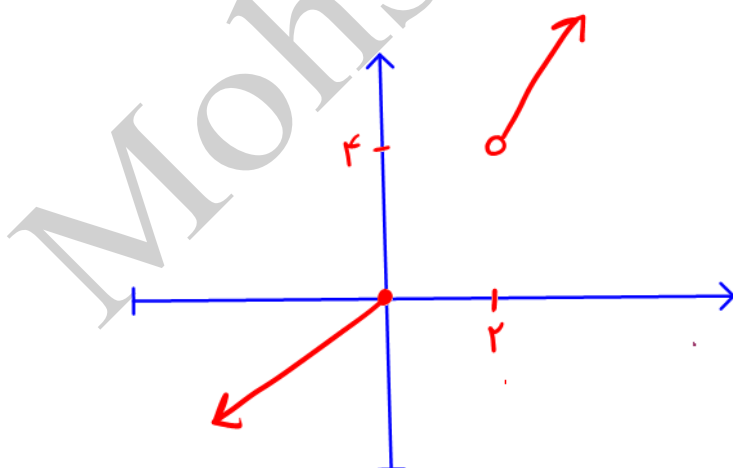
۳)



$$\text{دامنه} = D = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$\text{بردار} = R = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

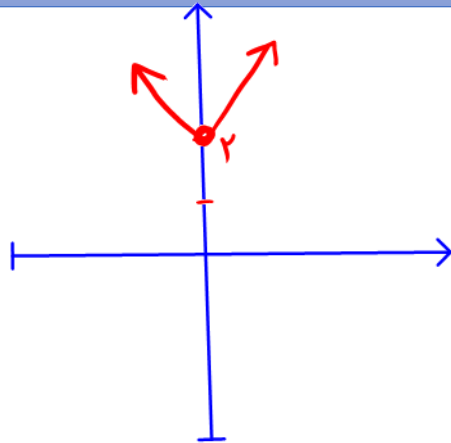
۴)



$$\text{دامنه} = D = (-\infty, ۰] \cup (۲, +\infty)$$

$$\text{بردار} = R = (-\infty, ۰] \cup (۴, +\infty)$$

۵)



$$\text{برد} = R = [2, +\infty)$$

$$\text{دامنه} = D = (-\infty, +\infty)$$

مطر پیدا کردن دامنه و برد از روی نمودار:
دامنه: نقطه ای جزیره دامنه هست که اگر از آن نقطه به محور

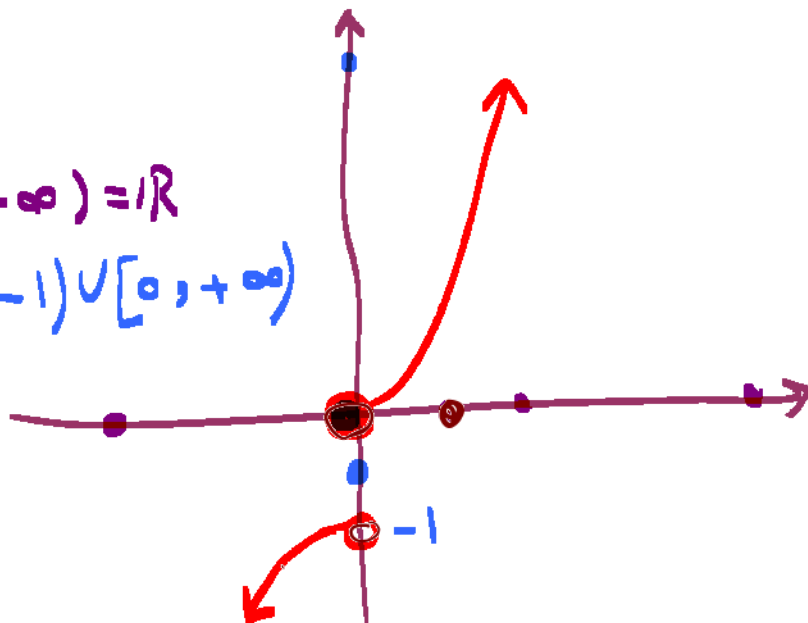
x ها عمود کنیم حتماً نمودار تابع را قطع می کنند.

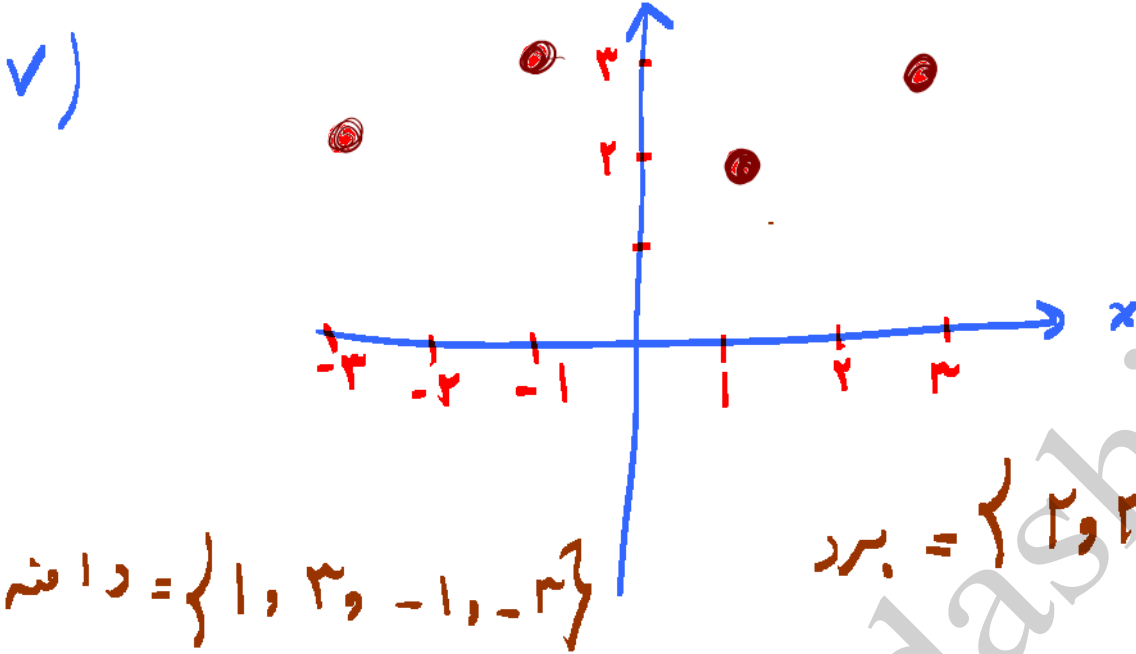
برد: نقطه ای جزیره برد است که اگر از آن نقطه به محور y ها عمود کنیم حتماً نمودار تابع را قطع می کنند.

۶)

$$\text{دامنه} = (-\infty, +\infty) = R$$

$$\text{برد} = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$$





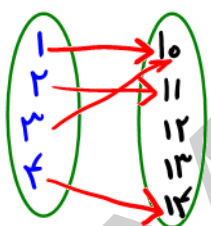
نکته: اگر f تابعی باشد که دامنه آن برابر A باشد، در این آن را به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$f: A \rightarrow B$$

تابع تابع

که در آن B را هر مجموعه ای می توان در نظر گرفت به شرطی که برد تابع f زیر مجموعه آن باشد.

نکته: مجموعه B را «هم دامنه» تابع f می نامیم. به عنوان مثال در تابع زیر داریم:



$$f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{10, 11, 12, 13, 14\}$$

تابع تابع

توجه کنید که به جای مجموعه $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ هر مجموعه دیگری نیز می توان نوشت به این شرط که مجموعه $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ زیر مجموعه آن باشد.

$D_f = \{1, 2, 3, 4\}$ و $R_f = \{10, 11, 12, 13\}$ بردار و هم دامنه $= \{10, 11, 12, 13, 14\}$ یا هر مجموعه ای که مجموعه $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ زیر مجموعه آن باشد.

سوال- در هر یک از قسمت های زیر مجموعه مقادیر آن تابع (بردار) را بنویسید:

الف) $f: A \rightarrow B$ و $A = \left\{ \frac{1}{2}, 0, 1, \sqrt{2}, -1 \right\}$
 $f(x) = 2x^2 + 1$

ب) $f: A \rightarrow B$ و $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$

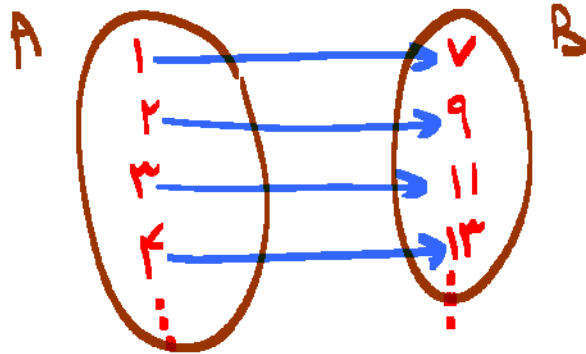
ج) $f: A \rightarrow B$ و $A = \left\{ \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 0, -2 \right\}$
 $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

د) $f: A \rightarrow B$ و $A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$
 $f(x) = x^2 + x + 1$

سوال- دامنه تابع زیر را بنویسید.
 $f: A \rightarrow B$ و $R_f = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
 $f(x) = 2x + 3$

(تابع درجه اول)

۱- تابع خطی: نمودار آن زیر را در نظر بگیرید.



$$f(1) = 7$$

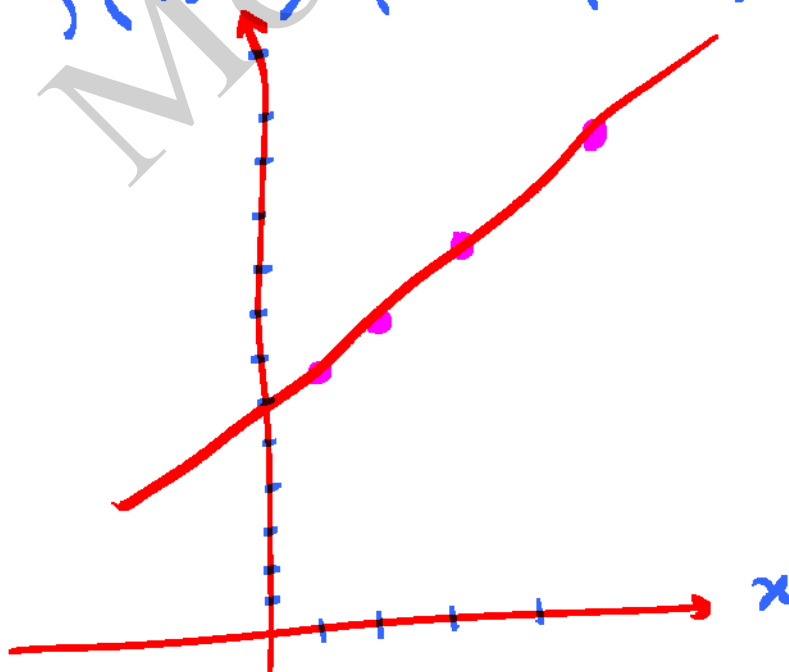
$$f(2) = 9$$

$$f(3) = 11$$

$$f(4) = 13$$

اگر نقاط را به شکل زوج مرتب بنویسیم و روی دستگاه مختصات رسم کنیم به صورت یک خط راست (یعنی همگی روی یک خط راست هستند) خواهند بود

$$f = \{ \dots, (4, 13), (3, 11), (2, 9), (1, 7) \}$$



چون معر نقطه روی یک خط راست هستند.
به همین دلیل به آن یک تابع خطی می‌گوئیم.

نکته: در واقع تابع خطی همان معادله خط است که در سال نهم خوانده‌اید.

* یادآوری معادله خط: معادله استاندارد هر خط
به صورت $y = ax + b$ است که در آن a
را شیب خط (ضریب زاویه) و نیز b را
معرض از مبدأ می‌نامیم.

نوشتن معادله خطی که از دو نقطه مانند
 $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد:

$$a = \text{شیب} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = a(x - x_1) : \text{معادله خط}$$

مثال - معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A(2, 5)$ و $B(3, 10)$ بگذرد.

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 5}{3 - 2} = 5$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = 5(x - 2)$$

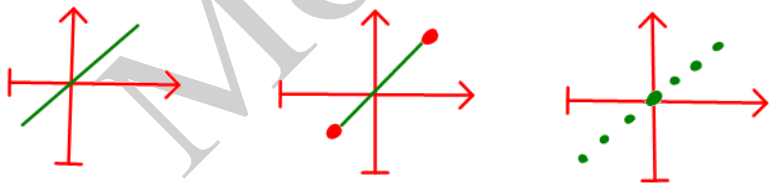
$$y - 5 = 5x - 10$$

$$y = 5x + 5 - 5$$

$$y = 5x$$

نکات تابع درجه اول (تابع خطی):

- ۱- ضابطه آن به صورت $f(x) = ax + b$ است (همان معادله خط $y = ax + b$)
- ۲- نقاط آن روی یک خط راست هستند (لازم نیست کل یک خط باشند، ممکن است بخشی از آن خط باشند)



۳- به ازای هر دو نقطه مانند A و B از هر تابع خطی همواره داریم:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \text{مقدار ثابت}$$

که این مقدار ثابت همان شیب خط است.

سوال - معادله یک تابع خطی را بنویسید که $f(4) = 3$ و $f(0) = 3$ باشد.

حل: $f(4) = 3$ یعنی از نقطه $(4, 3)$ بگذرد.

$f(0) = 3$ یعنی از نقطه $(0, 3)$ بگذرد.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 3}{0 - 4} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = 0(x - 4)$$

$$\boxed{y = 3}$$

۲- تابع درجه دوم ^{سجعی}: در واقع تابع درجه دوم

همان سجعی می باشد که در فصل ۴ ریاضی دهم آن را کامل بررسی کردیم.

یادآوری:

همان طور که می دانیم معادله یک سجعی به صورت

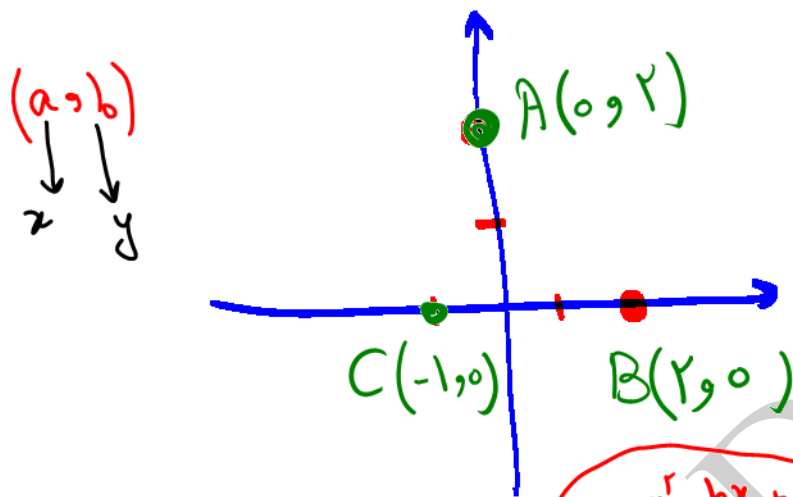
$$y = ax^2 + bx + c \text{ است}$$

پس معادله یک تابع درجه دوم به صورت زیر است:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

* پس هر قانونی در سجعی داریم اینجا هم برقرار است.

سوال - معادله یک سهمی را بنویسید که محورهای آن در نقطه $A(0, 2)$ به عرض ۲ و محور x ها را در نقاطی به طول ۱- و ۲ قطع کرده باشد.



معادله یک سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است.

$$\begin{aligned} A(0, 2) &\Rightarrow 2 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 2 \\ B(2, 0) &\Rightarrow 0 = a(2)^2 + b(2) + c \Rightarrow 4a + 2b = -2 \\ C(-1, 0) &\Rightarrow 0 = a(-1)^2 + b(-1) + c \Rightarrow a - b = -2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ a - b = -2 \end{cases}$$

با حل دستگاه داریم: $a = -1$ و $b = 1$ پس معادله این سهمی به صورت $y = -x^2 + 1x + 2$ است.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ 2a - b = -2 \end{cases} &\Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1 \\ a - b = -2 &\Rightarrow -1 - b = -2 \Rightarrow b = 1 \end{aligned}$$

معادله سهمی: $y = ax^2 + bx + c$
 $y = -x^2 + 1x + 2 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 1x + 2$

نکته: در حالت کلی برای نوشتن یک تابع درجه ۲ که از سه نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ عبور کند می توان از روش فوق استفاده کرد.

سوال- یک تابع سهمی از نقاط $A(1, 4)$ و $B(3, 20)$ و $C(-2, 0)$ می گذرد. معادله آن را بنویسید.

$$y = ax^2 + bx + c$$

Mohsen Dadashi

سوال - نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط
(۱-۲) و (۳-۲) می‌گذرد و نیز محور y را
در نقطه‌ای به $(0, 1)$ قطع می‌کند. معادله جبری
این تابع را بیابید و مقادیر $f(10)$ و $f(-1)$
را حساب کنید.

حل: می‌دانیم معادله یک سهمی (تابع درجه دوم) به
صورت زیر است:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{aligned} (1, -2) &\Rightarrow -2 = a + b + c \\ (3, -2) &\Rightarrow -2 = 9a + 3b + c \\ (0, 1) &\Rightarrow c = 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -3 \\ 9a + 3b = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = 1, b = -4$$

پس معادله سهمی به صورت زیر است

$$y = x^2 - 4x + 1$$

در واقع تابع خواسته شده به صورت زیر است:

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

$$\Rightarrow f(10) = (10)^2 - 4(10) + 1 = 61$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 1 = 6$$

نکته: در حالت کلی هر تابع به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ را یک تابع چندجمله‌ای (تابع درجه n) می‌نامیم. در واقع تابع درجه اول (تابع خطی) $f(x) = ax + b$ یک تابع چندجمله‌ای درجه اول است و نیز تابع درجه دوم (سمعی) $f(x) = ax^2 + bx + c$ یک تابع چندجمله‌ای درجه دوم است و تابع درجه سوم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ یک تابع چندجمله‌ای درجه سوم است و ...

*توجه: با تابع درجه سوم در سال دوازدهم آشنا خواهید شد.

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

۳- تابع چند ضابطه‌ای: تابع چند ضابطه‌ای تابعی

است که بیش از یک ضابطه دارد.

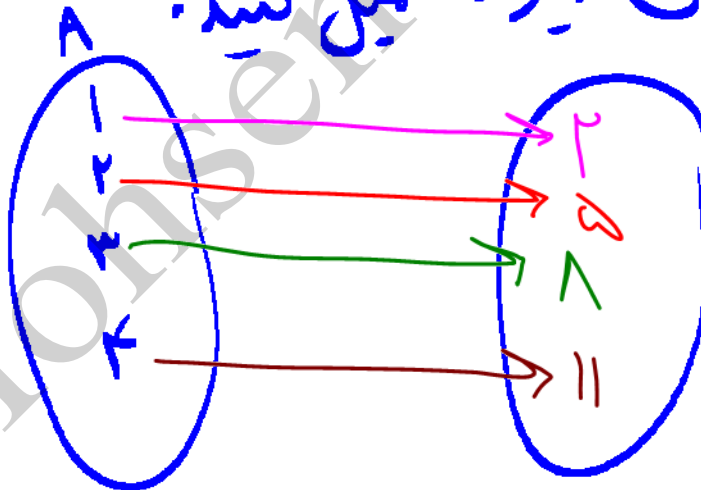
مثلاً: تابع $f(x) = 3x - 2$ یک تابع قطعی تک ضابطه‌ای

است. اما تابع $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$ یک تابع دو ضابطه‌ای است.

سوال- تابع با ضابطه $f(x) = 3x - 1$ را در نظر بگیرید

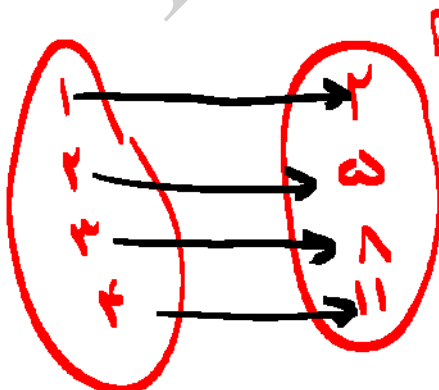
و نمودار آن زیر را تکمیل کنید.

$f(x) = 3x - 1$
تابع تک ضابطه‌ای
(تک ضابطه‌ای)



$$\begin{aligned} B \quad f(1) &= 3(1) - 1 = 2 \\ f(2) &= 3(2) - 1 = 5 \\ f(3) &= 3(3) - 1 = 8 \\ f(4) &= 3(4) - 1 = 11 \end{aligned}$$

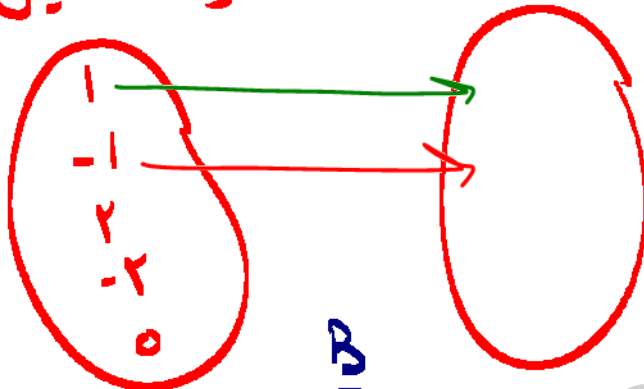
حل:



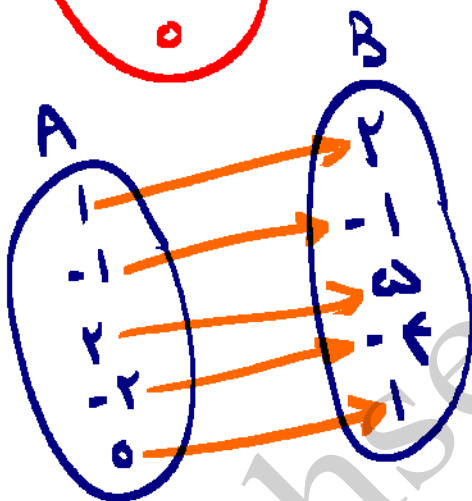
$$\begin{aligned} B \quad f(1) &= 3(1) - 1 = 2 \\ f(2) &= 3(2) - 1 = 5 \\ f(3) &= 3(3) - 1 = 8 \\ f(4) &= 3(4) - 1 = 12 - 1 = 11 \end{aligned}$$

سوال - تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 3x + 2 & x < 0 \end{cases}$ داده

سئو ده است . با توجه به آن نمودار ون زیر را تکمیل کنید -



$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 3x + 2 & x < 0 \end{cases}$$



$$f(1) = (1)^2 + 1 = 2$$

$$f(-1) = 3(-1) + 2 = -1$$

$$f(2) = (2)^2 + 1 = 5$$

$$f(-2) = 3(-2) + 2 = -4$$

$$f(0) = (0)^2 + 1 = 1$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$a \neq 0$$

$$a > 0$$



رسم سهمی :

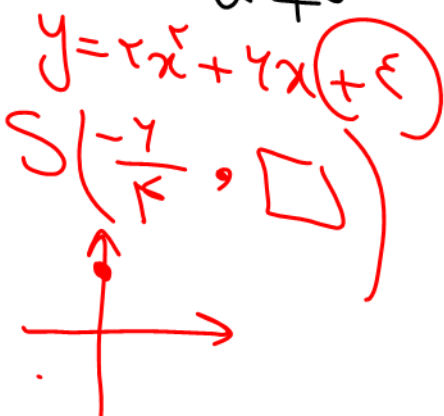
$$a < 0$$



نکته : c یعنی
محل برخورد سهمی
با محور y ها

$$S\left(-\frac{b}{2a}, \square\right)$$

نقطه



رسم توابع چند ضابطه‌ای : با چند مثال توضیح

می‌دهیم .

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

مثال - تابع

را رسم کنید .

حل : ابتدا خط $y = 3x - 1$ را رسم می‌کنیم .

x	0	1
y	-1	2

$$x=0 \Rightarrow y = 3(0) - 1 = -1$$

$$x=1 \Rightarrow y = 3(1) - 1 = 2$$

حال سعی $y = x^2$ را نیز رسم می‌کنیم

$$\text{طول رأس سهمی} = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(1)} = 0$$

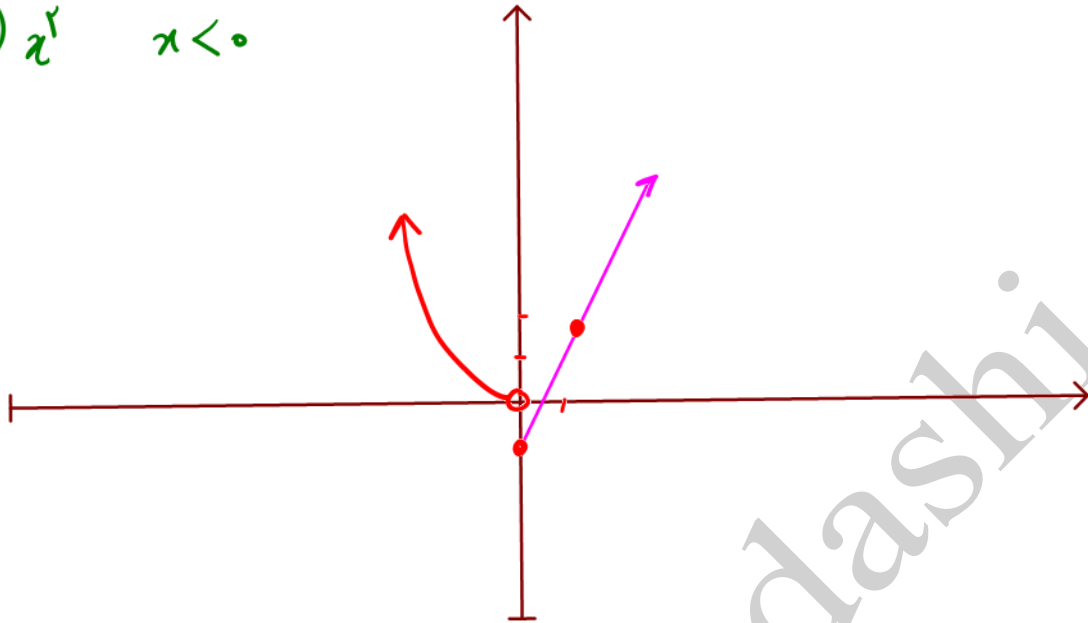
x	-1	0	1
y	1	0	1

$$x = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

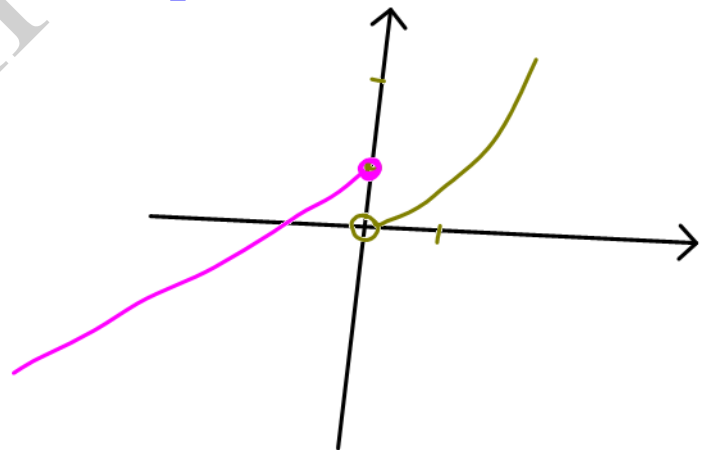
$$x = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$



نکته = نمودار سهمی $f(x) = x^2$ و $f(x) = -x^2$ به صورت زیر

x	0	1
y	1	4



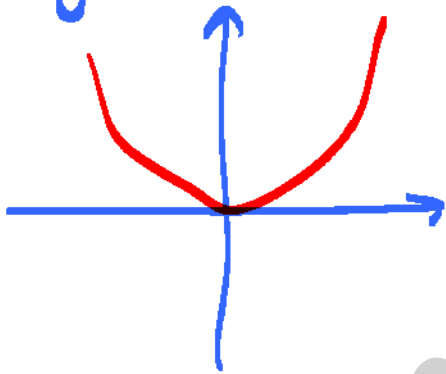
سوال - نمودار تابع
را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x+1 & x \leq 0 \end{cases}$$

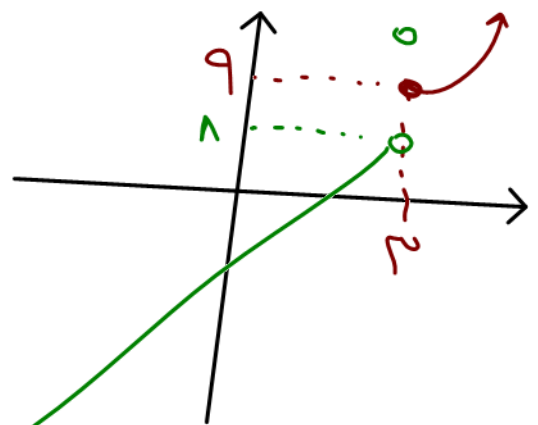
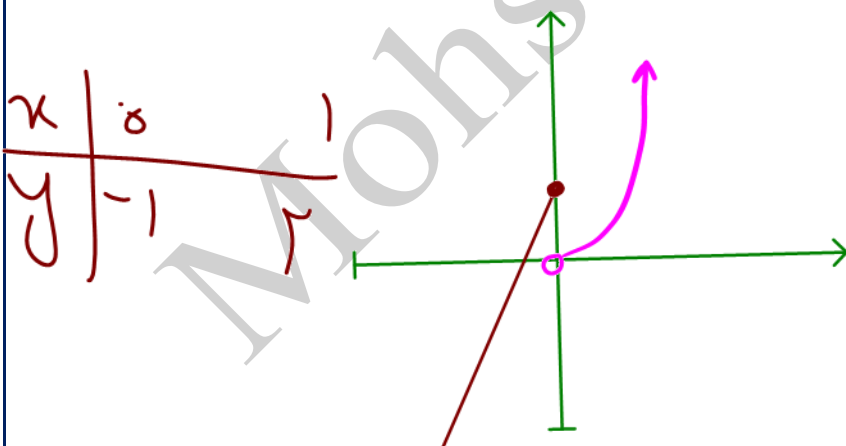
حل: ابتدا خط $y = 3x + 1$ را رسم می‌کنیم.

x	0	1
y	1	4

و نیز می‌دانیم نمودار سهمی $y = x^2$ به صورت زیر است

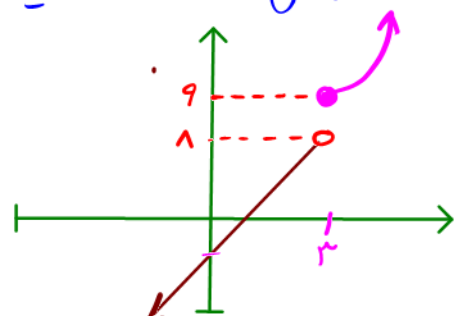


پس نمودار خواسته شده به صورت زیر است:



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 3 \\ 3x-1 & x < 3 \end{cases}$$

سوال - نمودار تابع زیر را رسم کنید.

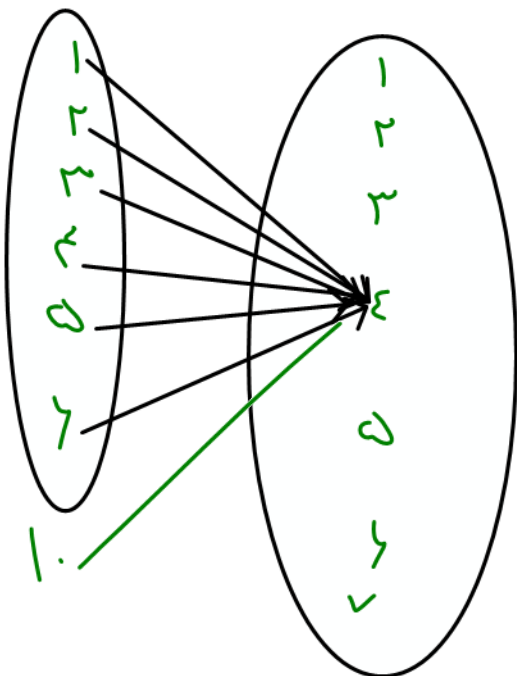


نکته: ضابطه کلی توابع چند ضابطه ای به صورت زیر است.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A_1 \\ f_2(x) & x \in A_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & x \in A_n \end{cases}$$

* اشتراک هر دو تا از مجموعه های A_1 و A_2 و $\dots$ و A_n تهی است.

* دامنه تابع f برابر با $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ است.



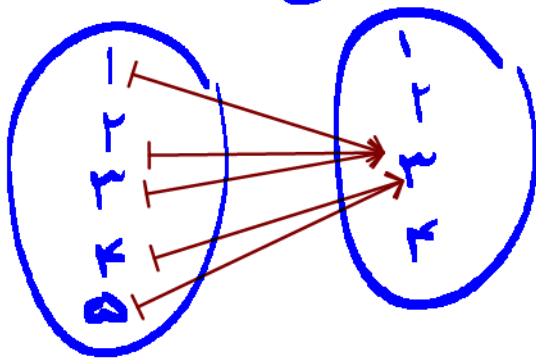
$$f(x) = c$$

۴- تابع ثابت: تابع ثابت تابعی است که همه

اعضای مجموعه های اول فقط به یک عضو از

مجموعه دوم نظیر می شوند.

به عنوان مثال تابع زیر یک تابع ثابت است:



$$f(1) = 3$$

$$f(2) = 3$$

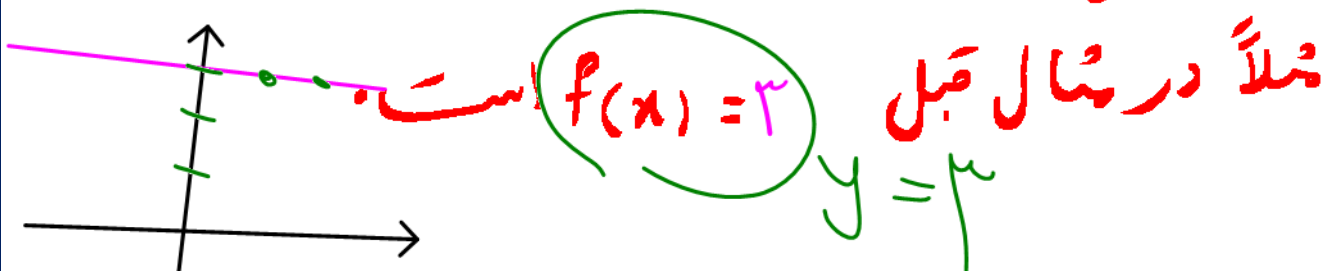
$$f(3) = 3$$

$$f(4) = 3$$

$$f(5) = 3$$

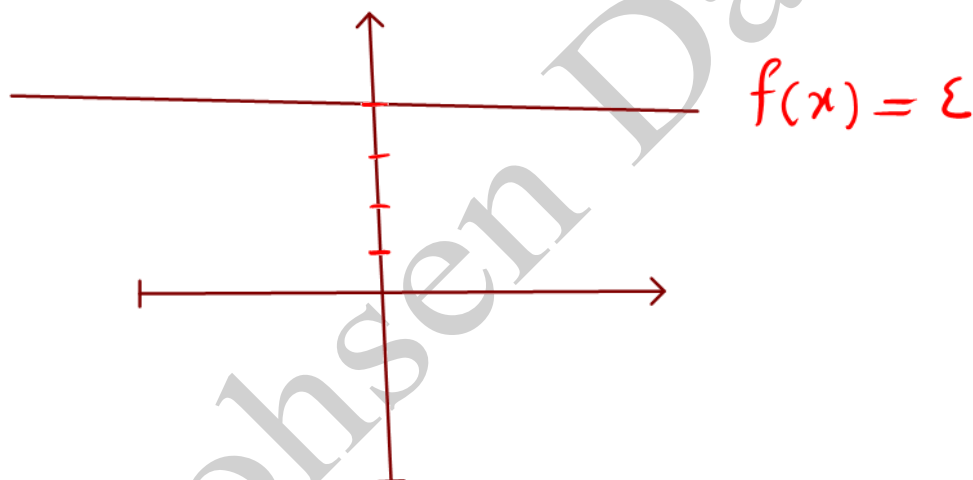
$$c \in \mathbb{R}$$

نکته = تابع ثابت را به صورت $f(x) = c$ یا $y = c$ نمایش می دهیم که در آن c یک عدد حقیقی است.

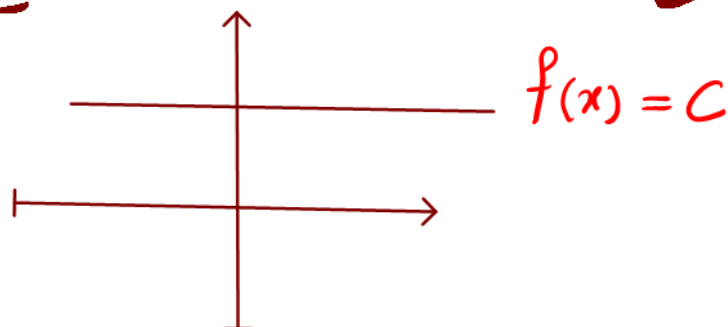


رسم تابع ثابت : به عنوان مثال
تابع ثابت $f(x) = 4$ را در نظر بگیرید.
برای رسم آن به صورت زیر عمل می‌کنیم.

x	0	1	2	2,5	2,8
y	4	4	4	4	4



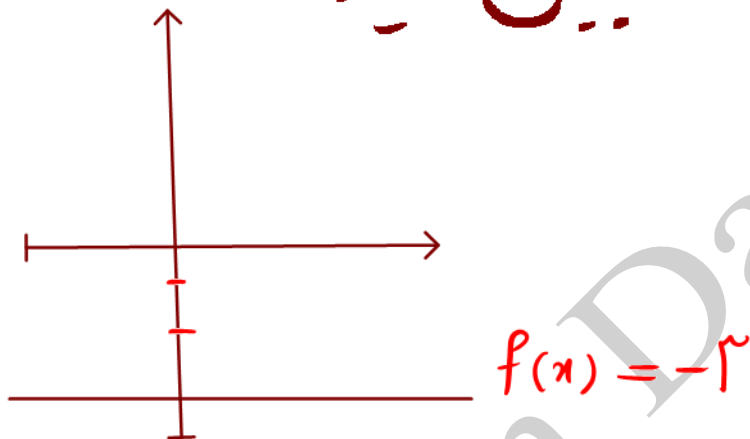
نکته = نمودار تابع ثابت $f(x) = c$ به صورت زیر است :



نکته: در تابع ثابت $f(x) = c$ همواره برد تابع برابر $R = \{c\}$ است.

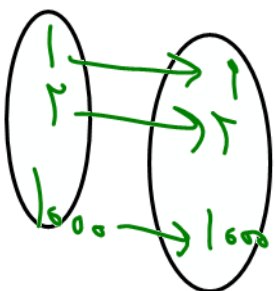
مثال: تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

حل:



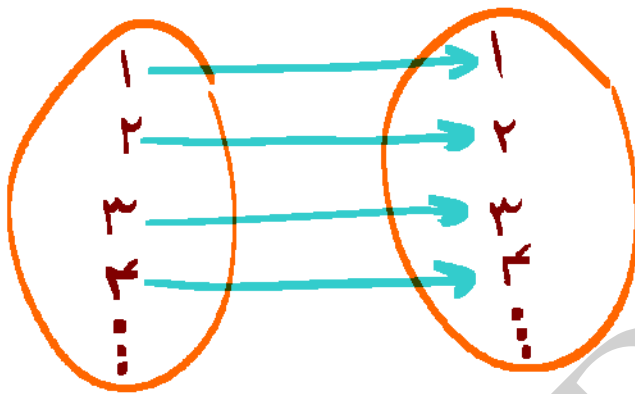
$D = (-\infty, +\infty)$ دامنه
 $R = \{-3\}$ برد

نکته: در واقع تابع ثابت یک تابع چند جمله ای درجه صفر است.
 (یک تابع خطی است که شیب آن صفر است)



$f(0) = 0$ $f(x) = x$

۵- تابع همانی: تابع همانی تابعی است که به هر مقداری بدیم x نیز همان خواهد شد به عنوان مثال تابع زیر یک تابع همانی است



$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(2) &= 2 \\ f(3) &= 3 \\ f(4) &= 4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

اگر آن را به صورت زوج مرتبی بنویسیم به صورت زیر خواهد بود

$$f = \{ \dots, (4, 4), (3, 3), (2, 2), (1, 1) \}$$

نکته: ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ یا همان $y = x$ است و نیز نمودار آن به صورت زیر است. (نیمساز نامیه اول و سوم)



نکته: در واقع تابع همانی یک تابع خطی است که سبب آن او هم از مبدأ آن صفر است. (یک تابع چند جمله جده ای درجه اول)

نکته: خط $y=x$ را که نیمساز ناحیه اول و سوم است در واقع همان تابع همبانی می باشد.

۴- تابع قدر مطلق: با قدر مطلق در سال نهم آشناسید.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال $|10| = 10$

$| -13 | = -(-13) = 13$

مثال - حاصل هر یک از عبارات زیر را حساب کنید.

الف $|3,4| = 3,4$ ب $| -7,5 | = -(-7,5) = 7,5$

د ب $| \pi - \sqrt{2} | = \pi - \sqrt{2}$

ت $| 7 - \sqrt{3} | = 7 - \sqrt{3}$

ث $| 3 - \sqrt{17} | = - (3 - \sqrt{17}) = \sqrt{17} - 3$

* تابع قدر مطلق تابعی است که متغیر داخل قدر مطلق

$f(x) = |x|$

یا $f(x) = |x+1|$

مطلق باشد. مانند
یا $f(x) = |x|-1$

رسم نمودار تابع قدر مطلق: ابتدا عبارت داخل هر قدر مطلق را مساوی

صفر قرار می دهیم و ریشه ها را به دست می آوریم و با توجه به ریشه ها عبارت های داخل قدر مطلق ها را تعیین علامت می کنیم و از شرط قدر مطلق ها خلاص می شویم. تابع داده شده به یک تابع چندضابطه ای تبدیل می شود. کافی است این تابع چندضابطه ای را رسم می کنیم تا نمودار خواسته شده رسم شود.

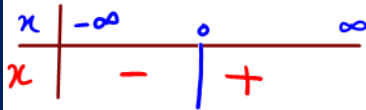
سوال- نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$x=0$$

$$f(x)=|x|$$

حل: ابتدا داخل قدر مطلق را مساوی صفر قرار

می دهیم و x را پیدا می کنیم.

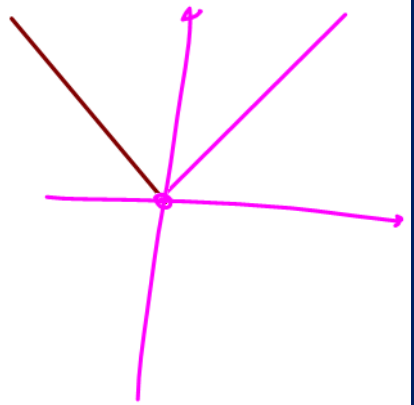


$$y=x$$

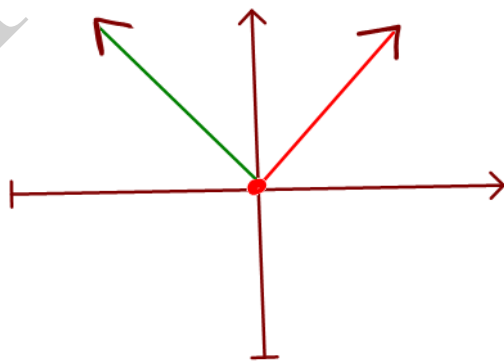
$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0$$

$$x < 0$$



حال تابع دوضابطه ای فوق را رسم می کنیم.



مثال - نمودار $y = -|x|$ را رسم کنید.

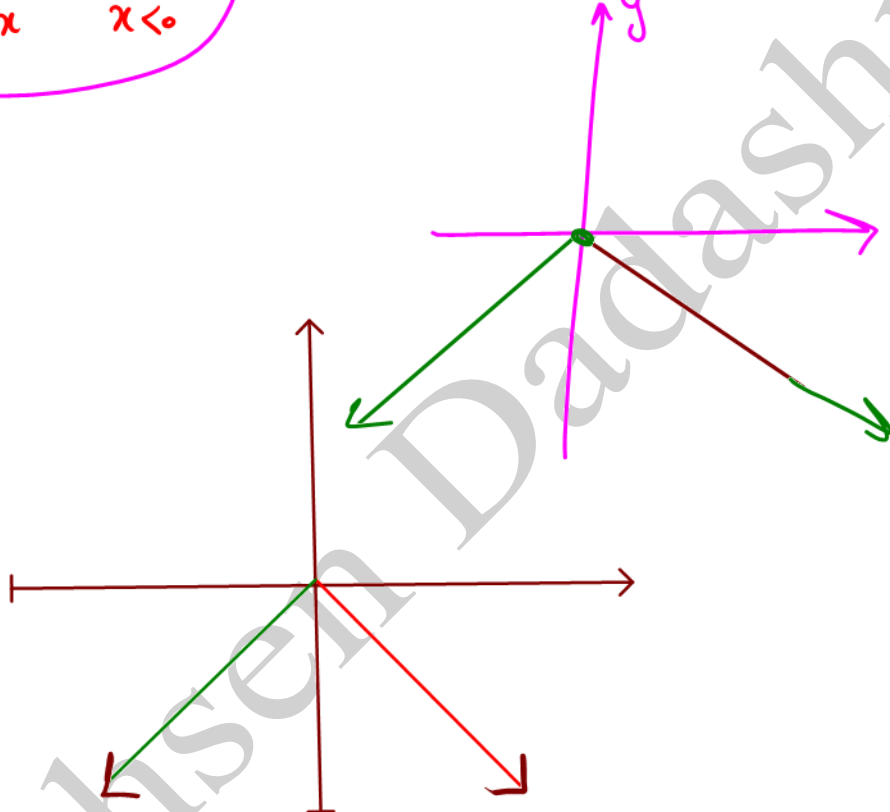
مثال - نمودار

$x = 0$

x	$-\infty$	0	∞
x	-	0	+

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ -(-x) = x & x < 0 \end{cases}$$

عبارت داخل قدر مطلق را
مساوی صفر قرار می دهیم و با حل
معادله x ها را پیدا می کنیم



مثال - نمودار $f(x) = |x - 2|$ را رسم کنید.

مثال - نمودار

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

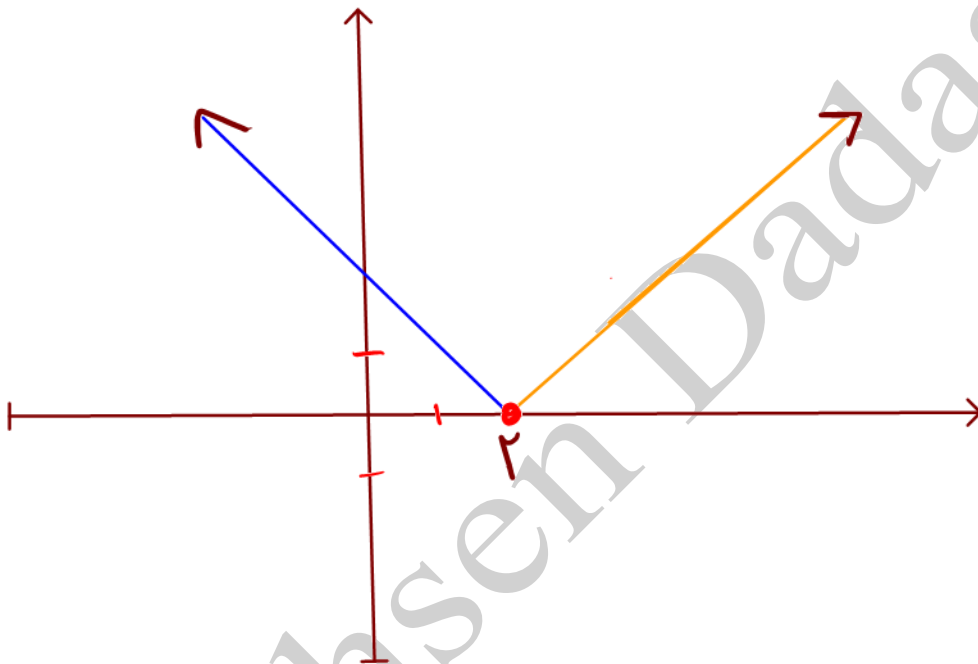
x	$-\infty$	2	∞
$x - 2$	-	0	+

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & x \geq 2 \\ -x + 2 & x < 2 \end{cases}$$

حال کافی است دو خط $y = x - 2$ و $y = -x + 2$ را در بازه ها تعیین شده رسم کنیم.

$$y = x - 2: \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & -2 & -1 \end{array}$$

$$y = -x + 2: \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 2 & 1 \end{array}$$



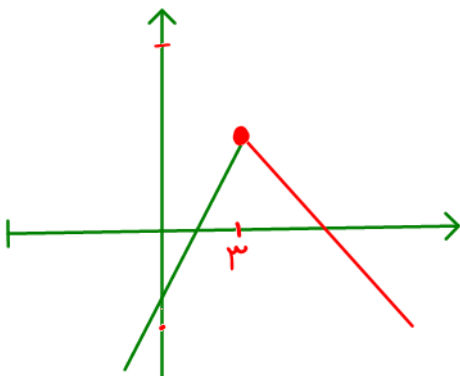
سوال - نمودار تابع زیر را رسم کنید

$$f(x) = -|2x - 6| + 3$$

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 3 & \infty \\ \hline 2x-6 & - & 0 & + \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 9 & x \geq 3 \\ 2x - 3 & x < 3 \end{cases}$$



۷- تابع رادیکالی: تابعی که متغیر آن شامل رادیکال باشند مثلاً توابع زیر هر کدام یک

تابع رادیکالی است. ... و

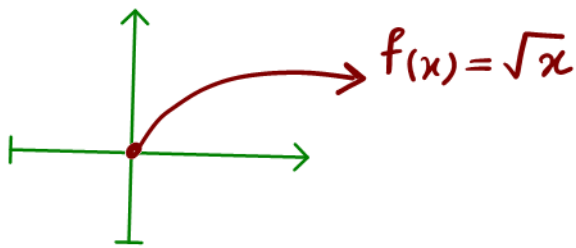
$$۱) f(x) = \sqrt{x}$$

$$۲) f(x) = -\sqrt{x}$$

$$۳) f(x) = \sqrt{x-1}$$

$$۴) f(x) = \sqrt{2x+3} \quad \text{و} \quad \dots$$

نکته: ساده‌ترین تابع رادیکالی به صورت $f(x) = \sqrt{x}$ است و نمودار آن به صورت زیر می‌باشد.



* رسم توابع به کمک انتقال :

رسم توابع به کمک انتقال :

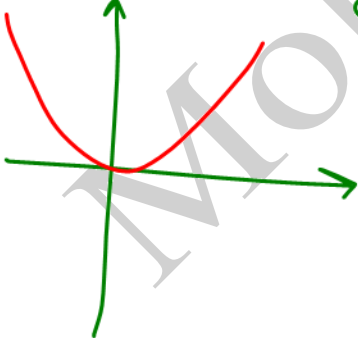
رسم سهمی ها و قدر مطلق ها :

* اگر داخل بود در جهت محور x ها و مخالف علامت حرکت می کنیم

* اگر بیرون بود در جهت محور y ها و موافق حرکت می کنیم.

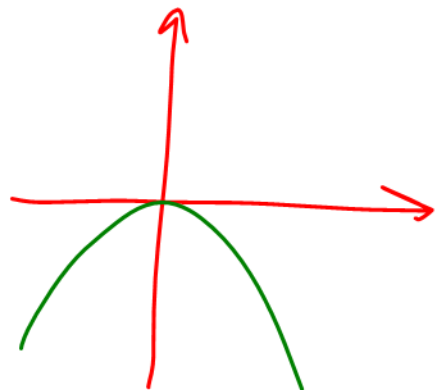
نمودارهای پایه به شکل زیر هستند.

۱) $y = x^2$

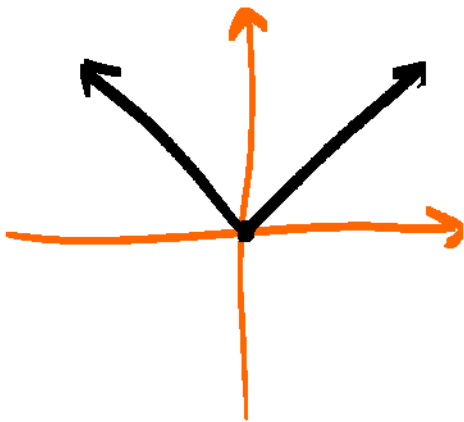


$y = (x - 2)^2 + 2$

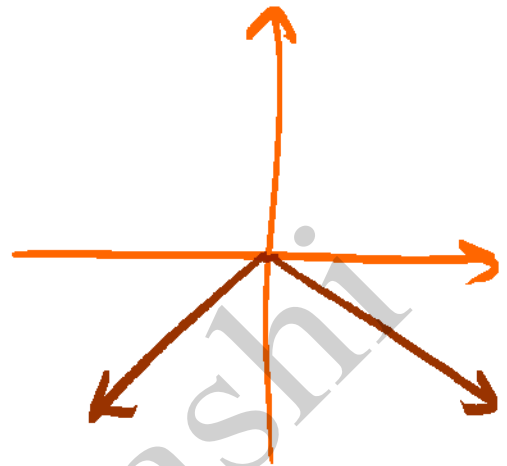
۲) $y = -x^2$



۳) $y = +|x|$



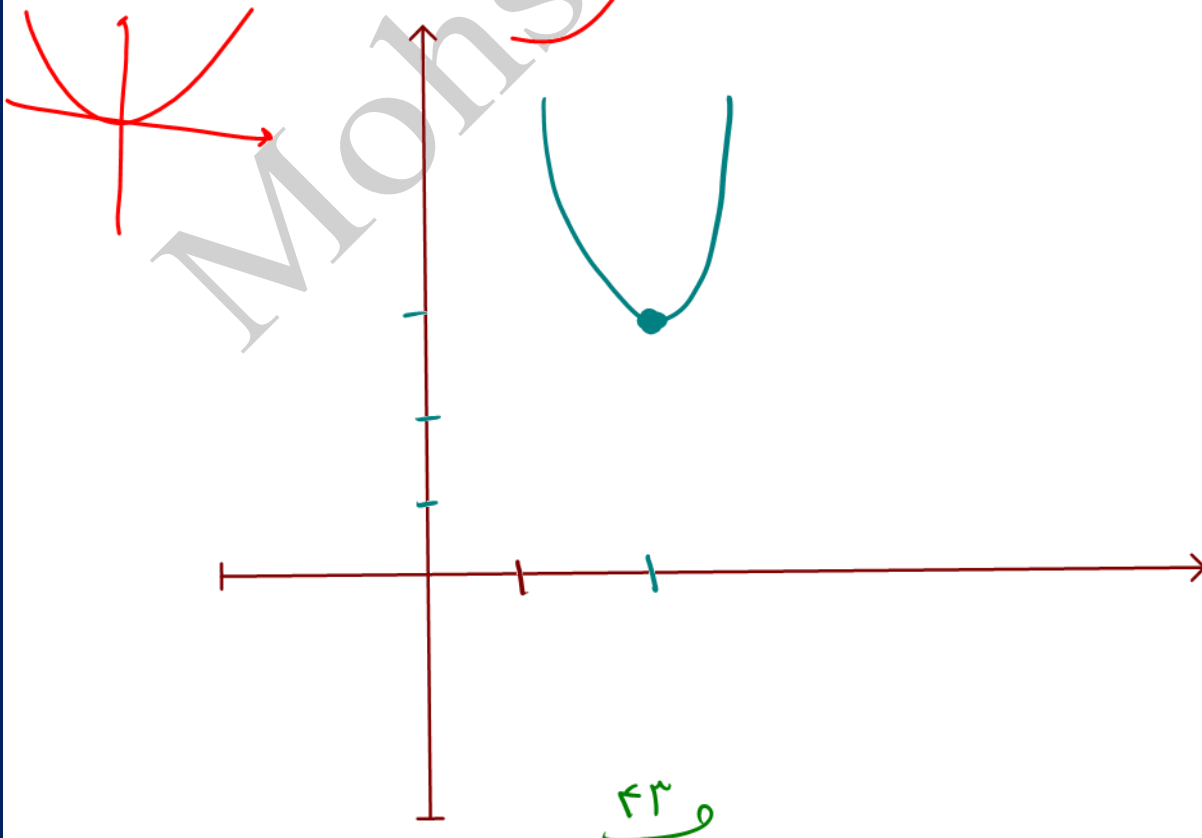
۴) $y = -|x|$



سوال - نمودار تابع $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ را رسم کنید.

حل: نمودار پایه آن

$y = x^2$ است.



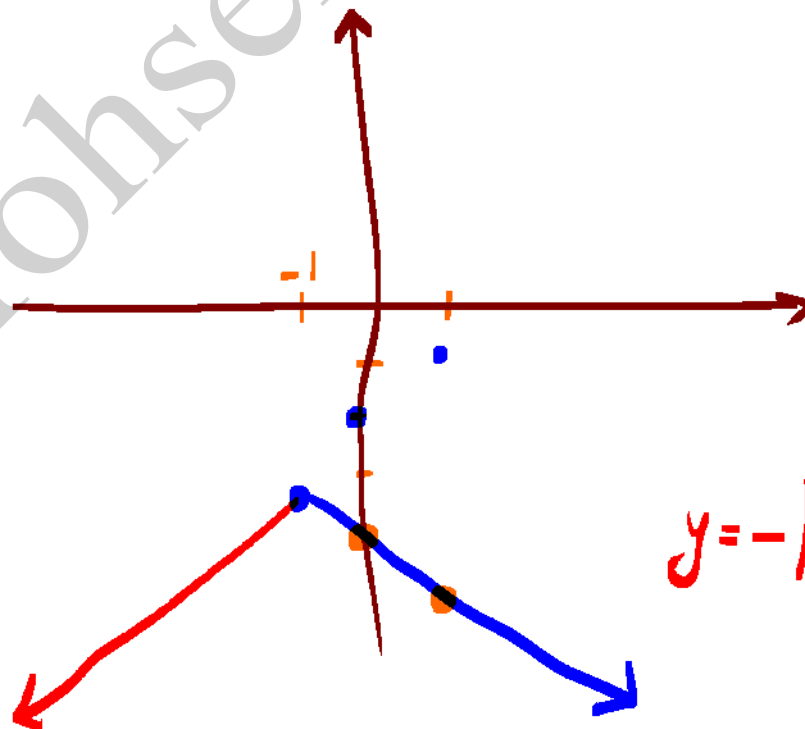
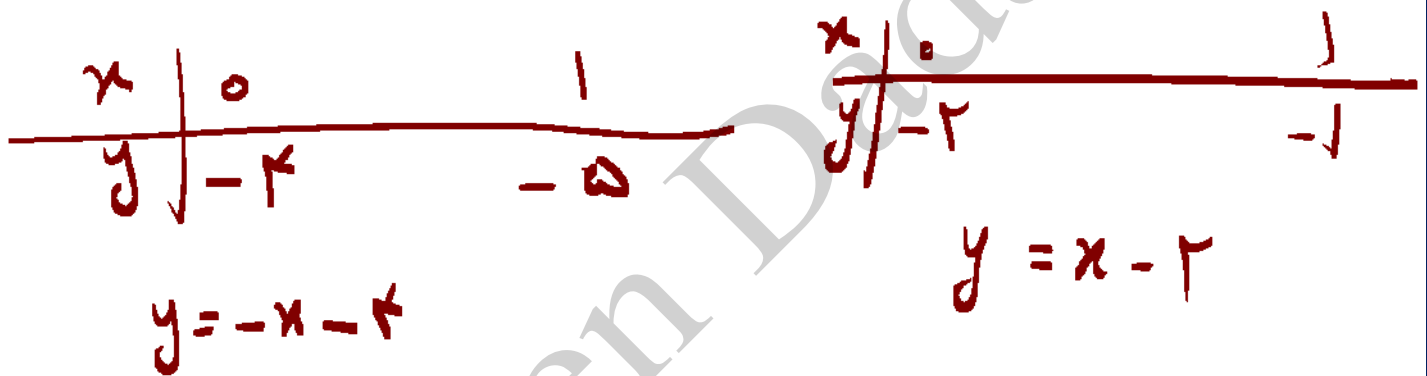
مثال - نمودار $y = -|x+1| - 3$ را رسم کنید

روش اول:

$$x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

$$x > -1$$

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1) - 3 = -x - 4 & x > -1 \\ -(- (x+1)) - 3 = x - 2 & x < -1 \end{cases}$$

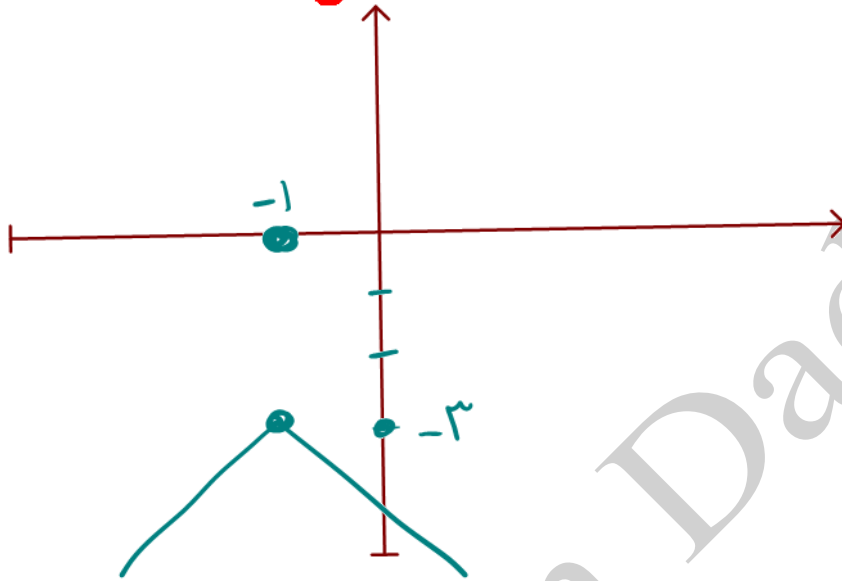


$$y = -|x+1| - 3$$

روش دوم به کمک انتقال:

$$f(x) = -|x+1| - 3$$

حل: نمودار پایه آن $y = -|x|$ است.

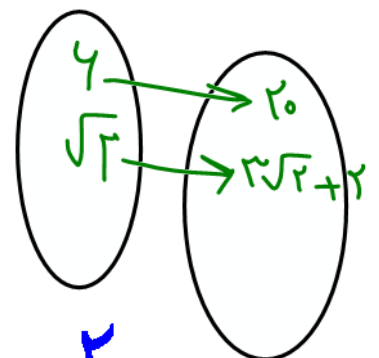


مقدار تابع در یک نقطه : فرض کنید تابع $f(x)$ داده شده است و می خواهیم مقدار تابع را در نقطه ای مانند $x=a$ پیدا کنیم (یعنی می خواهیم مقدار $f(a)$ را پیدا کنیم) در این صورت کافی است به جای x مقدار a را قرار دهیم.

مثال - اگر $f(x) = 3x + 2$ **در این صورت**
مطلوب است

الف $f(4)$

$$f(4) = 3(4) + 2 = 12 + 2 = 14$$



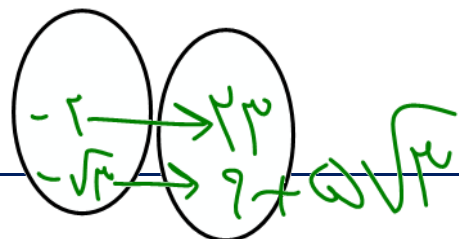
ب $f(\sqrt{2})$

$$f(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2}) + 2 = 3\sqrt{2} + 2$$

سوال - اگر $f(x) = 4x^2 - 5x - 3$ **در این صورت**
مطلوب است :

الف $f(-2)$

۴۶



$$\begin{aligned} \text{حل} \quad f(-2) &= 4(-2)^2 - 5(-2) - 3 \\ &= 4(4) + 10 - 3 = 16 + 10 - 3 = 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{پ} \quad f(-\sqrt{3}) & \quad f(x) = 4x^2 - 5x - 3 \\ \text{حل} \quad f(-\sqrt{3}) &= 4(-\sqrt{3})^2 - 5(-\sqrt{3}) - 3 \\ &= 4(3) + 5\sqrt{3} - 3 = 9 + 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

سوال - اگر $f(x) = 4x^2 - 5x - 3$ و $g(x) = x^2 - 4$ ،
در این صورت مطلوب است :

$$\text{الف} \quad f(8)$$

$$\text{حل} \quad f(8) = 5$$

$$\text{پ} \quad f(-20)$$

$$\text{حل} \quad f(-20) = 5$$

$$\text{ب} \quad g(-3)$$

$$\text{حل} \quad g(-3) = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$

$$\text{ت} \quad g(0)$$

$$\text{حل} \quad g(0) = (0)^2 - 4 = 0 - 4 = -4$$

سوال - اگر $f(x) = 4x - 1$ و $g(x) = 2x + 1$

در این صورت حاصل
را پیدا کنید.

$$f(3) = 4(3) - 1 = 11$$

$$\Rightarrow g(f(3)) = g(11) = 2(11) + 1 = 23$$

سوال - اگر $f(x) = 5x - 1$ و $g(x) = 4$
در این صورت مطلوب است:

$$f(g(-1)) = f(4) = 5(4) - 1 = 19$$

$$g(f(3))$$

$$f(3) = 5(3) - 1 = 14$$

$$g(f(3)) = g(14) = 4$$

سوال - اگر

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$$

در این صورت حاصل ترکیب از عبارات زیر را حساب کنید.

الف) $f(5)$

حل $f(5) = (5)^2 = 25$

ب) $f(-4) = 2(-4) - 1 = -9$

پ) $g(f(-2))$

سوال - اگر

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x+1 & x \leq 0 \end{cases}$$

بیشتر از صفر $x > 0$
کمتر مساوی صفر $x \leq 0$

$$g(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$$

در این صورت مطلوب است :

الف) $f(0)$

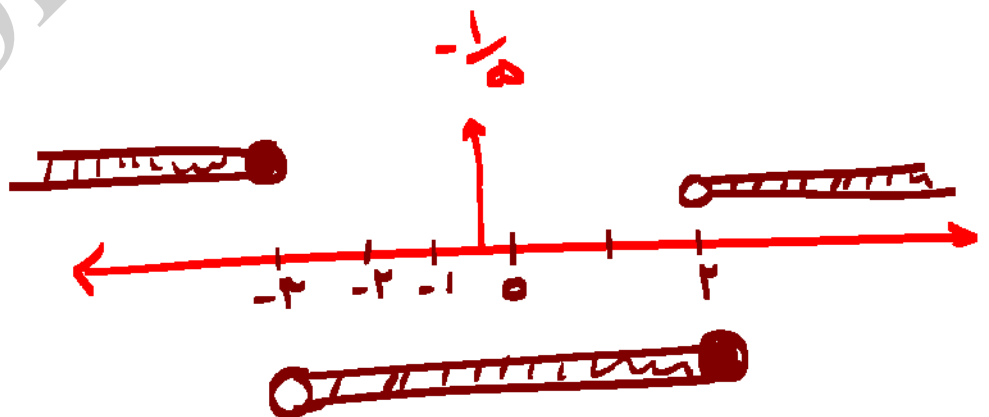
حل $f(0) = 3(0) + 1 = 1$

ب) $g(0)$

حل $g(0) = 1$

ج) $g(-\frac{1}{2})$

حل $g(-\frac{1}{2}) = 1$



نکته: همان طور که در مثال های قبل دیدیم اگر ضابطه یک تابع، یعنی $f(x)$ داده شود و مقدار تابع در هر نقطه ای مانند $x=a$ را بخواهید حساب کنید، در این صورت کافی است به جای x کافی است قرار دهیم a

به عنوان مثال اگر $f(x) = x^2 + 2x - 3$ در این صورت $f(1)$ برابر است با:

$$f(1) = (1)^2 + 2(1) - 3 = 0$$

اما اگر نمایی تابع به صورت غیر استاندارد داده شده باشد، دیگر نمی توان از روش فوق استفاده کرد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال- اگر $f(2x-5) = x^2 + 2x - 3$ در این صورت حاصل $f(1)$ را بیابید.

(حل) در این گونه سوالات باید از روش تغییر متغیر استفاده کرد.

$$2x - 5 = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow f(2(3) - 5) = (3)^2 + 2(3) - 3 \Rightarrow f(1) = 9 + 6 - 3 = 12$$

سوال- اگر $f(2x) = 3x^2 - x + 1$ باشد در این صورت مطلوب است:

الف) ضابطه تابع را بیابید. ب) مقدار $f(-1)$ چند است؟

$$\text{الف) } 2x = t \Rightarrow x = \frac{t}{2}$$

$$f(2x) = 3x^2 - x + 1 \Rightarrow f(t) = 3\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \left(\frac{t}{2}\right) + 1$$

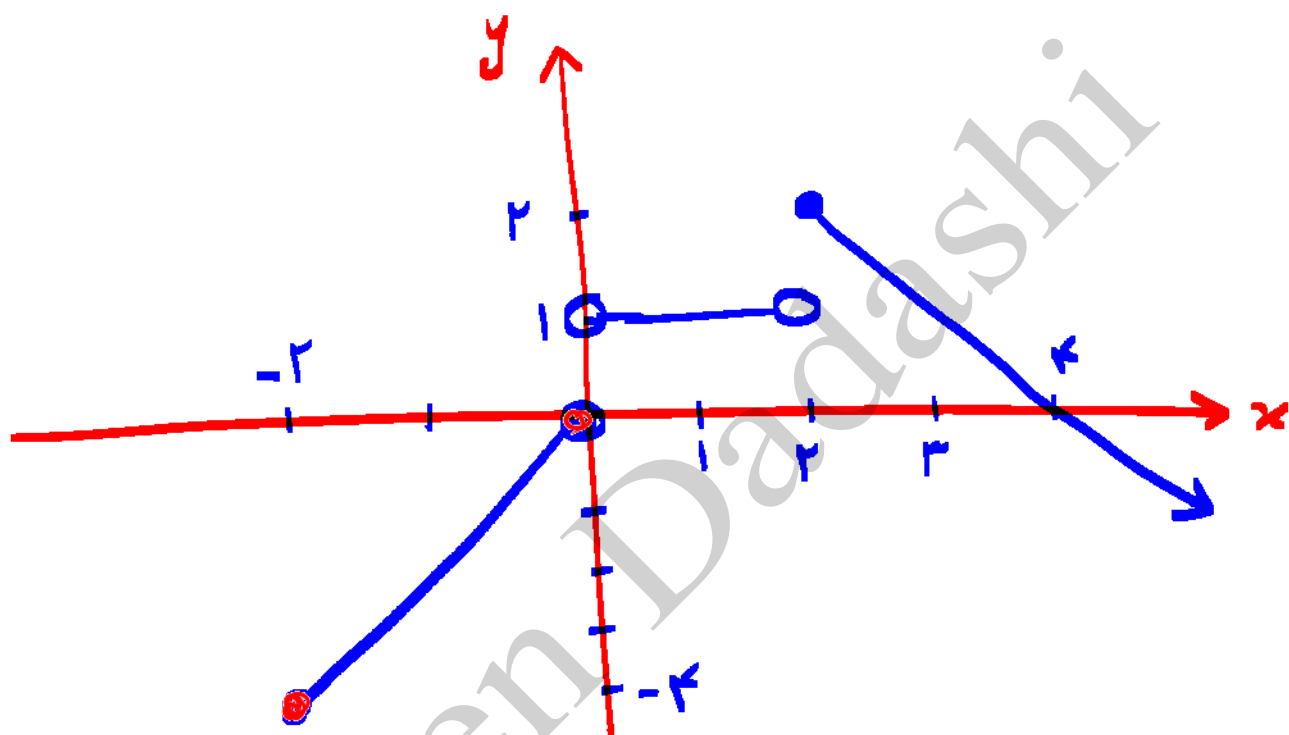
$$f(t) = \frac{3}{4}t^2 - \frac{t}{2} + 1 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{x}{2} + 1$$

ب) کافی است در ضابطه تابع به جای x قرار دهیم -1 تا $f(-1)$ به دست آید.

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{x}{2} + 1$$

$$f(-1) = \frac{3}{4}(-1)^2 - \frac{(-1)}{2} + 1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{4}$$

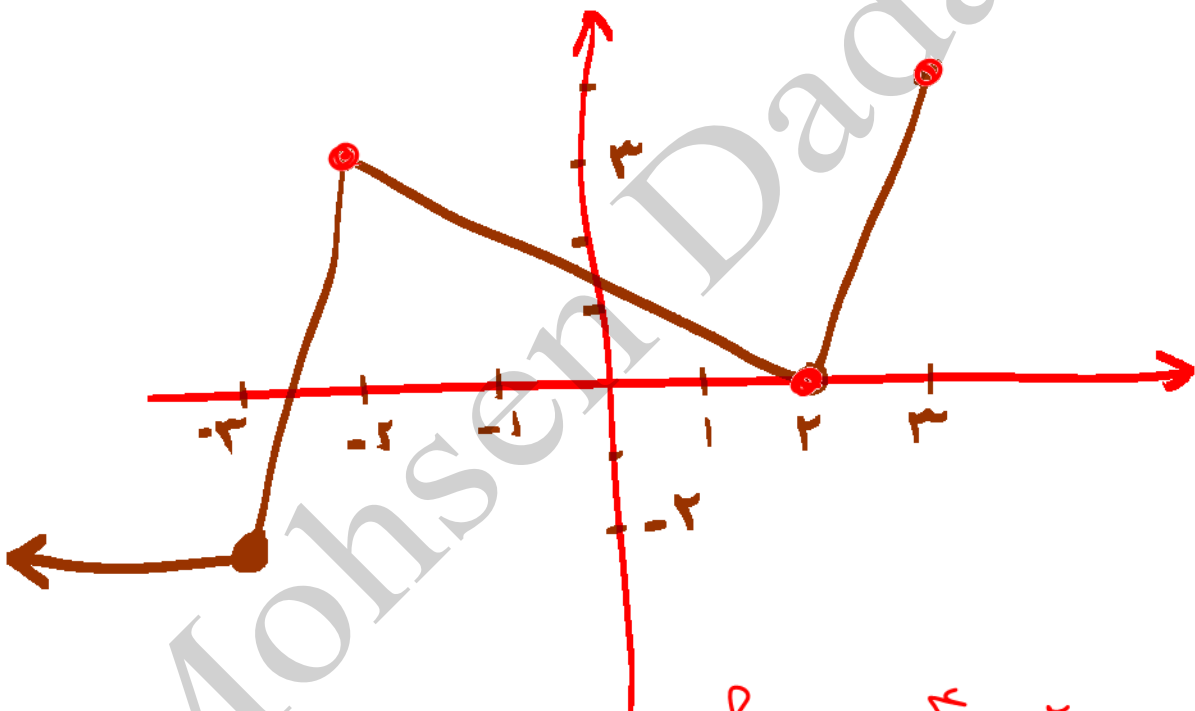
سوال - نمودار زیر یک تابع چندضابطه‌ای است.
ضابطه این تابع را به دست آورید.



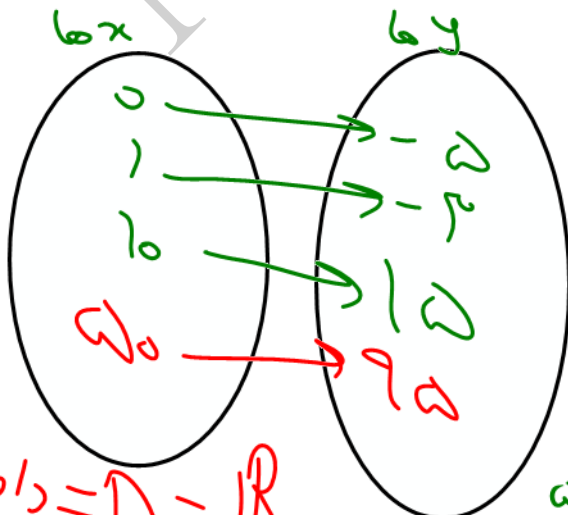
ج : :

سوال - نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است.
 فاصله تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را
 حساب کنید.

$f(-\frac{5}{2}), f(\frac{1}{4}), f(3), f(4), f(\sqrt{5})$

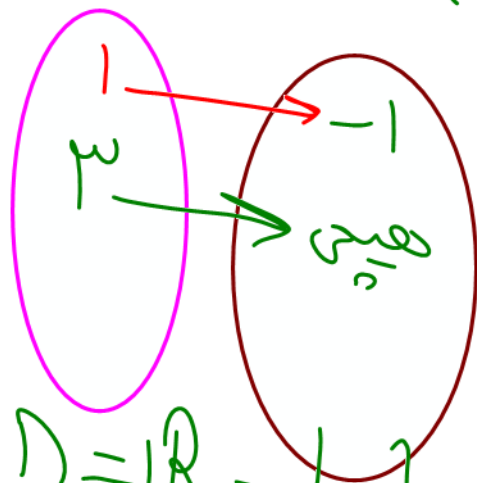


$f(x) = 2x - 5$



$D = \mathbb{R} = \text{دامنه تابع}$

$f(x) = \frac{2x-2}{x-2} = \frac{2-2}{2-2}$



$D = \mathbb{R} - \{2\}$

* تعیین دامنه و برد توابع از روی ضابطه آن:

اگر تابع کسری باشیم: $D = \mathbb{R} - \left\{ \text{رشته‌های منجم} \right\}$

تعیین دامنه توابع: برای تعیین دامنه توابع از روی ضابطه در دو جا محدودیت داریم.

الف) مخرج کسر صفر نشود
ب) زیر رادیکال بافرجه زوج منفی نشود.

سوال - دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$

حالا نه کسری است و نه رادیکالی، پس دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است.

$D_f = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

ب) $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x + 3}$

دامنه $D = \mathbb{R} - \{ -3 \}$

حالا کسری است، پس مخرج نباید صفر شود

$D_f = \mathbb{R} - \{ -3 \} = \mathbb{R} - \left\{ \text{رشته‌های منجم} \right\}$

نکته: اگر رادیکالی بافرجه زوج داریم:

$D: \geq 0$ زیر رادیکال

ب) $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{4-x^2}}$

حالا عبارت زیر رادیکال بافرجه زوج نباید منفی شود و چون در مخرج است، صفر هم نمی تواند باشد یعنی باید داشته باشیم:

$4 - x^2 > 0 \Rightarrow D_f = (-2, 2)$

نکته مهم: اگر دامنه تابع را خود سوال به ما بدهد، آن را به عنوان دامنه در نظر می گیریم. اما اگر دامنه یک تابع داده نشود در این صورت بزرگ ترین مجموعه ممکن را به عنوان دامنه در نظر می گیریم.

سوال- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و نیز دامنه و برد هر یک را تعیین کنید. (چه چیزی باعث تفاوت بین آن‌ها می‌شود؟)

$$\text{الف) } \left\{ \begin{array}{l} f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2x - 1 \end{array} \right.$$

$$\text{ب) } \left\{ \begin{array}{l} f: [-2, 3) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2x - 1 \end{array} \right.$$

$$\text{ج) } \left\{ \begin{array}{l} f: [-2, +\infty) \\ f(x) = 2x - 1 \end{array} \right.$$

$$\text{د) } \left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2x - 1 \end{array} \right.$$

*** تعیین برد تابع:**

در حالت کلی برای به دست آوردن برد تابع از روی ضابطه روش کلی وجود ندارد. یک روش این است که نمودار تابع داده شده را در صورت امکان رسم می کنیم و از روی نمودار برد آن را به دست می آوریم. این روش برای به دست آوردن دامنه نیز به کار می رود.

$$f(x) = x^2 + 4x + 6$$

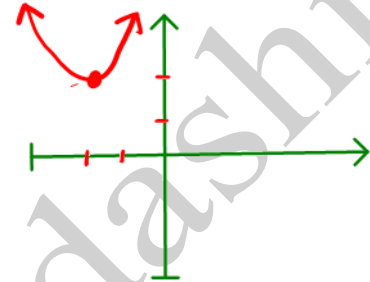
سوال - دامنه و برد تابع زیر را به دست آورید.

$$\text{طول رأس} : x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\text{مض رأس} : y_s = (-2)^2 + 4(-2) + 6 = 4 - 8 + 6 = 2$$

$$\text{دامنه تابع} = D_f = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

$$\text{برد تابع} = R_f = [2, \infty)$$



نکته: تابع به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ با شرط $a \neq 0$ تابع درجه دوم نامیده می شود.

$$\text{دامنه} = D_f = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

* دامنه آن برابر مجموعه اعداد حقیقی است.

* برد آن به صورت زیر است :

$$a > 0 \Rightarrow \text{برد} = R_f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty \right)$$

$$a < 0 \Rightarrow \text{برد} = R_f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a} \right]$$

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi

Mohsen Dadashi