



درس ۱ : آشنایی با منطق ریاضی

۱) گزاره

تعریف گزاره : به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای تنها یک ارزش (درست یا نادرست) باشد، گزاره می‌گوییم. معمولاً گزاره‌ها را با حروف کوچک انگلیسی، مانند p ، q و r نشان می‌دهیم.

درست یا نادرست بودن یک گزاره را **ارزش گزاره** می‌نامیم. درستی گزاره با T یا "د" و نادرستی گزاره را با F یا "ن" نشان می‌دهیم.

چند نکته

- (۱) یک گزاره در یک زمان فقط یک ارزش می‌تواند داشته باشد.
- (۲) حدس‌های ریاضی و علوم مشابه دیگر که هنوز جواب قطعی به آن‌ها داده نشده است، گزاره به شمار می‌روند.
- (۳) جملات پرسشی، عاطفی، امری، خواهشی و ... گزاره به شمار **نمی‌روند**.

مثال ۱) کدام یک از جملات زیر یک گزاره نیست؟

- هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت. **گزاره است**
- از صدای سخن عشق ندیدم خوش‌تر. **گزاره نیست**
- مربع هر عدد حقیقی همواره مثبت است. **گزاره است**
- صدمین رقم اعشاری π برابر ۵ است. **گزاره است**
- $3x + 2 = 0$ **گزاره نیست زیرا برای** $x = 1$ نادرست، $x = -\frac{2}{3}$ درست دارد. **گزاره نیست**
- هر معادله درجه دوم حداقل یک جواب دارد. **گزاره است**
- در پرتاب یک تاس، احتمال پیشامد A برابر $\frac{1}{6}$ است. **گزاره است**
- چه روز قشنگی است. **گزاره نیست (عاطفی)**

جدول ارزشی گزاره‌ها : هر گزاره مانند p دارای ارزش درست یا نادرست است (۲ حالت).

p
د
ن

$2 \times 2 = 4$

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

ولی اگر بخواهیم ارزش دو گزاره p و q را کنار یکدیگر بنویسیم، $4 \times 2 = 8$ حالت یا ردیف متفاوت خواهیم داشت. به همین ترتیب، جدول ارزشی n گزاره کنار یکدیگر، 2^n حالت یا ردیف متفاوت خواهد داشت.

مثال ۲) جدول ارزشی سه گزاره را رسم کنید. در چند حالت این جدول ارزشی، فقط دو گزاره درست هستند؟

$2^3 = 8 \rightarrow$ ۲ گزاره

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

$\binom{3}{2} \binom{1}{1} = 3 \times 1 = 3$



تعریف گزاره‌نما : هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل می‌شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را بر حسب تعداد متغیرهای به کار رفته در آن‌ها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

چند نکته

- گزاره و گزاره‌نما هر دو جمله خبری هستند و تفاوت آن‌ها در این است که ارزش گزاره را می‌توان مشخص کرد ولی ارزش گزاره‌نما به متغیر استفاده شده در آن دارد.
- معادله‌ها و نامعادله‌ها در حالت کلی گزاره‌نما هستند به شرطی که با تغییر مقدار متغیر (متغیرها) دو ارزش درستی و نادرستی را کسب کنند. (مانند $2x+1 > 0$ یا $x^2 \leq 4$) ولی اگر برای تمام مقادیر متغیر، گزاره فقط یک (درست یا نادرست) داشته باشد، گزاره‌نما نیست و گزاره می‌باشد (مانند $x^2 \geq 0$ یا $x = x$).
- جملاتی که شامل عبارت‌های "به ازای هر" یا "وجود دارد" هستند، همواره گزاره هستند ولی گزاره‌نما به شما نمی‌روند.

مثال ۳) کدامیک از گزینه‌های زیر یک گزاره نما و کدامیک گزاره نما نیست؟

$$(1) 2x - 1 > 5$$

$$(2) x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(3) x^2 \geq 5$$

$$(4) \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

(5) در پرتاب ۲ تاس، احتمال وقوع پیشامد A کمتر از ۱ است.

(6) هر معادله درجه دوم، حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

$$(7) x - 2y = 0$$

(8) حاصل جمع عددی با مربع خودش برابر ۵۶ می‌باشد.

۳) دامنه متغیر و مجموعه جواب گزاره‌نما

تعریف دامنه متغیر گزاره‌نما : در هر گزاره‌نما، به مجموعه مقادیری که می‌توان به جای متغیرهای آن قرار داد تا به گزاره (با هر ارزشی) تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف D نشان می‌دهیم. مثلاً در گزاره‌نمای $2x + 4 > 0$ ، دامنه متغیر می‌تواند اعداد حقیقی، اعداد گویا، اعداد صحیح یا بازه $(7, +\infty)$ باشد.

تعریف مجموعه جواب گزاره‌نما : به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر گزاره‌نما که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما به یک گزاره درست تبدیل می‌شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گوییم. اگر S مجموعه جواب گزاره‌نما باشد، همواره داریم $S \subseteq D$.

مثال ۵) اگر دامنه متغیر گزاره‌نمای " $x^2 - 6x - 7 < 0$ "، مجموعه $D = [1, +\infty)$ باشد، مجموعه جواب آن را به دست آورید.

۸ (۴)

۵ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)



مثال ۶ مجموعه جواب هرکدام از گزاره‌نماهای زیر را که دامنه متغیر آن‌ها داده شده است، تعیین کنید.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, D = R \quad (۱)$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0, D = \{-1, 5\} \quad (۲)$$

$$\sqrt{x^2} = x, D = \mathbb{Z} \quad (۳)$$

۴) نقیض گزاره

نقیض یک گزاره مانند p را با $\sim p$ نشان می‌دهیم که گزاره‌ای است که ارزش آن با p متفاوت است.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

۵) ترکیب گزاره‌ها

ترکیب دو یا چند گزاره با یکدیگر به وسیلهٔ رابط‌های زیر انجام می‌شود که حاصل آن یک گزارهٔ مرکب می‌باشد.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

۱) **ترکیب فصلی**: ترکیب فصلی دو گزارهٔ p و q را به صورت $p \vee q$ نشان داده و آن را به صورت " p یا q " می‌خوانیم.

جدول ارزشی این گزارهٔ مرکب به صورت مقابل است. ارزش گزارهٔ $p \vee q$ هنگامی درست است که حداقل یکی از این گزاره‌ها صحیح باشند. به عبارت دیگر، گزارهٔ $p \vee q$ تنها وقتی نادرست است که هر دو گزارهٔ p و q نادرست باشند.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

۲) **ترکیب عطفی**: ترکیب عطفی دو گزارهٔ p و q را به صورت $p \wedge q$ نشان داده و آن را به صورت " p و q " می‌خوانیم.

جدول ارزشی این گزارهٔ مرکب به صورت مقابل است. ارزش گزارهٔ $p \wedge q$ هنگامی نادرست است که حداقل یکی از دو گزاره نادرست باشد. به عبارت دیگر، گزارهٔ $p \wedge q$ تنها وقتی درست است که هر دو گزارهٔ p و q درست باشند.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

۳) **ترکیب شرطی**: ترکیب شرطی دو گزارهٔ p و q را به صورت $p \Rightarrow q$ نشان داده و آن را به صورت "اگر p آن‌گاه q " می‌خوانیم.

جدول ارزشی این گزارهٔ مرکب به صورت مقابل است. در $p \Rightarrow q$ ، به p مقدم (یا فرض) و به q تالی (حکم) گفته می‌شود. ارزش گزارهٔ $p \Rightarrow q$ تنها هنگامی نادرست است که از فرض درست، حکم نادرست نتیجه گرفته شود.

چند نکته

الف) اگر فرض نادرست باشد، ارزش گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ همواره درست است که می‌گوییم "به انتقای مقدم، ارزش گزاره درست است."
 ب) در حالتی که حکم صحیح باشد، ارزش گزاره نیز صحیح است (بنابراین ارزش فرض دیگر مهم نیست).
 پ) در گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ ، می‌توانیم بخوانیم: " p شرط کافی برای q است" و یا بخوانیم: " q شرط لازم برای p است".





۴) ترکیب دوشروطی : ترکیب دوشروطی دو گزاره p و q را به صورت $p \Leftrightarrow q$ نشان داده و آن را به صورت " اگر p آن گاه q و برعکس " می خوانیم. $p \Leftrightarrow q$ به شکل های " شرط لازم و کافی برای q است " و یا " p اگر و فقط اگر q " نیز خوانده می شود. جدول ارزشی این گزاره مرکب به صورت مقابل است. ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ هنگامی درست است که هر دو گزاره درست و یا هر دو گزاره نادرست باشند.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

مثال ۷) ارزش گزاره های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(2 \text{ عددی اول است}) \vee (3 \text{ عددی زوج است})$

ب) اگر ۲ عددی زوج باشد، آن گاه ۲ عدد اول نیست.

پ) $(\sqrt{5} \in \mathbb{Q}) \wedge (\sqrt{5} < 2)$

ت) $99 \text{ عددی اول نیست} \Leftrightarrow \sqrt{2} \text{ عددی گویاست.}$

ث) در پرتاب یک تاس، شرط لازم و کافی برای آنکه احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

مثال ۸) جدول ارزشی گزاره مرکب $\sim(p \vee q) \wedge (p \wedge \sim q)$ را رسم کنید. در چند حالت، ارزش این گزاره مرکب درست است؟

مثال ۹) گزاره $p \Rightarrow (q \vee \sim r)$ نادرست است. ارزش کدام گزاره درست است؟

$\sim q \Rightarrow \sim p$ (۴)

$p \vee q \Rightarrow r$ (۳)

$(p \wedge q) \wedge r$ (۲)

$p \Rightarrow q$ (۱)





۶ هم‌ارزی گزاره‌ها

دو گزاره p و q را هم‌ارز می‌گوییم هرگاه در جدول ارزشی، دقیقاً مانند یکدیگر باشند. دو گزاره هم‌ارز p و q را به شکل $p \equiv q$ می‌نویسیم.

مثال ۱۰ به کمک جدول ارزشی، نشان داده‌ایم که گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $p \vee \sim q$ هم‌ارز هستند.

اثبات هم‌ارزی : برای اثبات هم‌ارزی گزاره‌ها دو روش کلی وجود دارد.

روش اول (استفاده از جدول): در این روش مانند مثال بالا، تمام حالت‌های ممکن را برای گزاره‌های داده شده در یک جدول می‌نویسیم و نشان می‌دهیم که ستون مربوط به هر کدام با دیگری یکسان است.

روش دوم (استفاده از قضیه‌های هم‌ارزی): در این روش از هم‌ارزی‌های زیر استفاده می‌کنیم. تمام این هم‌ارزی‌ها به کمک جدول قابل اثبات‌اند.

$$p \vee q \equiv q \vee p, \quad p \wedge q \equiv q \wedge p \quad \text{۱) جابه‌جایی:}$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r, \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \quad \text{۲) شرکت پذیری:}$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r), \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \text{۳) توزیع‌پذیری:}$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q, \quad \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad \text{۴) دمورگان:}$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad \text{۵) جذب:}$$

$$\sim (\sim p) \equiv p \quad \text{۶) نقیض نقیض:}$$

$$p \vee \sim p \equiv T, \quad p \wedge \sim p \equiv F \quad \text{۷) ترکیب با نقیض:}$$

$$p \wedge F \equiv F, \quad p \wedge T \equiv p, \quad p \vee T \equiv T, \quad p \vee F \equiv p \quad \text{۸) ترکیب با } T \text{ یا } F:$$

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \quad \text{۹) شرطی به فصلی:}$$

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p \quad \text{۱۰) عکس نقیض:}$$

$$p \Rightarrow (p \vee q) \equiv T \quad \text{۱۱) ادخال فاصل:}$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv T \quad \text{۱۲) حذف عاطف:}$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \quad \text{۱۳) دوشروطی به شرطی:}$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q \equiv \sim q \Leftrightarrow \sim p \quad \text{۱۴) دوشروطی به نقیض:}$$

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r \quad \text{۱۵) حکم شرطی در گزاره شرطی:}$$

مثال ۱۱ قضیه‌های هم‌ارزی ۷، ۱۰ و ۱۵ را به کمک جدول هم‌ارزی ثابت کنید.





مثال ۱۲ ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 عددی فرد باشد، آن گاه a عددی فرد است.

مثال ۱۳ به کمک جدول یا قضیه‌های هم‌ارزی نشان دهید که :

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$$

(۷) نقیض گزاره‌های مرکب

به کمک قضیه‌های هم‌ارزی بالا می‌توان ثابت کرد که:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q \quad (۱) \text{ نقیض گزاره شرطی:}$$

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q \quad (۲) \text{ نقیض گزاره دوشروطی:}$$

مثال ۱۴ هم‌ارزی‌های بالا را اثبات کنید.

مثال ۱۵ گزاره $\sim (p \wedge \sim q) \wedge (p \vee q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

$$\sim q \quad (۴)$$

$$q \quad (۳)$$

$$\sim p \quad (۲)$$

$$p \quad (۱)$$





مثال ۱۶ کدام یک از گزاره‌های زیر، هم ارز منطقی گزاره $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q)$ است؟

$p \Rightarrow q$ (۴)

q (۳)

$p \wedge q$ (۲)

p (۱)

مثال ۱۷ کدام گزاره زیر، هم ارز منطقی گزاره $[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ است؟

$p \vee q$ (۴)

$r \vee p$ (۳)

r (۲)

q (۱)

مثال ۱۸ کدام یک از گزینه‌های زیر، همواره درست است؟

$\sim p \Rightarrow p \wedge q$ (۲)

$p \wedge q \Rightarrow \sim p$ (۱)

$p \vee q \Rightarrow p \wedge q$ (۴)

$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$ (۳)

مثال ۱۹ گزاره " اگر a عددی زوج و مضرب ۵ باشد، آن‌گاه رقم یکان آن صفر است " هم ارز کدام گزاره است؟

(۱) a فرد است یا a مضرب ۵ نیست یا رقم یکان a صفر است.

(۲) a فرد است یا a مضرب ۵ نیست و رقم یکان a صفر است.

(۳) a زوج است یا a مضرب ۵ نیست یا رقم یکان a صفر است.

(۴) a فرد است و a مضرب ۵ نیست و رقم یکان a صفر است.



سورها علامت‌هایی هستند که اگر همراه متغیر گزاره‌نما بیایند، گزاره‌نما را به گزاره تبدیل می‌کنند. این سورها عبارتند از:

الف) سور عمومی : علامت این سور عبارتست از \forall و خوانده می‌شود: "به ازای هر" یا "به ازای تمام مقادیر".

ارزش سور عمومی یا یک گزاره کلی وقتی درست است که مجموعه جواب گزاره‌نما با دامنه متغیر برابر باشد. به عبارت دیگر، هیچ مثال نقضی برای گزاره داده شده پیدا نشود.

ب) سور وجودی : علامت این سور عبارتست از \exists و خوانده می‌شود: "وجود دارد" یا "به ازای بعضی مقادیر".

ارزش یک سور وجودی یا گزاره جزئی زمانی درست است که مجموعه جواب گزاره‌نما تهی نباشد. به عبارت دیگر حداقل یک مورد جواب داشته باشد.

مثال ۲۰) درست‌ی یا نادرستی هر یک از سورهای زیر را مشخص کنید.

$$\text{الف) } \forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq x$$

$$\text{ب) } \exists x \in \mathbb{Z}; |x| < 1$$

$$\text{پ) } \forall x \in \mathbb{Z}; \frac{x(x+1)}{2} \in \mathbb{Z}$$

ت) در آمار هر متغیر ترتیبی، یک متغیر کیفی است.

$$\text{ث) } \exists x \in \mathbb{R}; x^2 + x + 3 < 0$$

مثال ۲۱) عبارت "در فضای نمونه S ، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A) > 1$ " را به کمک سورها بنویسید.

مثال ۲۲) ارزش هر کدام از گزاره‌های سوری زیر را مشخص کنید.

$$\text{۱) } \forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 2 > 2x$$

$$\text{۲) } \forall x \in \mathbb{Z}; \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$$

$$\text{۳) } \exists x \in \mathbb{R}; \frac{x-1}{x} = x$$

$$\text{۴) } \exists x \in \mathbb{R}; x > x^2$$



مثال ۱۷۳) ارزش هر کدام از گزاره‌های سوری زیر را مشخص کنید.

$$(۱) \quad \forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : y - x = ۵$$

$$(۲) \quad \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x - y < ۰$$

$$(۳) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 + (y - ۳)^2 \geq ۰$$

مثال ۱۷۴) گزاره سوری $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R} : P(x, y)$ ، با کدام گزاره نمای $P(x, y)$ دارای ارزش درست است؟

$$(۲) \quad x - y = ۶$$

$$(۴) \quad xy = ۶$$

$$(۱) \quad y - x = ۶$$

$$(۳) \quad x + y = ۶$$

۹) نقیض سورها

نقیض سور عمومی و سور وجودی را طبق قضیه‌های زیر به دست می‌آوریم.

$$(۱) \quad \text{نقیض سور عمومی : } \sim (\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$$

$$(۲) \quad \text{نقیض سور وجودی : } \sim (\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$$

مثال ۱۷۵) نقیض هر یک از گزاره‌های سوری زیر را بنویسید.

$$(۱) \quad \forall x \in \mathbb{R} ; x^2 > ۰$$

$$(۲) \quad \exists y \in \mathbb{R} ; y < ۰ \wedge y^2 \leq ۱$$

مثال ۱۷۶) نقیض گزاره " حاصل ضرب هر دو عدد اصم عددی گنگ است." به کدام صورت است؟

(۱) حاصل ضرب هر دو عدد اصم، عددی گویا است.

(۲) حاصل ضرب هر دو عدد اصم، عددی گویا یا گنگ است.

(۳) حاصل ضرب برخی عددهای اصم، عددی گویا است.

(۴) حاصل ضرب برخی عددهای گنگ، عددی گویا یا گنگ است.

مثال ۱۷۷) ارزش گزاره شرطی زیر را مشخص کرده و عکس نقیض آن را بنویسید.

$$(\exists x \in \mathbb{Z} ; x^2 = ۱۶) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{N} ; x^2 > ۱)$$

