درس ۱ : آشنایی با منطق ریاضی

۱) گزاره

تعریف گزاره : به **جملهٔ خبری** که در حال حاضر یا آینده، **دارای تنها یک ارزش** (درست یا نادرست) باشد، گزاره می‌گوییم. معمولا گزاره‌ها را با حروف کوچک انگلیسی، مانند p ، q و r نشان می‌دهیم.

درست یا نادرست بودن یک گزاره را **ارزش گزاره** می‌نامیم. درستی گزاره با T یا "د" و نادرستی گزاره را با F یا "ن" نشان می‌دهیم.

چند نکته

۱) یک گزاره در یک زمان فقط یک ارزش می‌تواند داشته باشد.

۲) حدس‌های ریاضی و علوم مشابه دیگر که هنوز جواب قطعی به آن‌ها داده نشده است، گزاره به شمار می‌روند.

۳) جملات پرسشی، عاطفی، امری، خواهشی و ... گزاره به شمار **نمی‌روند**.

مثال ۱) کدام‌یک از جملات زیر یک گزاره نیست؟

۱) هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.

۲) از صدای سخن عشق ندیدم خوش‌تر.

۳) مربع هر عدد حقیقی همواره مثبت است.

۴) صدمین رقم اعشاری π برابر ۵ است.

۵) $۳x+۲=۰$

۶) هر معادلهٔ درجه دوم حداقل یک جواب دارد.

۷) در پرتاب یک تاس، احتمال پیشامد A برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۸) چه روز قشنگی است.

جدول ارزشی گزاره‌ها : هر گزاره مانند p دارای ارزش درست یا نادرست است (۲ حالت).

p
د
ن

ولی اگر بخواهیم ارزش دو گزارهٔ p و q را کنار یکدیگر بنویسیم، ۴($۲^۲$) حالت یا ردیف متفاوت خواهیم داشت.
به همین ترتیب، جدول ارزشی n گزاره کنار یکدیگر، ۲^n حالت یا ردیف متفاوت خواهد داشت.

q	p
د	د
ن	د
د	ن
ن	ن

مثال ۲) جدول ارزشی سه گزاره را رسم کنید. در چند حالت این جدول ارزشی، فقط دو گزاره درست هستند؟

جناب استاد : محمود داورزنی

۲) گزاره‌نما

تعریف گزاره‌نما : هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل می‌شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را بر حسب تعداد متغیرهای به کار رفته در آن‌ها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

چند نکته

۱) گزاره و گزاره‌نما هر دو جملهٔ خبری هستند و تفاوت آن‌ها در این است که ارزش گزاره را می‌توان مشخص کرد ولی ارزش گزاره‌نما به متغیر استفاده شده در آن دارد.

۲) معادله‌ها و نامعادله‌ها در حالت کلی گزاره‌نما هستند به شرطی که با تغییر مقدار متغیر(متغیرها) دو ارزش درستی و نادرستی را کسب کنند.(مانند $۲x+۱>۰$ یا $x^۲\leq ۴$) ولی اگر برای تمام مقادیر متغیر، گزاره فقط یک (درست یا نادرست) داشته باشد، گزاره‌نما نیست و گزاره می باشد (مانند $x^۲\geq ۰$ یا $x=x$).

۳) جملاتی که شامل عبارت‌های "به ازای هر" یا "وجود دارد" هستند، همواره گزاره هستند ولی گزاره‌نما به شما نمی‌روند.

مثال ۳) کدام‌یک از گزینه‌های زیر یک گزاره نما و کدام‌یک گزاره نما نیست؟

۱) $۲x-۱>۵$

۲) $x^۲-۲x-۳=۰$

۳) $x^۲\geq ۵$

۴) $\sqrt{x^۲+۱}>۰$

۵) در پرتاب ۲ تاس، احتمال وقوع پیشامد A کمتر از ۱ است.

۶) هر معادله درجه دوم، حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

۷) $x-۲y=۰$

۸) حاصل‌جمع عددی با مربع خودش برابر ۵۶ می‌باشد.

۳) دامنهٔ متغیر و مجموعه جواب گزاره‌نما

تعریف دامنهٔ متغیرگزاره‌نما : در هر گزاره‌نما، به مجموعه مقادیری که که می‌توان به جای متغیرهای آن قرار داد تا به گزاره (با هر ارزشی) تبدیل شود، دامنهٔ متغیر گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف D نشان می‌دهیم. مثلا در گزاره‌نمای $۲x+۴>۰$ ، دامنهٔ متغیر می‌تواند اعداد حقیقی، اعداد گویا، اعداد صحیح یا بازهٔ $(۷,+\infty)$ باشد.

تعریف مجموعه جواب گزاره‌نما : به مجموعه عضوهایی از دامنهٔ متغیر گزاره‌نما که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گوییم. اگر S مجموعه جواب گزاره‌نما باشد، همواره داریم $S\subseteq D$.

مثال ۵) اگر دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای " $x^۲-۶x-۷<۰$ "، مجموعهٔ $D=[۱,+\infty)$ باشد، مجموعه جواب آن را به دست آورید.

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۸

مثال ۶) مجموعه جواب هرکدام از گزاره‌نماهای زیر را که دامنه متغیر آن ها داده شده است، تعیین کنید.

۱) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\,,D=R$

۲) $x^{۲}-۴x-۵=۰\,,D=\{-۱,۵\}$

۳) $\sqrt{x^{۲}}=x\,,D=\mathbb{Z}$

۴) نقیض گزاره

نقیض یک گزاره مانند p را با $\sim p$ نشان می‌دهیم که گزاره‌ای است که ارزش آن با p متفاوت است.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

۵) ترکیب گزاره‌ها

ترکیب دو یا چند گزاره با یکدیگر به وسیلهٔ رابطه‌های زیر انجام می‌شود که حاصل آن یک گزارهٔ مرکب می‌باشد.

۱) ترکیب فصلی : ترکیب فصلی دو گزارهٔ p و q را به صورت $p\vee q$ نشان داده و آن را به صورت " p یا q " می‌خوانیم.

جدول ارزشی این گزارهٔ مرکب به صورت مقابل است. ارزش گزارهٔ $p\vee q$ هنگامی درست است که حداقل یکی از این گزاره‌ها صحیح باشند. به عبارت دیگر، گزارهٔ $p\vee q$ تنها وقتی نادرست است که هر دو گزارهٔ p و q نادرست باشند.

p	q	$p\vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

۲) ترکیب عطفی : ترکیب عطفی دو گزارهٔ p و q را به صورت $p\wedge q$ نشان داده و آن را به صورت " p و q " می‌خوانیم.

جدول ارزشی این گزارهٔ مرکب به صورت مقابل است. ارزش گزارهٔ $p\wedge q$ هنگامی نادرست است که حداقل یکی از دو گزاره نادرست باشد. به عبارت دیگر، گزارهٔ $p\wedge q$ تنها وقتی درست است که هردو گزارهٔ p و q درست باشند.

p	q	$p\wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

۳) ترکیب شرطی : ترکیب شرطی دو گزارهٔ p و q را به صورت $p\Rightarrow q$ نشان داده و آن را به صورت " اگر p آن‌گاه q " می‌خوانیم.

جدول ارزشی این گزارهٔ مرکب به صورت مقابل است. در $p\Rightarrow q$، به p مقدم (یا فرض) و به q تالی(حکم)گفته می‌شود. ارزش گزارهٔ $p\Rightarrow q$ تنها هنگامی نادرست است که از فرض درست، حکم نادرست نتیجه گرفته شود.

p	q	$p\Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

چند نکته

الف) اگر فرض نادرست باشد، ارزش گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$ همواره درست است که می‌گوییم " به انتفای مقدم، ارزش گزاره درست است."

ب) در حالتی که حکم صحیح باشد، ارزش گزاره نیز صحیح است (بنابراین ارزش فرض دیگر مهم نیست).

پ) در گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$، می‌توانیم بخوانیم: " p شرط کافی برای q است" و یا بخوانیم: " q شرط لازم برای p است".

۴) ترکیب دوشرطی : ترکیب دوشرطی دو گزارهٔ p و q را به صورت $p \Leftrightarrow q$ نشان داده و آن را به صورت " اگر p آن‌گاه q و برعکس" می‌خوانیم. $p \Leftrightarrow q$. به شکل‌های " p شرط لازم و کافی برای q است" و یا " p اگر و فقط اگر q " نیز خوانده می‌شود.

جدول ارزشی این گزارهٔ مرکب به صورت مقابل است. ارزش گزارهٔ $p \Leftrightarrow q$ هنگامی درست است که هر دو گزاره درست و یا هر دو گزاره نادرست باشند.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

مثال ۷) ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) (۲ عددی اول است) $\vee$ (۳ عددی زوج است)

ب) اگر ۲ عددی زوج باشد، آن گاه ۲ عدد اول نیست.

پ) $(\sqrt{۵} \in \mathbb{Q}) \wedge (\sqrt{۵} < ۲)$

ت) ۹۹ عددی اول نیست $\Leftrightarrow$ $\sqrt{۲}$ عددی گویاست.

ث) در پرتاب یک تاس، شرط لازم و کافی برای آنکه احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

مثال ۸) جدول ارزشی گزاره مرکب $\sim(p \vee q) \wedge (p \wedge \sim q)$ را رسم کنید. در چند حالت، ارزش این گزاره مرکب درست است؟

مثال ۹) گزارهٔ $p \Rightarrow (q \vee \sim r)$ نادرست است. ارزش کدام گزاره درست است؟

۱) $p \Rightarrow q$ ۲) $(p \wedge q) \wedge r$ ۳) $p \vee q \Rightarrow r$ ۴) $\sim q \Rightarrow \sim p$

۶) هم‌ارزی گزاره‌ها

دو گزارهٔ p و q را هم‌ارز می‌گوییم هرگاه در جدول ارزشی، دقیقا مانند یکدیگر باشند. دو گزارهٔ هم‌ارز p و q را به شکل $p\equiv q$ می‌نویسیم.

مثال ۱۰) به کمک جدول ارزشی، نشان داده‌ایم که گزاره‌های $p\Rightarrow q$ و $\sim p\vee q$ هم‌ارز هستند.

اثبات هم‌ارزی : برای اثبات هم ارزی گزاره‌ها دو روش کلی وجود دارد.

روش اول) استفاده از جدول: در این روش مانند مثال بالا، تمام حالتهای ممکن را برای گزاره‌های داده شده در یک جدول می‌نویسیم و نشان می‌دهیم که ستون مربوط به هر کدام با دیگری یکسان است.

روش دوم) استفاده از قضیه‌های هم‌ارزی : در این روش از هم‌ارزی‌های زیر استفاده می‌کنیم. تمام این هم‌ارزی‌ها به کمک جدول قابل اثبات‌اند.

۱) جابه‌جایی: $p\vee q\equiv q\vee p \quad , \quad p\wedge q\equiv q\wedge p$

۲) شرکت پذیری: $p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r \quad , \quad p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r$

۳) توزیع‌پذیری: $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r) \quad , \quad p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

۴) دمورگان: $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q \quad , \quad \sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$

۵) جذب: $p\vee(p\wedge q)\equiv p \quad , \quad p\wedge(p\vee q)\equiv p$

۶) نقیضِ نقیض: $\sim(\sim p)\equiv p$

۷) ترکیب با نقیض: $p\vee\sim p\equiv T \quad , \quad p\wedge\sim p\equiv F$

۸) ترکیب با F یا T: $p\wedge F\equiv F \quad , \quad p\wedge T\equiv p \quad , \quad p\vee T\equiv T \quad , \quad p\vee F\equiv p$

۹) شرطی به فصلی: $p\Rightarrow q\equiv\sim p\vee q$

۱۰) عکس نقیض: $p\Rightarrow q\equiv\sim q\Rightarrow\sim p$

۱۱) ادخال فاصل: $p\Rightarrow(p\vee q)\equiv T$

۱۲) حذف عاطف: $(p\wedge q)\Rightarrow p\equiv T$

۱۳) دوشرطی به شرطی: $p\Leftrightarrow q\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$

۱۴) دوشرطی به نقیض: $p\Leftrightarrow q\equiv\sim p\Leftrightarrow\sim q\equiv\sim q\Leftrightarrow\sim p$

۱۵) حکم شرطی درگزارهٔ شرطی: $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$

مثال ۱۱) قضیه‌های هم ارزی ۷، ۱۰ و ۱۵ را به کمک جدول هم‌ارزی ثابت کنید.

مثال ۱۲) ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 عددی فرد باشد، آن گاه a عددی فرد است.

مثال ۱۳) به کمک جدول یا قضیه‌های هم‌ارزی نشان دهید که :

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$$

۷) نقیض گزاره‌های مرکب

به کمک قضیه‌های هم‌ارزی بالا می‌توان ثابت کرد که:

۱) نقیض گزارهٔ شرطی: $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

۲) نقیض گزارهٔ دوشرطی: $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

مثال ۱۴) هم‌ارزی های بالا را اثبات کنید.

مثال ۱۵) گزارهٔ $\sim (p \wedge \sim q) \wedge (p \vee q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

۱) p ۲) $\sim p$ ۳) q ۴) $\sim q$

مثال ۱۶) کدام یک از گزاره‌های زیر، هم ارز منطقی گزارهٔ $(\sim p \Rightarrow \sim q)\wedge(p\vee q)$ است؟

۱) p ۲) $p\wedge q$ ۳) q ۴) $p\Rightarrow q$

مثال ۱۷) کدام گزارهٔ زیر، هم ارز منطقی گزارهٔ $[\sim p\wedge(\sim q\wedge r)]\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge r)$ است؟

۱) q ۲) r ۳) $r\vee p$ ۴) $p\vee q$

مثال ۱۸) کدام‌یک از گزینه‌های زیر، همواره درست است؟

۱) $p\wedge q\Rightarrow \sim p$ ۲) $\sim p\Rightarrow p\wedge q$

۳) $p\wedge q\Rightarrow p\vee q$ ۴) $p\vee q\Rightarrow p\wedge q$

مثال ۱۹) گزارهٔ " اگر a عددی زوج و مضرب ۵ باشد، آن‌گاه رقم یکان آن صفر است" هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) a فرد است یا a مضرب ۵ نیست یا رقم یکان a صفر است.

۲) a فرد است یا a مضرب ۵ نیست و رقم یکان a صفر است.

۳) a زوج است یا a مضرب ۵ نیست یا رقم یکان a صفر است.

۴) a فرد است و a مضرب ۵ نیست و رقم یکان a صفر است.

۸) سورها و ارزش آن‌ها

سورها علامت‌هایی هستند که اگر همراه متغیر گزاره‌نما بیایند، گزاره نما را به گزاره تبدیل می‌کنند. این سورها عبارتنداز:

الف) سور عمومی : علامت این سور عبارتست از $\forall$ و خوانده می‌شود: "**به ازای هر**" یا " **به ازای تمام مقادیر**".

ارزش سور عمومی یا یک گزارهٔ کلی وقتی درست است که مجموعه جواب گزاره‌نما با دامنهٔ متغیر برابر باشد. به عبارت دیگر، هیچ مثال نقضی برای گزاره داده شده پیدا نشود.

ب) سور وجودی : علامت این سور عبارتست از $\exists$ و خوانده می‌شود: "**وجود دارد**" یا " **به ازای بعضی مقادیر**".

ارزش یک سور وجودی یا گزارهٔ جزئی زمانی درست است که مجموعه جواب گزاره‌نما تهی نباشد. به عبارت دیگر حداقل یک مورد جواب داشته باشد.

مثال ۲۰) درستی یا نادرستی هر یک از سورهای زیر را مشخص کنید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; x^۲ \geq x$

ب) $\exists x \in \mathbb{Z}; |x| < ۱$

پ) $\forall x \in \mathbb{Z}; \dfrac{x(x+۱)}{۲} \in \mathbb{Z}$

ت) در آمار هر متغیر ترتیبی، یک متغیر کیفی است.

ث) $\exists x \in \mathbb{R}; x^۲ + x + ۳ < ۰$

مثال ۲۱) عبارت " در فضای نمونهٔ S ، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A) > ۱$ " را به کمک سورها بنویسید.

مثال ۲۲) ارزش هر کدام از گزاره‌های سوری زیر را مشخص کنید.

۱) $\forall x \in \mathbb{R}\,;\; x^۲ + ۲ > ۲x$

۲) $\forall x \in \mathbb{Z}\,;\; \dfrac{x^۲ - ۴}{x - ۲} = x + ۲$

۳) $\exists x \in \mathbb{R}\,;\; \dfrac{x - ۱}{x} = x$

۴) $\exists x \in \mathbb{R}; x > x^۲$

مثال ۲۳) ارزش هر کدام از گزاره‌های سوری زیر را مشخص کنید.

۱) $\forall x\in\mathbb{N}, \exists y\in\mathbb{N}: y-x=5$

$y=x+5$

ارزش درست زیرا اگر $x\in N$ دلخواه باشد آن‌گاه $y=x+5$ شرط مسئله است.

۲) $\exists x\in\mathbb{N}, \forall y\in\mathbb{N}: x-y<0$

$y>x$

ارزش نادرست زیرا به طور مثال برای $x=2$ باید $y>2$ باشد و برای $y=1,2$ درست نیست.

۳) $\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}: x^2+(y-3)^2\geq 0$

ارزش درست دارد.

$\begin{cases}x^2\geq 0\\ (y-3)^2\geq 0\end{cases}\xrightarrow{+} x^2+(y-3)^2\geq 0$

مثال ۲۴) گزاره سوری $\forall x\in\mathbb{N}, \exists y\in\mathbb{R}: P(x,y)$ ، با کدام گزاره نمای $P(x,y)$ دارای ارزش درست است؟

۱) $y-x=6 \leftarrow y=x+6$ ارزش درست ✓

۲) $x-y=6 \leftarrow y=x-6$ ، ارزش نادرست دارد زیرا اگر $x=5$ آن‌گاه $y=-1$

۳) $x+y=6 \leftarrow y=6-x$ ، ارزش نادرست، زیرا اگر $x=6$ باشد آن‌گاه $y=0$

۴) $xy=6 \leftarrow y=\frac{6}{x}$ ، ارزش نادرست دارد زیرا اگر $x=5$ آن‌گاه $y=6/5$

۹) نقیض سورها

جمله: همه دانش‌آموزان کلاس A، معدل بالای ۱۵ دارند. $P(x)$ $\forall$

نقیض سور عمومی و سور وجودی را طبق قضیه‌های زیر به دست می‌آوریم.

۱) نقیض سور عمومی : $\sim(\forall x; p(x))\equiv \exists x; \sim p(x)$

۲) نقیض سور وجودی : $\sim(\exists x; p(x))\equiv \forall x; \sim p(x)$

مثال ۲۵) نقیض هر یک از گزاره‌های سوری زیر را بنویسید.

۱) $\forall x\in\mathbb{R}; x^2>0$

$\sim(\forall x\in\mathbb{R}; \underbrace{x^2>0}_{P(x)})\equiv \exists x\in\mathbb{R}; x^2\leq 0$

۲) $\exists y\in\mathbb{R}; y<0\wedge y^2\leq 1$

$\sim(\exists y\in\mathbb{R}; \underbrace{y<0\wedge y^2\leq 1}_{P(y)})\equiv \forall y\in\mathbb{R}; y\geq 0\vee y^2>1$

یادآوری: $\sim(p\wedge q)\equiv \sim p\vee \sim q$

مثال ۲۶) نقیض گزارهٔ " حاصل‌ضرب هر دو عدد اصم عددی گنگ است." به کدام صورت است؟

۱) حاصل‌ضرب هر دو عدد اصم، عددی گویا است.

۲) حاصل‌ضرب هر دو عدد اصم، عددی گویا یا گنگ است.

۳) حاصل‌ضرب برخی عددهای اصم، عددی گویا است. ✓

۴) حاصل‌ضرب برخی عددهای گنگ، عددی گویا یا گنگ است.

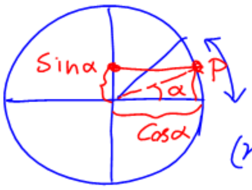
$\sim(\forall x,y\in Q'; \underbrace{xy\in Q'}_{P(x,y)})$

$\equiv \exists x,y\in Q'; \underbrace{xy\notin Q'}_{xy\in Q}$

مثال ۲۷) ارزش گزاره شرطی زیر را مشخص کرده و عکس نقیض آن را بنویسید.

$\underbrace{\overbrace{(\exists x\in\mathbb{Z}; x^2=16)}^{p}}_{(x=4)\ \text{د}}\Rightarrow\underbrace{\overbrace{(\forall x\in\mathbb{N}; x^2>1)}^{q}}_{(x=1)\ \text{ن}} \Longrightarrow \text{ن}$

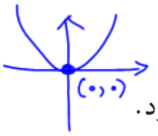
$\boxed{p\Rightarrow q \xrightarrow{\text{عکس نقیض}} \sim q\Rightarrow \sim p} \to (\exists x\in\mathbb{N}; x^2\leq 1)\Rightarrow(\forall x\in\mathbb{Z}; x^2\neq 16)$



۱ در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید، به‌طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند.

الف) $(0/1)^5 < (0/1)^3$

ب) اگر $0° < \alpha < 45°$، $\text{Sin}\alpha < \text{Cos}\alpha$.



پ) نمودار تابع $y=x^2$ از نقطهٔ (۰,۰) می‌گذرد.

ت) $-(x-4)^2 \leq 0$

$(x-4)^2 \geq 0 \to -(x-4)^2 \leq 0$

ث) تابع $y^2=x^2$ نیست زیرا زوج‌های (۲,۲) و (۲,−۲) در رابطهٔ $y^2=x^2$ صدق می‌کنند.

ج) اگر $x^2=a$ آن‌گاه $x=\pm\sqrt{a}$.


ابوالوفا محمد بوزجانی
(۳۸۸ــ۳۲۸ قمری)

۲ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

$\sim(p\Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$

الف) اگر $0<x<1$، آن‌گاه $x^2<x$. : $0<x<1$ است و $x^2 \geq x$ است.

ب) ابوالوفا محمد بوزجانی، ریاضی‌دان است. : ابوالوفا محمد بوزجانی، ریاضی‌دان نیست.

پ) $a\in\{b,c,d\}$: $a\notin\{b,c,d\}$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست.

$\sim(p\vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

۲ عددی زوج نیست و عدد π گویا نیست.

۳ ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(4+3=10) \wedge (2<3)$: ن

ب) $((-1)^2+1=0) \vee (5>3)$: د

پ) $(1\in\{2,3,4\}) \vee (\frac{1}{2}\neq\frac{3}{6})$: ن

ت) اگر عدد ۴ فرد باشد، آن‌گاه ۴ مربع کامل نیست. : د

ث) ۲ عدد اوّل نیست، اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است. : د

ج) $2>3 \Leftrightarrow -2<-3$: د

چ) اگر $a\in\{b\}$ آن‌گاه $a=b$ و برعکس.

$a\in\{b\} \Leftrightarrow a=b$: د زیرا درستی p، درستی q را نتیجه می‌دهد و برعکس و همچنین نادرستی p، نادرستی q را نتیجه می‌دهد و برعکس.

۴ جدول زیر را کامل کنید.

گزارهٔ p	گزارهٔ q	ارزش p	ارزش q	ارزش (p⇒q)	ارزش (p∧q)
عدد ۲ زوج است.	۳ > ۲	د	د	د	د
۲ عدد اول است	۱ ≮ ۲	د	ن	ن	ن
۲∈{۱,۲}	۴ عدد اول است	د	ن	ن	ن
۷∈{۱,۲}	عدد ۷ اوّل است.	ن	د	د	ن

۵ جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

الف) $p\wedge\sim q$ ← ۲ گزاره، $2^2=4$

p	q	~q	p∧~q
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن

ب) $\sim p\wedge p$ ← ۱ گزاره، $2^1=2$

p	~p	~p∧p
د	ن	ن
ن	د	ن

پ) $\sim p\vee p$ ← ۱ گزاره، $2^1=2$

p	~p	~p∨p
د	ن	د
ن	د	د

ت) $(p\vee q)\wedge\sim p$ ← ۲ گزاره، $2^2=4$

p	q	~p	p∨q	(p∨q)∧~p
د	د	ن	د	ن
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن

ث) $(p\vee q)\Leftrightarrow q$ ← ۲ گزاره، $2^2=4$

p	q	p∨q	(p∨q)⇔q
د	د	د	د
د	ن	د	ن
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

ج) $\sim p\Leftrightarrow\sim q$ ← ۲ گزاره، $2^2=4$

p	q	~p	~q	~p⇔~q
د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

۶ با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید که :

الف) $p\Rightarrow p\equiv T$

p	p	$p\Rightarrow p$	T
د	د	د	د
ن	ن	د	د

ب) $p\vee F\equiv p$

p	F	$p\vee F$
د	ن	د
ن	ن	ن

پ) $p\wedge T\equiv p$

p	T	$p\wedge T$
د	د	د
ن	د	ن

ت) $\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q$

$2^2=4$

p	q	$p\Rightarrow q$	$\sim(p\Rightarrow q)$	$\sim q$	$p\wedge\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	ن

ث) $p\wedge(q\vee p)\equiv p$

$2^2=4$

p	q	$q\vee p$	$p\wedge(q\vee p)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

ج) $p\vee(q\wedge p)\equiv p$

$2^2=4$

p	q	$q\wedge p$	$p\vee(q\wedge p)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

چ) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$

$2^3=8$

p	q	r	$q\Rightarrow r$	$p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	د	ن
د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د

ح) $\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Leftrightarrow q$

$2^2=4$

p	q	$p\Leftrightarrow q$	$\sim(p\Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p\Leftrightarrow q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	ن

۷ ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است.

اگر

فرض : p حکم : q

$p\Rightarrow q \equiv \sim q\Rightarrow\sim p$

عکس   نقیض   فرض   حکم

$\underset{\text{فرض}}{\sim q}: \; n\neq 3k \Rightarrow \begin{cases} n=3k+1 \to n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1=3k'+1 \\ n=3k+2 \to n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1=3k''+1 \end{cases} \to n^2\neq 3r : \underset{\text{حکم}}{\sim p}$

$n \mid 3$, k ; $0,1,2$

۸ گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای $\forall,\exists$ بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

$\forall n\in\mathbb{N};\ n=2k$ یا $n=2k+1$: د

اگر عدد طبیعی زوج نباشد، لزوماً فرد است.

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم : $a^2<0$.

$\exists a\in\mathbb{W};\ a^2<0$: ن

زیرا برای هر $a\in\mathbb{W}=\{0,1,2,\dots\}$ ، $a^2\geq 0$ است.

پ) همهٔ اعداد اوّل فرداند.

$\forall n\in P;\ n=2k+1$: ن

زیرا برای $n=2$ ، سور عمومی درست نیست.

ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به‌طوری که $۱-۲x>۵$

$\exists x\in\mathbb{Z}^+ ; 1-2x>5$: ن

زیرا برای این‌که $1-2x>5$ باشد، باید $x<-2$ باشد

$1-2x>5 \to -4>2x \to -2>x$

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است

$\forall x\in\mathbb{R}, x\neq 0 ; x+\frac{1}{x}\geq 2$: ن

برای $x=-1$، داریم $x+\frac{1}{x}=-2$

ج) به‌ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^۳=x$.

$\exists x\in\mathbb{R} ; x^3=x$: د

برای $x=0$، رابطهٔ $x^3=x$ درست است.

۹ هرگاه $A=\{x\in\mathbb{Z}|۰<x\leq ۵\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

$A=\{1,2,3,4,5\}$

الف) $\exists x\in A ; x+۴=۱۰$: نادرست، زیرا:

$x+4=10\to x=6 \to 6\notin A$

ب) $\forall x\in A ; x+۲\leq ۹$: $x+2\leq 9\to x\leq 7$: د

$x\leq 7\to \begin{cases} x=7 \\ \text{یا} \\ x<7 \ ✓ \end{cases}$

زیرا برای هر عضو A مانند x، $x\leq 7$ برقرار بود

پ) $\exists x\in A ; x+۳\leq ۴$: $x+3<4\to x<1$: ن

زیرا اعضای A، همگی بزرگ‌تر یا مساوی ۱ هستند

ت) $\forall x\in A ; x+۱\geq ۶$: $x+1\geq 6\to x\geq 5$: ن

زیرا برای $x=4$، رابطهٔ $x\geq 5$ نادرست است.

۱۰ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x\in\mathbb{R} ; \frac{x^۲-۱}{x-۱}=x+۱$: نادرست، زیرا برای $x=1$، $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{0}$ و تعریف نشده است.

$\sim\left(\forall x\in\mathbb{R} ; \frac{x^2-1}{x-1}=x+1\right)\equiv \exists x\in\mathbb{R} ; \frac{x^2-1}{x-1}\neq x+1$

ب) $\forall n\in\mathbb{N} ; (۲^n+۱)\in P$: نادرست، زیرا برای $n=3$، آنگاه $2^n+1=2^3+1=9$ و ۹ عددی اول نیست

$\sim\left(\forall n\in\mathbb{N} ; (2^n+1)\in P\right)\equiv \exists n\in\mathbb{N} ; 2^n+1\notin P$

پ) $\forall x\in(-\infty,۰) ; x-\frac{۱}{x}\leq -۲$: نادرست است، زیرا برای $x=-1$ داریم $x-\frac{1}{x}=-1+1=0 \nleq -2$ نیست

$\sim\left(\forall x\in(-\infty,0) ; x-\frac{1}{x}\leq -2\right)\equiv \exists x\in(-\infty,0) ; x-\frac{1}{x}>-2$

ت) $\exists y\in\mathbb{R} ; \frac{y-۳}{۵}=۰$: درست است و $\frac{y-3}{5}=0\to y-3=0\to y=3$

$\sim\left(\exists y\in\mathbb{R} ; \frac{y-3}{5}=0\right)\equiv \forall y\in\mathbb{R} ; \frac{y-3}{5}\neq 0$

درس ۲ : جبر مجموعه‌ها

۱) مفاهیم مقدماتی

$\in$

۱) مفهوم عضویت

اگر شیء a در مجموعهٔ A باشد، می‌گوییم a عضوی از مجموعهٔ A است و می‌نویسیم $a \in A$.

$A = \{a, \dots\}$

۲) مفهوم زیرمجموعه

اگر تمام عضوهای مجموعهٔ A در مجموعهٔ B باشد، می‌گوییم A زیرمجموعهٔ B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$. تعریف ریاضی این مفهوم به شکل یک سور ریاضی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$p \Rightarrow q$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x;(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$\subseteq$

اگر $A \subseteq B$ باشد به طوری که $A \neq B$، آن گاه A **زیرمجموعه محض یا سِره** B نامیده می شود.

بنابراین اگر $A \not\subseteq B$، مفهوم ریاضی آن، نقیض سور بالا خواهد بود:

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x;(x \in A \wedge x \notin B)$$

مثال ۱) اگر $A = \{۲\}$ ، $B = \{۳,۵,\{۲\}\}$ و $C = \{\{\{۲\},۳,۵\},۲\}$ باشند، کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

$\overbrace{B}^{}$: ۳عضو C: ۲عضو

عضوهای C : $\{\{۲\},۳,۵\}$, ۲

$B = \{A, \dots\}$

۱) $A \in B$ ✓

۲) $A \in C$ ✗

۳) $B \in C$ ✓

۴) $A \subseteq C$ ✓

مثال ۲) سه مجموعه A ، B و C مثال بزنید که $A \subseteq B$ ، $A \in C$ و $B \subseteq C$.

$A = \{۱\}$, $B = \{۱,۲\}$, $C = \{\underbrace{\{۱\}}_{A},۱,۲\}$

نکته: یک مجموعهٔ n عضوی، دارای ۲^n زیر مجموعه است که یکی از آن‌ها، تهی و دیگری خود آن مجموعه است. بنابراین یک مجموعهٔ n عضوی، $۲^n - ۱$ زیرمجموعهٔ سره و $۲^n - ۲$ زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی دارد.

مثال ۳) اگر به مجموعه A سه عضو اضافه شود، تعداد زیر مجموعه‌های آن ۲۲۴ واحد اضافه خواهد شد.

الف) مجموعه A چند عضو دارد؟

ب) مجموعه A چند زیرمجموعه دارد؟

پ) مجموعه A چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد؟

$A : n \xrightarrow{\text{۳عضو اضافه شود}} n+۳$

تعداد زیرمجموعه‌ها: $۲^n \xrightarrow{+۲۲۴} ۲^{n+۳}$

$۲^{n+۳} = ۲^n + ۲۲۴ \rightarrow ۲^n \times ۲^۳ = ۲^n + ۲۲۴ \xrightarrow{۲^n = x} ۸x = x + ۲۲۴ \rightarrow ۷x = ۲۲۴ \rightarrow x = ۳۲$

$۲^n = ۳۲ = ۲^۵ \rightarrow n = ۵$

الف) ۵عضوی

ب) $۲^۵ = ۳۲$

پ) $\binom{۵}{۳} = \frac{۵!}{۳! \times ۲!} = \frac{۵ \times ۴}{۲} = ۱۰$

مجموعهٔ توانی: مجموعهٔ توانی A را با $P(A)$ نشان می‌دهیم که شامل تمام زیرمجموعه‌های A می باشد. اگر A یک مجموعهٔ n عضوی باشد، $P(A)$ ، 2^n عضو خواهد داشت.

مثال ۴) مجموعهٔ توانی $A=\{a,\{a\},\varnothing\}$ را بنویسید.

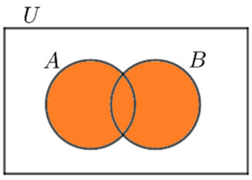
$$P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\varnothing\}, \{a,\{a\}\}, \{a,\varnothing\}, \{\{a\},\varnothing\}, \{a,\{a\},\varnothing\}\}$$

مثال ۵) مجموعهٔ توانی $A=\{a,\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$ چند عضو دارد؟

A : ۴ عضو $\longrightarrow$ $2^4=16$ عضو $P(A)$

۲) اعمال روی مجموعه‌ها

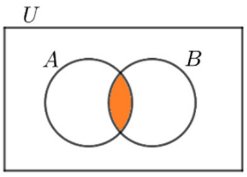
۱) اجتماع



$$A\cup B=\{x \mid x\in A \vee x\in B\}$$

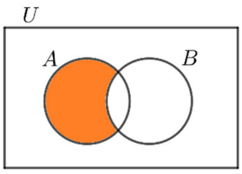
$$B\cup A=\{x \mid x\in B \vee x\in A\}$$

۲) اشتراک



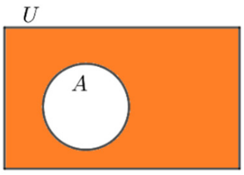
$$A\cap B=\{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$$

۳) تفاضل



$$A-B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$$

۴) متمم



$$A'=\{x\in U \mid x\notin A\}$$

با توجه به شکل‌های بالا، واضح است که:

۱) $A\cup B=B\cup A\ ,\ A\cap B=B\cap A$

۲) $(A')'=A$

۳) $A\subseteq A\cup B\ ,\ A\cap B\subseteq A$

تعریف زیرمجموعه به کمک نمادهای ریاضی

تعریف زیرمجموعه به کمک سورها انجام می‌شود:

$$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x;(x\in A \Rightarrow x\in B)$$
$$A\not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x;(x\in A \wedge x\notin B)$$

اثبات به روش عضوگیری

در این روش برای اثبات $A \subseteq B$ ، با توجه به تعریف بالا، فرض می‌کنیم $x \in A$ (که x عضو دلخواهی از A است) و نشان می‌دهیم که $x \in B$.

مثال ۶) با روش عضوگیری نشان دهید که :

الف) اگر $\underbrace{A \subseteq B \text{ و } B \subseteq C}_{\text{فرض}}$ ، آن گاه $\underbrace{\boxed{A \subseteq C}}_{\text{حکم}}$.

$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

$$\forall x: \left[x \in A \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \xrightarrow{B \subseteq C} x \in C\right] \Rightarrow A \subseteq C$$

؟ $(A \subseteq B : x \in A \Rightarrow x \in B \equiv x \notin B \Rightarrow x \notin A)$

ب) اگر $\underbrace{A \subseteq B}_{\text{فرض}}$ ، آن گاه $\underbrace{B' \subseteq A'}_{\text{حکم}}$.

$$x \in B' \Rightarrow x \notin B \xrightarrow[?]{A \subseteq B} x \notin A \Rightarrow x \in A'$$

پ) $\varnothing \subseteq A$.

$$\underbrace{x \in \varnothing}_{\text{ن}} \Rightarrow x \in A \quad : \quad >$$

ت) $A \subseteq A \cup B$.

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

ث) $A \cap B \subseteq A$.

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$$

ج) $A - B = A \cap B'$.

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in B'\} = A \cap B'$$

مثال ۷) برای مجموعه‌های A ، B ، C و D با مرجع U ثابت کنید که:

الف) اگر $\underbrace{A \subseteq B \text{ و } C \subseteq D}_{\text{فرض}}$ ، آن گاه $\underbrace{A \cup C \subseteq B \cup D}_{\text{حکم}}$.

$$x \in A \cup C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \\ \vee \qquad\qquad\quad \vee \\ x \in C \xrightarrow{C \subseteq D} x \in D \end{cases} \Rightarrow x \in B \cup D$$

ب) اگر $\underbrace{A \subseteq C \text{ و } B \subseteq C}_{\text{فرض}}$ ، آن گاه $\underbrace{A \cup B \subseteq C}_{\text{حکم}}$.

$$x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xrightarrow{A \subseteq C} x \in C \\ \vee \qquad\qquad\quad \vee \\ x \in B \xrightarrow[B \subseteq C]{} x \in C \end{cases} \Rightarrow x \in C$$

مثال ۸) نشان دهید که اگر $\underbrace{X \subseteq A \text{ و } X \subseteq A'}_{\text{فرض}}$ ، آنگاه $\underbrace{X = \varnothing}_{\text{حکم}}$.

$$\begin{cases} \varnothing \subseteq X \quad : \text{همیشه درست} \\ X \subseteq \varnothing \quad : \left[x \in X \xrightarrow[X \subseteq A']{X \subseteq A} \begin{cases} x \in A \\ \wedge \\ x \in A' \end{cases} \Rightarrow x \in \underbrace{A \cap A'}_{\varnothing} \Rightarrow x \in \varnothing\right] \end{cases} \Rightarrow X = \varnothing$$

نکته: برای اثبات تساوی دو مجموعه یعنی $A = B$ ، کافیست نشان دهیم که $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

مثال ۹) نشان دهید که $(A')' = A$.

$$\left[x \in A \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow x \in (A')'\right] \Rightarrow A \subseteq (A')'$$

$$\left[x \in (A')' \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow x \in A\right] \Rightarrow (A')' \subseteq A$$

$$\Rightarrow (A')' = A$$

مثال ۱۰) نشان دهید که اگر $A \subseteq B$ ، آن گاه $A - B = \varnothing$.

$\varnothing \subseteq A-B$: همیشه درست

$A-B \subseteq \varnothing$: $[x \in A-B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \xRightarrow{A \subseteq B} x \in B \wedge x \notin B \Rightarrow x \in \underbrace{B \cap B'}_{\varnothing} \Rightarrow x \in \varnothing]$

$\Longrightarrow A - B = \varnothing$

مثال ۱۱) نشان دهید که برای دو مجموعه A و B داریم : $A \cap B = B \cap A$.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} = \{x \mid x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A$ (استفاده از تعویض)

۳) قوانین مجموعه‌ها

برای مجموعه‌های A ، B و C قوانین زیر برقرار است. هر یک از این قوانین به کمک عضوگیری اثبات می‌شود.از این قوانین می توانیم برای اثبات یک مسئله در مجموعه‌ها مانند یک قضیه استفاده کنیم.

۱) قوانین مقدماتی:

الف) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$. خاصیت جابه‌جایی

ب) $A \cap A' = \varnothing$, $A \cup A' = U$.

پ) $A \cup U = U$, $A \cap U = A$.

ت) $A \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq A$ (B) (B)

۲) قانون دمورگان:

$(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$

۳) تبدیل تفاضل به اشتراک:

$A - B = A \cap B'$, $A \cap B = A - B'$

۴) قانون شرکت پذیری:

$$\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C \end{cases}$$

۴) قانون توزیع پذیری:

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

۵) قانون جذب:

$$\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$$

مثال ۱۲) به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید که :

جبر مجموعه‌ها : استفاده از قوانین مجموعه‌ها

الف) $(A \cup B) \cap (B' \cup A) = A$

$(A \cup B) \cap (B' \cup A) \underset{\text{پذیر}}{\overset{\text{توزیع}}{=}} A \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\varnothing} = A \cup \varnothing = A$

ب) $A - B = B' - A'$

$A - B = A \cap B' = B' \cap A = B' - A'$

پ) $(A-B)-C=(A-C)-B$

$$(A-B)-C=(A\cap B')-C=(A\cap B')\cap C'=(A\cap C')\cap B'=(A-C)\cap B' = (A-C)-B'$$

ت) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

$$(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'=\underbrace{(A\cap B)}_{M}\cap(A'\cup C')=M\cap(A'\cup C')=(M\cap A')\cup(M\cap C')$$

$$=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']=[\underbrace{\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cap B}_{\varnothing}]\cup[A\cap(B\cap C')]=A\cap(B-C)$$

ث) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

$$(A-C)\cup(B-C)=(A\cap C')\cup(B\cap C')=C'\cap(A\cup B)=(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C$$

مثال ۱۳) به کمک جبرمجموعه‌ها، قوانین جذب را ثابت کنید.

① $A\cup(A\cap B)=A$

اثبات: $A\cup(A\cap B)=(A\cap U)\cup(A\cap B)$

$=A\cap(U\cup B)$

$=A\cap U$

$=A$

② $A\cap(A\cup B)=A$

$A\cap(A\cup B)=(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)$

$=A\cup(\varnothing\cap B)$

$=A\cup\varnothing$

$=A$

مثال ۱۴) برای دو مجموعه A و B با مرجع U ثابت کنید که:

$$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B$$

فرض: $A\subseteq B \xrightarrow{\cup B} A\cup B\subseteq B\cup B \Rightarrow A\cup B\subseteq B \xrightarrow{B\subseteq A\cup B} A\cup B=B$

فرض: $A\cup B=B$ ، $\left(x\in A\Rightarrow x\in A\cup B \overset{\text{فرض}}{\Longrightarrow} x\in B\right)\Rightarrow A\subseteq B$

مثال ۱۵) اگر A و X دو مجموعه باشند به طوری که $A\subseteq X$ و $A'\subseteq X$ ، نشان دهید که $X=U$.

$$\begin{cases}A\subseteq X\\ A'\subseteq X\end{cases}\xrightarrow{\text{اجتماع}} A\cup A'\subseteq X\cup X\Rightarrow U\subseteq X\xrightarrow{X\subseteq U} X=U$$

مثال ۱۶) اگر A و X دو مجموعه باشند به طوری که $X\subseteq A$ و $X\subseteq A'$ ، نشان دهید که $X=\varnothing$.

$$\begin{cases}X\subseteq A\\ X\subseteq A'\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} X\cap X\subseteq A\cap A'\Rightarrow X\subseteq\varnothing\xrightarrow{\varnothing\subseteq X} X=\varnothing$$

مثال ۱۷) به کمک جبر مجموعه‌ها نشان دهید که اگر $\underbrace{A\cup B=A\cap B}_{\text{فرض}}$ ، آن گاه $\underbrace{A=B}_{\text{حکم}}$.

$$A\subseteq A\cup B \xrightarrow{\text{فرض}} A\subseteq A\cap B \xrightarrow[\text{همیشه برقرار}]{A\cap B\subseteq A} A\cap B=A \longrightarrow \boxed{A\subseteq B}$$

مشابهاً می‌توان ثابت کرد : $\boxed{B\subseteq A}$ ، پس $A=B$.

نکته: در حل مسائل سعی کنید از نمودار ون برای تشخیص و یا مشاهده درستی جواب استفاده کنید.

مثال ۱۸) اگر A و B دو مجموعهٔ باشند، به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید که $(A\cap B')-(B-A)=A-B$.

$$(A\cap B')-(B-A)=(A\cap B')\cap(B-A)'=(A\cap B')\cap(B\cap A')'=\underbrace{(A\cap B')}_{M}\cap(A\cup B')$$

$$=M\cap(A\cup B')=(M\cap A)\cup(M\cap B')=\left[(A\cap B')\cap A\right]\cup\left[(A\cap B')\cap B'\right]$$

$$=\left[\underbrace{(A\cap A)}_{A}\cap B'\right]\cup\left[A\cap\underbrace{(B'\cap B')}_{B'}\right]=(A\cap B')\cup(A\cap B')=A\cap B'=A-B$$

مثال ۱۹) اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل $A-(B-(A\cap B))$ را به کمک جبر مجموعه‌ها ساده کنید.

$$A-\left(B-(A\cap B)\right)=A-\left(B\cap(A\cap B)'\right)=A-\left(B\cap(A'\cup B')\right)=A\cap\left(B\cap(A'\cup B')\right)'$$

$$=A\cap\left(B'\cup(A\cap B)\right)=(A\cap B')\cup\left(\underbrace{A\cap(A\cap B)}_{\underbrace{(A\cap A)}_{A}\cap B}\right)=(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{U}$$

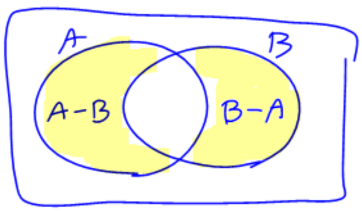
$$=A\cap U=A$$

مثال ۲۰) اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل $(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]$ را به کمک جبر مجموعه‌ها ساده کنید.

$$(A\cup B')\cap\left[(B\cap C)\cup\underbrace{(B'\cup A)}_{M}\right]=(A\cup B')\cap\left[(B\cup M)\cap(C\cup M)\right]=(A\cup B')$$

$$(A\cup B')\cap\left(\underbrace{\underbrace{\left[B\cup(B'\cup A)\right]}_{\underbrace{(B\cup B')}_{U}\cup A}}_{U}\cap\left[C\cup(B'\cup A)\right]\right)=\underbrace{(A\cup B')}_{N}\cap\left[C\cup\underbrace{(A\cup B')}_{N}\right]\overset{\text{جذب}}{=}\underbrace{A\cup B'}_{N}$$

مثال ۲۱) اگر A و B دو مجموعهٔ باشند، به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید که $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$.



$$(A-B)\cup(B-A)=A\,\Delta\,B$$

اثبات : $(A-B)\cup(B-A)=\underbrace{(A\cap B')}_{M}\cup(B\cap A')$

$$=M\cup(B\cap A')=(M\cup B)\cap(M\cup A')$$

$$=\left[(A\cap B')\cup B\right]\cap\left[(A\cap B')\cup A'\right]$$

$$=\left[(A\cup B)\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{U}\right]\cap\left[\underbrace{(A\cup A')}_{U}\cap(B'\cup A')\right]=(A\cup B)\cap(A'\cup B')=(A\cup B)-(A\cap B)$$

مثال ۲۲) اگر A و B و C سه مجموعهٔ باشند به طوری که $\underbrace{A\cup B=A\cup C\ ,\ A\cap B=A\cap C}_{\text{فرض}}$ ، به کمک جبر مجموعه‌ها نشان دهید که $\overset{\text{حکم}}{B=C}$.

اثبات: $B \overset{\text{جذب}}{=} B\cup(A\cap B) \overset{\text{فرض}}{=} B\cup(A\cap C)$

$= (B\cup A)\cap(B\cup C) \overset{\text{فرض}}{=} (A\cup C)\cap(B\cup C)$

$= C\cup(A\cap B) \overset{\text{فرض}}{=} C\cup(A\cap C) \overset{\text{جذب}}{=} C$

خاصیت حذفی برقرار نیست (به تنهایی)

$A\cup B=A\cup C \not\Rightarrow B=C$: $\{1,2\}$ ، $\{1\}$ ، $\{1,2\}$ ، $\{2\}$

$A\cap B=A\cap C \not\Rightarrow B=C$: $\{1\}$ ، $\{1,2\}$ ، $\{1\}$ ، $\{1,5\}$

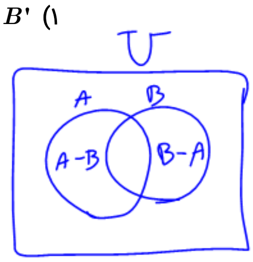
نکته: در حل مسائل تستی، سعی کنید از نمودار ون استفاده کنید. در مجموعه مرجع، به تعداد مجموعه‌های داده شده، مجموعه‌ها را طوری رسم کنید که هر مجموعه با مجموعه دیگر اشتراک داشته باشد.

روش‌های قابل استفاده: ۱) عضوگیری ۲) مبحث جبر مجموعه ۳) نمودار ون ← سایه زدن / عضوگیری

مثال ۲۳) اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، $(A\cap B')-(B-A)$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) B' ۲) $\varnothing$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A-B$ ✓

$(A\cap B')-(B-A) \overset{\text{جبر مجموعه‌ها}}{=} (A-B)-(B-A) \overset{\text{نمودار ون}}{=} A-B$



مثال ۲۴) متمم مجموعهٔ $[A-(A-B)]\cup(A\cap B)'$ کدام است؟

۱) A ۲) B' ۳) $A'\cup B'$ ۴) $\varnothing$ ✓

$\underbrace{[A-(A-B)]}_{(A\cap B)}\cup(A\cap B)' = (A\cap B)\cup(A\cap B)' = U \xrightarrow{\text{متمم}} (U)'=\varnothing$

(با کمک نمودار ون)

مثال ۲۵) اگر A ، B و C مجموعه‌های ناتهی و $A\subseteq B$ ، آن‌گاه مجموعهٔ $(A\cap(B-C))-(A\cap B\cap C)$ کدام است؟

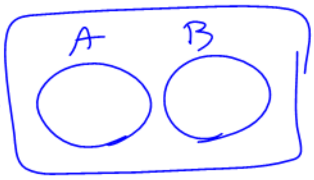
۱) $A\cap C'$ ✓   ۲) $A\cap C$ ۳) A ۴) B

$(A\cap(B-C))-(A\cap B\cap C) = (A\cap(B\cap C'))-(A\cap B\cap C) = ((A\cap B)\cap C')-((A\cap B)\cap C)$

$\dfrac{A\subseteq B}{(A\cap B=A)}$ $(A\cap C')-(A\cap C) = (A\cap C')$

جدا هستند

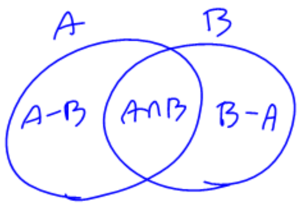
$(A-B=A)$



مثال ۲۶) اگر $\underbrace{A\cap B'=B\cap A'}_{\text{فرض}}$ ، حاصل $\underbrace{(A\cup B)-(A\cap B)}_{\text{ساده شود}}$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $A-B$ ۴) $\varnothing$ ✓

$A\cap B'=B\cap A' \Rightarrow A-B=B-A \xRightarrow{\cup(A\cap B)} \underbrace{(A-B)\cup(A\cap B)}_{A}=\underbrace{(B-A)\cup(A\cap B)}_{B} \Rightarrow A=B$

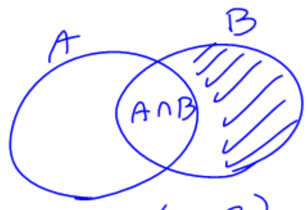


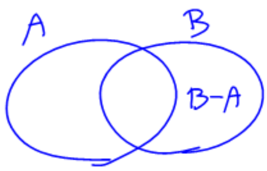
$(A\cup B)-(A\cap B) \overset{A=B}{=} (A\cup A)-(A\cap A) = A-A=\varnothing$

مثال ۲۷) اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، حاصل $A-(B-(A\cap B))$ کدام مجموعه است؟

۱) A ✓   ۲) B ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

$$A-(\underbrace{B-(A\cap B)}_{B-A}) \overset{\text{ون}}{=} A-(B-A) \overset{\text{ون}}{=} A$$





مثال ۲۸) اگر $A\cap B=A\cap C$ و $B'-A=C'-A$ ، کدام نتیجه گیری صحیح است؟

۱) $A=C$ ۲) $B=C$ ✓   ۳) $A=B$ ۴) $A=B=C$

$$\begin{cases} A\cap B=A\cap C & (1) \\ B'-A=C'-A \rightarrow B'\cap A'=C'\cap A' \xrightarrow{\text{متمم}} (B'\cap A')'=(C'\cap A')' \Rightarrow A\cup B=A\cup C & (2) \end{cases}$$

$$(1),(2) \xrightarrow{\text{فرض}} B=C$$

۵) ضرب دکارتی

۱) مفهوم ضرب دکارتی

ضرب دکارتی مجموعهٔ A در مجموعهٔ B را با $A\times B$ نشان می‌دهیم که مجموعهٔ شامل تمام زوج‌های مرتبی مانند (x,y) است که $x\in A$ و $y\in B$.

به عبارت دیگر:

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A \wedge y\in B\}$$

و معمولاً به جای $A\times A$ می‌نویسیم A^2.

مثال ۲۹) اگر $A=\{2k-1\,|\,k\in\mathbb{Z}\,,\,0\le k\le 2\}$ و $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}, x^2\le 9\}$ ، مجموعه‌های A^2 و $A\times B$ را با نوشتن اعضای آن‌ها مشخص کنید.

$$A=\{2k-1\,|\,k\in\mathbb{Z}\,,\,\underbrace{0\le k\le 2}_{k=0,1,2}\}=\{-1,1,3\}$$

$$B=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}\,,\,x^2\le 9\}=\{1,2,3\}$$

$$A^2=A\times A=\{-1,1,3\}\times\{-1,1,3\}=\{(-1,-1),(-1,1),(-1,3),(1,-1),(1,1),(1,3),(3,-1),(3,1),(3,3)\}$$

$$A\times B=\{-1,1,3\}\times\{1,2,3\}=\{(-1,1),(-1,2),(-1,3),(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

۲) قضیه‌های مهم در ضرب دکارتی

اگر A و B دو مجموعه باشند و منظور از $n(A)$ و $n(B)$ تعداد اعضای آن‌ها باشد، همواره داریم:

۱) $n(A\times B)=n(A)\times n(B)$

۲) $A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing$

۳) $A\times B=B\times A \Leftrightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee A=B$

ضرب دکارتی نسبت به تفاضل، اجتماع و اشتراک دو مجموعه، از هر دو طرف توزیع پذیر است:

۴) $A\times(B\overset{\cup}{\underset{\cap}{-}}C)=(A\times B)\overset{\cup}{\underset{\cap}{-}}(A\times C)$; $(B\overset{\cup}{\underset{\cap}{-}}C)\times A=(B\times A)\overset{\cup}{\underset{\cap}{-}}(C\times A)$

اگر A، B، C و D چهارمجموعهٔ غیر تهی باشند، همواره داریم:

۵) $A\times B=C\times D \Leftrightarrow A=C \wedge B=D$

۶) $A\times B\subseteq C\times D \Leftrightarrow A\subseteq C \wedge B\subseteq D$

اگر A، B، C و D چهارمجموعه باشند، همواره داریم:

۷) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$

بنابراین:

۸) $(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)\times(B\cap A)=(A\cap B)^2$

پس **تعداد اعضای مشترک** $A\times B$ و $B\times A$ برابر با مربع تعداد اعضای $A\cap B$ می‌باشد.

مثال ۳۰) اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{1,2\}$، آن‌گاه $A^2-A\times B$ چند عضو دارد؟

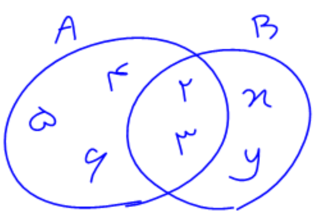
۱) ۶   ۲) ۰   ۳) ۱   ۴) ۳ ✓

روش اول) تشریحی ، A^2 و $A\times B$ را محاسبه و سپس تفاضل آن‌ها را به دست آوریم.

روش دوم) $A^2-A\times B=A\times A-A\times B=\underbrace{A}_{\text{۳ عضو}}\times(\underbrace{A-B}_{\text{۱ عضو}})$: $3\times 1=3$ عضو

مثال ۳۱) اگر $A=\{2,3,4,5,6\}$، $A\cap B=\{2,3\}$ و مجموعهٔ $(A-B)\times(B-A)$ دارای ۶ عضو باشد، تعداد عضوهای B کدام است؟

۱) ~~۶~~ ۴ ✓   ۲) ۰   ۳) ۱   ۴) ۳



$(\underbrace{A-B}_{3})\times(B-A)$: ۶ $\Longrightarrow n(B-A)=2$

$\Longrightarrow \boxed{n(B)=4}$

مثال ۳۲) اگر $A=\{y+2,5,z\}$ و $B=\{x+1,4,-2\}$، در این صورت با فرض $A\times B=B\times A$، مقادیر z,y,x را به دست آورید.

$A\times B=B\times A \Longrightarrow \begin{cases} A=\varnothing & \times \\ B=\varnothing & \times \\ A=B \longrightarrow \{y+2,5,z\}=\{x+1,4,-2\} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+1=5\to x=4 \\ 4=z \text{ و } -2=y+2 \\ 4=y+2 \text{ و } -2=z \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} x=4 \\ z=4 , y=-4 & (1) \\ z=-2 , y=2 & (2) \end{cases}$

۳) نمودارهای ضرب دکارتی

$A\times B$: نمودار

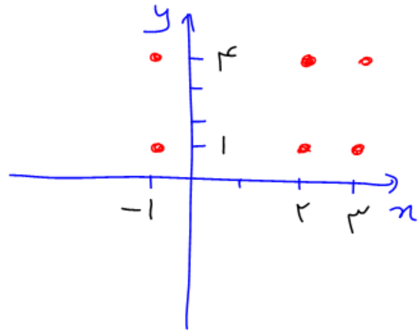
A: تصویر روی محور xها

B: تصویر روی محور yها

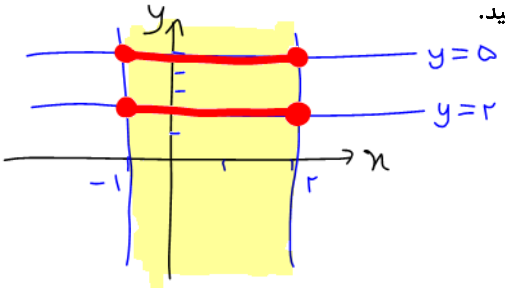
مثال ۳۳) اگر $A=\{-۱,۲,۳\}$ و $B=\{۱,۴\}$ باشند، نمودار $A\times B$ را رسم کنید.

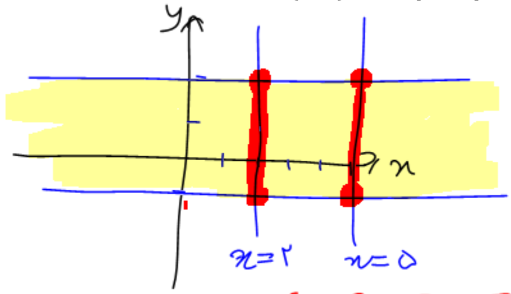
$A\times B=\overbrace{\{-1,2,3\}}^{3}\times\overbrace{\{1,4\}}^{2} \rightarrow 3\times 2=$ ۶ نقطه

$=\{(-1,1),(-1,4),(2,1),(2,4),(3,1),(3,4)\} \xrightarrow{\text{رسم}}$



مثال ۳۴) اگر $A=[-۱,۲]$ و $B=\{۲,۵\}$ باشند، نمودارهای $A\times B$ و $B\times A$ را رسم کنید.





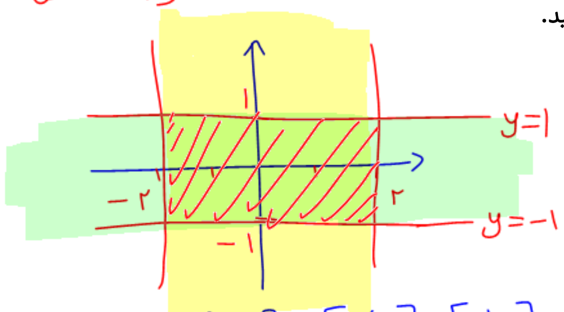
$A\times B=[-1,2]\times\{2,5\}$

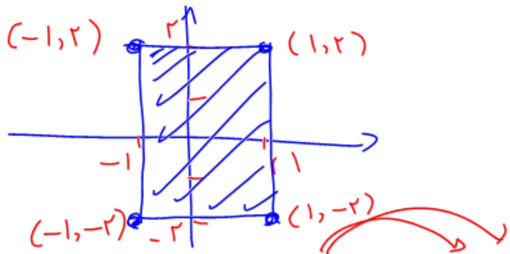
تصویر روی محور xها   تصویر روی محور yها

$B\times A=\{2,5\}\times[-1,2]$

$\downarrow x \quad \downarrow y$

مثال ۳۵) اگر $A=[-۲,۲]$ و $B=[-۱,۱]$ باشد، نمودارهای $A\times B$ و $B\times A$ را رسم کنید.



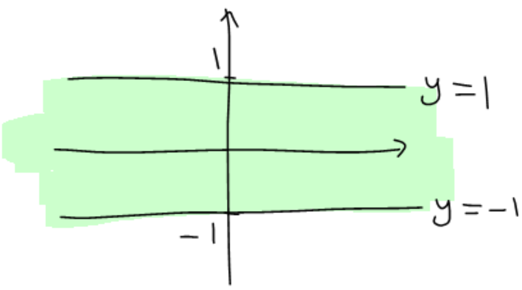


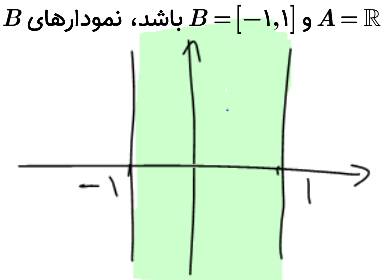
$A\times B=[-2,2]\times[-1,1]$

$\downarrow x \quad \downarrow y$

$B\times A=[-1,1]\times[-2,2]$

مثال ۳۶) اگر $A=\mathbb{R}$ و $B=[-۱,۱]$ باشد، نمودارهای $A\times B$ و $B\times A$ را رسم کنید.

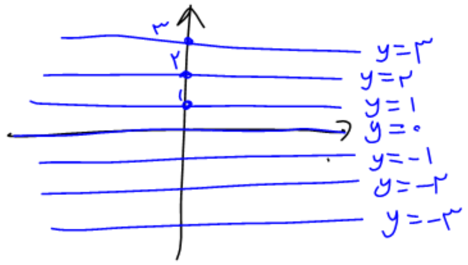


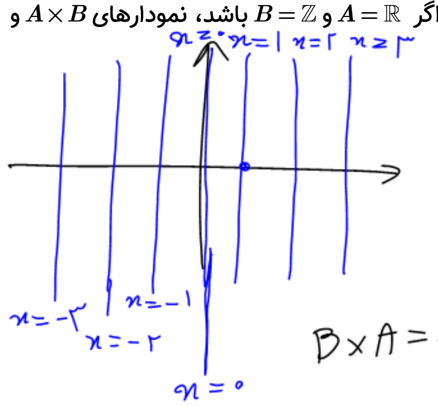


$A\times B=\mathbb{R}\times[-1,1]$

$B\times A=[-1,1]\times\mathbb{R}$

مثال ۳۷) اگر $A=\mathbb{R}$ و $B=\mathbb{Z}$ باشد، نمودارهای $A\times B$ و $B\times A$ را رسم کنید.





$A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$

$B\times A=\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$

پایه : یازدهم   رشته : ریاضی

جناب استاد : محمود داورزنی

تمرین

۱ کدام یک از مجموعه‌های زیر باهم مساوی‌اند؟

$A=B=D$

$C=E$

$A=\{m\in\mathbb{Z} \mid |m|<۲\}$ $\quad |m|<2 \to -2<m<2 \to A=\{-1,0,1\}$

$B=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^۳=x\}$ $\quad x^3=x \to x^3-x=0 \to x(x^2-1)=0 \to B=\{-1,0,1\}$

$C=\{y\in\mathbb{Z} \mid y^۲\leq ۲y\}$ $\quad y^2\leq 2y \to y^2-2y\leq 0 \to y(y-2)\leq 0 \to 0\leq y\leq 2 \to C=\{0,1,2\}$

$D=\{m\in\mathbb{Z} \mid m^۲\leq ۱\}$ $\quad m^2\leq 1 \to -1\leq m\leq 1 \to D=\{-1,0,1\}$

$E=\{m\in\mathbb{Z} \mid m^۳+۲m=۳m^۲\}$ $\quad m^3-3m^2+2m=0 \to m(m^2-3m+2)=0 \to \begin{cases} m=0 \\ m^2-3m+2=0 \end{cases}$

$(m-2)(m-1)=0 \to m=1,2 \to E=\{0,1,2\}$

۲ اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعهٔ A چند زیرمجموعه دارد؟

n عضو $: A \xrightarrow{\text{۲ عضو کم شود}}$ $n-2$ عضو

2^n زیرمجموعه $\xrightarrow{-384} 2^{n-2}$

$2^n=?$

$2^n-384=2^{n-2} \to 2^n-384=\frac{2^n}{4} \xrightarrow{2^n=x} x-384=\frac{x}{4}$

$\to x-\frac{x}{4}=384 \to \frac{3}{4}x=384 \to x=512 \to 2^n=512$

۳ اگر $A=\{۲\,,x+۲y\,,۴\}$ و $B=\{۴\,,۵\,,x-y\}$ و $A=B$ در این صورت، مقادیر x و y را بیابید.

$A=B \Rightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ x+2y=5 \end{cases} \to \begin{cases} -x+y=-2 \\ x+2y=5 \end{cases} \xrightarrow{+} 3y=3 \to y=1$

$x-y=2 \xrightarrow{y=1} x-1=2 \to x=3$

۴ ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B با مرجع U داریم : $A-B\subseteq A$.

به روش عضو‌گیری :

$\forall x: \left(x\in A-B \Rightarrow x\in A \wedge x\notin B \Rightarrow x\in A\right) \Rightarrow A-B\subseteq A$

۵ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید : اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه : در هر دو مورد از روش عضوگیری استفاده می‌کنم:

الف) $A\cup C\subseteq B\cup C$

$\forall x: \left(x\in A\cup C \Rightarrow \begin{cases} x\in A \xrightarrow{A\subseteq B} x\in B \\ \vee \qquad\qquad \vee \\ x\in C \Rightarrow x\in C \end{cases} \Rightarrow x\in B\cup C\right) \Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup C$

ب) $A\cap C\subseteq B\cap C$

$\forall x: \left(x\in A\cap C \Rightarrow \begin{cases} x\in A \xrightarrow{A\subseteq B} x\in B \\ \wedge \qquad\qquad \wedge \\ x\in C \Rightarrow x\in C \end{cases} \Rightarrow x\in B\cap C\right) \Rightarrow A\cap C\subseteq B\cap C$

۶ مجموعه‌های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید، ثابت کنید : اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه : به روش عضوگیری داریم:

الف) $A\cap C\subseteq B\cap D$

$\forall x: \left(x\in A\cap C \Rightarrow \begin{cases} x\in A \xrightarrow{A\subseteq B} x\in B \\ \wedge \qquad\qquad \wedge \\ x\in C \xrightarrow{C\subseteq D} x\in D \end{cases} \Rightarrow x\in B\cap D\right) \Rightarrow A\cap C\subseteq B\cap D$

ب) $A\cap C\subseteq B\cup D$

$\forall x: \left(x\in A\cap C \Rightarrow \begin{cases} x\in A \xrightarrow{A\subseteq B} x\in B \\ \wedge \qquad\qquad \wedge \\ x\in C \xrightarrow{C\subseteq D} x\in D \end{cases} \Rightarrow x\in B \wedge x\in D \Rightarrow x\in B \vee x\in D \Rightarrow x\in B\cup D\right)$

$\Rightarrow A\cap C\subseteq B\cup D$

۷ الف) فرض کنید : $A\subseteq\varnothing$ ثابت کنید : $A=\varnothing$.

$$\begin{cases}\varnothing\subseteq A & (\text{همیشه درست})\\ A\subseteq\varnothing & (\text{فرض})\end{cases}\Longrightarrow A=\varnothing$$

ب) فرض کنید $U\subseteq A$ ثابت کنید : $A=U$.

$$\begin{cases}A\subseteq U & (\text{همیشه درست})\\ U\subseteq A & (\text{فرض})\end{cases}\Longrightarrow A=U$$

۸ هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A\cap B=\varnothing$ در این صورت ثابت کنید :

الف) $B-A=B$

$$\begin{cases}① & B-A\subseteq B & (\text{همیشه درست})\\ ② & B\subseteq B-A\end{cases}$$

$$②=\text{ث ب}:\left(x\in B\xrightarrow{A\cap B=\varnothing}x\notin A\Rightarrow x\in B\wedge x\notin A\Rightarrow x\in B-A\right)\Rightarrow B\subseteq B-A$$

$$①,②\Rightarrow B-A=B$$

ب) $B\subseteq A'$

$$\forall x:\left(x\in B\xrightarrow{A\cap B=\varnothing}x\notin A\Rightarrow x\in A'\right)\Rightarrow B\subseteq A'$$

۹ با استفاده از تعریف اشتراک، اجتماع و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترکیب عطفی و فصلی در گزاره‌ها، هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$

$$p\wedge q\equiv q\wedge p$$

$$A\cap B=\{x\in U\mid \underbrace{x\in A}_{p}\wedge\underbrace{x\in B}_{q}\}=\{x\in U\mid x\in B\wedge x\in A\}=B\cap A$$

ب) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

$$p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r$$

$$A\cap(B\cap C)=\{x\in U\mid x\in A\wedge x\in(B\cap C)\}=\{x\in U\mid \underbrace{x\in A}_{p}\wedge(\underbrace{x\in B}_{q}\wedge\underbrace{x\in C}_{r})\}$$

$$=\{x\in U\mid (x\in A\wedge x\in B)\wedge x\in C\}=\{x\in U\mid x\in(A\cap B)\wedge x\in C\}=(A\cap B)\cap C$$

پ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$$

$$A\cap(B\cup C)=\{x\in U\mid x\in A\wedge x\in(B\cup C)\}=\{x\in U\mid \underbrace{x\in A}_{p}\wedge(\underbrace{x\in B}_{q}\vee\underbrace{x\in C}_{r})\}$$

$$=\{x\in U\mid (x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\}=\{x\in U\mid x\in(A\cap B)\vee x\in(A\cap C)\}$$

$$=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

۱۰ درستی هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=A$

سمت چپ: $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=A\cap\underbrace{(B\cup B')}=A\cap U=A$: سمت راست

ب) $(A'\cap B')\cap A=\varnothing$

$$(A'\cap B')\cap A=(B'\cap A')\cap A=B'\cap\underbrace{(A'\cap A)}=B'\cap\varnothing=\varnothing$$

پ) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$ $\quad (A\cap B)\cap\underbrace{(A\cap C)}_{D}\overset{\text{شرکت}}{\underset{\text{پذیری}}{=}}A\cap(B\cap\underbrace{(A\cap C)}_{D})\overset{\text{شرکت}}{\underset{\text{پذیری}}{=}}A\cap((B\cap A)\cap C)\overset{\text{جابجایی}}{=}A\cap((A\cap B)\cap C)$

$$\overset{\text{شرکت}}{\underset{\text{پذیری}}{=}}A\cap(A\cap(B\cap C))\overset{\text{شرکت}}{\underset{\text{پذیری}}{=}}(A\cap A)\cap(B\cap C)=A\cap(B\cap C)$$

ت) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$ $\quad ,\ (A\cup B)\cup\underbrace{(A\cup C)}_{D}=A\cup(B\cup\underbrace{(A\cup C)}_{D})=A\cup((B\cup A)\cup C)$

$$=A\cup((A\cup B)\cup C)=A\cup(A\cup(B\cup C))=(A\cup A)\cup(B\cup C)=A\cup(B\cup C).$$

۱۱ هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید: $\quad B\cap A\subseteq B\cup A$

الف) $(A'\cap B)\cup([(B\cap A)-B']\cap(B\cup A))=(A'\cap B)\cup([(B\cap A)\cap B]\cap(B\cup A))$

$$=(A'\cap B)\cup((B\cap A)\cap(B\cup A))=(A'\cap B)\cup(B\cap A)=B\cap\underbrace{(A'\cup A)}_{U}=B\cap U=B.$$

ب) $(A\cup B)-B$ $\quad =(A\cup B)\cap B'=(A\cap B')\cup\underbrace{(B\cap B')}=(A'\cap B)\cup\varnothing=A'\cap B=B\cap A'=B-A$

پ) $[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)=[(A\cup B)\cap A']\cup(A\cap B)=[\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup(B\cap A')]\cup(A\cap B)$

$$=(B\cap A')\cup(A\cap B)=B\cap\underbrace{(A'\cup A)}_{U}=B\cap U=B$$

۱۲ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\underbrace{(A\subseteq X)\wedge(A'\subseteq X)}_{\text{فرض}}\Rightarrow\underbrace{X=U}_{\text{حکم}}$

$$\left\{\begin{array}{l}A\subseteq X\\ \wedge\\ A'\subseteq X\end{array}\right.\xrightarrow{\text{اجتماع}}\left.\begin{array}{l}\underbrace{A\cup A'}\subseteq X\cup X\Rightarrow U\subseteq X\\ \text{(همیشه درست)}\ X\subseteq U\end{array}\right\}\Rightarrow X=U$$

ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

$$(A-B)\cup(A\cap B)=(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{U}=A\cap U=A$$

پ) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

$$(A-C)\cap(B-C)=(A\cap C')\cap(B\cap C')=C'\cap(A\cap B)=(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C$$

ت) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

$$(A-B)\cup(B-A)=\underbrace{(A\cap B')}_{M}\cup(B\cap A')=M\cup(B\cap A')=(M\cup B)\cap(M\cup A')=\big((A\cap B')\cup B\big)\cap\big((A\cap B')\cup A'\big)$$

$$=\big((A\cup B)\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{U}\big)\cap\big(\underbrace{(A\cup A')}_{U}\cap(A'\cup B')\big)=(A\cup B)\cap(A'\cup B')=(A\cup B)-(A'\cup B')'=(A\cup B)-(A\cap B)$$

ث) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')=\varnothing$

$$(A\cup B)\cap(A'\cap B')=\underbrace{(A\cup B)}_{M}\cap(A\cup B)'=M\cap M'=\varnothing$$

ج) $[\underbrace{(A\cup B)=(A\cup C)\wedge(A\cap B)=(A\cap C)}_{\text{فرض}}]\Rightarrow\underbrace{B=C}_{\text{حکم}}$

$$B\overset{\text{جذب}}{=}B\cap(A\cup B)\overset{\text{فرض}}{=}B\cap(A\cup C)\overset{\text{توزیع}}{=}(B\cap A)\cup(B\cap C)\overset{\text{فرض}}{=}(A\cap C)\cup(B\cap C)\overset{\text{توزیع}}{=}C\cap(A\cup B)$$

$$\overset{\text{فرض}}{=}C\cap(A\cup C)\overset{\text{جذب}}{=}C$$

۱۳ اگر $A=\{y+۲,۵,z\}$ و $B=\{x+۱,۴,-۲\}$ در این صورت، با فرض $A\times B=B\times A$ بیشترین مقدار برای $(x+y+z)$ را بیابید.

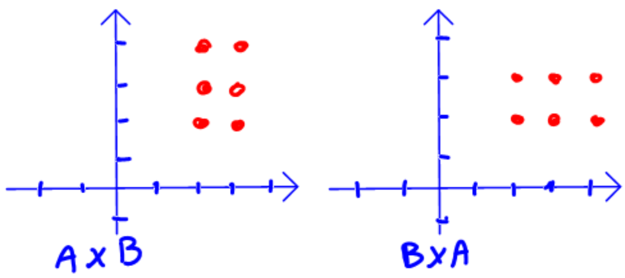
$A\times B=B\times A\Rightarrow$
- $A\overset{?}{=}\varnothing$ غیرممکن
- $B\overset{?}{=}\varnothing$ غیرممکن
- $A\overset{?}{=}B$ ✓ $\longrightarrow\{y+۲,۵,z\}=\{x+۱,۴,-۲\}\longrightarrow ۵=x+۱\rightarrow \boxed{x=۴}$

حالت اول) $y+۲=۴,\ z=-۲\longrightarrow \boxed{y=۲,z=-۲}\xrightarrow{x=۴} x+y+z=۴+\cancel{۲}-\cancel{۲}=۴$ $\Rightarrow \boxed{x+y+z=۴}$

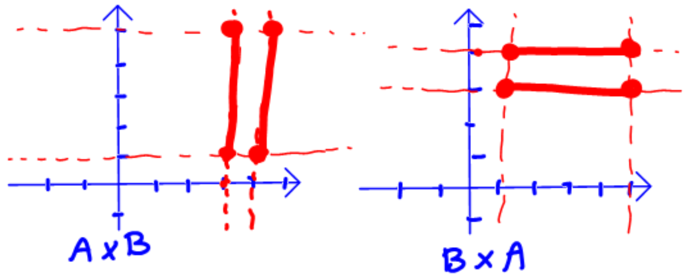
حالت دوم) $z=۴,\ y+۲=-۲\longrightarrow \boxed{z=۴,y=-۴}\xrightarrow{x=۴} x+y+z=۴-\cancel{۴}+\cancel{۴}=۴$

۱۴ با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هر یک از حاصل‌ضرب‌های $A\times B$ و $B\times A$ را رسم کنید.

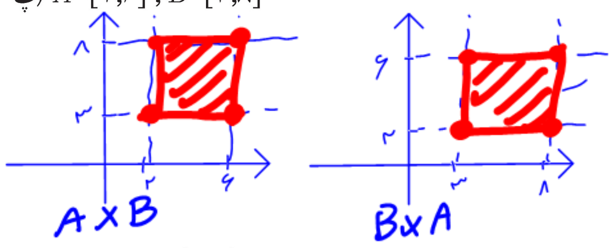
الف) $A=\{۲,۳\}, B=\{۲,۳,۴\}$



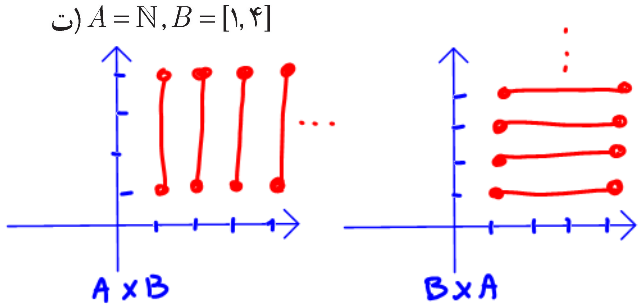
ب) $A=\{۳,۴\}, B=(۱,۵]$



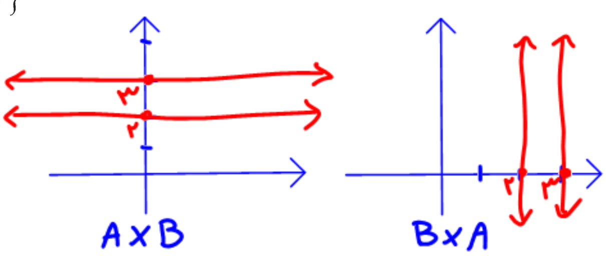
پ) $A=[۲,۶], B=[۳,۸]$



ت) $A=\mathbb{N}, B=[۱,۴]$



ث) $A=\mathbb{R}, B=\{۲,۳\}$



پویش علمی جهاد

درس ۱ : مبانی احتمال

۱) مفاهیم مقدماتی

آزمایش تصادفی

۱) فضای نمونه

مجموعهٔ همهٔ نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی را فضای نمونهٔ آن آزمایش نامیده و معمولاً آن را با S نشان می‌دهیم.

۲) پیشامد تصادفی

هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد تصادفی می‌گوییم. A ، B و ...

مثال ۱) در پرتاب یک تاس، فضای نمونه‌ای و پیشامد اول بودن اعداد رو شده را بنویسید.

$S=\{1,2,\dots,6\}$, $A=\{2,3,5\}$

نکته : اگر چند آزمایش ساده به نام‌های $S_1,S_2,\dots,S_n$ ، به طور همزمان انجام شوند، اعضای فضای نمونه آزمایش حاصل به نام S ، از مرتب نوشتن وقوع هر کدام از آزمایش‌ها، انجام می‌شود و تعداد اعضای آن عبارتست از:

$$n(S)=n(S_1)\times n(S_2)\times\cdots\times n(S_n)$$

مثال ۲) در پرتاب دو تاس به طور همزمان، مطلوبست تعیین :

الف) فضای نمونه و تعداد اعضای آن

$S=\{(1,1),\dots,(1,6),\dots,(6,1),\dots,(6,6)\} \to n(S)=6\times6=36$

ب) پیشامد این‌که مجموع اعداد روشده، ۷ باشد.

$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

پ) پیشامد این‌که اعداد روشده در تاس اول از اعداد روشده در تاس دوم بزرگتر باشند.

$B=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),\dots,(5,4),(6,1),\dots,(6,5)\}$

$\to n(B)=1+2+\dots+5=\frac{5\times6}{2}=15$

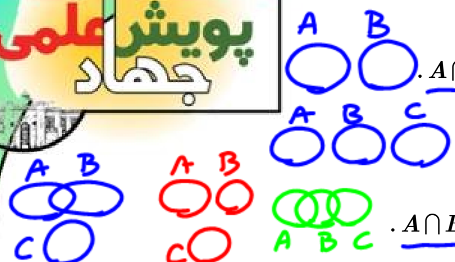
مثال ۳) یک تاکسی، ۴ نفر ظرفیت مسافر دارد. اگر یک راننده در مسیر رفت مجبور باشد حداقل یک مسافر سوار کند، فضای نمونهٔ تعداد مسافران در مسیر رفت و برگشت را بنویسید. این فضا چند عضو دارد و یکی از اعضای آن را نوشته و تعبیر کنید.

$S=\underbrace{\{1,2,3,4\}}_{\text{تعداد مسافرین در مسیر رفت}}\times\underbrace{\{0,1,2,3,4\}}_{\text{تعداد مسافرین در مسیر برگشت}} \Rightarrow n(S):\ \underset{\text{(۱،۲،۳ یا ۴ مسافر)}}{\frac{4}{\text{رفت}}}\times\underset{\text{(۰،۱،۲،۳ یا ۴ مسافر)}}{\frac{5}{\text{برگشت}}}=4\times5=20$

مثال ۴) علی و احمد با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می‌کنند. فضای نمونه چند عضو دارد و در چه تعداد از برآمدها احمد برندهٔ بازی است؟

$n(S)=\frac{3}{\text{برآمد احمد}}\times\frac{3}{\text{برآمد علی}}=3\times3=9$

در ۳ حالت احمد برنده است. $\leftarrow$ {(سنگ و کاغذ)، (کاغذ و قیچی)، (قیچی و سنگ)} = (احمد برنده است) A



۳) پیشامدهای ناسازگار

(مجزا)

۱) دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه اشتراکی نداشته باشند، به عبارت دیگر $A\cap B=\varnothing$.

۲) سه پسشامد A، B و C را دوبه‌دو ناسازگار می‌گوییم، هرگاه $A\cap B=A\cap C=B\cap C=\varnothing$ ، یعنی اشتراک دوبه‌دوی آنها تهی باشد.

۳) سه پیشامد A، B و C ناسازگارند، هرگاه هر سهٔ آنها اشتراکی نداشته باشند، یعنی $A\cap B\cap C=\varnothing$.

مثال ۵) در پرتاب دو تاس، اگر A پیشامد مجموع دو تاس۵، B پیشامد متوالی بودن اعداد رو شده و C پیشامد زوج آمدن اعداد رو شده باشند، کدام‌یک از پیشامدهای زیر، سازگار و کدام‌یک ناسازگارند؟

A : مجموع ۵
B : متوالی بودن
C : زوج بودن اعداد

۱) A و B — سازگارند، زیرا (۲,۳) در A و B قرار دارد.

۲) A و C — ناسازگارند، زیرا دو عدد زوج نمی‌توانند مجموع ۵ داشته باشند.

۳) C و B — ناسازگارند، زیرا دو عدد متوالی نمی‌توانند هر دو زوج باشند.

مثال ۶) سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد هر سه بار مشابه و B پیشامد زوج بار رو باشند، آیا A و B سازگارند یا ناسازگار؟

A = {(ر،ر،ر) ، (پ،پ،پ)}

B = {(پ،ر،ر) ، (ر،پ،ر) ، (ر،ر،پ) ، (پ،پ،پ)}

۲ بار رو

صفر بار رو

$\longrightarrow A\cap B\neq\varnothing \longrightarrow$ سازگارند

مثال ۷) ~~سکه‌ای~~ تاسی را پی‌درپی پرتاب می کنیم. اگر A پیشامد این باشد که برای اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید و B پیشامد این باشد که تا پرتاب سوم، دو بار ۶ بیاید، آیا A و B سازگارند یا ناسازگار؟

A = اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید ⟵ (غیر ۶ ، غیر ۶ ، ۶ ، ... ، ... ، ... ، ...)

B = تا پرتاب سوم ۲ بار ۶ ⟵ (۶ ، ۶ ، ... ، ... ، ... ، ...)

$\longrightarrow A\cap B=\varnothing \longrightarrow$ ناسازگار

۲) احتمال وقوع یک پیشامد

۱) محاسبه احتمال: اگر S فضای نمونه و A یک پیشامد تصادفی در یک آزمایش تصادفی باشند، آن‌گاه احتمال وقوع پیشامد A که آن را با $P(A)$ نشان می‌دهیم، از رابطهٔ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ محاسبه می‌شود. بنابراین فقط باید تعداد اعضای A و S را به دست آورید.

مثال ۸) دو تاس را با هم می‌ریزیم. با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده، یک عدد اول است؟

$$S=\{(1,1),\dots,(1,6),\dots,(6,1),\dots,(6,6)\}\longrightarrow n(S)=6\times 6=36$$

$$A=\{(1,1),(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3),(5,2),(5,6),(6,1),(6,5)\}\Rightarrow P(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

مثال ۹) ۷ نفر که ۳ تای آن‌ها برادر هستند، در یک صف می‌ایستند. احتمال این که ۳ برادر در ابتدا، وسط و انتهای صف قرار بگیرند، چقدر است؟

جایگشت ۷ نفر

$S: \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_ \Rightarrow n(S)=7!$

$A:$ برادر۱ $\boxed{\_\ \_}$ برادر۲ $\boxed{\_\ \_}$ برادر۳ ، ۴ نفر $\Rightarrow n(A)=4!\times 3!$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4!\times 3!}{7!}=\frac{\cancel{3\times 2}}{7\times \cancel{6}\times 5}=\frac{1}{35}$$

مثال ۱۰) یک تیم ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر آن‌ها یکی پس از دیگری وارد سالن شوند و برای ما فقط ترتیب قد آن‌ها اهمیت داشته باشد، احتمال این‌که اولین فرد وارد شده، بلند قدترین عضو تیم باشد چقدر است؟

$S:$ جایگشت‌های ۱۴ نفر $\rightarrow n(S)=14!$

$A: \underset{\text{نفر اول}}{1}\ \underset{\text{دوم}}{13}\ \underset{\text{سوم}}{12} \dots \underset{\text{چهاردهم}}{1} \Rightarrow n(A)=13!$

$\rightarrow P(A)=\frac{13!}{14!}=\frac{\cancel{13!}}{14\times \cancel{13!}}=\frac{1}{14}$ (روش اول)

روش دوم) اگر برای فقط نفر اول اهمیت داشته باشد، در یک حالت از ۱۴ حالت ممکن، نفر اول همان بلندقدترین عضو تیم است، پس: $P(A)=\frac{1}{14}$.

۲) محاسبهٔ احتمال یک پیشامد به کمک متمم آن: اگر A' متمم پیشامد A باشد، احتمال وقوع A عبارتست از : $P(A)=1-P(A')$.

$P(A)+P(A')=1 \qquad A\cup A'=S$

نکته: این رابطه بیشتر هنگامی استفاده می‌شود که محاسبه $P(A')$ ساده‌تر از محاسبهٔ $P(A)$ باشد.

مثال ۱۱) در پرتاب دو تاس، چقدر احتمال دارد که مجموع اعداد رو شده از ۴ بیشتر باشد؟

$A':$ مجموع ۲ تا ۴ دیده شود $=\{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1)\}$

$$\rightarrow P(A)=1-P(A')=1-\frac{6}{36}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

مثال ۱۲) از بین ۵ دانش‌آموز پایهٔ دهم، ۲ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و ۳ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم،۳ دانش‌آموز انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که حداقل یک دانش‌آموز پایهٔ دهم داشته باشیم، چقدر است؟

۱۰ نفر

دوازدهم	یازدهم	دهم
۳	۲	۵

۳ دانش‌آموز

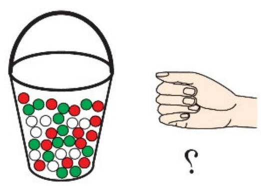
$A':$ از ۳ نفر هیچ کس دهمی نباشد $\rightarrow P(A')=\frac{\binom{3+2}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{\cancel{10}}{\frac{\cancel{10}\times 9\times 8}{6}}=\frac{1}{12}$

$$\rightarrow P(A)=1-P(A')=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$

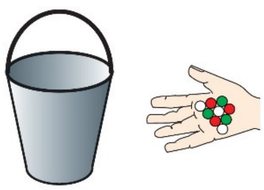
۳) مبانی احتمال

۱) مقایسه دو علم آمار و احتمال: تفاوت این دو علم در نوع نمونه و جامعه می‌باشد. به تصویر زیر دقت کنید.

علم احتمال : بررسی یک نمونهٔ نامعلوم از یک جامعهٔ معلوم



علم آمار : شناختن جامعهٔ نامعلوم، با استفاده از نمونه‌های جمع آوری شدهٔ معلوم



نکته : در **علم احتمال**، یا تعداد نمونه‌های انتخاب شده یا کیفیت آن‌ها مشخص **نیست**.

مثال ۱۳) کدام یک از پرسش‌های زیر مربوط به علم احتمال و کدام یک مربوط به علم آمار است؟

۱) چه تعداد از دانش آموزان پایه یازدهم مدسه شما به فوتبال علاقه دارند؟

۲) می‌دانیم ۲۰ سیب از ۱۰۰ سیب یک جعبه ناسالم است. چند سیب از این جعبه برداریم تا تقریباً مطمئن باشیم که دست کم یک سیب خراب برداشته‌ایم؟

۳) در یک کلاس ۲۰ نفری که ۱۰ نفر به والیبال علاقه دارند، ۱۰ نفر را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است که کمتر از ۷ نفر به والیبال علاقه داشته باشند؟

۴) در انتخابات، ۹۰ درصد از واجدین شرایط شرکت کرده‌اند. اگر از ۵۰ نفر سئوال پرسیده شود، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟

۵) از یک کلاس ۳۰ نفری، ۵ دانش‌آموز علاقه‌مند به فوتبال انتخاب شده است. چه تعداد از دانش‌آموزان کلاس به فوتبال علاقه دارند؟

۲) زبان گزاره‌ها به زبان مجموعه‌ها

با توجه به مفهوم « رخ دادن یک پیشامد»، اگر $A_۱$ و $A_۲$ دو پیشامد باشند، آن‌گاه:

الف) اگر $A_۱ \subseteq A_۲$ ، از رخ دادن $A_۱$ ، رخ دادن $A_۲$ نتیجه می‌شود.

ب) اگر $A_۱ \cap A_۲$ رخ دهد، یعنی هر دو پیشامد $A_۱$ و $A_۲$ رخ داده است.

پ) اگر $A_۱ \cup A_۲$ رخ دهد، یعنی حداقل یکی از دو پیشامد $A_۱$ و $A_۲$ رخ داده است.

مثال ۱۴) در پرتاب یک تاس سالم، کدام یک از جملات زیر درست است؟ چرا؟

الف) اگر پیشامد $\{۲\}$ رخ دهد، پیشامد زوج بودن رخ داده است.

ب) اگر پیشامد زوج بودن رخ دهد، پیشامد $\{۲\}$ رخ داده است.

مثال ۱۵) در پرتاب یک تاس سالم، کدام گزینه صحیح نیست؟ چرا؟

۱) از وقوع پیشامد $\{۱,۳\}$ ، وقوع پیشامد $\{۱,۳,۵\}$ نتیجه می‌شود.

۲) از وقوع پیشامد $\{۱,۳,۵\}$ ، وقوع پیشامدهای $\{۱,۳,۵,۶\}$ و $\{۱,۲,۳,۵\}$ نتیجه می‌شود.

۳) از وقوع پیشامد $\{۱,۳,۵,۶\}$ ، وقوع پیشامدهای $\{۱,۳,۵\}$ و $\{۳,۵,۶\}$ نتیجه می‌شود.

۴) از وقوع پیشامد $\{۱,۳,۵,۶\}$ ، وقوع پیشامدهای $\{۱,۳,۵\}$ یا $\{۳,۵,۶\}$ نتیجه می‌شود.

۴) اصول احتمال

برای پیشامد A در فضای نمونهٔ S ، احتمال وقوع آن را با $P(A)$ نشان می‌دهیم که عددی در بازهٔ $[۰,۱]$ است و در اصول زیر صدق می‌کند:

۱) $P(S)=۱$

۲) برای هر دو پیشامد A و B که $A \cap B=\varnothing$ (یعنی دو پیشامد ناسازگار باشند)، داریم : $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.

قضیه ۱ : فرض کنیم A و B دو پیشامد باشند. در این صورت اگر $A \subseteq B$ آن‌گاه :

۱) $P(A) \le P(B)$ ،

۲) $P(B-A) = P(B) - P(A)$.

قضیه ۲ : فرض کنیم A و B دو پیشامد باشند. در این صورت :

۱) $P(B-A) = P(B) - P(A \cap B)$

۲) $P(A \cup B) = P(B) + P(A-B)$

۳) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

مثال ۱۶) عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۴ بخش‌پذیر نباشد، چقدر است؟

مثال ۱۷) عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد، چقدر است؟

مثال ۱۸) عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می کنیم. احتمال اینکه عدد انتخابی نه بر ۲ بخش پذیر باشد و نه بر ۳ چقدر است؟

مثال ۱۹) عددی به تصادف از بین اعداد دو رقمی انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخابی بر ۴ یا ۶ بخش‌پذیر باشد، چقدر است؟

مثال ۲۰) ۵۰ درصد دانش‌آموزان یک کلاس به موسیقی و ۴۰ درصد آن‌ها به تئاتر علاقه دارند. اگر ۲۴ درصد آن‌ها به هر دو رشته علاقه داشته باشند، چند درصد آن‌ها حداقل به یکی از دو رشته علاقه دارند؟

مثال ۲۱) اگر $P(A)=۳P(B)=۴P(A\cap B)$ باشد، آن‌گاه مقدار $P(A\cup B)$ چند برابر $P(A\cap B)$ است؟

مثال ۲۲) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری‌که $P(A)=۰/۶$ ، $P(B)=۰/۷$ و $P(A\cap B')=۰/۲$ باشند، آن‌گاه $P(A'\cap B)$ کدام است؟

تمرین

۱ احمد و عباس با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می‌کنند. فضای نمونه برای این بازی چیست؟ فضای نمونه چند عضو دارد؟ در چه تعداد از برآمدها احمد برندهٔ بازی است؟

۲ یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آنها یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قدّ آنها اهمیت داشته باشد، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال اینکه اوّلین کسی که وارد می‌شود، بلند قدترین عضو تیم باشد چقدر است؟

۳ در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص می‌شود : دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا (صاف یا ابری) و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت آب و هوا را به این شکل خلاصه می‌کنیم : آیا از نظر دما سرد یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک یا مرطوب است؟ آیا باد می‌وزد یا نمی‌وزد؟ آیا هوا صاف، نیمه‌ابری یا ابری است؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟ برای وضعیت هوا در یک لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه را به شکل حاصل‌ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضا چند عضو دارد؟

۴ فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات‌شده، گزاره‌های زیر را ثابت کنید :

الف) اگر $B \subseteq A$ داریم : $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

ب) اگر $B \subseteq A$، آن‌گاه $P(B) \le P(A)$.

۵ عددی به‌تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید :

الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد.

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش‌پذیر باشد، ولی به ۳ بخش‌پذیر نباشد.

پ) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۳.

درس ۲ : احتمال غیر هم‌شانس

در فضای نمونه‌ای $S=\{s_1,s_2,\dots,s_n\}$ ، منظور از پیشامدهای ساده، پیشامدهای $\{s_n\}$ ، … ، $\{s_2\}$ ، $\{s_1\}$ هستند. اگر حداقل دو پیشامد ساده از این فضا احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیر هم‌شانس می‌گوییم.

تذکر: اگر $\{a\}$ یک پیشامد ساده باشد، احتمال وقوع آن، یعنی $P(\{a\})$ را به شکل ساده‌تر $P(a)$ می‌نویسیم.

در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیر هم‌شانس، اگر $S=\{s_1,s_2,\dots,s_n\}$ فضای نمونه و $A=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ یک پیشامد باشد، آن‌گاه:

۱) $0\le P(A)\le 1$ ،

۲) $P(S)=P(s_1)+P(s_2)+\dots+P(s_n)=1$ ،

۳) $P(A)=P(a_1)+P(a_2)+\dots+P(a_k)$

مثال ۲۳) یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. احتمال مشاهدهٔ ۲ یا ۳ کدام است؟

مثال ۲۴) در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهدهٔ هر عدد، متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال این‌که عدد مشاهده شده، کمتر از ۴ باشد چقدر است؟

مثال ۲۵) در فضای نمونه‌ای $S=\{x,y,z\}$ ، اگر احتمال‌های متناظر با اعضای x ، y و z ، یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هر یک از این پیشامدها را حساب کنید.

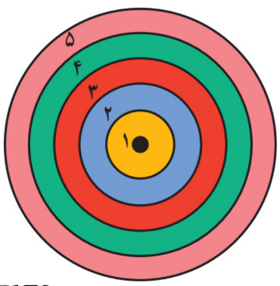
مثال ۲۶) فضای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی متناظر با ۳ برآمد به صورت $S=\{x,y,z\}$ است. اگر احتمال‌های متناظر با اعضای x ، y و z ، یک دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع پیشامد $\{x,z\}$ را به دست آورید.

مثال ۲۷) مجموعه $S=\{x,y,z,t,w\}$ فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی و $A=\{x,y\}$ ، $B=\{x,y,z,t\}$ و $C=\{x,y,w\}$ سه پیشامد از S هستند. اگر $P(A)=\frac{1}{7}$ و $P(B)=\frac{3}{5}$ باشند، مقدار $P(C)$ کدام است؟

مثال ۲۸) اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ فضای نمونه و $A=\{a,b\}$ ، $B=\{a,b,c,d\}$ و $C=\{a,b,e\}$ سه پیشامد باشند به طوری‌که $P(B)=\frac{3}{5}$ و $P(A)=\frac{2}{7}$ ، مقدار $P(C')$ را به دست آورید

مثال ۲۹) بر روی یک تاس عددهای ۱،۱،۱،۲،۲،۳ نوشته شده است. در پرتاب این تاس، چقدر احتمال دارد عدد روشده ۲ نباشد؟

مثال ۳۰) در پرتاب دارت به صفحه‌ای به شکل زیر که به ۵ ناحیه مجزا تقسیم شده است، احتمال اصابت دارت به ناحیه اول، x می باشد. اگر احتمال اصابت دارت به ناحیه k اُم، $(2k-1)x$ باشد، احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را تعیین کنید.



تمرین

۱ در پرتاب یک سکهٔ ناسالم، احتمال آمدن «رو» نصف احتمال آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهر شدن «رو» و احتمال ظاهر شدن «پشت» را به دست آورید.

۲ در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهدهٔ هر عدد، متناسب با همان عدد است، مثلاً احتمال مشاهدهٔ عدد ۳، سه برابر احتمال مشاهدهٔ عدد ۱ است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده، زوج باشد را تعیین کنید.

۳ اگر $S=\{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A=\{a, b\}$, $B=\{a, b, c, d\}$ و $C=\{a, b, e\}$ سه پیشامد باشند به‌طوری که $P(A)=\frac{۲}{۷}$ و $P(B)=\frac{۳}{۵}$ ، مقدار $P(C')$ را به‌دست آورید.

۴ در یک تجربهٔ تصادفی، $S=\{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x), P(y)$ و $P(z)$ یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت $\frac{۱}{۴}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هرکدام از این پیشامدها را به‌دست آورید.

۵ در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره‌ای شکل، مطابق شکل روبه‌رو که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است[۱]، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیهٔ اوّل، x باشد. اگر احتمال اصابت به ناحیهٔ k ام، $(۲k-۱)x$ باشد :

الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به‌دست آورید.

ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه‌های اوّل، سوم یا چهارم بیشتر است، یا اصابت به دو ناحیهٔ دوم یا پنجم؟