

درس ۱ : آشنایی با منطق ریاضی

۱) گزاره

تعریف گزاره : به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای تنها یک ارزش (درست یا نادرست) باشد، گزاره می‌گوییم. معمولاً گزاره‌ها را با حروف کوچک انگلیسی، مانند p ، q و r نشان می‌دهیم.

درست یا نادرست بودن یک گزاره را **ارزش گزاره** می‌نامیم. درستی گزاره با T یا "د" و نادرستی گزاره را با F یا "ن" نشان می‌دهیم.

چند نکته

- (۱) یک گزاره در یک زمان فقط یک ارزش می‌تواند داشته باشد.
- (۲) حدس‌های ریاضی و علوم مشابه دیگر که هنوز جواب قطعی به آن‌ها داده نشده است، گزاره به شمار می‌روند.
- (۳) جملات پرسشی، عاطفی، امری، خواهشی و ... گزاره به شمار **نمی‌روند**.

مثال ۱) کدام یک از جملات زیر یک گزاره نیست؟

- (۱) هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.
- (۲) از صدای سخن عشق ندیدم خوش‌تر.
- (۳) مربع هر عدد حقیقی همواره مثبت است.
- (۴) صدمین رقم اعشاری π برابر ۵ است.
- (۵) $3x + 2 = 0$
- (۶) هر معادله درجه دوم حداقل یک جواب دارد.
- (۷) در پرتاب یک تاس، احتمال پیشامد A برابر $\frac{1}{6}$ است.
- (۸) چه روز قشنگی است.

جدول ارزشی گزاره‌ها : هر گزاره مانند p دارای ارزش درست یا نادرست است (۲ حالت).

p
د
ن

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

ولی اگر بخواهیم ارزش دو گزاره p و q را کنار یکدیگر بنویسیم، $4(2^2)$ حالت یا ردیف متفاوت خواهیم داشت. به همین ترتیب، جدول ارزشی n گزاره کنار یکدیگر، 2^n حالت یا ردیف متفاوت خواهد داشت.

مثال ۲) جدول ارزشی سه گزاره را رسم کنید. در چند حالت این جدول ارزشی، فقط دو گزاره درست هستند؟





۲) گزاره‌نما

تعریف گزاره‌نما : هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل می‌شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را بر حسب تعداد متغیرهای به کار رفته در آن‌ها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

چند نکته

- ۱) گزاره و گزاره‌نما هر دو جمله خبری هستند و تفاوت آن‌ها در این است که ارزش گزاره را می‌توان مشخص کرد ولی ارزش گزاره‌نما به متغیر استفاده شده در آن دارد.
- ۲) معادله‌ها و نامعادله‌ها در حالت کلی گزاره‌نما هستند به شرطی که با تغییر مقدار متغیر (متغیرها) دو ارزش درستی و نادرستی را کسب کنند. (مانند $2x+1 > 0$ یا $x^2 \leq 4$) ولی اگر برای تمام مقادیر متغیر، گزاره فقط یک (درست یا نادرست) داشته باشد، گزاره‌نما نیست و گزاره می‌باشد (مانند $x^2 \geq 0$ یا $x = x$).
- ۳) جملاتی که شامل عبارت‌های "به ازای هر" یا "وجود دارد" هستند، همواره گزاره هستند ولی گزاره‌نما به شما نمی‌روند.

مثال ۳) کدامیک از گزینه‌های زیر یک گزاره نما و کدامیک گزاره نما نیست؟

$$1) \quad 2x - 1 > 5$$

$$2) \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$3) \quad x^2 \geq 5$$

$$4) \quad \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

۵) در پرتاب ۲ تاس، احتمال وقوع پیشامد A کمتر از ۱ است.

۶) هر معادله درجه دوم، حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

$$7) \quad x - 2y = 0$$

۸) حاصل جمع عددی با مربع خودش برابر ۵۶ می‌باشد.

۳) دامنه متغیر و مجموعه جواب گزاره‌نما

تعریف دامنه متغیر گزاره‌نما : در هر گزاره‌نما، به مجموعه مقادیری که می‌توان به جای متغیرهای آن قرار داد تا به گزاره (با هر ارزشی) تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف D نشان می‌دهیم. مثلاً در گزاره‌نمای $2x + 4 > 0$ ، دامنه متغیر می‌تواند اعداد حقیقی، اعداد گویا، اعداد صحیح یا بازه $(0, +\infty)$ باشد.

تعریف مجموعه جواب گزاره‌نما : به مجموعه عضوایی از دامنه متغیر گزاره‌نما که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما به یک گزاره درست تبدیل می‌شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گوییم. اگر S مجموعه جواب گزاره‌نما باشد، همواره داریم $S \subseteq D$.

مثال ۵) اگر دامنه متغیر گزاره‌نمای $x^2 - 6x - 7 < 0$ ، "مجموعه $D = [1, +\infty)$ باشد، مجموعه جواب آن را به دست آورید.

$$۸) \quad (4)$$

$$۵) \quad (3)$$

$$۷) \quad (2)$$

$$۶) \quad (1)$$





مثال ۶) مجموعه جواب هرکدام از گزاره‌نماهای زیر را که دامنه متغیر آن‌ها داده شده است، تعیین کنید.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, D = R \quad (۱)$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0, D = \{-1, 5\} \quad (۲)$$

$$\sqrt{x^2} = x, D = \mathbb{Z} \quad (۳)$$

۴) نقیض گزاره

نقیض یک گزاره مانند p را با $\sim p$ نشان می‌دهیم که گزاره‌ای است که ارزش آن با p متفاوت است.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

۵) ترکیب گزاره‌ها

ترکیب دو یا چند گزاره با یکدیگر به وسیلهٔ رابط‌های زیر انجام می‌شود که حاصل آن یک گزارهٔ مرکب می‌باشد.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

۱) **ترکیب فصلی** : ترکیب فصلی دو گزارهٔ p و q را به صورت $p \vee q$ نشان داده و آن را به صورت " p یا q " می‌خوانیم.

جدول ارزشی این گزارهٔ مرکب به صورت مقابل است. ارزش گزارهٔ $p \vee q$ هنگامی درست است که حداقل یکی از این گزاره‌ها صحیح باشند. به عبارت دیگر، گزارهٔ $p \vee q$ تنها وقتی نادرست است که هر دو گزارهٔ p و q نادرست باشند.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

۲) **ترکیب عطفی** : ترکیب عطفی دو گزارهٔ p و q را به صورت $p \wedge q$ نشان داده و آن را به صورت " p و q " می‌خوانیم.

جدول ارزشی این گزارهٔ مرکب به صورت مقابل است. ارزش گزارهٔ $p \wedge q$ هنگامی نادرست است که حداقل یکی از دو گزاره نادرست باشد. به عبارت دیگر، گزارهٔ $p \wedge q$ تنها وقتی درست است که هر دو گزارهٔ p و q درست باشند.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

۳) **ترکیب شرطی** : ترکیب شرطی دو گزارهٔ p و q را به صورت $p \Rightarrow q$ نشان داده و آن را به صورت " p اگر q آن‌گاه q " می‌خوانیم.

جدول ارزشی این گزارهٔ مرکب به صورت مقابل است. در $p \Rightarrow q$ ، به p مقدم (یا فرض) و به q تالی (حکم) گفته می‌شود. ارزش گزارهٔ $p \Rightarrow q$ تنها هنگامی نادرست است که از فرض درست، حکم نادرست نتیجه گرفته شود.

چند نکته

الف) اگر فرض نادرست باشد، ارزش گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ همواره درست است که می‌گوییم "به انتقای مقدم، ارزش گزاره درست است".

ب) در حالتی که حکم صحیح باشد، ارزش گزاره نیز صحیح است (بنابراین ارزش فرض دیگر مهم نیست).

پ) در گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ ، می‌توانیم بخوانیم: " p شرط کافی برای q است" و یا بخوانیم: " q شرط لازم برای p است".





(۴) ترکیب دوشروطی : ترکیب دوشروطی دو گزاره p و q را به صورت $p \Leftrightarrow q$ نشان داده و آن را به صورت " اگر p آن گاه q و برعکس " می خوانیم. $p \Leftrightarrow q$ به شکل های " شرط لازم و کافی برای q است " و یا " p اگر و فقط اگر q " نیز خوانده می شود.

جدول ارزشی این گزاره مرکب به صورت مقابل است. ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ هنگامی درست است که هر دو گزاره درست و یا هر دو گزاره نادرست باشند.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

مثال (۷) ارزش گزاره های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(2 \text{ عددی اول است}) \vee (3 \text{ عددی زوج است})$

ب) اگر ۲ عددی زوج باشد، آن گاه ۲ عدد اول نیست.

پ) $(\sqrt{5} \in \mathbb{Q}) \wedge (\sqrt{5} < 2)$

ت) $99 \text{ عددی اول نیست} \Leftrightarrow \sqrt{2} \text{ عددی گویاست.}$

ث) در پرتاب یک تاس، شرط لازم و کافی برای آنکه احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

مثال (۸) جدول ارزشی گزاره مرکب $\sim(p \vee q) \wedge (p \wedge \sim q)$ را رسم کنید. در چند حالت، ارزش این گزاره مرکب درست است؟

مثال (۹) گزاره $p \Rightarrow (q \vee \sim r)$ نادرست است. ارزش کدام گزاره درست است؟

(۴) $\sim q \Rightarrow \sim p$

(۳) $p \vee q \Rightarrow r$

(۲) $(p \wedge q) \wedge r$

(۱) $p \Rightarrow q$





۶ هم‌ارزی گزاره‌ها

دو گزاره p و q را هم‌ارز می‌گوییم هرگاه در جدول ارزشی، دقیقاً مانند یکدیگر باشند. دو گزاره هم‌ارز p و q را به شکل $p \equiv q$ می‌نویسیم.

مثال ۱۰ به کمک جدول ارزشی، نشان داده‌ایم که گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $p \vee q \sim$ هم‌ارز هستند.

اثبات هم‌ارزی : برای اثبات هم‌ارزی گزاره‌ها دو روش کلی وجود دارد.

روش اول (استفاده از جدول): در این روش مانند مثال بالا، تمام حالت‌های ممکن را برای گزاره‌های داده شده در یک جدول می‌نویسیم و نشان می‌دهیم که ستون مربوط به هر کدام با دیگری یکسان است.

روش دوم (استفاده از قضیه‌های هم‌ارزی): در این روش از هم‌ارزی‌های زیر استفاده می‌کنیم. تمام این هم‌ارزی‌ها به کمک جدول قابل اثبات‌اند.

$$p \vee q \equiv q \vee p, \quad p \wedge q \equiv q \wedge p \quad \text{۱) جابه‌جایی:}$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r, \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \quad \text{۲) شرکت پذیری:}$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r), \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \text{۳) توزیع پذیری:}$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q, \quad \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad \text{۴) دمورگان:}$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad \text{۵) جذب:}$$

$$\sim (\sim p) \equiv p \quad \text{۶) نقیض نقیض:}$$

$$p \vee \sim p \equiv T, \quad p \wedge \sim p \equiv F \quad \text{۷) ترکیب با نقیض:}$$

$$p \wedge F \equiv F, \quad p \wedge T \equiv p, \quad p \vee T \equiv T, \quad p \vee F \equiv p \quad \text{۸) ترکیب با } T \text{ یا } F:$$

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \quad \text{۹) شرطی به فصلی:}$$

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p \quad \text{۱۰) عکس نقیض:}$$

$$p \Rightarrow (p \vee q) \equiv T \quad \text{۱۱) ادخال فاصل:}$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv T \quad \text{۱۲) حذف عاطف:}$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \quad \text{۱۳) دوشروطی به شرطی:}$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q \equiv q \Leftrightarrow \sim p \quad \text{۱۴) دوشروطی به نقیض:}$$

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r \quad \text{۱۵) حکم شرطی در گزاره شرطی:}$$

مثال ۱۱ قضیه‌های هم‌ارزی ۷، ۱۰ و ۱۵ را به کمک جدول هم‌ارزی ثابت کنید.





مثال ۱۲ ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 عددی فرد باشد، آن گاه a عددی فرد است.

مثال ۱۳ به کمک جدول یا قضیه‌های هم‌ارزی نشان دهید که :

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$$

۷) نقیض گزاره‌های مرکب

به کمک قضیه‌های هم‌ارزی بالا می‌توان ثابت کرد که:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q \quad \text{۱) نقیض گزاره شرطی:}$$

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q \quad \text{۲) نقیض گزاره دوشروطی:}$$

مثال ۱۴ هم‌ارزی‌های بالا را اثبات کنید.

مثال ۱۵ گزاره $\sim (p \wedge \sim q) \wedge (p \vee q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

$$\sim q \quad (۴)$$

$$q \quad (۳)$$

$$\sim p \quad (۲)$$

$$p \quad (۱)$$





مثال ۱۶ کدام یک از گزاره‌های زیر، هم ارز منطقی گزاره $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q)$ است؟

$p \Rightarrow q$ (۴)

q (۳)

$p \wedge q$ (۲)

p (۱)

مثال ۱۷ کدام گزاره زیر، هم ارز منطقی گزاره $[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ است؟

$p \vee q$ (۴)

$r \vee p$ (۳)

r (۲)

q (۱)

مثال ۱۸ کدام یک از گزینه‌های زیر، همواره درست است؟

$\sim p \Rightarrow p \wedge q$ (۲)

$p \wedge q \Rightarrow \sim p$ (۱)

$p \vee q \Rightarrow p \wedge q$ (۴)

$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$ (۳)

مثال ۱۹ گزاره "اگر a عددی زوج و مضرب ۵ باشد، آنگاه رقم یکان آن صفر است" هم ارز کدام گزاره است؟

(۱) a فرد است یا a مضرب ۵ نیست یا رقم یکان a صفر است.

(۲) a فرد است یا a مضرب ۵ نیست و رقم یکان a صفر است.

(۳) a زوج است یا a مضرب ۵ نیست یا رقم یکان a صفر است.

(۴) a فرد است و a مضرب ۵ نیست و رقم یکان a صفر است.





۸) سورها و ارزش آن‌ها

سورها علامت‌هایی هستند که اگر همراه متغیر گزاره‌نما بیایند، گزاره‌نما را به گزاره تبدیل می‌کنند. این سورها عبارتند از:

الف) سور عمومی : علامت این سور عبارتست از $\forall$ و خوانده می‌شود: "به ازای هر" یا "به ازای تمام مقادیر".

ارزش سور عمومی یا یک گزاره کلی وقتی درست است که مجموعه جواب گزاره‌نما با دامنه متغیر برابر باشد. به عبارت دیگر، هیچ مثال نقضی برای گزاره داده شده پیدا نشود.

ب) سور وجودی : علامت این سور عبارتست از $\exists$ و خوانده می‌شود: "وجود دارد" یا "به ازای بعضی مقادیر".

ارزش یک سور وجودی یا گزاره جزئی زمانی درست است که مجموعه جواب گزاره‌نما تهی نباشد. به عبارت دیگر حداقل یک مورد جواب داشته باشد.

مثال ۲۰) درستی یا نادرستی هر یک از سورهای زیر را مشخص کنید.

$$\text{الف) } \forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq x$$

$$\text{ب) } \exists x \in \mathbb{Z}; |x| < 1$$

$$\text{پ) } \forall x \in \mathbb{Z}; \frac{x(x+1)}{2} \in \mathbb{Z}$$

ت) در آمار هر متغیر ترتیبی، یک متغیر کیفی است.

$$\text{ث) } \exists x \in \mathbb{R}; x^2 + x + 3 < 0$$

مثال ۲۱) عبارت "در فضای نمونه S ، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A) > 1$ " را به کمک سورها بنویسید.

مثال ۲۲) ارزش هر کدام از گزاره‌های سوری زیر را مشخص کنید.

$$\text{۱) } \forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 2 > 2x$$

$$\text{۲) } \forall x \in \mathbb{Z}; \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$$

$$\text{۳) } \exists x \in \mathbb{R}; \frac{x-1}{x} = x$$

$$\text{۴) } \exists x \in \mathbb{R}; x > x^2$$





مثال ۷۳ ارزش هر کدام از گزاره‌های سوری زیر را مشخص کنید.

$$(1) \forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : y - x = 5$$

$$y = x + 5$$

$$(2) \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x - y < 0$$

$$y > x$$

ارزش درست زیرا اگر $x \in \mathbb{N}$ دلخواه باشد، آن $y = x + 5$ نیز عدد طبیعی است.

ارزش نادرست زیرا به طور مثال برای $x = 2$ باید $y > 2$ باشد ولی $y = 1$ نادرست است.

ارزش درست ماب

$$(3) \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 + (y-3)^2 \geq 0$$

$$\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ (y-3)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (y-3)^2 \geq 0$$

مثال ۷۴ گزاره سوری $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R} : P(x, y)$ با کدام گزاره نمای $P(x, y)$ دارای ارزش درست است؟

$$(1) x - y = 6 \leftarrow y = x - 6$$

$$(1) y = x + 6 \leftarrow y - x = 6$$

$$(4) xy = 6 \leftarrow y = \frac{6}{x}$$

$$(3) x + y = 6 \leftarrow y = 6 - x$$

نیز اگر $x = 6$ باشد، آنگاه $y = 0$

$$x = 6, y = -1 \Rightarrow x - y = 7 \neq 6$$

$$x = 6, y = \frac{1}{6} \Rightarrow xy = 1 \neq 6$$

$$y = \frac{6}{6} = 1$$

۹) نقیض سورها

نقیض سور عمومی و سور وجودی را طبق قضیه‌های زیر به دست می‌آوریم.

$$(1) \text{ نقیض سور عمومی : } \sim(\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$$

$$(2) \text{ نقیض سور وجودی : } \sim(\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$$

مثال ۷۵ نقیض هر یک از گزاره‌های سوری زیر را بنویسید.

$$(1) \forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0 \quad \sim(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0$$

$$(2) \exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1 \quad \sim(\exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1) \equiv \forall y \in \mathbb{R}; y \geq 0 \vee y^2 > 1$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

مثال ۷۶ نقیض گزاره " حاصل ضرب هر دو عدد اصم عددی گنگ است." به کدام صورت است؟

(۱) حاصل ضرب هر دو عدد اصم، عددی گویا است.

(۲) حاصل ضرب هر دو عدد اصم، عددی گویا یا گنگ است.

(۳) حاصل ضرب برخی عددهای اصم، عددی گویا است.

(۴) حاصل ضرب برخی عددهای گنگ، عددی گویا یا گنگ است.

$$\begin{aligned} \sim(\forall x, y \in \mathbb{Q}'; xy \in \mathbb{Q}') \\ \equiv \exists x, y \in \mathbb{Q}'; xy \notin \mathbb{Q}' \end{aligned}$$

مثال ۷۷ ارزش گزاره شرطی زیر را مشخص کرده و عکس نقیض آن را بنویسید.

$$\left(\exists x \in \mathbb{Z}; x^2 = 16 \right) \Rightarrow \left(\forall x \in \mathbb{N}; x^2 > 1 \right)$$

$$(x=4) >$$

$$(x=1) \cup$$

$$\Rightarrow \cup$$

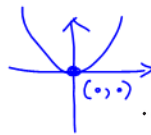
$$p \Rightarrow q \xrightarrow{\text{عکس نقیض}} \sim q \Rightarrow \sim p \quad \sim(\exists x \in \mathbb{N}; x^2 \leq 1) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{Z}; x^2 \neq 1)$$



۱ در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید، به طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند.



(الف) $(\frac{1}{10})^3 \square (\frac{1}{10})^5$ (ب) اگر $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ ، $\sin \alpha \square \cos \alpha$.



(پ) نمودار تابع $y = x^2$ از نقطه $\square$ می‌گذرد. (ت) $0 \square (x-4)^2 \square -(x^2-4) \rightarrow (x-4)^2 \geq 0$

(ث) $y^2 = x^2$ تابع $\square$ است زیرا زوج و $(2,2)$ اگر $x^2 = a$ آن گاه $x = \square \pm \sqrt{a}$

و $(2,-2)$ در رابطه $x^2 = y^2$ صدق می‌کند.



ابوالوفا محمد بوزجانی
(۳۸۸-۳۲۸ قمری)

۲ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

(الف) اگر $0 < x < 1$ ، آن گاه $x^2 \leq x$: $0 < x < 1$ است و $x^2 \geq x$ است.

(ب) ابوالوفا محمد بوزجانی، ریاضی‌دان است. : ابوالوفا محمد بوزجانی، ریاضی‌دان نیست.

(پ) $a \in \{b, c, d\}$: $a \notin \{b, c, d\}$

(ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست.

$$\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

۲ عددی زوج نیست و عدد π گویا نیست.

۳ ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

$$(ب) \quad (5 > 3) \vee ((-1)^2 + 1 = 0) \quad \text{الف) } (2 < 3) \wedge (4 + 3 = 10)$$

(ت) اگر عدد ۴ فرد باشد، آن گاه ۴ مربع کامل نیست.

$$(پ) \quad (\frac{1}{2} \neq \frac{3}{6}) \vee (1 \in \{2, 3, 4\})$$

(ث) ۲ عدد اول نیست، اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است.

(ج) اگر $a \in \{b\}$ آن گاه $a = b$ و برعکس.

زیرا دستی p ، دستی q را نتیجه می‌دهد و برعکس و همچنین
نادستی p ، نادستی q را نتیجه می‌دهد و برعکس.

$$a \in \{b\} \Leftrightarrow a = b$$

۴ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $(p \Rightarrow q)$	ارزش $(p \wedge q)$
عدد ۲ زوج است.	$3 > 2$	$>$	$>$	$>$	د
۲ عدد اول است	$1 < 2$	$>$	$\cup$	ن	$\cup$
$2 \in \{1, 2\}$	۳ عدد اول است	$>$	$\cup$	$\cup$	ن
$7 \in \{1, 2\}$	عدد ۷ اول است.	$\cup$	$>$	د	$\cup$

۵ جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

$$(پ) \quad \sim p \vee p \quad \text{آزمایش } 2^1 = 2$$

p	$\sim p$	$\sim p \vee p$
$>$	$\cup$	$>$
$\cup$	$>$	$>$

$$(ب) \quad \sim p \wedge p \quad \text{آزمایش } 2^1 = 2$$

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
$>$	$\cup$	$\cup$
$\cup$	$>$	$\cup$

$$(الف) \quad p \wedge \sim q \quad \text{آزمایش } 2^2 = 4$$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
$>$	$>$	$\cup$	$\cup$
$>$	$\cup$	$>$	$>$
$\cup$	$>$	$\cup$	$\cup$
$\cup$	$\cup$	$>$	$\cup$

$$(ج) \quad \sim p \Leftrightarrow \sim q \quad \text{آزمایش } 2^2 = 4$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$
$>$	$>$	$\cup$	$\cup$	$>$
$>$	$\cup$	$\cup$	$>$	$\cup$
$\cup$	$>$	$>$	$\cup$	$\cup$
$\cup$	$\cup$	$>$	$>$	$>$

$$(ث) \quad (p \vee q) \Leftrightarrow q \quad \text{آزمایش } 2^2 = 4$$

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$
$>$	$>$	$>$	$>$
$>$	$\cup$	$>$	$\cup$
$\cup$	$>$	$>$	$>$
$\cup$	$\cup$	$\cup$	$>$

$$(ت) \quad (p \vee q) \wedge \sim p \quad \text{آزمایش } 2^2 = 4$$

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
$>$	$>$	$\cup$	$>$	$\cup$
$>$	$\cup$	$\cup$	$>$	$\cup$
$\cup$	$>$	$>$	$>$	$>$
$\cup$	$\cup$	$>$	$\cup$	$\cup$

۶ با استفاده از جدول ارزش ها نشان دهید که :

پ) $p \wedge T \equiv p$

P	T	$p \wedge T$
>	>	>
○	>	○

ب) $p \vee F \equiv p$

P	F	$p \vee F$
>	○	>
○	○	○

الف) $p \Rightarrow p \equiv T$

P	P	$p \Rightarrow p$	T
>	>	>	>
○	○	>	>

ج) $p \vee (q \wedge p) \equiv p$

$2^2 = 4$

P	q	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$
>	>	>	>
>	○	○	>
○	>	○	○
○	○	○	○

ث) $p \wedge (q \vee p) \equiv p$

$2^2 = 4$

P	q	$q \vee p$	$p \wedge (q \vee p)$
>	>	>	>
>	○	>	>
○	>	>	○
○	○	○	○

ت) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

$2^2 = 4$

P	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim p$	$p \wedge \sim q$
>	>	>	○	○	○
>	○	○	>	>	>
○	>	>	○	○	○
○	○	>	○	>	○

ح) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

$2^2 = 4$

P	q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p \Leftrightarrow q$
>	>	>	○	○	○
>	○	○	>	>	>
○	>	○	>	>	>
○	○	>	○	>	○

$2^3 = 8$

ج) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

P	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
>	>	>	>	>	>	>
>	>	○	○	○	>	○
>	○	>	>	>	○	>
>	○	○	>	>	○	>
○	>	>	>	>	>	>
○	>	○	○	○	>	○
○	○	>	>	>	○	>
○	○	○	>	>	○	>

۷ ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آن گاه n نیز مضرب ۳ است

فرض عکس
 $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
 نقیض

حکم: q

فرض: p

اگر

$\sim q : n \neq 3k \Rightarrow$

$$\begin{cases} n = 3k+1 \rightarrow n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k + 1) + 1 = 3k' + 1 \rightarrow n^2 \neq 3r : \sim p \\ n = 3k+2 \rightarrow n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3k'' + 1 \rightarrow n^2 \neq 3r : \sim p \end{cases}$$

$n = 3k$
 ۰، ۱، ۲

۸ گزاره های زیر را با استفاده از نمادهای $\exists, \forall$ بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.
 $\forall n \in \mathbb{N} ; n = 2k \vee n = 2k+1$

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم: $a^2 < 0$.
 $\exists a \in \mathbb{W} ; a^2 < 0$ زیرابری هر $\{0, 1, 2, \dots\}$ است.

پ) همه اعداد اول فرد اند.
 $\forall n \in \mathbb{P} ; n = 2k+1$ زیرابری $n=2$ ، سودجوی درست نیست.

ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به طوری که $1-2x > 5$: $\cup$ $\exists n \in \mathbb{Z}^+ ; 1-2n > 5$ زیرا برای اینکه $1-2n > 5$ باشد، باید $n < -2$ باشد.
 حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ تر یا مساوی ۲ است

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ تر یا مساوی ۲ است : $\cup$ $\forall n \in \mathbb{R}, n \neq 0 ; n + \frac{1}{n} > 2$ برای $n = -1$ ، داریم $n + \frac{1}{n} = -2$.
 ج) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^2 = x$.

$\exists n \in \mathbb{R} ; n^2 = n$: $>$ برای $n = 0$ ، رابطه $n^2 = n$ درست است.

۹ هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 < x \leq 5\}$ دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

الف) $\exists x \in A ; x + 4 = 10$: نادرست، زیرا :

$$n + 4 = 10 \rightarrow n = 6 \rightarrow 6 \notin A$$

$$n \leq 7 \rightarrow \begin{cases} n = 7 \\ n < 7 \end{cases} \checkmark$$

$$n + 2 \leq 9 \rightarrow n \leq 7 : >$$

ب) $\forall x \in A ; x + 2 \leq 9$

زیرا برای هر عضو A مانند n ، $n \leq 7$ ، نمره‌ی دوم

$$n + 3 < 4 \rightarrow n < 1 : \cup$$

پ) $\exists x \in A ; x + 3 \leq 4$

زیرا اعضاء A ، نمره‌ی مساوی ۱ هستند.

$$n + 1 > 6 \rightarrow n > 5 : \cup$$

ت) $\forall x \in A ; x + 1 \geq 6$

زیرا برای $n = 4$ ، رابطه $n > 5$ نادرست است.

۱۰ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R} ; \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$: نادرست، زیرا برای $n=1$ ، $\frac{n^2-1}{n-1}$ و تعریف نشده است.

$$\sim (\forall n \in \mathbb{R} ; \frac{n^2-1}{n-1} = n+1) \equiv \exists n \in \mathbb{R} ; \frac{n^2-1}{n-1} \neq n+1$$

ب) $\forall n \in \mathbb{N} ; (2^n + 1) \in P$: نادرست، زیرا برای $n=3$ ، $2^3 + 1 = 9$ و ۹ عددی اول نیست.

$$\sim (\forall n \in \mathbb{N} ; (2^n + 1) \in P) \equiv \exists n \in \mathbb{N} ; 2^n + 1 \notin P$$

پ) $\forall x \in (-\infty, 0) ; x - \frac{1}{x} \leq -2$: نادرست است، زیرا برای $n=-1$ ، داریم $n - \frac{1}{n} = -1 + 1 = 0$ و $0 \not\leq -2$.

$$\sim (\forall x \in (-\infty, 0) ; x - \frac{1}{x} \leq -2) \equiv \exists x \in (-\infty, 0) ; x - \frac{1}{x} > -2$$

ت) $\exists y \in \mathbb{R} ; \frac{y-3}{5} = 0$: درست است و $\frac{y-3}{5} = 0 \rightarrow y-3=0 \rightarrow y=3$

$$\sim (\exists y \in \mathbb{R} ; \frac{y-3}{5} = 0) \equiv \forall y \in \mathbb{R} ; \frac{y-3}{5} \neq 0$$

۱) مفاهیم مقدماتی

۱) مفهوم عضویت
 اگر شیء a در مجموعه A باشد، می‌گوییم a عضوی از مجموعه A است و می‌نویسیم $a \in A$.
 $A = \{a, \dots\}$

۲) مفهوم زیرمجموعه

اگر تمام عضوهای مجموعه A در مجموعه B باشد، می‌گوییم A زیرمجموعه B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$. تعریف ریاضی این مفهوم به شکل یک سور ریاضی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

اگر $A \subseteq B$ باشد به طوری که $A \neq B$ ، آن گاه A زیرمجموعه محض یا سبزه B نامیده می‌شود.

بنابراین اگر $A \not\subseteq B$ ، مفهوم ریاضی آن، نقیض سور بالا خواهد بود:

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B)$$

مثال ۱) اگر $A = \{2\}$ ، $B = \{3, 5, \{2\}\}$ و $C = \{\{\{2\}, 3, 5\}, 2\}$ باشند، کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟
 $B = \{A, \dots\}$
 $A \in B$ (۱) ✓
 $A \in C$ (۲) ✗
 $B \in C$ (۳) ✓
 $A \subseteq C$ (۴) ✓

مثال ۲) سه مجموعه A ، B و C مثال بزنید که $A \subseteq B$ و $A \in C$ و $B \subseteq C$.

$$A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{\{1\}, 1, 2\}$$

نکته: یک مجموعه n عضوی، دارای 2^n زیرمجموعه است که یکی از آن‌ها، تهی و دیگری خود آن مجموعه است. بنابراین یک مجموعه n عضوی، $2^n - 1$ زیرمجموعه سبزه و $2^n - 2$ زیرمجموعه سره ناتهی دارد.

مثال ۳) اگر به مجموعه A سه عضو اضافه شود، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲۲۴ واحد اضافه خواهد شد.

الف) مجموعه A چند عضو دارد؟

ب) مجموعه A چند زیرمجموعه دارد؟

پ) مجموعه A چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟

$$\begin{aligned} A: n & \xrightarrow{+3 \text{ عضو اضافه شود}} n+3 \\ & \downarrow \text{تعداد زیرمجموعه} \\ 2^n & \xrightarrow{+224} 2^{n+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{n+3} &= 2^n + 224 \rightarrow 2^3 \times 2^n = 2^n + 224 \xrightarrow{2^n = n} \\ 8n &= n + 224 \rightarrow 7n = 224 \rightarrow n = 32 \\ 2^n &= 32 = 2^5 \rightarrow n = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{الف) } 5 \text{ عضو} \\ \text{ب) } 2^5 = 32 \\ \text{پ) } \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \end{aligned}$$





مجموعه توانی: مجموعه توانی A را با $P(A)$ نشان می‌دهیم که شامل تمام زیرمجموعه‌های A می‌باشد. اگر A یک مجموعه n عضوی باشد، $P(A)$ ، 2^n عضو خواهد داشت.

مثال ۴) مجموعه توانی $A = \{a, \{a\}, \emptyset\}$ را بنویسید.

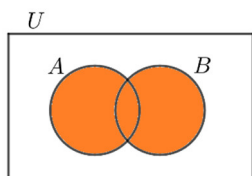
$$P(A) = \left\{ \emptyset, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset\}, \{a, \{a\}\}, \{a, \emptyset\}, \{\{a\}, \emptyset\}, \{a, \{a\}, \emptyset\} \right\}$$

مثال ۵) مجموعه توانی $A = \{a, \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ چند عضو دارد؟

$$P(A) = 16 \text{ عضو} \rightarrow 4 \text{ عضو } A$$

۲) اعمال روی مجموعه‌ها

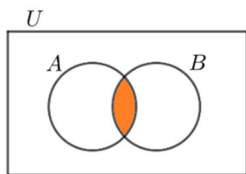
۱) اجتماع



$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

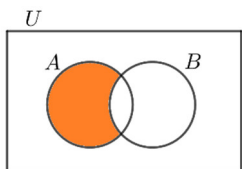
$$B \cup A = \{x | x \in B \vee x \in A\}$$

۲) اشتراک



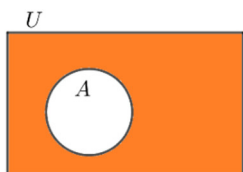
$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

۳) تفاضل



$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

۴) متمم



$$A' = \{x \in U | x \notin A\}$$

با توجه به شکل‌های بالا، واضح است که:

$$۱) A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

$$۲) (A')' = A$$

$$۳) A \subseteq A \cup B, A \cap B \subseteq A$$

تعریف زیرمجموعه به کمک نمادهای ریاضی

تعریف زیرمجموعه به کمک سورها انجام می‌شود:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B)$$





اثبات به روش عضوگیری

در این روش برای اثبات $A \subseteq B$ ، با توجه به تعریف بالا، فرض می‌کنیم $x \in A$ (که x عضو دلخواهی از A است) و نشان می‌دهیم که $x \in B$.

مثال ۶ با روش عضوگیری نشان دهید که:

الف) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، آن گاه $A \subseteq C$
 ب) اگر $A \subseteq B$ ، آن گاه $B' \subseteq A'$
 پ) $\emptyset \subseteq A$
 ت) $A \subseteq A \cup B$
 ث) $A \cap B \subseteq A$
 ج) $A - B = A \cap B'$

$$\forall x: [x \in A \xRightarrow{A \subseteq B} x \in B \xRightarrow{B \subseteq C} x \in C] \Rightarrow A \subseteq C$$

$$x \in B' \Rightarrow x \notin B \xRightarrow{A \subseteq B} x \notin A \Rightarrow x \in A'$$

$$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$$

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$$

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} = \{x | x \in A \wedge x \in B'\} = A \cap B'$$

مثال ۷ برای مجموعه‌های A, B, C و D با مرجع U ثابت کنید که:

$$x \in A \cup C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xRightarrow{A \subseteq B} x \in B \\ \vee \\ x \in C \xRightarrow{C \subseteq D} x \in D \end{cases} \Rightarrow x \in B \cup D \xRightarrow{A \cup C \subseteq B \cup D} x \in B \cup D$$

$$x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xRightarrow{A \subseteq C} x \in C \\ \vee \\ x \in B \xRightarrow{B \subseteq C} x \in C \end{cases} \Rightarrow x \in C \xRightarrow{A \cup B \subseteq C} x \in C$$

$$\emptyset \subseteq X$$

$$X \subseteq \emptyset : \left[x \in X \xRightarrow{X \subseteq A} \begin{cases} x \in A \\ \wedge \\ x \in A' \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap A' \Rightarrow x \in \emptyset \right] \Rightarrow X = \emptyset$$

نکته: برای اثبات تساوی دو مجموعه یعنی $A = B$ ، کفایت نشان دهیم که $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

مثال ۸ نشان دهید که اگر $X \subseteq A$ و $X \subseteq A'$ ، آنگاه $X = \emptyset$.

$$\begin{aligned} [x \in A \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow x \in (A')'] &\Rightarrow A \subseteq (A')' \\ [x \in (A')' \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow x \in A] &\Rightarrow (A')' \subseteq A \\ \Rightarrow (A')' &= A \end{aligned}$$



درس : دوم : مبحث : جبر مجموعه ها



مثال ۱۰) نشان دهید که اگر $A \subseteq B$ ، آن گاه $A - B = \emptyset$.

$$\begin{aligned} & \text{فرضیه: } \emptyset \subseteq A - B \\ & A - B \subseteq \emptyset : \left[x \in A - B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \xRightarrow{A \subseteq B} x \in B \wedge x \notin B \Rightarrow x \in \underbrace{B \cap B^c}_{\emptyset} \Rightarrow x \in \emptyset \right] \\ & \Rightarrow A - B = \emptyset \end{aligned}$$

مثال ۱۱) نشان دهید که برای دو مجموعه A و B داریم: $A \cap B = B \cap A$.

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\} = \{x / x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A \quad (\text{استفاده از توافقی})$$

۳) قوانین مجموعه ها

برای مجموعه های A ، B و C قوانین زیر برقرار است. هر یک از این قوانین به کمک عضوگیری اثبات می شود. از این قوانین می توانیم برای اثبات یک مسئله در مجموعه ها مانند یک قضیه استفاده کنیم.

۱) قوانین مقدماتی:

الف) $A \cup B = B \cup A$ ، $A \cap B = B \cap A$ خاصیت جابجایی

ب) $A \cap A' = \emptyset$ ، $A \cup A' = U$

پ) $A \cup U = U$ ، $A \cap U = A$

ت) $A \subseteq A \cup B$ ، $A \cap B \subseteq A$

۲) قانون دمورگان:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad , \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$A - B = A \cap B' \quad , \quad A \cap B = A - B'$$

۳) تبدیل تفاضل به اشتراک:

۴) قانون شرکت پذیری:

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases} = A \cup B \cup C = A \cap B \cap C$$

۴) قانون توزیع پذیری:

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

۵) قانون جذب:

$$\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$$

مثال ۱۲) به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید که:

الف) $(A \cup B) \cap (B' \cup A) = A$

$$(A \cup B) \cap (B' \cup A) \xrightarrow[\text{منیر}]{\text{تفویع}} A \cup (B \cap B') = A \cup \emptyset = A$$

ب) $A - B = B' - A'$

$$A - B = A \cap B' = B' \cap A = B' - A'$$





$$(A - B) - C = (A - C) - B \quad (\text{پ})$$

$$(A - B) - C = (A \cap B') - C = (A \cap B') \cap C' = (A \cap C') \cap B' = (A - C) \cap B' = (A - C) - B'$$

$$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)' = (A \cap B) \cap (A' \cup C') = \underbrace{(A \cap B)}_M \cap (A' \cup C') = M \cap (A' \cup C') = (M \cap A') \cup (M \cap C')$$

$$= [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C'] = \underbrace{[(A \cap A') \cap B]}_{\emptyset} \cup [A \cap (B \cap C')] = A \cap (B - C)$$

$$(A - C) \cup (B - C) = (A \cap C') \cup (B \cap C') = C' \cap (A \cup B) = (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C$$

مثال ۱۳ به کمک جبر مجموعه ها، قوانین جذب را ثابت کنید.

$$(1) A \cup (A \cap B) = A$$

$$\begin{aligned} \text{اثبات: } A \cup (A \cap B) &= (A \cap U) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap (U \cup B) \\ &= A \cap U \\ &= A \end{aligned}$$

$$(2) A \cap (A \cup B) = A$$

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B) \\ &= A \cup (\emptyset \cap B) \\ &= A \cup \emptyset \\ &= A \end{aligned}$$

مثال ۱۴ برای دو مجموعه A و B با مرجع U ثابت کنید که:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

$$\text{فرض: } A \subseteq B \xrightarrow{U \cup B} A \cup B \subseteq B \cup B \Rightarrow A \cup B \subseteq B \xrightarrow{B \subseteq A \cup B} A \cup B = B$$

$$\text{فرض: } A \cup B = B, \quad \left(x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \xRightarrow{\text{فرض}} x \in B \right) \Rightarrow A \subseteq B$$

مثال ۱۵ اگر A و X دو مجموعه باشند به طوری که $A \subseteq X$ و $A' \subseteq X$ ، نشان دهید که $X = U$.

$$\begin{cases} A \subseteq X \\ A' \subseteq X \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} A \cup A' \subseteq X \cup X \Rightarrow U \subseteq X \xrightarrow{X \subseteq U} X = U$$

مثال ۱۶ اگر A و X دو مجموعه باشند به طوری که $X \subseteq A$ و $X \subseteq A'$ ، نشان دهید که $X = \emptyset$.

$$\begin{cases} X \subseteq A \\ X \subseteq A' \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} X \cap X \subseteq A \cap A' \Rightarrow X \subseteq \emptyset \xrightarrow{\emptyset \subseteq X} X = \emptyset$$



درس : دوم : مبحث : جبر مجموعه ها

مثال ۱۷ به کمک جبر مجموعه ها نشان دهید که اگر $A \cup B = A \cap B$ ، آن گاه $A = B$.

$$A \subseteq A \cup B \xrightarrow{\text{فرض}} A \subseteq A \cap B \xrightarrow{\text{همیشه برقرار}} A \cap B = A \rightarrow \underline{A \subseteq B}$$

مشابهی بون باشد که : $B \subseteq A$ ، پس $A = B$

نکته: در حل مسائل سعی کنید از نمودار ون برای تشخیص و یا مشاهده درستی جواب استفاده کنید.

مثال ۱۸ اگر A و B دو مجموعه باشند، به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید که $(A \cap B') - (B - A) = A - B$.

$$\begin{aligned} (A \cap B') - (B - A) &= (A \cap B') \cap (B - A)' = (A \cap B') \cap (B \cap A')' = (A \cap B') \cap (A \cup B') \\ &= M \cap (A \cup B') = (M \cap A) \cup (M \cap B') = [(A \cap B') \cap A] \cup [(A \cap B') \cap B'] \\ &= [\underbrace{(A \cap A)}_A \cap B'] \cup [A \cap \underbrace{(B' \cap B')}_{B'}] = (A \cap B') \cup (A \cap B') = A \cap B' = A - B \end{aligned}$$

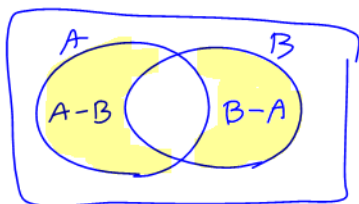
مثال ۱۹ اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل $A - (B - (A \cap B))$ را به کمک جبر مجموعه ها ساده کنید.

$$\begin{aligned} A - (B - (A \cap B)) &= A - (B \cap (A \cap B)') = A - (B \cap (A' \cup B')) = A \cap (B \cap (A' \cup B'))' \\ &= A \cap (B' \cup (A \cap B)) = (A \cap B') \cup \underbrace{(A \cap (A \cap B))}_{\underbrace{(A \cap A) \cap B}_A} = (A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap \underbrace{(B' \cup B)}_U \\ &= A \cap U = A \end{aligned}$$

مثال ۲۰ اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل $(A \cup B') \cap [(B \cap C) \cup (B' \cup A)]$ را به کمک جبر مجموعه ها ساده کنید.

$$\begin{aligned} (A \cup B') \cap [(B \cap C) \cup (B' \cup A)] &= (A \cup B') \cap [(B \cup M) \cap (C \cup M)] = (A \cup B') \\ (A \cup B') \cap \underbrace{[(B \cup (B' \cup A)) \cap (C \cup (B' \cup A))]}_{\underbrace{(B \cup B') \cup A}_U} &= \underbrace{(A \cup B') \cap C}_N \cup \underbrace{(A \cup B') \cap (B' \cup A)}_N = \underbrace{A \cup B'}_N \end{aligned}$$

مثال ۲۱ اگر A و B دو مجموعه باشند، به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید که $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.



$$(A - B) \cup (B - A) = A \Delta B$$

$$\text{اثبت : } (A - B) \cup (B - A) = \underbrace{(A \cap B')}_M \cup (B \cap A')$$

$$= M \cup (B \cap A') = (M \cup B) \cap (M \cup A')$$

$$= [(A \cap B') \cup B] \cap [(A \cap B') \cup A']$$

$$= [(A \cup B) \cap \underbrace{(B' \cup B)}_U] \cap [\underbrace{(A \cup A')}_U \cap (B' \cup A')] = (A \cup B) \cap (A' \cup B') = (A \cup B) - (A \cap B)$$



درس : دوم : مبحث : جبر مجموعه ها



مثال ۷۲) اگر A و B و C سه مجموعه باشند به طوری که $A \cup B = A \cup C$ ، $A \cap B = A \cap C$

، به کمک جبر مجموعه ها نشان دهید که $B = C$.

فرض

خاصیت ضربی برتر است (به تهایی)

$$\begin{array}{l|l} A \cup B = A \cup C \xrightarrow{x} B = C & A \cap B = A \cap C \xrightarrow{x} B = C \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow & \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2\} \cup \{3,4\} & \{1,2\} \cap \{3,4\} = \{1,2\} \cap \{3,4\} \end{array}$$

اثبات : $B \stackrel{\text{فرض}}{=} B \cup (A \cap B) \stackrel{\text{فرض}}{=} B \cup (A \cap C)$

$$= (B \cup A) \cap (B \cup C) \stackrel{\text{فرض}}{=} (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$\stackrel{\text{فرض}}{=} C \cup (A \cap B) \stackrel{\text{فرض}}{=} C \cup (A \cap C) = C$$

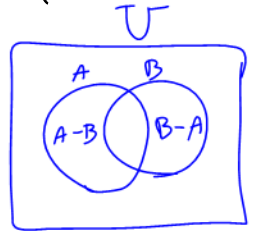
نکته: در حل مسائل تستی، سعی کنید از نمودار ون استفاده کنید. در مجموعه مرجع، به تعداد مجموعه های داده شده، مجموعه ها را طوری رسم کنید

که هر مجموعه با مجموعه دیگر اشتراک داشته باشد.

روش هاروی استفاده
(۱) عنوانی
(۲) مجموعه
(۳) نمودار ون
(۴) $A - B$ ✓

مثال ۷۳) اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، $(A \cap B') - (B - A)$ برابر کدام مجموعه است؟
 B' (۱) $\emptyset$ (۲) $A \cap B$ (۳) $A - B$ (۴) ✓

$$(A \cap B') - (B - A) \stackrel{\text{نمودار ون}}{=} (A - B) - (B - A) \stackrel{\text{مجموعه ها}}{=} A - B$$



مثال ۷۴) متمم مجموعه $[A - (A - B)] \cup (A \cap B)'$ کدام است؟

A (۱) B' (۲) $A \cup B'$ (۳) $\emptyset$ (۴) ✓

$$[A - (A - B)] \cup (A \cap B)' = (A \cap B) \cup (A \cap B)' = U \stackrel{\text{متمم}}{=} (U)' = \emptyset$$

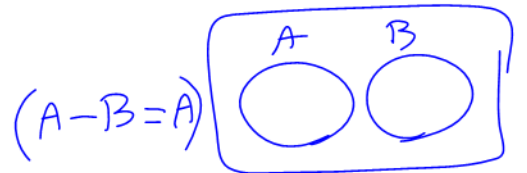
(با کمک نمودار ون)

مثال ۷۵) اگر A ، B و C مجموعه های تهی و $A \subseteq B$ ، آنگاه مجموعه $(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C)$ کدام است؟
 $A \cap C'$ (۱) ✓ $A \cap C$ (۲) A (۳) B (۴)

$$(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C) = (A \cap (B \cap C')) - (A \cap B \cap C) = ((A \cap B) \cap C') - ((A \cap B) \cap C)$$

$$\frac{A \subseteq B}{A \cap B = A} \quad (A \cap C') - (A \cap C) = (A \cap C')$$

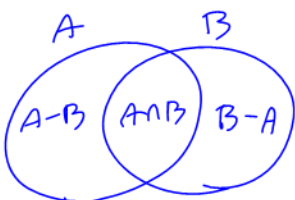
تجزیه



مثال ۷۶) اگر $A \cap B' = B \cap A'$ ، حاصل $(A \cup B) - (A \cap B)$ کدام است؟

A (۱) B (۲) $A - B$ (۳) $\emptyset$ (۴) ✓

$$A \cap B' = B \cap A' \Rightarrow A - B = B - A \Rightarrow \underbrace{(A - B) \cup (A \cap B)}_A = \underbrace{(B - A) \cup (A \cap B)}_B \Rightarrow A = B$$



$$(A \cup B) - (A \cap B) \stackrel{A=B}{=} (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \emptyset$$



مثال ۲۷ اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، حاصل $A - (B - (A \cap B))$ کدام مجموعه است؟

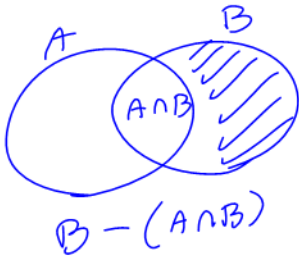
$A \cup B$ (۴)

$A \cap B$ (۳)

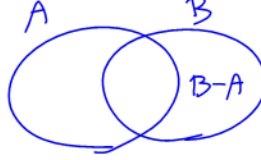
B (۲)

A (۱) ✓

$$A - (B - (A \cap B)) \xrightarrow{\text{ون}} A - (B - A) \xrightarrow{\text{ون}} A$$



$A = B = C$ (۴)



مثال ۲۸ اگر $A \cap B = A \cap C$ و $B' - A = C' - A$ ، کدام نتیجه گیری صحیح است؟

$A = B$ (۳)

$B = C$ (۲) ✓

$A = C$ (۱)

$$\{ A \cap B = A \cap C \quad (۱)$$

$$\{ B' - A = C' - A \rightarrow B' \cap A' = C' \cap A' \xrightarrow{\text{مست}} (B' \cap A')' = (C' \cap A')' \Rightarrow A \cup B = A \cup C \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \xrightarrow{\text{منفی}} B = C$$

۵ ضرب دکارتی

۱) مفهوم ضرب دکارتی

ضرب دکارتی مجموعه A در مجموعه B را با $A \times B$ نشان می‌دهیم که مجموعه شامل تمام زوج‌های مرتبی مانند (x, y) است که $x \in A$ و $y \in B$. به عبارت دیگر:

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

و معمولاً به جای $A \times A$ می‌نویسیم A^2 .

مثال ۲۹ اگر $A = \{ 2k-1 \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 2 \}$ و $B = \{ x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 9 \}$ ، مجموعه‌های A^2 و $A \times B$ را با نوشتن اعضای آن‌ها مشخص کنید.

$$A = \{ 2k-1 \mid k \in \mathbb{Z}, \underbrace{0 \leq k \leq 2}_{k=0,1,2} \} = \{ -1, 1, 3 \}$$

$$B = \{ x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 9 \} = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$A^2 = A \times A = \{ -1, 1, 3 \} \times \{ -1, 1, 3 \} = \{ (-1, -1), (-1, 1), (-1, 3), (1, -1), (1, 1), (1, 3), (3, -1), (3, 1), (3, 3) \}$$

$$A \times B = \{ -1, 1, 3 \} \times \{ 1, 2, 3 \} = \{ (-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \}$$





۲) قضیه‌های مهم در ضرب دکارتی

اگر A و B دو مجموعه باشند و منظور از $n(A)$ و $n(B)$ تعداد اعضای آن‌ها باشد، همواره داریم:

۱) $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

۲) $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$

۳) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$

ضرب دکارتی نسبت به تفاضل، اجتماع و اشتراک دو مجموعه، از هر دو طرف توزیع پذیر است:

۴) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

اگر A, B, C, D چهارمجموعه غیر تهی باشند، همواره داریم:

۵) $A \times B = C \times D \Leftrightarrow A = C \wedge B = D$

۶) $A \times B \subseteq C \times D \Leftrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq D$

اگر A, B, C, D چهارمجموعه باشند، همواره داریم:

۷) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

بنابراین:

۸) $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A) = (A \cap B)^2$

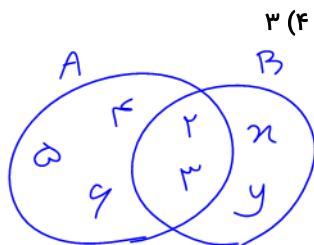
پس **تعداد اعضای مشترک** $A \times B$ و $B \times A$ برابر با مربع تعداد اعضای $A \cap B$ می‌باشد.

مثال ۳۰) اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2\}$ ، آنگاه $A^2 - A \times B$ چند عضو دارد؟

روشن اول) تشریحی، A^2 و $A \times B$ را می‌توانیم تفکیک کنیم به دست‌های آویز

روشن دوم) $A^2 - A \times B = A \times A - A \times B = A \times (A - B)$: $3 \times 1 = 3$ عضو

مثال ۳۱) اگر $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $A \cap B = \{2, 3\}$ و مجموعه $(A - B) \times (B - A)$ دارای ۶ عضو باشد، تعداد عضوهای B کدام است؟



$(A - B) \times (B - A) : 6 \Rightarrow n(B - A) = 2$

$\Rightarrow n(B) = 4$

مثال ۳۲) اگر $A = \{y + 2, 5, z\}$ و $B = \{x + 1, 4, -2\}$ ، در این صورت با فرض $A \times B = B \times A$ ، مقادیر x, y, z را به دست آورید.

$A \times B = B \times A \Rightarrow \begin{cases} A = \emptyset \times \\ B = \emptyset \times \\ A = B \end{cases} \rightarrow \{y + 2, 5, z\} = \{x + 1, 4, -2\} \rightarrow \begin{cases} x + 1 = 5 \rightarrow x = 4 \\ 4 = z, -2 = y + 2 \\ 4 = y + 2, -2 = z \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ z = 4, y = -4 \text{ (1)} \\ z = -2, y = 2 \text{ (2)} \end{cases}$



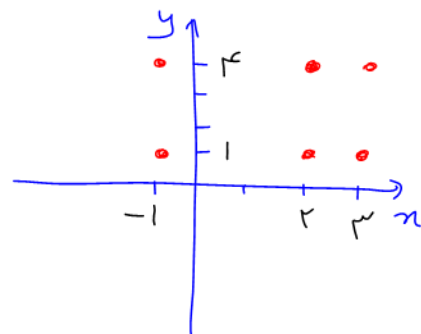


$A \times B$: تصویر روی محور x ها: A
تصویر روی محور y ها: B

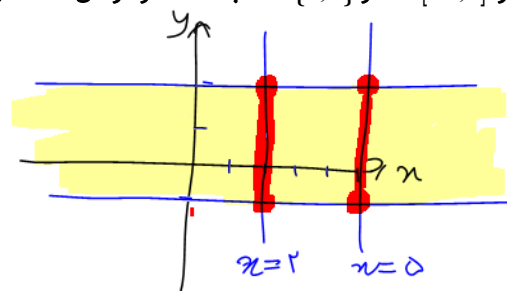
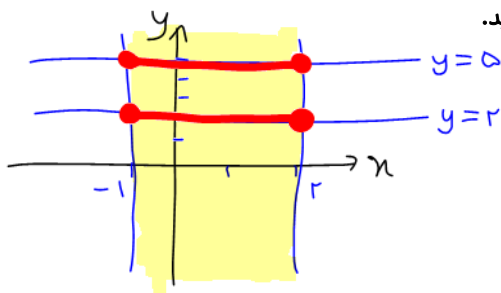
۳) نمودارهای ضرب دکارتی

مثال ۳۳) اگر $A = \{-1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 4\}$ باشند، نمودار $A \times B$ را رسم کنید.

$A \times B = \{-1, 2, 3\} \times \{1, 4\} \rightarrow 3 \times 2 = 6 \text{ نقطه}$
رسم $= \{(-1, 1), (-1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$



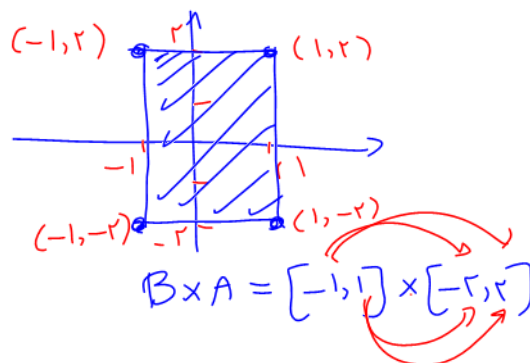
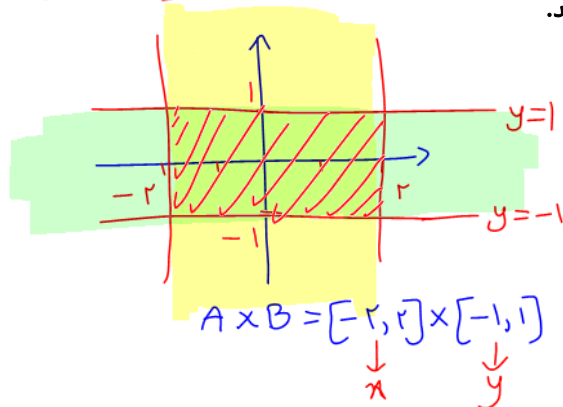
مثال ۳۴) اگر $A = [-1, 2]$ و $B = \{2, 5\}$ باشند، نمودارهای $A \times B$ و $B \times A$ را رسم کنید.



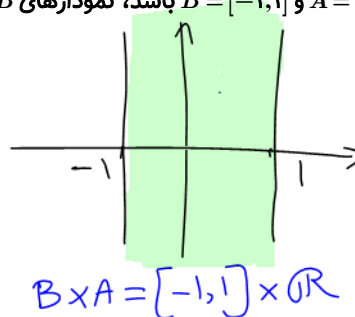
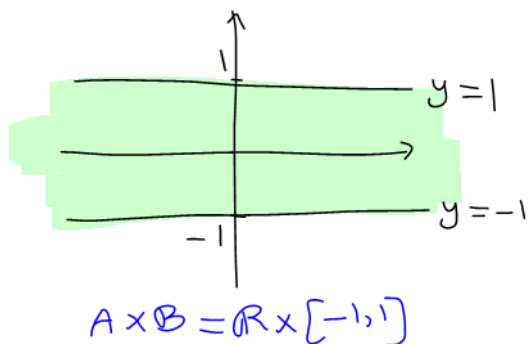
$A \times B = [-1, 2] \times \{2, 5\}$
تصویر روی محور x ها
تصویر روی محور y ها

$B \times A = \{2, 5\} \times [-1, 2]$

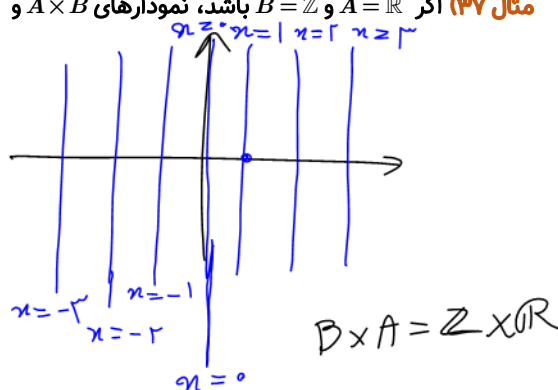
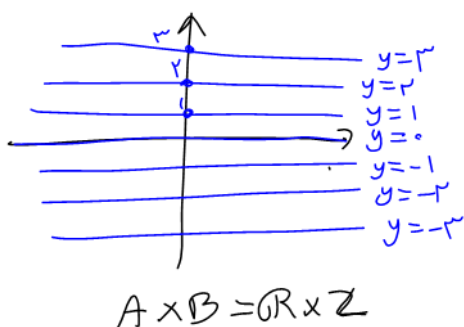
مثال ۳۵) اگر $A = [-2, 2]$ و $B = [-1, 1]$ باشند، نمودارهای $A \times B$ و $B \times A$ را رسم کنید.



مثال ۳۶) اگر $A = \mathbb{R}$ و $B = [-1, 1]$ باشند، نمودارهای $A \times B$ و $B \times A$ را رسم کنید.



مثال ۳۷) اگر $A = \mathbb{R}$ و $B = \mathbb{Z}$ باشند، نمودارهای $A \times B$ و $B \times A$ را رسم کنید.



۱ کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم مساوی‌اند؟

$$A = B = D$$

$$C = E$$

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 2\}$$

$$|m| < 2 \rightarrow -2 < m < 2 \rightarrow A = \{-1, 0, 1\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\}$$

$$x^2 = x \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow B = \{-1, 0, 1\}$$

$$C = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^2 \leq 2y\}$$

$$y^2 \leq 2y \rightarrow y^2 - 2y \leq 0 \rightarrow y(y-2) \leq 0 \rightarrow 0 \leq y \leq 2 \rightarrow C = \{0, 1, 2\}$$

$$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 1\}$$

$$m^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq m \leq 1 \rightarrow D = \{-1, 0, 1\}$$

$$E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 + 2m = 3m^2\}$$

$$m^2 - 3m^2 + 2m = 0 \rightarrow m(m^2 - 3m + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases}$$

$$(m-2)(m-1) = 0 \rightarrow m = 1, 2 \rightarrow E = \{0, 1, 2\}$$

۲ اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعه A چند زیرمجموعه دارد؟

عنصر ۲: A $\xrightarrow{\text{عنصر ۲}}$ $n-2$ عضو
 $\downarrow$
 $2^n - 384 \xrightarrow{\text{عنصر ۲}}$ 2^{n-2}
 $2^n = ?$

$$2^n - 384 = 2^{n-2} \rightarrow 2^n - 384 = \frac{2^n}{4} \xrightarrow{\times 4} 4 \cdot 2^n - 1536 = 2^n \xrightarrow{-2^n} 3 \cdot 2^n = 1536 \rightarrow 2^n = 512$$

۳ اگر $A = \{2, x+2y, 4\}$ و $B = \{4, 5, x-y\}$ و $A=B$ در این صورت، مقادیر x و y را بیابید.

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ x+2y=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x+y=-2 \\ x+2y=5 \end{cases} \xrightarrow{+} 3y=3 \rightarrow y=1$$

$$x-y=2 \xrightarrow{y=1} x-1=2 \rightarrow x=3$$

۴ ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B با مرجع U داریم: $A-B \subseteq A$.

به روش عضوگیری:

$$\forall x: (x \in A-B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A) \Rightarrow A-B \subseteq A$$

۵ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ آن گاه: در دو مورد از روش عضوگیری استقاعی کنیم:

(الف) $A \cup C \subseteq B \cup C$

$$\forall x: (x \in A \cup C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xRightarrow{A \subseteq B} x \in B \\ x \in C \Rightarrow x \in C \end{cases} \Rightarrow x \in B \cup C) \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$$

(ب) $A \cap C \subseteq B \cap C$

$$\forall x: (x \in A \cap C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xRightarrow{A \subseteq B} x \in B \\ x \in C \Rightarrow x \in C \end{cases} \Rightarrow x \in B \cap C) \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$$

۶ مجموعه‌های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن گاه: به روش عضوگیری داریم:

(الف) $A \cap C \subseteq B \cap D$

$$\forall x: (x \in A \cap C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xRightarrow{A \subseteq B} x \in B \\ x \in C \xRightarrow{C \subseteq D} x \in D \end{cases} \Rightarrow x \in B \cap D) \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D$$

(ب) $A \cap C \subseteq B \cup D$

$$\forall x: (x \in A \cap C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xRightarrow{A \subseteq B} x \in B \\ x \in C \xRightarrow{C \subseteq D} x \in D \end{cases} \Rightarrow x \in B \wedge x \in D \Rightarrow x \in B \vee x \in D \Rightarrow x \in B \cup D) \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cup D$$

الف) فرض کنید $A \subseteq \emptyset$ ثابت کنید: $A = \emptyset$.

$$\begin{cases} \emptyset \subseteq A & (\text{همیشه درست}) \\ A \subseteq \emptyset & (\text{فرض}) \end{cases} \Rightarrow A = \emptyset$$

ب) فرض کنید $U \subseteq A$ ثابت کنید: $A = U$.

$$\begin{cases} A \subseteq U & (\text{همیشه درست}) \\ U \subseteq A & (\text{فرض}) \end{cases} \Rightarrow A = U$$

۸ هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت ثابت کنید: $B - A = B$ (الف)

$$\begin{cases} 1) B - A \subseteq B & (\text{همیشه درست}) \\ 2) B \subseteq B - A \end{cases}$$

$$0-1: \left(x \in B \xrightarrow{A \cap B = \emptyset} x \notin A \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B - A \right) \Rightarrow B \subseteq B - A$$

$$1), 2) \Rightarrow B - A = B$$

ب) $B \subseteq A'$

$$\forall x: \left(x \in B \xrightarrow{A \cap B = \emptyset} x \notin A \Rightarrow x \in A' \right) \Rightarrow B \subseteq A'$$

۹ با استفاده از تعریف اشتراک، اجتماع و خواص جابه جایی، شرکت پذیری و توزیع پذیری برای ترکیب عطفی و فصلی در گزاره ها، هر یک از تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $A \cap B = B \cap A$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$

$$A \cap B = \left\{ x \in U \mid \underbrace{x \in A}_p \wedge \underbrace{x \in B}_q \right\} = \left\{ x \in U \mid x \in B \wedge x \in A \right\} = B \cap A$$

ب) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= \left\{ x \in U \mid x \in A \wedge x \in (B \cap C) \right\} = \left\{ x \in U \mid \underbrace{x \in A}_p \wedge (\underbrace{x \in B}_q \wedge \underbrace{x \in C}_r) \right\} \\ &= \left\{ x \in U \mid (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \right\} = \left\{ x \in U \mid x \in (A \cap B) \wedge x \in C \right\} = (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

پ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \left\{ x \in U \mid x \in A \wedge x \in (B \cup C) \right\} = \left\{ x \in U \mid \underbrace{x \in A}_p \wedge (\underbrace{x \in B}_q \vee \underbrace{x \in C}_r) \right\} \\ &= \left\{ x \in U \mid (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \right\} = \left\{ x \in U \mid x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \right\} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

الف) $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = A$

تساویات: $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = A \cap (B \cup B') = A \cap U = A$: سمت چپ

ب) $(A' \cap B') \cap A = \emptyset$

$(A' \cap B') \cap A = (B' \cap A') \cap A = B' \cap (A' \cap A) = B' \cap \emptyset = \emptyset$

پ) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$
 $(A \cap B) \cap (A \cap C) \xrightarrow{\text{قانون دистриکتیو}} A \cap (B \cap (A \cap C)) \xrightarrow{\text{قانون دистриکتیو}} A \cap ((B \cap A) \cap C) = A \cap ((A \cap B) \cap C)$
 $\xrightarrow{\text{قانون دистриکتیو}} A \cap (A \cap (B \cap C)) \xrightarrow{\text{قانون دистриکتیو}} (A \cap A) \cap (B \cap C) = A \cap (B \cap C)$

ت) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$, $(A \cup B) \cup (A \cup C) = A \cup (B \cup (A \cup C)) = A \cup ((B \cup A) \cup C)$
 $= A \cup ((A \cup B) \cup C) = A \cup (A \cup (B \cup C)) = (A \cup A) \cup (B \cup C) = A \cup (B \cup C)$.

$B \cap A \subseteq B \cup A$

۱۱ هریک از عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف) $(A' \cap B) \cup ((B \cap A) - B') \cap (B \cup A) = (A' \cap B) \cup ((B \cap A) \cap B') \cap (B \cup A)$
 $= (A' \cap B) \cup ((B \cap A) \cap (B \cup A)) = (A' \cap B) \cup (B \cap A) = B \cap (A' \cup A) = B \cap U = B$.

ب) $(A \cup B) - B = (A \cup B) \cap B' = (A \cap B') \cup (B \cap B') = (A \cap B') \cup \emptyset = A \cap B' = B \cap A' = B - A$

پ) $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B) = [(A \cup B) \cap A'] \cup (A \cap B) = [\underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} \cup (B \cap A')] \cup (A \cap B)$

$= (B \cap A') \cup (A \cap B) = B \cap (A' \cup A) = B \cap U = B$

۱۲ درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$
 $\underbrace{(A \subseteq X)}_{\text{فرض}} \wedge \underbrace{(A' \subseteq X)}_{\text{فرض}} \xrightarrow{\text{اجتهاد}} \underbrace{A \cup A'}_{U} \subseteq X \cup X \Rightarrow U \subseteq X$
 $\left. \begin{matrix} A \subseteq X \\ A' \subseteq X \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{اجتهاد}} \underbrace{A \cup A'}_{U} \subseteq X \cup X \Rightarrow U \subseteq X$
 $\left. \begin{matrix} U \subseteq X \\ X \subseteq U \end{matrix} \right\} \Rightarrow X = U$

ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

$(A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap U = A$

پ) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

$(A - C) \cap (B - C) = (A \cap C') \cap (B \cap C') = C' \cap (A \cap B) = (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C$

ت) $(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

$$(A-B) \cup (B-A) = \underbrace{(A \cap B') \cup (B \cap A')}_M = M \cup (B \cap A') = (M \cup B) \cap (M \cup A') = ((A \cap B') \cup B) \cap ((A \cap B') \cup A')$$

$$= ((A \cup B) \cap \underbrace{(B' \cup B)}_U) \cap ((\underbrace{A \cup A'}_U) \cap (A' \cup B')) = (A \cup B) \cap (A' \cup B') = (A \cup B) - (A' \cup B')' = (A \cup B) - (A \cap B)$$

ث) $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$

$$(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \underbrace{(A \cup B)}_M \cap (A \cup B)' = M \cap M' = \emptyset$$

ج) $[(A \cup B) = (A \cup C) \wedge (A \cap B) = (A \cap C)] \Rightarrow B = C$

$$B \stackrel{\text{فرض}}{=} B \cap (A \cup B) \stackrel{\text{فرض}}{=} B \cap (A \cup C) \stackrel{\text{توزیع}}{=} (B \cap A) \cup (B \cap C) \stackrel{\text{فرض}}{=} (A \cap C) \cup (B \cap C) \stackrel{\text{توزیع}}{=} C \cap (A \cup B)$$

$$\stackrel{\text{فرض}}{=} C \cap (A \cup C) \stackrel{\text{فرض}}{=} C$$

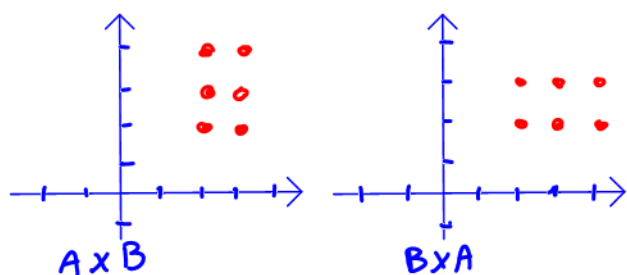
۱۳ اگر $A = \{y+2, 5, z\}$ و $B = \{x+1, 4, -2\}$ در این صورت، با فرض $A \times B = B \times A$ بیشترین مقدار برای $(x+y+z)$ را بیابید.

$$A \times B = B \times A \Rightarrow \begin{cases} A = \emptyset & \text{غیر ممکن} \\ B = \emptyset & \text{غیر ممکن} \\ A = B & \checkmark \end{cases}$$

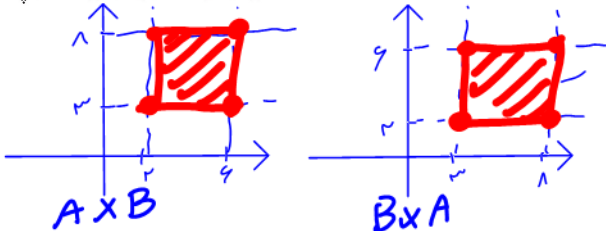
$$\begin{aligned} \text{حالت اول)} \quad y+2=4, z=-2 &\rightarrow y=2, z=-2 \xrightarrow{x=4} x+y+z=4+2-2=4 \Rightarrow x+y+z=4 \\ \text{حالت دوم)} \quad z=4, y+2=-2 &\rightarrow z=4, y=-4 \xrightarrow{x=4} x+y+z=4-4+4=4 \Rightarrow x+y+z=4 \end{aligned}$$

۱۴ با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هر یک از حاصل ضرب‌های $A \times B$ و $B \times A$ را رسم کنید.

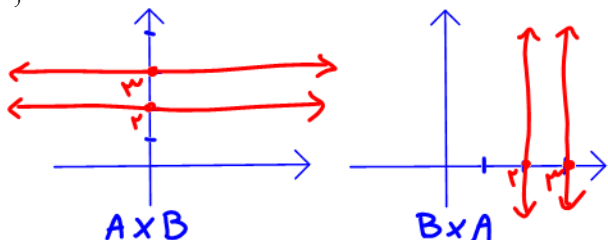
الف) $A = \{2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$



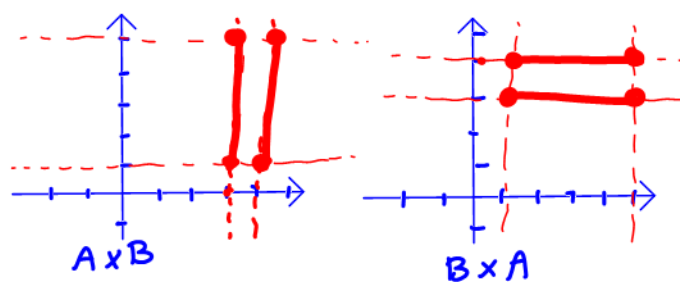
ب) $A = [2, 6], B = [3, 8]$



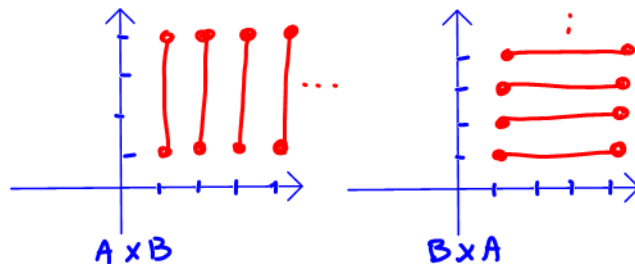
ث) $A = \mathbb{R}, B = \{2, 3\}$



ب) $A = \{3, 4\}, B = \{1, 5\}$



ت) $A = \mathbb{N}, B = [1, 4]$





درس ۱: مبانی احتمال

۱) مفاهیم مقدماتی

آزمایش تصادفی

۱) فضای نمونه

مجموعه همه نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه آن آزمایش نامیده و معمولاً آن را با S نشان می‌دهیم.

۲) پیشامد تصادفی

هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد تصادفی می‌گوییم. $A, B, \dots$

مثال ۱) در پرتاب یک تاس، فضای نمونه‌ای و پیشامد اول بودن اعداد رو شده را بنویسید.

$$S = \{1, 2, \dots, 6\}, A = \{2, 3, 5\}$$

نکته: اگر چند آزمایش ساده به نام‌های $S_1, S_2, \dots, S_n$ به طور همزمان انجام شوند، اعضای فضای نمونه آزمایش حاصل به نام S ، از مرتب نوشتن وقوع هر کدام از آزمایش‌ها، انجام می‌شود و تعداد اعضای آن عبارتست از:

$$n(S) = n(S_1) \times n(S_2) \times \dots \times n(S_n)$$

مثال ۲) در پرتاب دو تاس به طور همزمان، مطلوبست تعیین:

الف) فضای نمونه و تعداد اعضای آن

$$S = \{(1,1), \dots, (1,6), \dots, (6,1), \dots, (6,6)\} \rightarrow n(S) = 6 \times 6 = 36$$

ب) پیشامد این که مجموع اعداد رو شده، ۷ باشد.

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

پ) پیشامد این که اعداد رو شده در تاس اول از اعداد رو شده در تاس دوم بزرگتر باشند.

$$B = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), \dots, (5,4), (6,1), \dots, (6,5)\}$$

$$\rightarrow n(B) = 1 + 2 + \dots + 5 = \frac{2 \times 6}{2} = 15$$

مثال ۳) یک تاکسی، ۴ نفر ظرفیت مسافر دارد. اگر یک راننده در مسیر رفت مجبور باشد حداقل یک مسافر سوار کند، فضای نمونه تعداد مسافران در مسیر رفت و برگشت را بنویسید. این فضا چند عضو دارد و یکی از اعضای آن را نوشته و تعبیر کنید.

$$S = \{1, 2, 3, 4\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(S) = \frac{4}{\text{رفت}} \times \frac{5}{\text{برگشت}} = 4 \times 5 = 20$$

تعداد مسافران در مسیر رفت: ۱، ۲، ۳، ۴ مسافر
تعداد مسافران در مسیر برگشت: ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ مسافر

مثال ۴) علی و احمد با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می‌کنند. فضای نمونه چند عضو دارد و در چه تعداد از برآمدها احمد برنده بازی است؟

$$n(S) = \frac{3}{\text{برآمده علی}} \times \frac{3}{\text{برآمده احمد}} = 3 \times 3 = 9$$

در ۳ حالت و ۱۰ مورد برنده است.

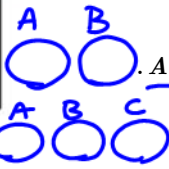
$$A = \{(\text{سنگ}, \text{کاغذ}), (\text{کاغذ}, \text{قیچی}), (\text{قیچی}, \text{سنگ})\}$$

(احمد برنده است)





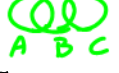
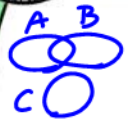
(۳) پیشامدهای ناسازگار (بخش ۱)



(۱) دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه اشتراکی نداشته باشند، به عبارت دیگر $A \cap B = \emptyset$.



(۲) سه پیشامد A ، B و C را دوبه‌دو ناسازگار می‌گوییم، هرگاه $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$.



(۳) سه پیشامد A ، B و C ناسازگارند، هرگاه هر سه آنها اشتراکی نداشته باشند، یعنی $A \cap B \cap C = \emptyset$.

مثال (۵) در پرتاب دو تاس، اگر A پیشامد مجموع دو تاس ۵، B پیشامد متوالی بودن اعداد رو شده و C پیشامد زوج آمدن اعداد رو شده باشند، کدام یک از پیشامدهای زیر، سازگار و کدام یک ناسازگارند؟

A : مجموع ۵

B : متوالی بودن

C : زوج بودن اعداد

(۱) B و A سازگارند زیرا $(۲, ۳)$ در A و B قرار دارد.

(۲) C و A سازگارند، زیرا دو عدد زوج نمی‌توانند مجموع ۵ داشته باشند.

(۳) B و C سازگارند، زیرا دو عدد متوالی نمی‌توانند هر دو زوج باشند.

مثال (۶) سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد هر سه بار مشابه و B پیشامد زوج بار رو باشند، آیا A و B سازگارند یا ناسازگار؟

$$A = \{ (پ, پ, پ), (پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر), (ر, پ, پ), (ر, پ, ر), (ر, ر, پ), (ر, ر, ر) \}$$

$$B = \{ (پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (ر, پ, پ), (پ, ر, ر), (ر, پ, ر), (ر, ر, پ) \}$$

۲ بار رو

صفر بار رو

سازگارند $\rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

مثال (۷) سکه‌ای را پی‌درپی پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد این باشد که برای اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید و B پیشامد این باشد که تا پرتاب سوم، ۶ نیاید، آیا A و B سازگارند یا ناسازگار؟

$$A = \{ (غیر ۶, غیر ۶, ۶), (غیر ۶, ۶, غیر ۶), (۶, غیر ۶, غیر ۶), (غیر ۶, ۶, ۶), (۶, ۶, غیر ۶), (۶, غیر ۶, ۶), (غیر ۶, ۶, ۶), (۶, ۶, ۶) \}$$

$$B = \{ (غیر ۶, غیر ۶, غیر ۶), (غیر ۶, غیر ۶, ۶), (غیر ۶, ۶, غیر ۶), (غیر ۶, ۶, ۶), (۶, غیر ۶, غیر ۶), (۶, غیر ۶, ۶), (۶, ۶, غیر ۶), (۶, ۶, ۶) \}$$

(۲) احتمال وقوع یک پیشامد

(۱) **محاسبه احتمال:** اگر S فضای نمونه و A یک پیشامد تصادفی در یک آزمایش تصادفی باشند، آنگاه احتمال وقوع پیشامد A که آن را با $P(A)$ نشان می‌دهیم، از رابطه $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ محاسبه می‌شود. بنابراین فقط باید تعداد اعضای A و S را به دست آورید.

مثال (۸) دو تاس را با هم می‌ریزیم. با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده، یک عدد اول است؟

$$S = \{ (۱, ۱), (۱, ۲), \dots, (۱, ۶), (۲, ۱), \dots, (۲, ۶), \dots, (۶, ۱), \dots, (۶, ۶) \} \rightarrow n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$$

$$A = \{ (۱, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳), (۱, ۴), (۱, ۵), (۱, ۶), (۲, ۱), (۲, ۳), (۲, ۵), (۳, ۲), (۳, ۴), (۴, ۱), (۴, ۳), (۵, ۲), (۵, ۴), (۶, ۱), (۶, ۵) \} \Rightarrow P(A) = \frac{۱۵}{۳۶} = \frac{۵}{۱۲}$$





مثال ۹) ۷ نفر که ۳ تای آنها برادر هستند، در یک صف می ایستند. احتمال این

که ۳ برادر در ابتدا، وسط و انتهای صف قرار بگیرند، چقدر است؟

جائیت ۷ نفر $S: \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \Rightarrow n(S) = 7!$

برادر ۳ نفر $A: \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \Rightarrow n(A) = 4! \times 3!$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 3!}{7!} = \frac{3 \times 2}{7 \times 6 \times 5} = \frac{1}{35}$$

مثال ۱۰) یک تیم ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر آنها یکی پس از دیگری وارد سالن شوند و برای ما فقط ترتیب قد آنها اهمیت

داشته باشد، احتمال این که اولین فرد وارد شده، بلند قدترین عضو تیم باشد چقدر است؟

روش اول $\rightarrow P(A) = \frac{1}{14!} = \frac{1}{14 \times 13!} = \frac{1}{14}$

روش دوم $\rightarrow n(S) = 14! \rightarrow n(A) = 13!$

و چهارم سوم دوم نوزدهم

آر برار فقط نوزدهم است داشته باشند، در یک حالت از ۱۴ حالت ممکن، نوزدهم

بلند قدترین عضو تیم است، پس $P(A) = \frac{1}{14}$

۱۲) محاسبه احتمال یک پیشامد به کمک متمم آن: اگر A' متمم پیشامد A باشد، احتمال وقوع A عبارتست از: $P(A) = 1 - P(A')$

$$P(A) + P(A') = 1 \quad A \cup A' = S$$

نکته: این رابطه بیشتر هنگامی استفاده می شود که محاسبه $P(A')$ ساده تر از محاسبه $P(A)$ باشد.

مثال ۱۱) در پرتاب دو تاس، چقدر احتمال دارد که مجموع اعداد رو شده از ۴ بیشتر باشد؟

$S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1)\}$

$A' = \text{مجموع ۲ تا ۴ دیدن}$

$\rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{6}{36} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

مثال ۱۲) از بین ۵ دانش آموز پایه دهم، ۲ دانش آموز پایه یازدهم و ۳ دانش آموز پایه دوازدهم، ۳ دانش آموز انتخاب می کنیم. احتمال این که حداقل یک

دانش آموز پایه دهم داشته باشیم، چقدر است؟

$A' = \text{هیچ کس دهم نباشد}$

$\rightarrow P(A') = \frac{\binom{3+2}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$

$\rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

۳	۲	۵
دوازدهم	یازدهم	دهم

۳ دانش آموز و ۳ مبانی احتمال

۱) مقایسه دو علم آمار و احتمال: تفاوت این دو علم در نوع نمونه و جامعه می باشد. به تصویر زیر دقت کنید.



جامعه



نمونه

علم آمار: شناختن جامعه نامعلوم، با استفاده از نمونه های جمع آوری شده معلوم



جامعه



نمونه

علم احتمال: بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم

نکته: در علم احتمال، یا تعداد نمونه های انتخاب شده یا کیفیت آنها مشخص نیست.





مثال ۱۳ کدام یک از پرسش‌های زیر مربوط به علم احتمال و کدام یک مربوط به علم آمار است؟

(۱) چه تعداد از دانش‌آموزان پایه یازدهم مدرسه شما به فوتبال علاقه دارند؟ علم آمار

(۲) می‌دانیم ۲۰ سیب از ۱۰۰ سیب یک جعبه ناسالم است. چند سیب از این جعبه برداریم تا تقریباً مطمئن باشیم که دست کم یک سیب خراب برداشته‌ایم؟ علم احتمال

جامعه معلوم

(۳) در یک کلاس ۲۰ نفری که ۱۰ نفر به والیبال علاقه دارند، ۱۰ نفر را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است که کمتر از ۷ نفر به والیبال علاقه داشته باشند؟ علم احتمال

جامعه معلوم

(۴) در انتخابات، ۹۰ درصد از واجدین شرایط شرکت کرده‌اند. اگر از ۵۰ نفر سؤال پرسیده شود، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟ علم احتمال

جامعه معلوم

(۵) از یک کلاس ۳۰ نفری، ۵ دانش‌آموز علاقه‌مند به فوتبال انتخاب شده است. چه تعداد از دانش‌آموزان کلاس به فوتبال علاقه دارند؟ علم آمار

جامعه نامعلوم (زیرا تعداد افراد علاقه‌مند به فوتبال مشخص نیست)

(۲) زبان گزاره‌ها به زبان مجموعه‌ها

با توجه به مفهوم «رخ دادن یک پیشامد»، اگر A_1 و A_2 دو پیشامد باشند، آن‌گاه:

نمونه
 $A_1 = \{2\}$
زوها
 $A_2 = \{2, 4, 6\}$

(الف) اگر $A_1 \subseteq A_2$ ، از رخ دادن A_1 ، رخ دادن A_2 نتیجه می‌شود.

(ب) اگر $A_1 \cap A_2$ رخ دهد، یعنی هر دو پیشامد A_1 و A_2 رخ داده است.

(پ) اگر $A_1 \cup A_2$ رخ دهد، یعنی حداقل یکی از دو پیشامد A_1 و A_2 رخ داده است.

مثال ۱۴ در پرتاب یک تاس سالم، کدام یک از جملات زیر درست است؟ چرا؟

(الف) اگر پیشامد $\{2\}$ رخ دهد، پیشامد زوج بودن رخ داده است. درست، زیرا $A_1 \subseteq A_2$ است.

(ب) اگر پیشامد زوج بودن رخ دهد، پیشامد $\{2\}$ رخ داده است. نادرست، زیرا $A_1 \not\subseteq A_2$.

مثال ۱۵ در پرتاب یک تاس سالم، کدام گزینه صحیح نیست؟ چرا؟

(۱) از وقوع پیشامد $\{1, 3\}$ ، وقوع پیشامد $\{1, 3, 5\}$ نتیجه می‌شود. درست است، زیرا $A_1 \subseteq A_2$ است.

(۲) از وقوع پیشامد $\{1, 3, 5\}$ ، وقوع پیشامدهای $\{1, 2, 3, 5\}$ و $\{1, 3, 5, 6\}$ نتیجه می‌شود. درست است زیرا $A_1 \subseteq A_2$ و $A_1 \subseteq A_3$.

(۳) از وقوع پیشامد $\{1, 3, 5, 6\}$ ، وقوع پیشامدهای $\{1, 3, 5\}$ و $\{3, 5, 6\}$ نتیجه می‌شود. نادرست است زیرا $A_1 \not\subseteq A_2$ و $A_1 \not\subseteq A_3$.

(۴) از وقوع پیشامد $\{1, 3, 5, 6\}$ ، وقوع پیشامدهای $\{1, 3, 5\}$ یا $\{3, 5, 6\}$ نتیجه می‌شود. درست است زیرا از وقوع $A_1 \cup A_2$ وقوع A_1 یا A_2 نتیجه می‌شود.

(۴) اصول احتمال

نمونه: S
نتیجه: A, B
تست و متغی: S

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

برای پیشامد A در فضای نمونه S ، احتمال وقوع آن را با $P(A)$ نشان می‌دهیم که عددی در بازه $[0, 1]$ است و در اصول زیر صدق می‌کند:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(S) = 1$$

(۲) برای هر دو پیشامد A و B که $A \cap B = \emptyset$ (یعنی دو پیشامد ناسازگار باشند)، داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$



قضیه ۱: فرض کنیم A و B دو پیشامد باشند. در این صورت اگر $A \subseteq B$ آن گاه:
منفی

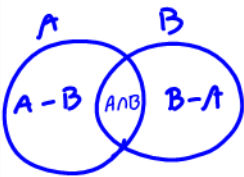
$$P(A) \leq P(B) \quad (۱)$$

$$P(B-A) = P(B) - P(A) \quad (۲)$$



امول اصل $\rightarrow P(A \cup (B-A)) = P(A) + P(B-A)$
نازگار: $A, (B-A)$

$$\rightarrow P(B) = P(A) + P(B-A) \quad \begin{cases} (۲) \rightarrow P(B-A) = P(B) - P(A) \\ (۱) \rightarrow P(B-A) \geq 0 \end{cases} \rightarrow P(B) \geq P(A)$$



اثبات ۱: نازگار: $(A \cap B)$ و $(B-A)$

قضیه ۲: فرض کنیم A و B دو پیشامد باشند. در این صورت:

$$P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) \quad (۱)$$

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A-B) \quad (۲)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (۳)$$

امول اصل $\rightarrow P((A \cap B) \cup (B-A)) = P(A \cap B) + P(B-A)$

$$\rightarrow P(B) = P(A \cap B) + P(B-A) \rightarrow P(B-A) = P(B) - P(A \cap B)$$

اثبات ۲: $(A-B), B$: نازگار اصل $\rightarrow P((A-B) \cup B) = P(A-B) + P(B) \rightarrow P(A \cup B) = P(A-B) + P(B) \checkmark$

اثبات ۳: $A, (B-A)$: نازگار اصل $\rightarrow P(A \cup (B-A)) = P(A) + P(B-A)$
نازگار: $(B-A), (A \cap B)$
 $(B-A) \cup (A \cap B) = B$
 $\rightarrow P(B) = P(A \cap B) + P(B-A) \rightarrow P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) \checkmark$

مثال ۱۶: عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۴ بخش پذیر نباشد، چقدر است؟

۳۳، - -

$$S = \{1, 2, \dots, 100\} \rightarrow n(S) = 100$$

$$P(A \cap B') = P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{n(A)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{[\frac{100}{3}]}{100} - \frac{[\frac{100}{12}]}{100}$$

$$= \frac{33}{100} - \frac{16}{100} = \frac{33-16}{100} = \frac{17}{100}$$

$$\left[\frac{n}{k} \right] \text{ تعداد اعداد منتهی به } k \text{ در مجموعه } \{1, 2, \dots, n\}$$

مثال ۱۷: عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد، چقدر است؟

$$S = \{1, 2, \dots, 100\} \rightarrow n(S) = 100$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{[\frac{100}{2}]}{100} + \frac{[\frac{100}{3}]}{100} - \frac{[\frac{100}{6}]}{100}$$

$$= \frac{50}{100} + \frac{33}{100} - \frac{16}{100} = \frac{50+33-16}{100} = \frac{67}{100} = 0.67$$



مثال ۱۸ عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می کنیم. احتمال اینکه عدد انتخابی نه بر

۲ بخش پذیر باشد و نه بر ۳ چقدر است؟
A B

$$S = \{1, 2, \dots, 100\} \rightarrow n(S) = 100$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) \xrightarrow{\text{مثال قبل}} 1 - 0.167 = 0.833$$

$P(A \cup B) = 0.167$

مثال ۱۹ عددی به تصادف از بین اعداد دو رقمی انتخاب می کنیم. احتمال این که عدد انتخابی بر ۴ یا ۶ بخش پذیر باشد، چقدر است؟

$$S = \{10, 11, 12, \dots, 99\} \rightarrow n(S) = (99 - 10) + 1 = 90$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$= \frac{\left[\frac{99}{4}\right] - \left[\frac{9}{4}\right]}{90} + \frac{\left[\frac{99}{6}\right] - \left[\frac{9}{6}\right]}{90} - \frac{\left[\frac{99}{12}\right] - \left[\frac{9}{12}\right]}{90}$$

$$= \frac{(24 - 2) + (16 - 1) - (8 - 0)}{90} = \frac{22 + 15 - 8}{90} = \frac{29}{90}$$

مثال ۲۰ ۵۰ درصد دانش آموزان یک کلاس به موسیقی و ۴۰ درصد آن ها به تئاتر علاقه دارند. اگر ۲۴ درصد آن ها به هر دو رشته علاقه داشته باشند،

چند درصد آن ها حداقل به یکی از دو رشته علاقه دارند؟
A B

$$P(A) = \frac{50}{100} \quad , \quad P(B) = \frac{40}{100} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{24}{100}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{50}{100} + \frac{40}{100} - \frac{24}{100} = \frac{50 + 40 - 24}{100} = \frac{66}{100}$$

بنابراین ۶۶ درصد دانش آموزان حداقل به یکی از این دو رشته علاقه دارند.

مثال ۲۱ اگر $P(A) = 3P(B) = 4P(A \cap B)$ باشد، آنگاه مقدار $P(A \cup B)$ چند برابر $P(A \cap B)$ است؟
α

$$\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(A \cap B)} \quad P(A \cap B) = \alpha$$

$$\frac{3}{1} + \frac{4}{3} = \frac{9}{3} + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$$

$$= \frac{4\alpha + \frac{4}{3}\alpha - \alpha}{\alpha} = \frac{3\alpha + \frac{4}{3}\alpha}{\alpha} = \frac{\frac{13}{3}\alpha}{\alpha} = \frac{13}{3}$$

مثال ۲۲ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $P(A) = 0.6$ ، $P(B) = 0.7$ و $P(A \cap B) = 0.2$ باشند، آنگاه $P(A' \cap B)$ کدام است؟

$$P(A \cap B') = 0.12 \rightarrow P(A - B) = 0.12 \rightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0.12 \xrightarrow{P(A) = 0.6}$$

$$0.6 - P(A \cap B) = 0.12 \rightarrow 0.6 - 0.12 = P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = 0.48$$

$$P(A' \cap B) = P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.48 = 0.22 \checkmark$$



۱ احمد و عباس با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می کنند. فضای نمونه برای این بازی چیست؟ فضای نمونه چند عضو دارد؟
 ک: کاغذ، د: سنگ، ق: قیچی
 نفر دوم: عباس و نفر اول: احمد
 در چه تعداد از برآمدها احمد برنده بازی است؟



$$S = \{(ک, د, س), (د, س, ک), (س, ک, د), (ک, ق, د), (ق, د, ک), (د, ک, ق), (ق, ک, د), (ک, د, ق), (د, ق, ک), (ق, ک, د)\} \rightarrow n(S) = 3 \times 3 = 9$$

$$A = \{(ک, د, س), (د, س, ک), (س, ک, د)\} \rightarrow \text{در ۳ حالت احمد برنده است}$$

۲ یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آنها یکی پس از دیگری وارد سالن می شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آنها اهمیت داشته باشد، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال اینکه اولین کسی که وارد می شود، بلند قدترین عضو تیم باشد چقدر است؟

$$n(S) = 14! \rightarrow \text{جایگاه قد این ۱۴ نفر: } \begin{matrix} 14 & 13 & 12 & \dots & 1 \end{matrix}$$

$$A: \begin{matrix} 1 & 13 & 12 & \dots & 1 \\ \text{اولین نفر} & \text{نهم} & \text{نهم} & \dots & \text{نهم} \end{matrix} \rightarrow n(A) = 13!$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{13!}{14!} = \frac{13!}{14 \times 13!} = \frac{1}{14}$$

۳ در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص می شود: دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا (صاف یا ابری) و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت آب و هوا را به این شکل خلاصه می کنیم: آیا از نظر

دما سرد یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک یا مرطوب است؟ آیا باد می وزد یا نمی وزد؟ آیا هوا صاف، نیمه ابری یا ابری است؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟ برای وضعیت هوا در یک لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه را به شکل حاصل ضرب

دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضا چند عضو دارد؟



$$A = \{\text{سرد، گرم}\}, B = \{\text{خشک، مرطوب}\}$$

$$C = \{\text{باد خیز، باد نوزیر}\}, D = \{\text{صاف، نیمه ابری، ابری}\}$$

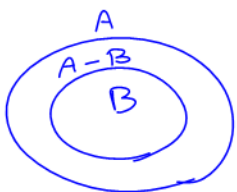
$$E = \{\text{باران آمدن، باران نیامدن}\}$$

$$S = A \times B \times C \times D \times E \rightarrow n(S) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 48$$

۴ فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات شده، گزاره های زیر را ثابت کنید:

الف) اگر $B \subseteq A$ داریم: $P(A-B) = P(A) - P(B)$

ب) اگر $B \subseteq A$ ، آن گاه $P(B) \leq P(A)$



اصل اول: $(A-B), B$ نامزاد

$$P((A-B) \cup B) = P(A-B) + P(B) \rightarrow P(A) = P(A-B) + P(B)$$

$$\begin{matrix} \text{الف} \rightarrow P(A-B) = P(A) - P(B) \\ \text{ب) } P(A-B) \in [0,1] \rightarrow P(B) \leq P(A) \end{matrix}$$

۵ عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید:

$$S = \{1, 2, \dots, 100\} \rightarrow n(S) = 100$$

الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد.

$$\text{تجزیه پذیر بر ۲: } A \rightarrow n(A) = \left[\frac{100}{2} \right] = 50$$

$$\text{تجزیه پذیر بر ۳: } B \rightarrow n(B) = \left[\frac{100}{3} \right] = 33$$

$$\text{تجزیه پذیر بر ۶: } A \cap B \rightarrow n(A \cap B) = \left[\frac{100}{6} \right] = 16$$

$$\text{الف) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{50}{100} + \frac{33}{100} - \frac{16}{100} = \frac{50 + 33 - 16}{100} = \frac{67}{100}$$

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش پذیر باشد، ولی به ۳ بخش پذیر نباشد.

$$\text{تجزیه پذیر بر ۲: } A \rightarrow n(A) = \left[\frac{100}{2} \right] = 50$$

$$\text{تجزیه پذیر بر ۳: } B \rightarrow n(B) = \left[\frac{100}{3} \right] = 33$$

$$\text{تجزیه پذیر بر ۶: } A \cap B \rightarrow n(A \cap B) = \left[\frac{100}{6} \right] = 16$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{50}{100} - \frac{16}{100} = \frac{50 - 16}{100} = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$$

پ) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش پذیر باشد و نه بر ۳.

$$\text{تجزیه پذیر بر ۲: } A \rightarrow n(A) = \left[\frac{100}{2} \right] = 50$$

$$\text{تجزیه پذیر بر ۳: } B \rightarrow n(B) = \left[\frac{100}{3} \right] = 33$$

$$\text{تجزیه پذیر بر ۶: } A \cap B \rightarrow n(A \cap B) = \left[\frac{100}{6} \right] = 16$$

$$\begin{array}{r} nC \\ 16 \\ \hline 67 \end{array}$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left[P(A) + P(B) - P(A \cap B) \right]$$

$$= 1 - \left[P(A) + P(B) - P(A \cap B) \right]$$

$$= 1 - \left[\frac{50}{100} + \frac{33}{100} - \frac{16}{100} \right] = 1 - \frac{67}{100} = \frac{33}{100}$$



$$S = \{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow P(\{1\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

درس ۲ : احتمال غیر هم شانس

جام جهانی

فوتبال ۲۰۰۶

۳۳ تیم

 ۱۵ : ۲۴
 ۱۰ : ۳
 ...
 ۰ : ۸

در فضای نمونه‌ای $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ، منظور از پیشامدهای ساده، پیشامدهای $\{s_1\}, \{s_2\}, \dots, \{s_n\}$ هستند. اگر حداقل دو پیشامد ساده از این فضا احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیر هم شانس می‌گوییم.

تذکره: اگر $\{a\}$ یک پیشامد ساده باشد، احتمال وقوع آن، یعنی $P(\{a\})$ را به شکل ساده‌تر $P(a)$ می‌نویسیم.

در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیر هم شانس، اگر $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ فضای نمونه و $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک پیشامد باشد، آن‌گاه:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (1)$$

$$P(S) = P(s_1) + P(s_2) + \dots + P(s_n) = 1 \quad (2)$$

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k) \quad (3)$$

مثال ۲۳: یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. احتمال مشاهده ۲ یا ۳ کدام است؟

$$P(1) = P(3) = P(5), \quad P(2) = P(4) = P(6)$$

$$P(\text{عدد زوج}) = 3P(\text{فرد}) \rightarrow \begin{cases} P(1) = P(3) = P(5) \\ P(\text{عدد فرد}) = k \rightarrow P(\text{عدد زوج}) = 3k \end{cases}$$

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 6\} \xrightarrow{\text{نمودم}} \frac{P(1)}{k} + \frac{P(2)}{3k} + \frac{P(3)}{k} + \frac{P(4)}{3k} + \frac{P(5)}{k} + \frac{P(6)}{3k} = 1 \rightarrow 12k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{12}$$

$$P(\{2, 3\}) = ? \xrightarrow{\text{شرط سوم}} P(\{2, 3\}) = P(2) + P(3) = 3k + k = 4k = 4 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \checkmark$$

مثال ۲۴: در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده هر عدد، متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال این که عدد مشاهده شده،

کمتر از ۴ باشد چقدر است؟

$$\begin{cases} P(a) = k a \\ P(\{1, 2, 3\}) = ? \end{cases}$$

$$S = \{1, 2, \dots, 6\} \xrightarrow{\text{شرط دوم}} P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1$$

$$\xrightarrow{\text{فرض}} k(1) + k(2) + \dots + k(6) = 1 \rightarrow k + 2k + \dots + 6k = 1 \rightarrow k(1 + 2 + \dots + 6) = 1 \rightarrow 21k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{21}$$

$$P(\{1, 2, 3\}) \xrightarrow{\text{شرط سوم}} P(1) + P(2) + P(3) = k + 2k + 3k = 6k = 6 \times \frac{1}{21} = \frac{2}{7}$$

مثال ۲۵: در فضای نمونه‌ای $S = \{x, y, z\}$ ، اگر احتمال‌های متناظر با اعضای x ، y و z ، یک دنباله حسابی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع

هر یک از این پیشامدها را حساب کنید.

دنباله حسابی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$: $P(x), P(y), P(z)$

$$\rightarrow P(y) = P(x) + \frac{1}{4}, \quad P(z) = \frac{1}{4} + P(y) = \frac{1}{4} + P(x) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + P(x)$$

$$S = \{x, y, z\} \xrightarrow{\text{شرط دوم}} P(x) + P(y) + P(z) = 1 \rightarrow P(x) + (P(x) + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{2} + P(x)) = 1$$

$$\rightarrow 3P(x) + \frac{3}{4} = 1 \rightarrow 3P(x) = \frac{1}{4} \rightarrow P(x) = \frac{1}{12}$$

$$\rightarrow \begin{cases} P(y) = P(x) + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \\ P(z) = \frac{1}{2} + P(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12} \end{cases}$$





مثال ۲۶ فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی متناظر با ۳ برآمد به صورت $S = \{x, y, z\}$ است. اگر احتمال‌های متناظر با اعضای

x, y, z ، یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع پیشامد $\{x, z\}$ را به دست آورید.

$$\text{دنباله هندسی: } P(x), P(y) = \frac{1}{4} P(x), P(z) = \frac{1}{4} P(y) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} P(x) = \frac{1}{16} P(x)$$

$$S = \{x, y, z\} \xrightarrow{\text{شرط دوم}} P(x) + P(y) + P(z) = 1 \rightarrow P(x) + \frac{1}{4} P(x) + \frac{1}{16} P(x) = 1 \rightarrow \frac{21}{16} P(x) = 1 \rightarrow P(x) = \frac{16}{21}$$

$$P(\{x, z\}) = P(x) + P(z) = \frac{16}{21} + \frac{1}{16} \times \frac{16}{21} = \frac{16}{21} + \frac{1}{21} = \frac{17}{21} \checkmark$$

مثال ۲۷ مجموعه $S = \{x, y, z, t, w\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A = \{x, y\}$ ، $B = \{x, y, z, t\}$ و $C = \{x, y, w\}$ سه پیشامد از S

هستند. اگر $P(A) = \frac{1}{7}$ و $P(B) = \frac{3}{5}$ باشند، مقدار $P(C)$ کدام است؟

$$P(A) = \frac{1}{7} \rightarrow P(\{x, y\}) = \frac{1}{7} \rightarrow P(x) + P(y) = \frac{1}{7}$$

$$P(B) = \frac{5}{5} \rightarrow P(\{x, y, z, t\}) = \frac{5}{5} \rightarrow P(x) + P(y) + P(z) + P(t) = \frac{5}{5}$$

$$P(S) = 1 \rightarrow P(x) + P(y) + P(z) + P(t) + P(w) = 1 \rightarrow P(w) = 1 - \frac{5}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(C) = P(\{x, y, w\}) = P(x) + P(y) + P(w) = \frac{1}{7} + \frac{2}{5} = \frac{5+14}{35} = \frac{19}{35} \checkmark$$

مثال ۲۸ اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه و $A = \{a, b\}$ ، $B = \{a, b, c, d\}$ و $C = \{a, b, e\}$ سه پیشامد باشند به طوری که $P(A) = \frac{2}{7}$ و $P(B) = \frac{3}{5}$

مقدار $P(C')$ را به دست آورید

$$P(A) = \frac{2}{7} \rightarrow P(a) + P(b) = \frac{2}{7}$$

$$P(B) = \frac{3}{5} \rightarrow P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = \frac{3}{5} \rightarrow P(c) + P(d) = \frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{21-10}{35} = \frac{11}{35}$$

$$P(C') = P(\{c, d\}) = P(c) + P(d) = \frac{11}{35}$$

مثال ۲۹ بر روی یک تاس عددهای ۱، ۱، ۱، ۲، ۲، ۳ نوشته شده است. در پرتاب این تاس، چقدر احتمال دارد عدد روشده ۲ نباشد؟

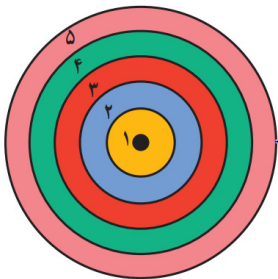
$$S = \{1, 2, 3\} \rightarrow \begin{cases} 3: \text{یکبار} \\ 2: \text{دو بار} \\ 1: \text{سه بار} \end{cases} \xrightarrow{P(3)=k} \begin{cases} P(1)=3k \\ P(2)=2k \end{cases}$$

$$P(S) = 1 \rightarrow P(1) + P(2) + P(3) = 1 \rightarrow 3k + 2k + k = 1 \rightarrow 6k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{6}$$

$$P(\{2\}') = P(\{1, 3\}) = P(1) + P(3) = 3k + k = 4k = 4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \checkmark$$

مثال ۳۰ در پرتاب دارت به صفحه‌ای به شکل زیر که به ۵ ناحیه مجزا تقسیم شده است، احتمال اصابت دارت به ناحیه اول، x می باشد. اگر احتمال اصابت

دارت به ناحیه k ام، $(2k-1)x$ باشد، احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را تعیین کنید.



$$\begin{cases} P(1) = x \\ P(k) = (2k-1)x \end{cases}$$

$$P(S) = 1 \rightarrow P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1$$

$$\rightarrow x + 3x + 5x + 7x + 9x = 1 \rightarrow 25x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{25}$$

$$\rightarrow \begin{cases} P(1) = x = \frac{1}{25} \\ P(2) = 3x = \frac{3}{25} \\ P(3) = 5x = \frac{5}{25} \\ P(4) = 7x = \frac{7}{25} \\ P(5) = 9x = \frac{9}{25} \end{cases}$$

۱ در پرتاب یک سکه ناسالم، احتمال آمدن «رو» نصف احتمال آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهر شدن «رو» و احتمال ظاهر شدن «پشت» را به دست آورید.

۲ در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده هر عدد، متناسب با همان عدد است، مثلاً احتمال مشاهده عدد ۳، سه برابر احتمال مشاهده عدد ۱ است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده، زوج باشد را تعیین کنید.

۳ اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A = \{a, b\}$ ، $B = \{a, b, c, d\}$ و $C = \{a, b, e\}$ سه پیشامد باشند به طوری که $P(A) = \frac{2}{7}$ و $P(B) = \frac{3}{5}$ ، مقدار $P(C)$ را به دست آورید.

۴ در یک تجربه تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$ ، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله حسابی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هر کدام از این پیشامدها را به دست آورید.

۵ در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره‌ای شکل، مطابق شکل روبه‌رو که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است^۱، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیه اول، x باشد. اگر احتمال اصابت به ناحیه k ام، $x(2k - 1)$ باشد:

الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید.

ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه‌های اول، سوم یا چهارم بیشتر است، یا اصابت به دو ناحیه دوم یا پنجم؟

