درس ۱ : آشنایی با منطق ریاضی

مثال ۱) جدول زیر را کامل کنید.

	گزارهٔ p	گزارهٔ q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p\vee q$	ارزش $p\wedge q$
۱)	هر دنباله یا حسابی است یا هندسی. ۲, ۵, ۱۰, ۵۰, ...	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	ن	د	د	ن
۲)	۲ عددی فرد است	$x=1$ تابع نیست	ن	د	د	ن
۳)	$\sqrt[5]{-32}=-2$ $(-2)^5=-32$	۸ ... مربع کامل است	د	ن	د	ن
۴)	۴ عددی اول است	.....$2>5$.....	ن	ن	ن	ن
۵)	$1-\sqrt{x}$ یک عبارت چند جمله‌ای است.	$2x^2-3$ یک عبارت چندجمله‌ای است	ن	د	د	ن

چندجمله‌ای x^2-x+1

مثال ۲) با تکمیل جدول زیر، نشان دهید که گزاره‌های ~~$\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$~~ هم‌ارزند.

$\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$

$2^2=4$

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

مثال ۳) با تکمیل جدول زیر، نشان دهید که گزاره‌های $p\Rightarrow q\equiv\sim p\vee q$.

p	q	$p\Rightarrow q$ ~~$p\wedge q$~~	$\sim p$ ~~$\sim(p\wedge q)$~~	$\sim p\vee q$ ~~$\sim p$~~	~~$\sim q$~~	~~$\sim p\vee\sim q$~~
د	د	د	ن	د		
د	ن	ن	ن	ن		
ن	د	د	د	د		
ن	ن	د	د	د		

مثال ۴) با تکمیل جدول زیر، نشان دهید که $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$. (عکس نقیض)

p	q	$p\Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q\Rightarrow\sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

مثال ۵) با تکمیل جدول‌های زیر، نشان دهید که :

الف) $p \Rightarrow p \vee q \equiv T$ **ب)** $p \wedge q \Rightarrow p \equiv T$

p	q	$p\vee q$	$p\Rightarrow p\vee q$ $\longrightarrow T$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

(الف)

p	q	$p\wedge q$	$p\wedge q\Rightarrow p$ $\longrightarrow T$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

(ب)

مثال ۶) با رسم جدول ارزشی، نشان دهید که $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

p و q → ۲ گزاره → تعداد ردیف‌ها $= 2^2 = 4$

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$	$p\Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د

مثال ۷) با رسم جدول ارزشی، نشان دهید که $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

p و q و r : ۳ گزاره → $2^3 = 8$ ردیف ارزشی

p	q	r	$q\wedge r$	$p\vee(q\wedge r)$	$p\vee q$	$p\vee r$	$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	د	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

مثال ۸) ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 عددی فرد باشد (p)، آن‌گاه a عددی فرد است (q).

$$p \Rightarrow q \equiv \underbrace{\sim q}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{\sim p}_{\text{حکم}}$$

$\sim q$: عددی زوج $a \Rightarrow a = 2k \Rightarrow a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k' \Rightarrow a^2 = 2k' \Rightarrow a^2$: زوج : $\sim p$

مثال ۹) نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) ۲ عددی اول است یا عدد π گویا است.

p ، q

$\sim(p\vee q)\equiv \sim p\wedge \sim q$

نقیض: ۲ عددی اول نیست و عدد π گویا نیست.

ب) $\sin 45 = \cos 45$ و $\sin 30 > \cos 30$.

p ، q

$\sim(p\wedge q)\equiv \sim p\vee \sim q$

نقیض: $\sin 45 \neq \cos 45$ یا $\sin 30 \leq \cos 30$.

پ) اگر $x<-1$ آن‌گاه $x^3<x$.

p ، q

$\sim(p\Rightarrow q)\equiv \sim(\sim p\vee q)\equiv p\wedge \sim q$

نقیض: $x<-1$ است و $x^3\geq x$.

ت) $x^2>1$ اگر و تنها اگر $x>1$ یا $x<-1$.

p ، q ، r

$\sim[p\Leftrightarrow(q\vee r)]\equiv \sim p\Leftrightarrow(q\vee r)$

$x^2\leq 1$ اگر و تنها اگر $x>1$ یا $x<-1$.

مثال ۱۰) اگر دامنه متغیر گزاره نمای $\frac{2n-1}{3}<5$ ، مجموعه $\mathbb{N}$ باشد، مجموعه جواب این گزاره نما را به دست آورید.

D ، S

$S\subseteq D$

$$\frac{2n-1}{3}<5 \xrightarrow{\times 3} 2n-1<15 \Rightarrow 2n<16 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} n<8 \xrightarrow{D=\mathbb{N}} S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$$

مثال ۱۱) جدول زیر را کامل کنید.

$\forall$: برای هر

$\exists$: وجود دارد

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2\geq 0$	$\forall x\in \mathbb{R}\ ;\ x^2\geq 0$
برای هر عدد زوج a، داریم: $a=2k$ ، $k\in\mathbb{Z}$.	$\forall a\in E\ ;\ a=2k\ (k\in \mathbb{Z})$
عدد اول p وجود دارد که $p=2k$ $(k\in\mathbb{Z})$.	$\exists\, p\in P\ ;\ p=2k\ (k\in \mathbb{Z})$
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.	$\exists n\in O\ ;\ n\in P$.

E : اعداد زوج ، P : اعداد اول و O : اعداد فرد

مثال ۱۲) درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد اول، فرد است. نادرست است زیرا عدد ۲ اول است ولی فرد نیست.

ب) $\exists x\in \mathbb{N}; 2x^2+3x+1=0$ نادرست: $2x^2+3x+1=0 \to \Delta=9-8=1\to x=\frac{-3\pm1}{4}=-\frac{1}{2}, -1\notin\mathbb{N}$

ت) برای هر عدد طبیعی n ، $n!$ عددی گویاست. درست است زیرا: $n!=n(n-1)(n-2)\cdots\times 2\times 1\in\mathbb{N}$

$5!=5\times4\times3\times2\times1$

ث) در آمار، هر متغیّر ترتیبی یک متغیّر کیفی است. درست است. زیرا:

متغیرها
کمی
کیفی
ترتیبی
اسمی

ج) در احتمال، هر مجموعه پیشامد زیر مجموعه فضای نمونه است. درست است (طبق تعریف پیشامد)

چ) در فضای نمونهٔ S، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A)>1$. نادرست است زیرا: $0\leq P(A)\leq 1$

ح) هر معادله درجهٔ دوم، حداقل یک ریشهٔ حقیقی دارد.

نادرست است زیرا مثلاً معادلهٔ $x^2+x+1=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد

$(\Delta=1-4=-3<0)$

درس ۲ : جبر مجموعه‌ها

مثال ۱) اگر $A=\{x-۲y,-۳,۵\}$ و $B=\{-۳,x+y,۷\}$ و $A=B$ ، در این صورت، مقادیر x و y را بیابید.

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} A\subseteq B \Rightarrow (۵\in A \Rightarrow ۵\in B) \Rightarrow x+y=۵ \xrightarrow{\times(-۱)} -x-y=-۵ \\ B\subseteq A \Rightarrow (۷\in B \Rightarrow ۷\in A) \Rightarrow x-۲y=۷ \end{cases} \xrightarrow{\oplus} -۳y=۲ \rightarrow \boxed{y=-\frac{۲}{۳}}$$

$$x+y=۵ \xrightarrow{y=-\frac{۲}{۳}} x-\frac{۲}{۳}=۵ \Rightarrow \boxed{x=\frac{۲}{۳}+۵=\frac{۱۷}{۳}}$$

مثال ۲) مجموعه متناهی A را در نظر بگیرید. اگر ۲ عضو به اعضای A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد افزایش می‌یابد. مشخص کنید A چند عضوی است؟

$$۲^{n+۲}=۲^n+۴۸ \Rightarrow ۲^۲\times ۲^n=۲^n+۴۸ \xrightarrow{۲^n=x} ۴x=x+۴۸ \Rightarrow ۴x-x=۴۸ \Rightarrow$$

$$۳x=۴۸ \Rightarrow x=\frac{۴۸}{۳}=۱۶ \Rightarrow ۲^n=۱۶ \Rightarrow \boxed{n=۴}$$

مثال ۳) تعداد زیرمجموعه‌های $\underbrace{A=\{۱,۲,۳,...,۲n\}}^{۲^{۲n}}$ ، ۱۲۸ واحد از تعداد زیر مجموعه‌های $\overbrace{B=\{۱,۲,۳,...,n+۳\}}^{۲^{n+۳}}$ بیشتر است. مقدار n را به دست آورید.

$$۲^{۲n}=۱۲۸+۲^{n+۳} \Rightarrow (۲^n)^۲=۱۲۸+\underbrace{۲^۳}_{۸}\times ۲^n \xrightarrow{۲^n=x} x^۲=۱۲۸+۸x \Rightarrow$$

$$x^۲-۸x-۱۲۸=۰ \Rightarrow (x-۱۶)(x+۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۱۶=۰ \Rightarrow x=۱۶ \Rightarrow ۲^n=۱۶ \Rightarrow \boxed{n=۴} \\ x+۸=۰ \Rightarrow x=-۸ \Rightarrow ۲^n=-۸ \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \end{cases}$$

مثال ۴) الف) فرض کنید A, B, C سه مجموعه با مرجع U باشند. ثابت کنید اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ ، آن‌گاه $\boxed{A\subseteq C}$. حکم

اثبات با روش عضوگیری : $\left[\forall x\in A \xrightarrow{A\subseteq B} x\in B \xrightarrow{B\subseteq C} x\in C\right] \Rightarrow A\subseteq C$

ب) فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A\subseteq B$ ، ثابت کنید که $\boxed{B'\subseteq A'}$. حکم

اثبات با روش عضوگیری : $\left[\forall x\in B' \Longrightarrow x\notin B \xrightarrow[(?)]{A\subseteq B} x\notin A \Rightarrow x\in A'\right] \Rightarrow B'\subseteq A'$

(؟) $A\subseteq B : (x\in A \Rightarrow x\in B) \underset{\text{نقیض}}{\overset{\text{عکس}}{\equiv}} (x\notin B \Rightarrow x\notin A)$

پ) برای مجموعه دلخواه A با مرجع U ثابت کنید : $\varnothing\subseteq A$.

اثبات به روش عضوگیری : $\underbrace{\left[\forall \underbrace{x\in\varnothing}_{\text{ن}} \Longrightarrow x\in A\right]}_{\text{د}} \Rightarrow \varnothing\subseteq A$

مثال ۵) الف) برای مجموعه‌های A و B با مرجع U ثابت کنید که $\boxed{A \subseteq A \cup B}$. حکم

اثبات به روش عضوگیری : $\left[\forall x \in A \Longrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B\right] \Rightarrow A \subseteq A \cup B$

ب) فرض کنید D, C, B, A چهار مجموعه با مرجع U باشند. ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$، آن‌گاه $\boxed{A \cup C \subseteq B \cup D}$. حکم

اثبات با روش عضوگیری : $\left[\forall x \in A \cup C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \\ \vee \qquad\qquad\quad \vee \\ x \in C \xrightarrow{C \subseteq D} x \in D \end{cases} \Longrightarrow x \in B \cup D\right] \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$

پ) فرض کنید C, B, A سه مجموعه با مرجع U باشند. ثابت کنید اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$، آن‌گاه $\boxed{A \cup B \subseteq C}$ حکم

اثبات با روش عضوگیری : $\left[\forall x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xrightarrow{A \subseteq C} x \in C \\ \vee \qquad\qquad\quad \vee \\ x \in B \xrightarrow{B \subseteq C} x \in C \end{cases} \Longrightarrow x \in C\right] \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

$(p \vee p \equiv p)$

مثال ۶) فرض کنید B, A دو مجموعه با مرجع U باشند، به کمک تعریف اشتراک ، اجتماع، تفاضل و متمم نشان دهید :

الف) $A \cup B = B \cup A$. جابه‌جایی

$$A \cup B = \{x \in U \mid \underbrace{x \in A \vee x \in B}_{p \vee q \equiv q \vee p}\} = \{x \in U \mid x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$$

ب) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. شرکت‌پذیری

$$A \cup (B \cup C) = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B \cup C\} = \{x \in U \mid x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)\} \xrightarrow{p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r}$$

$$= \{x \in U \mid (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C\} = \{x \in U \mid x \in A \cup B \vee x \in C\} = (A \cup B) \cup C$$

پ) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. توزیع‌پذیری

$$A \cup (B \cap C) = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B \cap C\} = \{x \in U \mid x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\} \xrightarrow{p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)}$$

$$= \{x \in U \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\} = \{x \in U \mid x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C\} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

ت) اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $A - B = \varnothing$.

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\} \overset{A \subseteq B}{=\!=} \{x \in U \mid x \in B \wedge x \notin B\} = \{x \in U \mid x \in B \wedge x \in B'\} = B \cap B' = \varnothing$$

ث) $A - B = A \cap B'$

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B'\} = A \cap B'$$

جهاد پویش علمی

مثال ۷) با استفاده از اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها) درستی روابط زیر را بررسی کنید.

الف) $(A\cup B)\cap(B'\cup A)=A$.

$$(A\cup B)\cap(B'\cup A)=A\cup(B\cap B')=A\cup\varnothing=A$$

ب) $(C\cap A)\cup(A'\cap C)=C$.

$$(C\cap A)\cup(A'\cap C)=C\cap(A\cup A')=C\cap U=C$$

پ) $A\cup(B\cup A')=U$.

$$A\cup(B\cup A')\overset{\text{جابه جایی}}{=\!=}A\cup(A'\cup B)\overset{\text{شرکت پذیری}}{=\!=}(A\cup A')\cup B=U\cup B=U$$

ت) $(A-B)'=A'\cup B$.

$$(A-B)'=(A\cap B')'=A'\cup(B')'=A'\cup B$$

ث) $(A-B)-C=(A-C)-B$.

$$(A-B)-C=(A-B)\cap C'=(A\cap B')\cap C'=A\cap(B'\cap C')=A\cap(C'\cap B')=(A\cap C')\cap B'$$
$$=(A\cap C')-B=(A-C)-B$$

ج) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

$$(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B')\cup(A\cap C')=A\cap(B'\cup C')=A\cap(B\cap C)'=A-(B\cap C).$$

ح) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$.

$$(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'=\underbrace{(A\cap B)}_{M}\cap(A'\cup C')=M\cap(A'\cup C')=(M\cap A')\cup(M\cap C')$$
$$=\underbrace{\left[(A\cap B)\cap A'\right]}_{\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cap B=\varnothing}\cup\left[(A\cap B)\cap C'\right]=(A\cap B)\cap C'=A\cap(B\cap C')=A\cap(B-C).$$

خ) اگر $A\cup B=A\cap B$ ، آنگاه $A=B$.

$$A\cup B=A\cap B\begin{cases}\xrightarrow{\cup A}(A\cup B)\cup A=\overbrace{(A\cap B)\cup A}^{\text{جذب}}\longrightarrow A\cup B=A\Rightarrow B\subseteq A\\ \xrightarrow{\cap A}\underbrace{(A\cup B)\cap A}_{\text{جذب}}=(A\cap B)\cap A\longrightarrow A=A\cap B\Rightarrow A\subseteq B\end{cases}\Rightarrow A=B$$

روش دوم) $A\subseteq A\cup B\xrightarrow{\text{فرض}}A\subseteq A\cap B\xrightarrow{A\cap B\subseteq B}A\subseteq B\xrightarrow[B\subseteq A]{\text{در حالتی که}}A=B$

پایه : یازدهم رشته : ریاضی
جناب استاد : محمود داورزنی

مثال ۸) با استفاده از اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها) درستی روابط زیر را بررسی کنید.

الف) $A - B = B' - A'$.

$$A-B=A\cap B'=B'\cap A=B'-A'$$

ب) $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$.

$$(A-B)\cap(B-A)=(A\cap B')\cap(B\cap A')=A\cap\big(B'\cap(B\cap A')\big)=A\cap\underbrace{\big(\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}\cap A\big)}_{\varnothing}=A\cap\varnothing=\varnothing$$

پ) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$.

$$(A-C)\cup(B-C)=(A\cap C')\cup(B\cap C')=C'\cap(A\cup B)=(A\cup B)\cap C'=(A\cup B)-C$$

ت) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B$.

$$(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=(A\cap B')\cup(A\cap B)\cup(B\cap A')=\underbrace{\Big[A\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{U}\Big]}_{A}\cup(B\cap A')$$

$$=A\cup(B\cap A')=(A\cup B)\cap\underbrace{(A\cup A')}_{U}=A\cup B$$

ث) $(X\subseteq A)\wedge(X\subseteq A')\Rightarrow X=\varnothing$.

ج) $(A\subseteq X)\wedge(A'\subseteq X)\Rightarrow X=U$

مثال ۹) هر یک از عبارت‌های زیر را با استفاده از قوانین بین مجموعه‌ها، ساده کنید.

الف) $(A\cap B)\cup\Big[(B\cup C)\cap\big((B\cup A)\cap B\big)\Big]$.

ب) $(A\cup B')\cap\Big[(B\cap C)\cup(B'\cup A)\Big]$.

مثال ۱۰) در هر قسمت، حاصل‌ضرب دکارتی $A\times B$ و $B\times A$ را تشکیل دهید و سپس نمودار هر کدام را رسم کنید.

الف) $A=\{-۱,۱,۲\}$ ، $B=\{۰,۳,۴\}$.

ب) $A=(۱,۴], B=\{۱,۲\}$.

پ) $A=\mathbb{R}, B=\{۰,۱,۲\}$.

ت) $A=\mathbb{N}, B=[۲,۵]$.

ث) $A=[۱,۴], B=[۰,۲]$.

مثال ۱۱) اگر $A=\{x+۲,۳,y-۱\}$, $B=\{۵,z,-۴\}$ و $A\times B=B\times A$ ، بیشترین مقدار $x+y+z$ را تعیین کنید.

جناب استاد : محمود داورزنی