درس ۳ : احتمال شرطی

۱) محاسبه احتمال شرطی: اگر $P(B)>0$ ، احتمال وقوع پیشامد A را به شرط وقوع پیشامد B ، با $P(A|B)$ نشان داده و از رابطهٔ زیر به دست می‌آوریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مثال ۱) در یک کلاس، ۶۰٪ دانش‌آموزان در درس فیزیک، ۵۰٪ در درس ریاضی و ۴۰٪ در هر دو درس نمرهٔ کامل دریافت کرده‌اند. اگر با یک دانش‌آموز که نمرهٔ کامل فیزیک را کسب کرده، برخورد کنیم، با چه احتمالی او در درس ریاضی نیز نمرهٔ کامل را گرفته است؟

$P(A)=0/60$

$P(B)=0/50$

$P(A\cap B)=0/40$

$P(B|A)=?$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0/4}{0/6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

مثال ۲) در پرتاب ۲ تاس به طور همزمان، اگر مجموع دو تاس ۵ باشد، احتمال این که یکی از تاس‌ها ۱ آمده باشد، چقدر است؟

$n(S)=6\times6=36$

$P(B|A)=?$

$A=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

$B=\{(1,2),\dots,(1,6),(2,1),(3,1),\dots,(6,1)\}$

$A\cap B=\{(1,4),(4,1)\}$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{\cancel{36}}}{\frac{4}{\cancel{36}}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

نکته : در مسائل مربوط به احتمال شرطی $P(A|B)$ ، می‌توانیم فرض کنیم پیشامد B رخ داده است، پس فضای نمونه، پیشامد B خواهد بود.

اکنون برای محاسبه $P(A|B)$ باید احتمال وقوع پیشامد A را در فضای نمونه B به دست آوریم. به این روش، **کاهش فضای نمونه** می‌گوییم.

مثال ۳) مثال بالا را به کمک کاهش فضای نمونه حل کنید.

$S=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$ (مجموع دو تاس ۵ است)

$A=\{(1,4),(4,1)\}$ (یکی از تاس‌ها ۱ باشد)

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

مثال ۴) دو تاس سبز (اول) و قرمز (دوم) را پرتاب می‌کنیم.

الف) اگر بدانیم مجموع دو تاس ۱۰ شده است (S)، احتمال اینکه تاس سبز ۶ آمده باشد (A)، چقدر است؟

ب) اگر بدانیم تاس سبز ۶ آمده است (S)، احتمال اینکه مجموع دو تاس ۱۰ باشد (B)، چقدر است؟

در هر دو قسمت از روش کاهش فضای نمونه استفاده می‌کنیم.

الف) $S=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}$

$A=\{(۶,۴)\} \rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{۱}{۳}$

ب) $S=\{(۶,۱),(۶,۲),\dots,(۶,۶)\}$

$B=\{(۶,۴)\} \rightarrow P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{۱}{۶}$

مثال ۵) سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم ($۲^۳=۸$). می‌دانیم (اگر) که دست کم یک بار رو آمده است (S). در این صورت احتمال اینکه هر سه بار رو آمده باشد (A)، چقدر است؟

$S=\{(ر,ر,ر),(ر,ر,پ),(ر,پ,ر),(پ,ر,ر),(ر,پ,پ),(پ,ر,پ),(پ,پ,ر)\}$

از روش کاهش فضای نمونه استفاده می‌کنیم.

$A=\{(ر,ر,ر)\}$

$\rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{۱}{۷}$

مثال ۶) در پرتاب چهار تاس، (اگر) چهار عدد متوالی ظاهر شده است (S). (آن‌گاه) احتمال این‌که یکی از تاس‌ها عدد ۲ باشد (A)، چقدر است؟

$S=\{(۱,۲,۳,۴),(۲,۳,۴,۵),(۳,۴,۵,۶)\}$

از روش کاهش فضای نمونه استفاده می‌کنیم.

$A=\{(۱,۲,۳,۴),(۲,۳,۴,۵)\}$

$\rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{۲}{۳}$

مثال ۷) (اگر) ارزش گزاره $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست است (S). (آن‌گاه) احتمال این که ارزش گزاره r نادرست باشد (A)، کدام است؟

$p,q,r \rightarrow ۲^۳=۸$ (ردیف)

p	q	r	$q\vee r$	$p\Rightarrow(q\vee r)$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	د

$\Rightarrow \begin{cases} p\Rightarrow(q\vee r): \text{در ۷ حالت درست است} \Rightarrow n(S)=۷ \\ n(A)=۳ \end{cases}$

$\rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{۳}{۷}$

مثال ۸) تاس همگنی را سه بار پرتاب می کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این که لااقل یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد، کدام است؟

S   A

از روش کاهش فضای نمونه داریم :

$$n(S)=\frac{6\times 6\times 6}{2}=108$$

(مجموع فرد) S : { هر سه تاس فرد ند ، یکی فرد و دوتا زوج }

A : (یکی فرد و دوتا زوج) { یکی فرد و زوج غیره ۲ , ۲ ← ، یکی فرد , ۲ , ۲ ← }

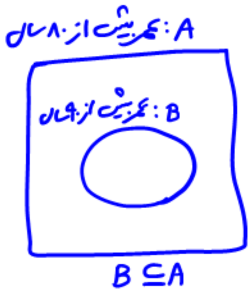
مثال ۹) در یک منطقهٔ خاص، احتمال این‌که شخصی حداقل ۸۰ سال عمر کند، ۷۵٪ و احتمال این‌که از ۹۰ سال بیشتر زنده بماند، ۶۳٪ است. اگر شخصی به تصادف از افراد ۸۰ سالهٔ این منطقه انتخاب شود، با چه احتمالی این فرد حداقل ۹۰ سال عمر می‌کند؟

A   P(A)   B   P(B)   A   B

$P(B|A)=?$

$$P(B|A)=\frac{\overbrace{P(B\cap A)}^{B}}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.63}{0.75}=\frac{63}{75}=\frac{21}{25}\times\frac{4}{4}=\frac{84}{100}$$

$$=0.84 \rightarrow 84\%$$



مثال ۱۰) در یک تیم ۱۴ نفر حضور دارند و قد هیچ دو نفری برابر نیست. دو نفر را به ترتیب انتخاب می‌کنیم. اگر نفر دوم از نفر اول کوتاه قدتر باشد، احتمال این‌که نفر اول بلندقدترین بازیکن تیم باشد، چقدر است؟

A   B

$$P(B|A)=\frac{\overbrace{P(B\cap A)}^{B}}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{14}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$$

مثال ۱۱) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند که $P(A)=0/1$ و $P(B)=0/25$ و $P(B|A)=0/6$، آن‌گاه $P(A\cup B)$ کدام است؟

$$P(B|A)=0.6 \Rightarrow \frac{P(B\cap A)}{P(A)}=0.6 \Rightarrow P(B\cap A)=0.6\times P(A)=0.6\times 0.1=0.06$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.1+0.25-0.06=0.35-0.06=0.29$$

مثال ۱۲) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند که $B \subseteq A$، $P(A)=\frac{۲}{۳}$ و $P(B)=\frac{۲}{۵}$، آن‌گاه $P(A\mid B')$ کدام است؟

$$P(A\mid B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A-B)}{P(B')}=\frac{P(A)-P(\overbrace{A\cap B}^{B})}{1-P(B)}$$

$$=\frac{P(A)-P(B)}{1-P(B)}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{3}{5}}=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}$$

مثال ۱۳) امیر و بهروز هر کدام به ترتیب با احتمال ۰/۶ و ۰/۳ در یک مسابقهٔ علمی شرکت می‌کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز ۰/۵ است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز، کدام است؟

$P(A)=0.6$

$P(B)=0.3$

$P(A\mid B)=0.5$

$P(A\mid B')=?$

$$P(A\mid B)=0.5 \Longrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0.5 \Rightarrow P(A\cap B)=0.5\times 0.3=0.15$$

$$P(A\mid B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A-B)}{P(B')}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}$$

$$=\frac{0.6-0.15}{1-0.3}=\frac{0.45}{0.7}=\frac{45}{70}=\frac{9}{14}$$

مثال ۱۴) در یک جعبه سه کارت موجود است. دو روی کارت اول، قرمز، دو روی کارت دوم، آبی و یک روی کارت سوم قرمز و روی دیگر آن سبز است.

R : قرمز

B : آبی

G : سبز

R | R	B | B	R | G
کارت اول	کارت دوم	کارت سوم

از این جعبه یک کارت به تصادف برمی‌داریم. مطلوب است احتمال این‌که :

الف) هر دو روی آن قرمز باشند.

$P(A)=\frac{1}{3}$، زیرا تنها یکی از سه کارت این ویژگی را دارد.

ب) یک روی آن قرمز و روی دیگر آن سبز باشد.

$P(B)=\frac{1}{3}$، زیرا تنها یکی از سه کارت این ویژگی را دارد.

پ) یک روی آن قرمز باشد.

$P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$، زیرا سه وجه از شش وجه موجود در سه کارت، قرمز هستند.

ت) اگر یک روی آن قرمز باشد، روی دیگر آن نیز قرمز باشد.

(الف) هر دو رو قرمز

$$P(B\mid A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

(پ)

مثال ۱۵) در یک جعبه ۱۰ کارت وجود دارد که چهارتای آن ها دو رو قرمز، سه کارت دو رو آبی و سه کارت دیگر یک رو قرمز و یک رو آبی هستند. یک کارت به تصادف انتخاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم $\underbrace{\text{یک وجه آن قرمز است}}_{A}$. احتمال آن که $\underbrace{\text{وجه دیگر آن نیز قرمز}}_{B}$ باشد، چقدر است؟

$\boxed{R|R}\times 4 \quad \boxed{B|B}\times 3 \quad \boxed{R|B}\times 3$

$$P(B|A)=\frac{P(\overbrace{B\cap A}^{\text{هر دو وجه قرمز}})}{P(A)}=\frac{\frac{4}{\cancel{10}}}{\frac{11}{\cancel{20}_{2}}}=\frac{8}{11}$$

مثال ۱۶) اگر B پیشامدی با احتمال مثبت و A یک پیشامد دلخواه باشد، نشان دهید که :

$$P(A'\,|\,B)=1-P(A\,|\,B)$$

اثبات:

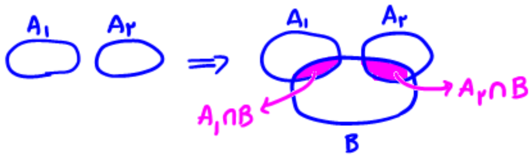
$$\text{سمت چپ}: P(A'|B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B-A)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}-\frac{P(B\cap A)}{P(B)}$$

$$=1-P(A|B):\ \text{سمت راست}$$

مثال ۱۷) اگر B پیشامدی با احتمال مثبت و A_1 و A_2 دو پیشامد ناسازگار باشند، نشان دهید که :

$$P(A_1\cup A_2\,|\,B)=P(A_1\,|\,B)+P(A_2\,|\,B)$$

ناسازگار: $A_1, A_2 \Rightarrow A_1\cap A_2=\varnothing \Rightarrow$



$\Rightarrow (A_1\cap B)$ و $(A_2\cap B)$:ناسازگار

$$\text{سمت چپ}: P(A_1\cup A_2|B)=\frac{P((A_1\cup A_2)\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\overbrace{(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)}^{\text{ناسازگار}})}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}+\frac{P(A_2\cap B)}{P(B)}$$

$$=P(A_1|B)+P(A_2|B)$$

۲) قانون ضرب احتمال: اگر A و B دو پیشامد باشند، می‌دانیم که $\underbrace{P(A|B)}_{1}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. از این رابطه می‌توانیم برای محاسبهٔ $P(A\cap B)$ به صورت زیر استفاده کنیم:

$$\begin{cases} P(A\cap B)=P(B).P(A|B) \\ P(A\cap B)=P(A).P(B|A) \end{cases}$$

که به آن، قانون ضرب احتمال گفته می‌شود. از تعویض A و B با یکدیگر، رابطهٔ زیر نیز نتیجه می‌شود :

$$\underbrace{P(B|A)}_{1}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \longrightarrow P(A\cap B)=P(A).P(B|A)$$

مثال ۱) نشان دهید که برای سه پیشامد C,B,A ، قانون ضرب احتمال به صورت زیر است.

$$P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B|A).P(C|A\cap B)$$

حل)

$$\text{سمت راست}: P(A).P(B|A).P(C|A\cap B)=\cancel{P(A)}.\frac{P(A\cap \cancel{B})}{\cancel{P(A)}}.\frac{P(A\cap B\cap C)}{\cancel{P(A\cap B)}}$$

$$=P(A\cap B\cap C)$$

درتمرین‌های این درس خواهیم دید که $P(A\cap B\cap C)$ به $6=!3$ حالت می‌توان محاسبه شود.

نکته: از قوانین ضرب احتمال هنگامی استفاده می‌شود که قرار است اشتراک دو یا سه پیشامدی را تعیین کنیم که به صورت **متوالی** رخ داده‌اند.

مثال ۲) جعبه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سفید و۶ مهرهٔ سیاه است. دو مهره به تصادف و به صورت متوالی از این جعبه خارج می‌کنیم. احتمال این‌که اولین مهره سفید و دومین مهره سیاه باشد، چقدر است؟

$\underbrace{\text{اولین مهره سفید}}_{A_1}$ و $\underbrace{\text{دومین مهره سیاه}}_{A_2}$

$P(A_1\cap A_2)=?$

۴ سفید ۶ سیاه
۱۰ مهره

حل) برای محاسبه $P(A_1\cap A_2)$ از قانون ضرب احتمال استفاده می‌کنیم.

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1).\underbrace{P(A_2|A_1)}_{\text{یکی از مهره‌های سفید کم می‌شود}}=\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$$

۳ سفید ۶ سیاه
۹ مهره

مثال ۳) صبا در هر یک از آزمون‌های فیزیک و ریاضی، ۸۰٪ توانایی کسب نمرهٔ کامل را دارد ولی اگر نتواند نمرهٔ کامل را در یکی از این دو درس بگیرد، توانایی او برای کسب نمرهٔ کامل در درس بعدی به ۶۰٪ کاهش می‌یابد. مطلوبست احتمال این‌که :

A_1: کسب نمره کامل در درس اول
A_2: 〃 〃 〃 دوم

الف) در هر دو درس نمرهٔ کامل را کسب کند.

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1).\underbrace{P(A_2|A_1)}_{\text{روحیه خوب}}=0/8\times 0/8=0/64$$

ب) در هیچ امتحانی نمرهٔ کامل را نگیرد.

$$P(A_1'\cap A_2')=P(A_1').\underbrace{P(A_2'|A_1')}_{\text{روحیه بد}}=(1-0/8)\times(1-0/6)=0/2\times 0/4=0/08$$

پ) فقط درامتحان اول نمرهٔ کامل را بگیرد.

$$P(A_1\cap A_2')=P(A_1).\underbrace{P(A_2'|A_1)}_{\text{روحیه خوب}}=0/8\times(1-0/8)=0/8\times 0/2=0/16$$

ت) فقط در یک درس نمرهٔ کامل را بگیرد.

$$\underbrace{P(A_1\cap A_2')}_{\text{فقط درامتحان اول نمره کامل بگیرد}}+\underbrace{P(A_1'\cap A_2)}_{\text{فقط درامتحان دوم نمره کامل بگیرد}}=0/16+P(A_1').\underbrace{P(A_2|A_1')}_{\text{روحیه بد}}=0/16+\underbrace{(1-0/8)}_{0/2}\times 0/6=0/16+0/12=0/28$$

مثال ۴) یک بازیکن بسکتبال با روحیهٔ خوب و بد به ترتیب با احتمال ۹۰٪ و ۶۰٪ می‌تواند توپ را وارد حلقه کند. اگر پرتاب او موفق باشد، روحیه‌اش خوب و در غیر این‌صورت، بد خواهد بود. احتمال این‌که در سه پرتاب متوالی، فقط دو پرتاب آخر گل شود، چقدر است؟ (در اولین پرتاب، روحیه بازیکن خوب است.)

خوب بد

حل) اگر A_i که $i=1,2,3$ ، پیشامد وارد حلقه شدن توپ در پرتاب i ام باشد، باید احتمال زیر را حساب کنیم.

$$P(A_1'\cap A_2\cap A_3)=P(A_1')\cdot \underbrace{P(A_2|A_1')}_{\text{روحیه بد}}\cdot \underbrace{P(A_3|A_1'\cap A_2)}_{\text{روحیه خوب}}$$

$$=(1-0/9)\times 0/6\times 0/9$$

$$=0/1\times 0/6\times 0/9$$

$$=0/054$$

مثال ۵) ۵ باتری سالم با ۲ باتری معیوب مخلوط شده‌اند. برای یافتن باتری‌های سالم، همهٔ باتری‌ها را بدون جای‌گذاری امتحان می‌کنیم. احتمال این‌که دو باتری معیوب در آزمایش‌های اول و سوم مشخص شوند، چقدر است؟

$\underbrace{\text{۵ سالم} \quad \text{۲ معیوب}}_{\text{۷ باتری}}$

حل) اگر A_i که $i=1,2,3$ ، پیشامد سالم بودن آزمایش i ام باشد، باید احتمال زیر را به دست آوریم:

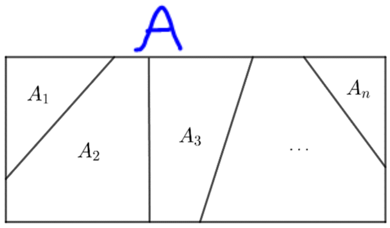
$$P(A_1'\cap A_2\cap A_3')=P(A_1')\cdot \underbrace{P(A_2|A_1')}_{\text{۵ سالم - ۱ معیوب، ۶ باتری}}\cdot \underbrace{P(A_3'|A_1'\cap A_2)}_{\text{۴ سالم - ۱ معیوب، ۵ باتری}}$$

$$=\frac{\cancel{2}}{7}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}_{3}}\times\frac{1}{\cancel{5}}$$

$$=\frac{1}{21}$$

مفهوم افراز

افراز یک مجموعه مانند A یعنی تقسیم آن به زیرمجموعه‌های غیر تهی که با یکدیگر اشتراکی نداشته باشند و اجتماع تمام آن‌ها با یکدیگر، مجموعه A شود. به زبان ریاضی، مجموعه‌های $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ مجموعهٔ A را افراز می‌کنند به شرطی که:



1) $\forall i, 1 \le i \le n; A_i \ne \varnothing,$

2) $\forall i, j, A_i \ne A_j \, (i \ne j),$

3) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A.$

مثال ۱) ۳۱ استان کشور ایران، یک افراز برای ایران هستند.

مثال ۲) دو افراز مختلف برای $\mathbb{N}$ (اعداد طبیعی) بنویسید.

افراز اول: $A_1 = \{1, 3, 5, \dots\}$ و $A_2 = \{2, 4, 6, \dots\}$. واضح است که $A_1 \cup A_2 = \mathbb{N}$ و $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

افراز دوم: $A_1 = \{1\}$ و $A_2 = \{2, 3, 4, \dots\}$. واضح است که $A_1 \cup A_2 = \mathbb{N}$ و $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

نکته: برای $\mathbb{N}$ می‌توان بی‌نهایت افراز نوشت.

مثال ۳) تمام افرازهای مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

برای مجموعه متناهی A به تعداد محدودی افراز وجود دارد.

افراز اول: $\overset{A}{(a \mid b \mid c)} \rightarrow A_1 = \{a\}, A_2 = \{b\}, A_3 = \{c\}$

افراز دوم: $\overset{A}{(a, b \mid c)} \rightarrow A_1 = \{a, b\}, A_2 = \{c\}$

افراز سوم: $\overset{A}{(a, c \mid b)} \rightarrow A_1 = \{a, c\}, A_2 = \{b\}$ $\Rightarrow$ «۵» افراز مختلف برای A وجود دارد

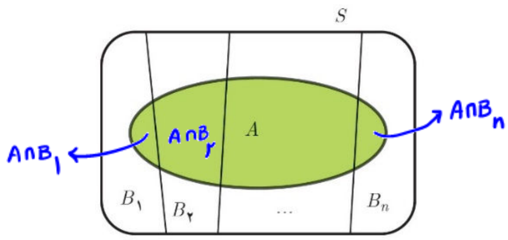
افراز چهارم: $\overset{A}{(a \mid b, c)} \rightarrow A_1 = \{a\}, A_2 = \{b, c\}$

افراز پنجم: $\overset{A}{(a, b, c)} \rightarrow A_1 = \{a, b, c\}$

تذکر: اعداد بل، تعداد افرازها را مشخص می‌کند.

۳) قانون احتمال کل

اگر مجموعه‌ای از پیشامدها مانند $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$، یک افراز برای فضای نمونهٔ S باشند، در این صورت احتمال وقوع پیشامد A عبارتست از :



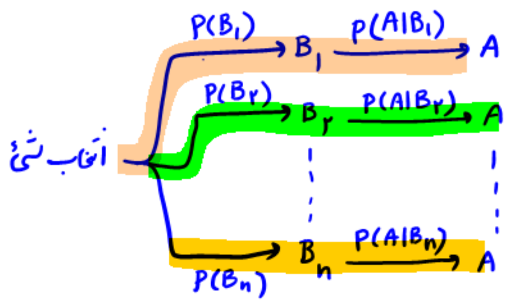
$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)$

$\rightarrow P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n)$

$\rightarrow \boxed{P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + \ldots + P(B_n)P(A \mid B_n)}$

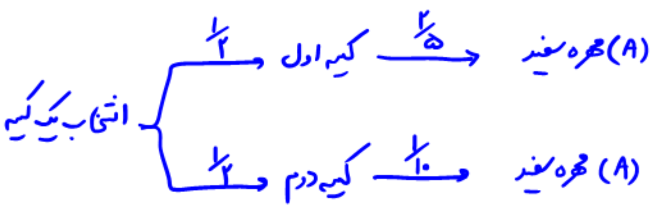
به رابطهٔ آخر، قانون احتمال کل می‌گوییم.

نکته: برای محاسبهٔ $P(A)$ به این روش، معمولاً از **نمودار درختی** استفاده می‌کنیم که در آن، شاخه‌های درخت همان B_1 ، B_2 ، ... ، B_n هستند.



$\Rightarrow P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$

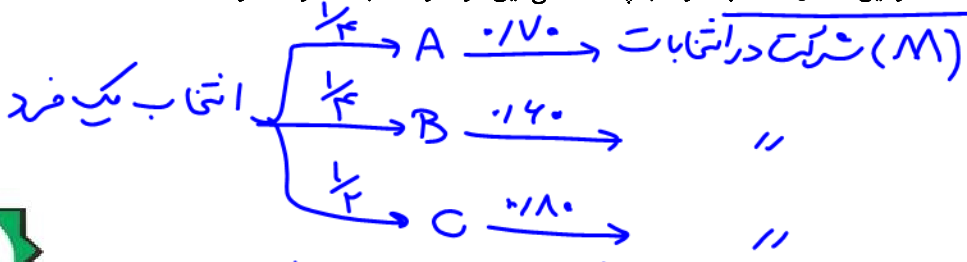
مثال ۴) دو کیسه داریم که در اولی ۲ گوی سفید و ۳ گوی سبز و در دومی ۱ گوی سفید و ۹ گوی قرمز قرار دارد. یکی از این دو کیسه را انتخاب می‌کنیم و از آن یک گوی برمی‌داریم. احتمال آن را حساب کنید که این گوی سفید باشد.

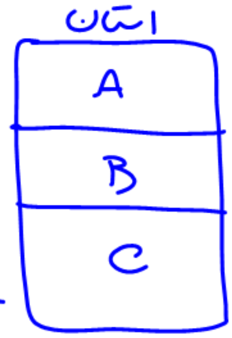


قانون احتمال کل

$\longrightarrow P(A) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

مثال ۵) میزان مشارکت ۳ شهر A ، B و C از یک استان در انتخابات، به ترتیب ۷۰٪ ، ۶۰٪ و ۸۰٪ است. اگر جمعیت این سه شهر به ترتیب $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$ کل جمعیت استان باشند و فردی به تصادف از این استان انتخاب شود، با چه احتمالی این فرد در انتخابات شرکت کرده است؟





$P(M) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{7}{10}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{6}{10}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{8}{10}\right) = \frac{7+6+16}{40} = \frac{29}{40}$

مثال ۶) میوه فروشی ده صندوق سیب از سه باغ مختلف خریده است. ۳ صندوق از باغ شمالی، ۵ صندوق از باغ مرکزی و ۲ صندوق از باغ جنوبی. در این سه باغ احتمال اینکه یک سیب لکه‌دار باشد، به ترتیب ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد است. با فرض اینکه تعداد سیب‌ها در صندوق‌های مختلف برابر است، احتمال اینکه سیبی که از یکی از صندوق‌ها برمی‌داریم لکه‌دار باشد چقدر است؟

انتخاب یک سیب

$\xrightarrow{\frac{3}{10}}$ شمالی $\xrightarrow{0.10}$ لکه‌دار بودن (A)

$\xrightarrow{\frac{5}{10}}$ مرکزی $\xrightarrow{0.03}$ //

$\xrightarrow{\frac{2}{10}}$ جنوبی $\xrightarrow{0.05}$ //

شمالی (۳ صندوق)	٪۱۰
مرکزی (۵ صندوق)	٪۳
جنوبی (۲ صندوق)	٪۵

۱۰ صندوق

$$P(A)=\left(\frac{3}{10}\times\frac{10}{100}\right)+\left(\frac{5}{10}\times\frac{3}{100}\right)+\left(\frac{2}{10}\times\frac{5}{100}\right)=\frac{30+15+10}{1000}=\frac{55}{1000}$$

مثال ۷) در کلاس A ، ۲۰٪ و در کلاس B ، ۱۰ % دانش‌آموزان به والیبال علاقه دارند. اگر تعداد دانش‌آموزان کلاس A ، $\frac{4}{5}$ دانش‌آموزان کلاس B باشد و دانش‌آموزی به تصادف از این دو کلاس انتخاب شود، با چه احتمالی به والیبال علاقه ندارد؟

$$n(A)=\frac{4}{5}n(B)\quad(*)$$

S: | A | B |

$$n(A)+n(B)=n(S)\xrightarrow{(*)}\frac{4}{5}n(B)+n(B)=n(S)\to\frac{9}{5}n(B)=n(S)\to$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{5}{9}\to P(A)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

انتخاب یک فرد

$\xrightarrow{\frac{4}{9}} A \xrightarrow{0.80}$ علاقه نداشتن به والیبال (M)

$\xrightarrow{\frac{5}{9}} B \xrightarrow{0.90}$ //

$$P(M)=\left(\frac{4}{9}\times\frac{8}{10}\right)+\left(\frac{5}{9}\times\frac{9}{10}\right)=\frac{32+45}{90}=\frac{77}{90}$$

مثال ۸) سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهره سفید، در دومی ۹ مهره سیاه و در سومی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. به تصادف از یک ظرف ۲ مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟

A : لااقل یکی از دو مهره سیاه باشد

انتخاب یک ظرف

$\xrightarrow{\frac{1}{3}}$ ظرف اول $\xrightarrow{0} A$

$\xrightarrow{\frac{1}{3}}$ ظرف دوم $\xrightarrow{1} A$

$\xrightarrow{\frac{1}{3}}$ ظرف سوم $\xrightarrow{1-\frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}=\frac{5}{6}} A$

$$\Rightarrow P(A)=\underbrace{\cancel{\left(\frac{1}{3}\times 0\right)}}_{0}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}\times 1\right)}_{1}+\left(\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}\right)$$

$$=0+\frac{1}{3}+\frac{5}{18}$$

$$=\frac{6+5}{18}$$

$$=\boxed{\frac{11}{18}}$$

$$1-\frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}=1-\frac{6}{36}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}\ ;\ \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

مثال ۹) از ظرف I که شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۸ مهرهٔ سیاه است، مهره‌ای به ظرف II که در آن ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است،
منتقل می‌کنیم و سپس از ظرف II یک مهره خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که این مهره سفید باشد، چقدر است؟

۱۳ مهره

انتخاب یک مهره از ظرف I

$\frac{5}{13}$ سفید ← اضافه به ظرف II ← ظرف II: ۵ سفید ۶ سیاه ← $\frac{5}{11}$ مهره سفید (A)

$\frac{8}{13}$ سیاه ← 〃 ← ظرف II: ۴ سفید ۷ سیاه ← $\frac{4}{11}$ 〃

$$\Rightarrow P(A)=\left(\frac{5}{13}\times\frac{5}{11}\right)+\left(\frac{8}{13}\times\frac{4}{11}\right)=\frac{25}{143}+\frac{32}{143}=\frac{25+32}{143}=\frac{57}{143}$$

مثال ۱۰) در جعبه اول ۵مهره سفید و ۸ مهره سیاه و در جعبه دوم ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه قرار دارند. از جعبه اول یک مهره به دلخواه خارج و در
جعبه دوم می‌اندازیم. سپس دو مهره از جعبه دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سفید است؟

انتخاب یک مهره از جعبه اول

$\frac{5}{13}$ سفید ← اضافه به جعبه دوم ← جعبه دوم: ۵ سفید ۶ سیاه ← $1-\frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}}=1-\frac{15}{55}=\frac{40}{55}$ ← لااقل یکی از دو مهره سفید (A)

$\frac{8}{13}$ سیاه ← 〃 ← جعبه دوم: ۴ سفید ۷ سیاه ← $1-\frac{\binom{7}{2}}{\binom{11}{2}}=1-\frac{21}{55}=\frac{34}{55}$ ← 〃

$$\Rightarrow P(A)=\left(\frac{5}{13}\times\frac{40}{55}\right)+\left(\frac{8}{13}\times\frac{34}{55}\right)=\frac{200+272}{13\times 55}=\frac{472}{715}$$

مثال ۱۱) از جعبه‌ای با ۵ مهرهٔ آبی و ۸ مهرهٔ قرمز، مهره‌ای به تصادف خارج کرده و سپس آن را همراه با ۲ مهره از همان رنگ به جعبه بر می‌گردانیم.
اگر مهره‌ای از جعبه خارج کنیم، احتمال آن‌که این مهره آبی باشد، چقدر است؟

۱۳ مهره

انتخاب مهره از جعبه اول

$\frac{5}{13}$ آبی ← با ۲ مهره آبی به جعبه برمی‌گردد ← جعبه: ۷ آبی ۸ قرمز ← $\frac{7}{15}$ مهره آبی (M)

$\frac{8}{13}$ قرمز ← با ۲ مهره قرمز به جعبه برمی‌گردد ← جعبه: ۵ آبی ۱۰ قرمز ← $\frac{5}{15}$ 〃

$$\Rightarrow P(M)=\left(\frac{5}{13}\times\frac{7}{15}\right)+\left(\frac{8}{13}\times\frac{5}{15}\right)=\frac{35+40}{13\times 15}=\frac{75}{195}$$

مثال ۱۲) در دو جعبه به ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ وجود دارد. در جعبهٔ اول ۴ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از اولین جعبه ۵ و از دومی ۷ لامپ به
تصادف خارج کرده و در ظرف جدیدی قرار می‌دهیم. احتمال این‌که لامپ خارج شده از ظرف جدید معیوب باشد، چقدر است؟

مهره از جعبه جدید

$\frac{5}{12}$ جعبه اول ← $\frac{4}{20}$ لامپ معیوب (M)

$\frac{7}{12}$ جعبه دوم ← $\frac{3}{12}$ 〃

جعبه اول: ۱۶ سالم ۴ معیوب ← ۵

جعبه دوم: ۹ سالم ۳ معیوب ← ۷

بعد از جعبه جدید: ۵ — ۷

جعبه جدید

P(معیوب)=?

$$\Rightarrow P(M)=\left(\frac{\cancel{5}}{12}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{20}}\right)+\left(\frac{7}{12}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{12}}\right)$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{7}{48}=\frac{4+7}{48}=\frac{11}{48}$$

۴) قانون بیز

با توجه به این‌که $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$، با جای‌گذاری $\underbrace{P(A\cap B)=P(A)P(B|A)}_{\text{قانون ضرب احتمال}}$ در صورت کسر، به رابطهٔ زیر می‌رسیم که به آن قانون بیز می‌گوییم.

حاصل ضرب احتمال‌های یک شاخه

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow \boxed{P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}}$$

(وزن میانگین درخت) قانون احتمال کل

استفاده از این قانون برای محاسبهٔ $P(A|B)$ معمولاً زمانی است که محاسبهٔ $P(A|B)$ دشوار، ولی محاسبهٔ $P(B|A)$ ساده باشد.
بیشتر اوقات برای محاسبهٔ $P(B)$ در مخرج کسر بالا، از قانون احتمال کل استفاده می‌شود.

مثال ۱) دو ظرف داریم که در اولی ۵ مهرهٔ سفید و ۸ مهرهٔ سیاه و در دومی ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه وجود دارد. اگر یکی از ظرف‌ها به تصادف انتخاب شده و مهرهٔ خارج شده سفید باشد، با کدام احتمال از ظرف اول انتخاب شده است؟

۱۳ مهره

A   B

$P(B|A)=?$

$$P(B|A)=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)}$$

$$=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\times\frac{5}{13}}{(\cancel{\frac{1}{2}}\times\frac{5}{13})+(\cancel{\frac{1}{2}}\times\frac{4}{10})}$$

$$=\frac{\frac{5}{13}}{\frac{5}{13}+\frac{4}{10}}=\frac{\frac{5}{13}}{\frac{102}{130}}=\frac{50}{102}$$

انتخاب ظرف:
- $\frac{1}{2}$ ظرف اول $\xrightarrow{\frac{5}{13}}$ سفید (A)
- $\frac{1}{2}$ ظرف دوم $\xrightarrow{\frac{4}{10}}$ //

مثال ۲) برای تشخیص یک نوع بیماری از فردی آزمایش می‌گیریم. اگر احتمال خطای آزمایش ۰/۱ و احتمال بیمار بودن فرد، ۰/۳ باشد و پزشک حکم به بیماری این فرد بدهد، احتمال این که این فرد واقعاً بیمار باشد، چقدر است؟

اگر

A   B

$P(B|A)=?$

$$P(B|A)=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)}$$

$$=\frac{0.3\times0.9}{(0.3\times0.9)+(0.7\times0.1)}$$

$$=\frac{0.27}{0.27+0.07}=\frac{0.27}{0.34}=\frac{27}{34}$$

فرد:
- 0.3 بیمار $\xrightarrow{0.9}$ پزشک حکم به بیماری می‌دهد (A)
- 0.7 سالم $\xrightarrow{0.1}$ //

مثال ۳) فرض کنید سه صندوق سیب از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها به ترتیب ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب‌ها لکه دارند. اگر یکی از صندوق‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و سیبی از آن خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، چقدر است؟

$\underbrace{\text{لکه‌دار است}}_{A}$ ، $\underbrace{\text{مربوط به باغ شمالی باشد}}_{B}$

$$P(B|A)=?$$

انتخاب صندوق:

- $\frac{1}{3}$ باغ شمالی $\xrightarrow{\%10}$ لکه‌دار بودن سیب (A)
- $\frac{1}{3}$ باغ مرکزی $\xrightarrow{0/03}$ 〃
- $\frac{1}{3}$ باغ جنوبی $\xrightarrow{0/05}$ 〃

$$P(B|A)=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)}$$

$$=\frac{\cancel{\frac{1}{3}}\times\frac{10}{100}}{(\cancel{\frac{1}{3}}\times\frac{10}{100})+(\cancel{\frac{1}{3}}\times\frac{3}{100})+(\cancel{\frac{1}{3}}\times\frac{5}{100})}$$

$$=\frac{0/10}{0/10+0/03+0/05}$$

$$=\frac{0/10}{0/18}=\frac{10}{18}=\boxed{\frac{5}{9}}$$

مثال ۴) تیم والیبال دبیرستان ۱۰ بازیکن دارد که قد هیچ دو نفری برابر نیست. به طور متوالی و بدون جای‌گذاری، ۲ بازیکن به تصادف انتخاب می‌کنیم. در صورتی که بدانیم بازیکن اول از بازیکن دوم بلندقدتر است، با کدام احتمال بازیکن اول از نظر بلندی قد نفر هفتم تیم است؟

$\underbrace{\text{در صورتی که}}_{\text{اگر}}$ ، $\underbrace{\text{بازیکن اول از بازیکن دوم بلندقدتر است}}_{A}$ ، $\underbrace{\text{بازیکن اول از نظر بلندی قد نفر هفتم تیم است}}_{B}$

A|B : بلندترین — — — — — — — — — — کوتاه‌قدترین

نفر هفتم از نظر بلندی قد ← بازیکن اول

بازیکن دوم

$$P(B|A)=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)}$$

$$=\frac{\frac{1}{10}\times\frac{3}{9}}{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$$

تمرین

۱ دربارهٔ خانواده‌ای چهار فرزندی، می‌دانیم که دست کم یکی از فرزندان آنها پسر است. احتمال اینکه دقیقاً ۲ پسر داشته باشند چقدر است؟

A S اگر

(روش کاهش فضای نمونه) : $n(S)=2^4-1=16-1=15 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

$n(A)=\binom{4}{2}=\frac{4\times 3}{2}=6$

۲ ستاد مرکزی معاینهٔ فنّی خودروهای تهران در اواخر سال ۱۳۹۵ اعلام کرد : «امسال پرکارترین سال در عرصهٔ معاینهٔ فنّی خودروهای کشور از ابتدای تأسیس تاکنون بوده و ۸۷۰ هزار خودرو در تهران معاینهٔ فنّی شده‌اند. امسال یکی از سخت‌ترین سال‌های مبارزه با آلودگی هوا بود ...»
در این طرح، سیزده مرکز مسئولیت معاینهٔ فنّی خودروهای سبک را به عهده داشتند. فرض کنید جدول زیر آمار خودروهای مراجعه‌کرده و خودروهای مردودی در معاینهٔ فنّی باشد : (تعداد به هزار دستگاه است).

شمارهٔ مرکز	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	
تعداد مراجعه	۶۰	۷۷	۸۶	۸۵	۷۹	۷۹	۵۶	۵۹	۴۸	۵۰	۵۵	۵۱	۸۵	← ۸۷۰
تعداد مردودی	۲۸	۱۶	۱۲	۱۷	۲۶	۱۰	۱۴	۱۴	۲۹	۳۰	۲۲	۲۲	۱۸	← ۲۵۸ مجموع

خودرویی را از بین خودروهای مراجعه‌کرده انتخاب می‌کنیم.

الف) خودروی انتخابی به چه احتمالی مردود شده است؟ $\frac{258}{870}$

ب) اگر بدانیم آن خودرو به مرکز شمارهٔ ۵ مراجعه کرده، جواب سؤال قبل چند است؟ $\frac{26}{79}$

پ) اگر بدانیم آن خودرو مردود شده است، احتمال اینکه به مرکز شمارهٔ ۵ مراجعه کرده باشد چقدر است؟ $\frac{26}{258}$

$n(S): 258$ تعداد مردودی‌های مرکز ۵ : ۲۶

۳ بررسی‌های آماری نشان داده است که اگر یک روز ساحل جزیرهٔ هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال ۹۰ درصد آرام و به احتمال ۱۰ درصد طوفانی است و اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد فردای آن روز به احتمال ۵۰ درصد آرام و به احتمال ۵۰ درصد طوفانی است. اگر امروز ساحل آرام باشد، احتمال اینکه در دو روز بعد ساحل طوفانی باشد چقدر است؟

هوای فردای ساحل $\xrightarrow{0.9}$ آرام $\xrightarrow{0.1}$ هوای طوفانی برای دو روز بعد (A)

هوای فردای ساحل $\xrightarrow{0.1}$ طوفانی $\xrightarrow{0.5}$

$\Rightarrow P(A)=(0.9\times 0.1)+(0.1\times 0.5)$
$=0.09+0.05=0.14$

۴ قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد را ثابت کنید : $P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1\cap A_2))$

سمت راست: $P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)=\cancel{P(A_1)}\cdot\frac{\cancel{P(A_2\cap A_1)}}{\cancel{P(A_1)}}\cdot\frac{P(A_3\cap A_1\cap A_2)}{\cancel{P(A_1\cap A_2)}}$

$=P(A_1\cap A_2\cap A_3)=$ سمت چپ

۵ قانون ضرب احتمال n پیشامد را بنویسید. اگر بخواهیم از این قانون برای محاسبهٔ احتمال اشتراک n پیشامد استفاده کنیم، به چند حالت مختلف این کار قابل انجام است؟

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots P(A_n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})$$

روش نوشتن مختلف احتمال اشتراک : $\dfrac{n}{\text{احتمال اول}}\times\dfrac{n-1}{\text{احتمال دوم}}\times\dfrac{n-2}{\text{احتمال سوم}}\times\cdots\times\dfrac{1}{\text{احتمال n ام}}\Rightarrow$

$$n(n-1)(n-2)\cdots1=n!$$

۶ جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می‌دانیم که ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهینامهٔ تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه گواهینامهٔ تراکتور داشته باشد چقدر است؟

انتخاب بزرگسال
- $\frac{45}{100}$ مرد $\xrightarrow{\frac{70}{100}}$ داشتن گواهینامه تراکتور (A)
- $\frac{55}{100}$ زن $\xrightarrow{\frac{20}{100}}$ //

$$\Rightarrow P(A)=\frac{45}{100}\times\frac{70}{100}+\frac{55}{100}\times\frac{20}{100}=\frac{3150+1100}{10000}=\frac{4250}{10000}=\frac{425}{1000}=0.425$$

۷ دو ظرف داریم. در اوّلی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اوّل یک مهره به‌طور تصادفی برمی‌داریم و بدون مشاهده آن را به ظرف (۷ مهره) دوم منتقل می‌کنیم. اکنون یک مهره (۸ مهره) از ظرف دوم بیرون می‌آوریم؛ با چه احتمالی این مهره سبز است؟

انتخاب مهره از ظرف اول
- $\frac{4}{7}$ سبز $\xrightarrow{\text{به ظرف دوم اضافه می‌شود}}$ ظرف دوم (۵ قرمز، ۴ سبز) $\xrightarrow{\frac{4}{9}}$ مهره سبز (A)
- $\frac{3}{7}$ قرمز $\xrightarrow{//}$ ظرف دوم (۶ قرمز، ۳ سبز) $\xrightarrow{\frac{3}{9}}$ //

$$\Rightarrow P(A)=\left(\frac{4}{7}\times\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{3}{7}\times\frac{3}{9}\right)=\frac{16+9}{63}=\frac{25}{63}$$

۸ در شهری ۶۰ درصد راننده‌ها مرد و ۴۰ درصد زن هستند. احتمال اینکه یک رانندهٔ مرد، وقتی چراغ راهنمایی قرمز است، روی خط عابر توقف کند ۰/۰۵ است و زن‌ها چنین تخلفی را به احتمال ۰/۰۱ انجام می‌دهند. احتمال اینکه یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی روی خط عابر توقف کند چقدر است؟

انتخاب راننده
- 0.6 مرد $\xrightarrow{0.05}$ توقف روی خط عابر (A)
- 0.4 زن $\xrightarrow{0.01}$ //

$$\Rightarrow P(A)=(0.6\times0.05)+(0.4\times0.01)=0.030+0.004=0.034$$

۹ در دو جعبه به‌ترتیب، ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اوّل ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از هرکدام از جعبه‌ها ۵ لامپ به‌تصادف انتخاب و در یک جعبه جدید قرار می‌دهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، معیوب باشد را محاسبه کنید.

جعبه اول: ۴ معیوب، ۶ سالم $\xrightarrow{5}$ جعبه جدید
جعبه دوم: ۳ معیوب، ۹ سالم $\xrightarrow{5}$ جعبه جدید
جعبه جدید: ۵ جعبه اول، ۵ جعبه دوم

انتخاب لامپ از جعبه جدید
- $\frac{5}{10}$ جعبه اول $\xrightarrow{\frac{4}{10}}$ لامپ معیوب (M)
- $\frac{5}{10}$ جعبه دوم $\xrightarrow{\frac{3}{12}}$ //

$$\Rightarrow P(M)=\left(\frac{5}{10}\times\frac{4}{10}\right)+\left(\frac{5}{10}\times\frac{3}{12}\right)=\frac{20}{100}+\frac{15}{120}=\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{8+5}{40}=\frac{13}{40}$$

۱۰ ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر B باشد و (اگر) فردی به تصادف از بین رأی‌دهنده‌های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A خواهد بود؟

$\underbrace{\text{بین رأی‌دهنده‌های این دو شهر}}_{M}$

$P(A|M)=?$

$n(A)=3n(B) \xrightarrow{n(A)+n(B)=n(S)} 3n(B)+n(B)=n(S) \rightarrow 4n(B)=n(S) \rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{1}{4} \Rightarrow P(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$$P(A|M)=\frac{P(A)\cdot P(M|A)}{P(M)}=\frac{\frac{3}{\cancel{4}}\times\frac{50}{\cancel{100}}}{\left(\frac{3}{\cancel{4}}\times\frac{50}{\cancel{100}}\right)+\left(\frac{1}{\cancel{4}}\times\frac{80}{\cancel{100}}\right)}=\frac{150}{150+80}=\frac{150}{230}=\frac{15}{23}$$

انتخاب فرد
- $\frac{3}{4}$ → شهر A → $\frac{50}{100}$ → رأی دادن (M)
- $\frac{1}{4}$ → شهر B → $\frac{80}{100}$ → 〃

۱۱ احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده ۰/۰۰۲ و برای کودکی که واکسن نزده ۰/۱ است. اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان، واکسن زده باشند، احتمال اینکه یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چقدر است؟

انتخاب کودک
- $0/90$ → واکسن زده → $0/002$ → مبتلا به بیماری (A)
- $0/10$ → واکسن نزده → $0/1$ → 〃

$\Rightarrow P(A)=(0/9\times 0/002)+(0/1\times 0/1)=0/0018+0/01=0/0118$

۱۲ قانون بیز را ثابت کنید :

$$P(B_i\,|\,A)=\frac{P(B_i)P(A\,|\,B_i)}{P(A)}$$

راهنمایی : در دو طرف تساوی از تعریف احتمال شرطی استفاده کنید، تا درستی آن را ببینید.

قانون ضرب احتمال

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{P(A)}$$

۱۳ امیر و بابک عضو تیم ده نفرهٔ والیبال مدرسه‌اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. (الف) اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است، احتمال اینکه امیر بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟ (ب) احتمال اینکه امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد چقدر است؟

A: امیر از بابک بلندتر است

B: امیر بلندقدترین عضو تیم باشد

C: امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد

$(B\subseteq A)$

الف) $P(B|A)=\frac{\overbrace{P(B\cap A)}^{B}}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

ب) $P(C|A)=\frac{P(C)\cdot P(A|C)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}\times\frac{1}{9}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{90}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$

$A|C$: — — — — — — — — امیر بابک

بلندقدترین … کوتاه‌قدترین

۱۴ علی و مازیار هر کدام به‌ترتیب، با احتمال‌های ۰/۳ و ۰/۴ برای دیدن یک مسابقهٔ ورزشی به ورزشگاه می‌روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد، مازیار با احتمال ۰/۰۸ به ورزشگاه می‌رود. فرض کنید علی به ورزشگاه نرفته باشد. با چه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه نرفته است؟

۱۵ خانم‌ها اکبری، برنا و چمنی نسخه‌خوان‌های یک مؤسسهٔ انتشاراتی‌اندکه به‌ترتیب، ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد از کارهای نسخه‌خوانی را انجام می‌دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه‌ای که به آنها سپرده شده را بی‌غلط تصحیح کنند به‌ترتیب ۰/۹، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ است. صفحه‌ای نسخه‌خوانی شده، ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چقدر است؟

۱۶ فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴، کارتی را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید، احتمال اینکه شمارهٔ کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟

۱۷ یک شرکت بیمه، بیمه‌گزاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است؛ گروه «پرخطر» که در یک سال با احتمال ۰/۴ تصادف می‌کنند و گروه «کم‌خطر» که احتمال تصادف کردن آنها در یک سال ۰/۲ است. می‌دانیم که ۳۰ درصد بیمه‌گزاران پرخطرند.

الف) احتمال اینکه یک بیمه‌گزار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید.

ب) اگر یک بیمه‌گزار در سال گذشته تصادف کرده باشد، احتمال اینکه جزء گروه پرخطر باشد چقدر است؟

درس ۴ : پیشامدهای مستقل و وابسته

دو پیشامد A و B را مستقل می‌گوییم، هرگاه وقوع یکی از آن‌ها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. مثلاً در پرتاب یک تاس و یک سکه، پیشامدهای ۶ آمدن تاس و رو آمدن سکه، مستقل از یکدیگرند.

به زبان ریاضی، **دو پیشامد ناتهی** A و B مستقل از یکدیگرند هر گاه رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

اگر A و B مستقل نباشند، **وابسته** نامیده می‌شوند. بنابراین شرط وابستگی این دو پیشامد عبارتست از $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$.

نکته ۱: با توجه به تعریف احتمال شرطی، **دو پیشامد ناتهی** A و B مستقل از یکدیگرند، اگر و تنها اگر یکی از روابط زیر برقرار شود:

$$P(A|B)=P(A) \quad , \quad P(B|A)=P(B)$$

نکته ۲: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، پیشامدهای A',B ، A,B' و A',B' نیز مستقل از یکدیگرند.

مثال ۱) در پرتاب دو تاس به طور هم‌زمان، و A پیشامد مشاهدهٔ عدد ۳ در پرتاب اول اگر B پیشامد مشاهدهٔ مجموع ۷ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

مثال ۲) سکه سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد مشاهده رو در پرتاب دوم و B پیشامد مشاهده فقط دو رو به طور متوالی باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

مثال ۳) از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است دو مهره به صورت پی‌درپی و بدون جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. اگر A پیشامد آبی بودن مهره اول و B پیشامد قرمز بودن دومین مهره باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

مثال ۴) در مثال قبل اگر مهره دوم را پس از جای‌گذاری مهره اول در جعبه، بیرون آوریم، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

نکته ۳: انتخاب‌های متوالی مهره‌ها از یک ظرف اگر با جای‌گذاری مهره قبلی صورت گیرد، پیشامدهای مستقل در پی خواهد داشت و اگر بدون جای‌گذاری باشد، مستقل نخواهد بود.

سه پیشامد مستقل: سه پیشامد A_1 ، A_2 ، A_3 مستقل از یکدیگرند، اگر و تنها اگر :

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$$

نکته مهم : انجام چند آزمایش به طور جداگانه، مستقل بودن آن‌ها را تضمین می‌کند. مثلاً :

۱) پرتاب چند سکه یا تاس به طور همزمان یا متوالی.

۲) جنسیت فرزندان یک خانواده

۳) انتخاب متوالی مهره‌ها از یک ظرف با **جای‌گذاری** مهرهٔ قبلی.

۴) موفق شدن چند نفر در یک امتحان یا مسابقه

مثال ۵) احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک، ۹۰٪ و احتمال قبولی ریحانه در این درس، ۷۰٪ است. احتمال این‌که حداقل یکی از آن‌ها در این درس قبول شود، چند درصد است؟

مثال ۶) در یک مسابقه تیراندازی، احتمال اینکه محمد به هدف بزند، $\frac{۵}{۷}$ و این احتمال برای مرتضی، $\frac{۷}{۱۰}$ است. اگر آنها به تناوب به هدف تیراندازی کنند، احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند چقدر است؟

مثال ۷) دو سکه و یک تاس به طور همزمان پرتاب می‌شوند. احتمال اینکه سکه‌ها رو و تاس کمتر از ۳ باشد را به دست آورید.

مثال ۸) در یک آزمون که ۷ سئوال چهارگزینه‌ای دارد، اگر دانش‌آموزی به تمام سئوال‌ها به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال اینکه به همه سئوال‌ها پاسخ درست بدهد، چقدر است؟

مثال ۹) خانواده‌ای ۴ فرزند دارد.

الف) احتمال اینکه هر ۴ فرزند این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه فقط فرزند اول و آخر این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

پ) احتمال اینکه دو فرزند این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

مثال ۱۰) تاس سالمی را ۵ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه ۲ بار برآمد تاس از ۴ بیشتر باشد، چقدر است؟

مثال ۱۱) در یک امتحان که ۱۰ سئوال چهارگزینه‌ای دارد، دانش آموزی به طور تصادفی به همه سئوال‌ها پاسخ می‌دهد. احتمال اینکه او تنها به ۳ سئوال پاسخ صحیح داده باشد، چقدر است؟

مثال ۱۲) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A\cup B)=0/9$ و $P(A)=0/75$ ، حاصل $P(A\cap B')$ کدام است؟

مثال ۱۳) دو پیشامد A و B مستقل‌اند و $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{5}$ ، آن‌گاه $P(A\cup B')$ کدام است؟

نکته مهم : انتخاب‌های بدون جایگزینی معمولاً مستقل نیستند، ولی اگر از یک **جامعهٔ پرجمعیت** باشند، آنها را **مستقل** در نظر می‌گیریم.

مثال ۱۴) ۸۰ درصد افراد شهری باسوادند. در انتخاب سه نفر از این شهر، احتمال این‌که هر سه نفر بی‌سواد باشند، چقدر است؟

مثال ۱۵) احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، ۰/۹ است. اگر ۴ نفر انتخاب شوند، احتمال این‌که داروی ساخته شده، روی همهٔ افراد جواب منفی داشته باشد، چقدر است؟

مثال ۱۶) در یک فروشگاه بزرگ، از هر ۱۲ نفر که وارد یک فروشگاه می‌شوند، ۳ نفر از آن‌ها خرید می‌کنند. اگر در یک زمان معین، ۵ نفر داخل فروشگاه باشند، مطلوبست احتمال این‌که :

الف) هر پنج نفر خرید کنند.

ب) هیچ کسی خرید نکند.

پ) فقط نفر اول خرید کند.

ت) تنها ۲ نفر از آنها خرید کنند.

تمرین

۱ اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، آیا A و B می‌توانند مستقل باشند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل و $E \subseteq A$ و $F \subseteq B$ دو زیر مجموعه ناتهی باشند، آیا E و F نیز همیشه مستقل‌اند؟ چرا؟

۳ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، نشان دهید که پیشامدهای زیر نیز مستقل‌اند.

الف) A' و B

ب) A' و B'

۴ در پرتاب دو تاس به طور پی‌درپی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اوّل باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۵ از مجموعهٔ $\{۱، ۲، ۳، ...، ۱۰\}$ یک عضو انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد یک عدد زوج و B پیشامد وقوع عددی بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۶ احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار ۰/۶ و روی بیمار دیگر ۰/۸ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود، مطلوب است احتمال اینکه :

الف) روی هر دو بیمار موفقیت‌آمیز باشد.

ب) روی هیچ‌کدام موفقیت‌آمیز نباشد.

پ) فقط روی بیمار دوم موفقیت‌آمیز باشد.

۷ یک سکه و دو تاس به‌طور همزمان پرتاب می‌شوند. احتمال اینکه سکه، رو و هردو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چقدر است؟

۸ در یک امتحان پنج گزینه‌ای، ۱۰ سؤال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به تمام سؤالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن را به‌دست آورید که :

الف) به تمام سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

ب) تنها به پنج سؤال اوّل پاسخ صحیح داده باشد.

پ) به نیمی از سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

۹ در یک جعبه که شامل ۳ مهرهٔ قرمز، ۲ مهرهٔ آبی و ۱ مهرهٔ زرد است، دو مهره به تصادف و با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آنکه :

الف) هر دو مهره قرمز باشند.

ب) حداقل یک مهره آبی باشد.

پ) هر دو مهره همرنگ باشند.

۱۰ جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جای‌گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به دست آورید که :

الف) هر سه لامپ معیوب باشند.

ب) حداقل یک لامپ معیوب باشد.

۱۱ احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، ۰/۹ است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال اینکه داروی ساخته شده،

الف) روی همه افراد جواب منفی داشته باشد، چقدر است؟

ب) روی تنها سه نفر جواب منفی داشته باشد، چقدر است؟

۱۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به‌طوری که $\mathrm{P}(A\cap B)=$ ۰/۱ و $\mathrm{P}(A\cap B')=$ ۰/۴ ، حاصل $\mathrm{P}(A\cup B')$ را به‌دست آورید.