فصل اول

نظریه اعداد

درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویّه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روشهای استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و توسعه آن کمک شایانی می‌نماید.

لنگ = لنگ × اول

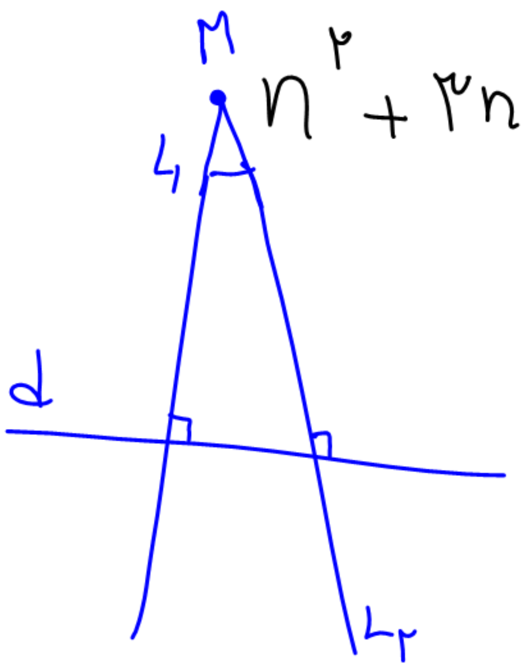
صفر

انواع اثبات:

۱* اثبات مستقیم

۲* مثال نقض

$n^{2}+3n+5=$ فرد



۳* اشباع (در نظر گرفتن همه حالتها)

۴* برهان خلف

$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

۵* اثبات بازگشتی

۱- کوچکترین مقدار m که برای آن نابرابری $n \geq m\ ;\ n! > ۳^{n-۱}$ برقرار باشد کدام است؟

۱) ~~۴~~ ۲) ۵
۳) ۶ ۴) ۷

$n \geqslant ۵$ $۱۲۰ > ۸۱$

۲- چند عدد طبیعی n برای عبارت $۲^{n+۱} \geq n^{۳}$ مثال نقض محسوب می‌شود؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

$n=۱ \longrightarrow$ ✓

$n=۲ \longrightarrow ۲^{۳} \geq ۲^{۳}$ ✓

$n=۳ \longrightarrow ۲^{۴} \geq ۳^{۳}$ ✗

$n=۴ \longrightarrow ۲^{۵} \geq ۴^{۳}$ ✗

$n=۵ \longrightarrow ۲^{۶} \geq ۵^{۳}$ ✗

$n=۶ \longrightarrow ۲^{۷} \geq ۶^{۳}$ ✗

$n=۷ \longrightarrow ۲^{۸} \geq ۷^{۳}$ ✗

$n=۸ \longrightarrow ۲^{۹} \geq ۸^{۳}$ ✓

$n=۹ \longrightarrow ۲^{۱۰} \geq ۹^{۳}$ ✓

۳- برای اثبات کدام گزینه نیاز به برهان خلف نیست؟

۱) مجموع اعداد گویا و گنگ عددی گنگ است   ۲) مجموع اعداد گویا عددی گویا است. مستقیم

۳) عدد $\sqrt{۳}$ گنگ است   ۴) دوخط موازی با خط مفروض موازیند

$$x = \frac{p}{q} \;,\; y = \frac{p'}{q'} \Rightarrow x+y = \frac{pq'+p'q}{qq'} = \frac{p''}{q''}$$

۴- کدام گزینه را نمی توان با برهان خلف اثبات کرد؟

۱) اگر $\sqrt{a}$ گنگ باشد $\frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ نیز گنگ است   خلف

۲) اگر a عددی صحیح و $a^۲$ فرد باشد آنگاه a نیز فرد است   خلف

۳) مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ عددی گنگ است   خلف

۴) حاصلضرب عدد گویا و عدد گنگ همواره گنگ است   گزاره نادرست: $\sqrt{۲} \times ۰ =$ گویا

۵- اگر $x > 0$ ثابت کنید: $x + \frac{1}{x} \geq 2$

روش اول

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2$$

$$\xLeftrightarrow{\times x} x^2+1 \geq 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$$ همواره درست

روش دوم

$$x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$$ همواره درست

۶- ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفي، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$$

همواره درست

روش دوم

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \geqslant 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geqslant 0$$

بدیهی

۷- ثابت کنید: $x^۲ + xy + y^۲ \geq ۰$

$$\xleftrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ + ۲xy + ۲y^۲ \geq ۰$$

$$\Longleftrightarrow x^۲ + ۲xy + y^۲ + x^۲ + y^۲ \geq ۰$$

$$\Longleftrightarrow (x+y)^۲ + x^۲ + y^۲ \geq ۰$$ همواره درست

روش دوم

$$\Longleftrightarrow \underbrace{x^۲ + xy + \frac{۱}{۴}y^۲} + \frac{۳}{۴}y^۲ \geq ۰$$

$$\Longleftrightarrow \left(x + \frac{۱}{۲}y\right)^۲ + \frac{۳}{۴}y^۲ \geq ۰$$

۸- ثابت کنید: $x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + xz + yz$

$\xleftrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲z^۲ - ۲xy - ۲xz - ۲yz \geqslant ۰$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^۲ - ۲xy + y^۲} + \underbrace{x^۲ - ۲xz + z^۲} + \underbrace{y^۲ - ۲yz + z^۲} \geqslant ۰$

$\Leftrightarrow (x-y)^۲ + (x-z)^۲ + (y-z)^۲ \geqslant ۰$

همواره درست

۹- در اثبات نامساوی $x^۲ - xy + y^۲ \geq ۰$ به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(x-y)^۲ + x^۲ + y^۲ \geq ۰$

۲) $(x+y)^۲ + x^۲ + y^۲ \geq ۰$

۳) $(x-y)^۲ \geq x^۲ + y^۲$

۴) $x^۲ + y^۲ \geq (x-y)^۲$

$\xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ - ۲xy + ۲y^۲ \geq ۰$

$\underbrace{x^۲ - ۲xy + y^۲}_{(x-y)^۲} + x^۲ + y^۲ \geq ۰$

$(x-y)^۲ + x^۲ + y^۲ \geq ۰$

۱۰- اگر a,b,c سه عدد صحیح و x,y,z همان اعداد با ترتیب دیگری باشند، کدام گزینه همواره درست نیست؟

۱) حاصل $\underbrace{abc + xyz}_{2abc}$ زوج است

۲) حاصل $(a-x)(b-y)(c-z)$ فرد است

۳) حاصل $\underbrace{(a+x)}_{m}\underbrace{(b+y)}_{n}\underbrace{(c+z)}_{p}$ زوج است

۴) حاصل $\underbrace{(a-x)+(b-y)+(c-z)}_{a+b+c-x-y-z=0}$ صفر است

$m+n+p = a+b+c+x+y+z$
$= 2(a+b+c) =$ زوج

۱۱- اگر اعداد y, x گنگ و عدد $۲x - y$ گویا باشد، کدام گزینه گویا است؟

۱) $۲x + y$

۲) $x - ۲y$

۳) $x + ۲y$

۴) هیچکدام

فرض) $2x - y =$ گویا

[illegible]) $x - 2y =$ گویا

$4x - 2y =$ گویا

$x - 2y =$ گویا

$3x =$ گویا

$x =$ گویا

۱۲- برای اثبات کدام گزینه از روش اشباع استفاده می شود؟

۱) خاصلضرب سه عدد متوالی همواره مضرب ۳ است.

۲) مجموع دوعدد گویا همواره گویا است. مستقیم

۳) اگر تابع f پیوسته و تابع g ناپیوسته باشد، تابع $f+g$ ناپیوسته است. برهان خلف

۴) در متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند. مستقیم

$n(n+1)(n+2)$

$$\begin{cases} n=3k \rightarrow n(n+1)(n+2)=3k(n+1)(n+2)= \text{مضرب } 3 \\ n=3k+1 \rightarrow n(n+1)(n+2)=n(n+1)(3k+3)= \text{مضرب } 3 \\ n=3k+2 \rightarrow n(3k+3)(n+2) \longrightarrow \text{مضرب } 3 \end{cases}$$

۱۳- ثابت کنید حاصلضرب سه عدد طبیعی متوالی مضرب ۶ است.

$n(n+1)(n+2) =$ حاصلضرب سه عدد متوالی

ثابت کنید مضرب ۳ است

$$\begin{cases} n=3k \rightarrow n(n+1)(n+2) = 3k(n+1)(n+2) = \text{مضرب } 3 \\ n=3k+1 \rightarrow n(n+1)(n+2) = n(n+1)(3k+3) = \text{مضرب } 3 \\ n=3k+2 \rightarrow n(3k+3)(n+2) \rightarrow \text{مضرب } 3 \end{cases}$$

ثابت کنید زوج است

$$\begin{cases} n=2k \rightarrow n(n+1)(n+2) = 2k(n+1)(n+2) = \text{زوج} \\ n=2k+1 \rightarrow n(n+1)(n+2) = n\underbrace{(2k+2)}(n+2) = \text{زوج} \end{cases}$$

۱۴- ثابت کنید مجموع دو عدد گویا عددی گویا است.

$$a=\frac{p}{q},\quad p,q\in \mathbb{Z},\ q\neq 0$$

$$b=\frac{p'}{q'},\quad p',q'\in \mathbb{Z},\ q'\neq 0$$

$$a+b=\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}=\frac{pq'+p'q}{qq'}=\frac{p''}{q''}=$$ گویا

۱۵- ثابت کنید اگر k حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $۴k + ۱$ مربع کامل است.

$$k = n(n+1) \Longrightarrow 4k+1 = 4n(n+1)+1 = 4n^2+4n+1$$

$$= (2n+1)^2 = \text{مربع کامل}$$

۱۶- برای چند عدد طبیعی یک رقمی n عبارت $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ زوج است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۹}$ = زوج

$n = ۳, ۶, ۹$

$n+۱ = ۳, ۶, ۹$ یا

$\Rightarrow n = ۲, ۵, ۸$

۷ → $\frac{۴۹ \times ۶۴}{۴}$ = زوج

۸ → $\frac{۶۴ \times ۸۱}{۴}$ = زوج

۱ → $\frac{۱ \times ۴}{۴}$ = فرد

۲ → $\frac{۴ \times ۹}{۴}$ = فرد

۳ → $\frac{۹ \times ۱۶}{۴}$ = زوج

۴ → $\frac{۱۶ \times ۲۵}{۴}$ = زوج

بخشپذیری: اگر عدد صحیح a مضربی از عدد طبیعی b باشد، آنگاه a بر b بخشپذیر است و می‌نویسیم:

$b|a \Leftrightarrow a=bq$

a بر b بخشپذیر است

a مضربی از b است

b مقسوم علیه a است ، b شمارنده a است ، b عدد a را عاد می‌کند

۸|۲۴ ۸|-۲۴

مثال ۱: تعیین کنید کدام عبارت صحیح و کدام غلط است؟

۱) ۱|۵ ۲) ۲۵|۵ ۳) ۹|۱۲ ۴) ۰|۱

۵) ۱|۰ ۶) ۰|۰ ۷) ۲۴|-۲۴ ۸) -۲۷|۲۷

۱- چند عدد طبیعی a وجود دارد که :

$2a+1 \mid ۱۴$ ، $a+۵ \mid ۱۴$ ، $a \mid ۱۴$

$a \mid ۱۴ \rightarrow a = ۱, ۲, ۷, ۱۴$

$a+۵ \mid ۱۴$:

$a+۵ = ۱ \rightarrow a = -۴ \times$

$= ۲ \rightarrow a = -۳ \times$

$= ۷ \rightarrow a = ۲ \checkmark$

$= ۱۴ \rightarrow a = ۹ \checkmark$

$۲a+۱ \mid ۱۴$:

$۲a+۱ = ۱ \rightarrow a = ۰ \times$

$= ۲ \quad \times$

$= ۷ \rightarrow a = ۳ \checkmark$

$= ۱۴ \quad \times$

ویژگی‌های رابطه‌ی بخشپذیری:

۱- می‌توان هر مضربی از مقسوم علیه را به مقسوم اضافه کرد یا از آن کم کرد: $b|a \Leftrightarrow b|a \pm nb$

$$b|a \Rightarrow a = bq \Rightarrow a \pm nb = bq \pm nb \Rightarrow a \pm nb = b\underbrace{(q \pm n)}_{\text{مضرب b}}$$

$$6|18 \rightarrow 6|18+6 \qquad 6|18-2\times 6$$

$$6|18+12 \qquad 6|18+11\times 6 \Rightarrow b|a \pm nb$$

۲- می‌توانیم هر عددی را در طرفین بخش‌پذیری ضرب کنیم، همچنین می‌توانیم یک عدد را از دوطرف ساده کنیم:

$$b|a \Leftrightarrow kb|ka \quad , k \neq 0$$

$$b|a \Leftrightarrow a = bq \Leftrightarrow ka = \underbrace{kbq}_{\text{مضرب از } kb} \Leftrightarrow kb|ka$$

۳- می‌توانیم طرفین را به توان برسانیم یا از طرفین جذر بگیریم: $b|a \Leftrightarrow b^n|a^n$

$$b|a \Leftrightarrow a=bq \Leftrightarrow a^n=b^nq^n \Leftrightarrow b^n|a^n$$

$$۴|۳۶ \longleftrightarrow ۲|۶$$

۴- می‌توانیم از دو رابطه‌ی بخشپذیری ترکیب خطی بسازیم یا طرفین را درهم ضرب کنیم:

$$b|a,d|c \Rightarrow bd|ac \qquad b|a,b|c \Rightarrow b|ma \pm nc$$

$b|a \,,\, d|c \Rightarrow a=bq \,,\, c=dq'$

$\Rightarrow ac = bd(qq')$

$\Rightarrow bd|ac$

$۴\times۹ \,|\, ۶\times۶$

$۴\times۹ \,|\, ۳\times۱۲$

$a=bq \,,\, c=bq'$

$\Rightarrow ma=bmq \,,\, nc=bnq'$

$ma \pm nc = bmq \pm bnq'$

$ma \pm nc = b(mq \pm nq')$

$\Rightarrow b|ma \pm nc$

$۵|۲۰$

$۵|۱۵ \Rightarrow ۵|۲۰m \pm ۱۵n$

-۵

$$b|a, a \neq \cdot \Rightarrow |a| \geq |b|$$

$b|a \Rightarrow a = bq$ و $a \neq \circ \Rightarrow q \neq \circ \Rightarrow |q| \geqslant 1$

$\Rightarrow |b||q| \geqslant |b|$

$\Rightarrow |a| \geqslant |b|$

۶-

$$b|a, a|b \Leftrightarrow |a| = |b|$$

$$\left.\begin{array}{l} b|a \longrightarrow |a| \geq |b| \\ a|b \longrightarrow |b| \geq |a| \end{array}\right\} |a| = |b|$$

$$|a| = |b| \Rightarrow \begin{cases} b|a \\ a|b \end{cases}$$

۲- اگر $a = bc$ چندتا از گزاره‌های زیر درست است؟

الف. $a|c$ ب. $b|a$ ج. $b|c$ د. $bc|a$

هـ. $a|bc$ و. $b + c|a$ ز. $c|b$ ح. $c|ab$

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

۳- اگر $b^4|c^3$ و $a^3|b$ ، آنگاه کدام گزینه الزاما صحیح است؟

۱) $c^3|a$ ۲) $a^8|c$ ۳) $a^6|c$ ۴) $a^4|c$

$x|y$ و $y|z \Rightarrow x|z$

تعدی

$a^3|b \xrightarrow{\text{توان ۴}} a^{12}|b^4$ و $b^4|c^3$

$a^{12}|c^3$

$\xrightarrow[\text{۳}]{\text{جذر درجه ۳}} a^4|c$

۵- اگر $a|5n+1$ و $a|4n+3$ آنگاه ثابت کنید $\boxed{a>1}$ عددی اول است.

$a|5n+1$

$a|4n+3$

$\rightarrow a|4(5n+1)-5(4n+3) \Rightarrow a|-11$

$a=-11$ و -1 و 1 و 11

$\Rightarrow a=11$ عدد اول

۶- اگر $d|۷n+۲$ و $d|۵n-۱$ آنگاه حداکثر مقدار ممکن برای d را بیابید.

$d|۷n+۲$

$d|۵n-۱$

$\longrightarrow d|۵(۷n+۲)-۷(۵n-۱) \Rightarrow d|۱۷$

$\Rightarrow d_{max}=۱۷$

۷- اگر $۶|۱۲x - ۸y$، آنگاه کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $۳|۳x + ۲y$ ۲) $۳|۳x - ۲y$ ۳) $۳|۲y$ ۴) $۳|x$

$6 | 12x - 8y \longrightarrow 3 | 6x - 4y$

مضرب ۳

$\Rightarrow 3 | -4y \Rightarrow 3 | 6y - 4y$

$\Rightarrow 3 | 2y$

۸- اگر $۴|۳k+۲$ آنگاه ثابت کنید: $۱۶|۹k^{۲}+۲۴k+۱۲$

$۴|۳k+۲ \xrightarrow{\times ۴} ۱۶|۱۲k+۸$

$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۱۶|۹k^{۲}+۱۲k+۴$

$\xrightarrow{\text{جمع}} ۱۶|۹k^{۲}+۲۴k+۱۲$

۹- اگر $۷|۴k+۱$ و بتوان ثابت کرد $۴۹|۱۶k^۲+۳۶k+m$ عدد m کدام است؟

۱) ۱۱
۲) ۹
۳) ۸
۴) ۲

$۷|۴k+۱ \xrightarrow{\times ۷} ۴۹|۲۸k+۷$

$\xrightarrow{\text{برتوان ۲}} ۴۹|۱۶k^۲+۸k+۱$

$\longrightarrow ۴۹|۱۶k^۲+۳۶k+۸$

۱۰- اگر برای هر عدد صحیح d داشته باشیم: $d|n^۲-n$ آنگاه همه‌ی مقادیر ممکن برای n را بیابید.

n^2-n بر هر عدد صحیح داده شده بخش‌پذیر است پس

$n^2-n=0 \longrightarrow n=0$ یا $n=1$

۱۱- چند عدد صحیح در رابطه ی $n^{2}+1 \mid n-1$ صدق می کند؟

۱) ۲   ۲) ۱   ۳) ۳   ۴) ۴

$n^2+1 \mid n-1$

$n^2+1 \mid n^2+1$

$\Rightarrow n^2+1 \mid (n^2+1)-(n-1)(n+1)$

$n^2+1 \mid (n^2+1)-(n^2-1) \Rightarrow n^2+1 \mid 2$

$n^2+1=1 \rightarrow n=0$

$n^2+1=2 \rightarrow n=1$ و $n=-1$

۱۲- چند عدد طبیعی a وجود دارد که مضرب ۱۲ بوده و مقسوم علیه عدد ۱۹۲ می‌باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۶

$۱۲|a \longrightarrow a=۱۲q$

$a|۱۹۲ \longrightarrow ۱۲q|۱۹۲ \longrightarrow q|۱۶ \longrightarrow q=۱,۲,۴,۸,۱۶$

۱۳- کدام گزینه درست نیست؟

$ac^2|b$

۱) $a^3|b^3 \Rightarrow a|b$ ۲) $ac^3|bc \Rightarrow a|b$

۳) $a|b \Rightarrow a^2|b^3$ ۴) $b|a \Rightarrow b^3|a^2$

$a^2|b^2$ $b^2|a^2$ a ×

۱۴- ثابت کنید: $a^{3}|b^{4} \Rightarrow a^{11}|b^{15}$

$$a^{3}|b^{4} \longrightarrow a^{33}|b^{44} \xrightarrow{\text{افزایش مقسوم}} a^{33}|b^{45} \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} a^{11}|b^{15}$$

روش دوم

$$a^{3}|b^{4} \longrightarrow a^{45}|b^{60} \xrightarrow{\text{کاهش مقسوم علیه}} a^{44}|b^{60} \xrightarrow{\sqrt[4]{\ }} a^{11}|b^{15}$$

ب م م (بزرگترین مقسوم علیه مشترک)

دو عدد صحیح a و b را در نظر می گیریم. ب م م آنها به صورت زیر تعریف می شود

$$(a,b)=d \Leftrightarrow \begin{cases} d|a, d|b \\ \forall m \in \boldsymbol{Z}: m|a, m|b \Rightarrow m \le d \end{cases}$$

۱- ثابت کنید $(ka,kb)=k(a,b)$

۲- ثابت کنید $(a^n, b^n) = (a, b)^n$

روش تجزیه: دو عدد را تجزیه می‌کنیم، حاصلضرب عوامل مشترک با توان کوچکتر ب م م است.

۳- بزرگترین مقسوم علیه مشترک عددهای زیر را بدست آورید.

۱) $(۲^۲ \times ۳ \times ۶,۱۲ \times ۱۷^۲) =$

۲) $(۸!,۱۰۰۰) =$

۴- اگر $d = (۵n + ۱, ۴n + ۳)$ آنگاه بزرگترین مقدار ممکن برای d را بدست آورید.

۵- ثابت کنید

$$(a, b) = |a| \Leftrightarrow a|b$$

۶- ثابت کنید

$$(a,\pm ۱) = (na,\pm ۱) = (a, na \pm ۱) = ۱$$

۷- اگر $(n^۳ - n, n^۳ + n^۲) = ۴۲$ آنگاه n کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷

۳) ۹ ۴) ۶

۸- اگر $(n^۳ - n, n^۴ - n) = ۵۶$ آنگاه $(۲n, n + ۴)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱

۳) ۷ ۴) ۴

دو عدد نسبت به هم اول (متباین): اگر $(a, b) = ۱$ آنگاه این دو عدد نسبت به هم اول هستند.

۱- اگر $(a, ۱۵) = ۱$ آنگاه بزرگترین عدد دو رقمی که می‌تواند به جای a قرار بگیرد را تعیین کنید.

۲- اگر $(a, ۳۰) = ۱$ آنگاه کوچکترین عدد سه رقمی که می‌تواند به جای a قرار بگیرد را تعیین کنید.

۳- اگر $(a,۷۰) = ۱$ آنگاه تمام اعداد طبیعی کمتر از ۲۰ که می‌توانند به جای a قرار بگیرند را تعیین کنید.

نکته: اگر $(a,b)=1$ ویژگی‌های زیر برقرار است:

$$(a,b\pm na)=1,(a^n,b^m)=1,(ab,a\pm b)=1$$

$$(a+b,a-b)=\begin{cases}1\\2\end{cases}$$

$$c|a\pm b\Rightarrow (a,c)=(b,c)=1$$

۴- اگر دو عدد $n^۳ + ۳, n^۲ + ۲$ نسبت به هم اول نباشند ، آنگاه ب م م آن ها کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱۱

۳) ۱۳ ۴) ۱۷