



# فصل اول

## نظريه اعداد



درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روشهای استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و توسعه آن کمک شایانی می‌نماید.

انواع اثبات:

\*۱ اثبات مستقیم

\*۲ مثال نقض

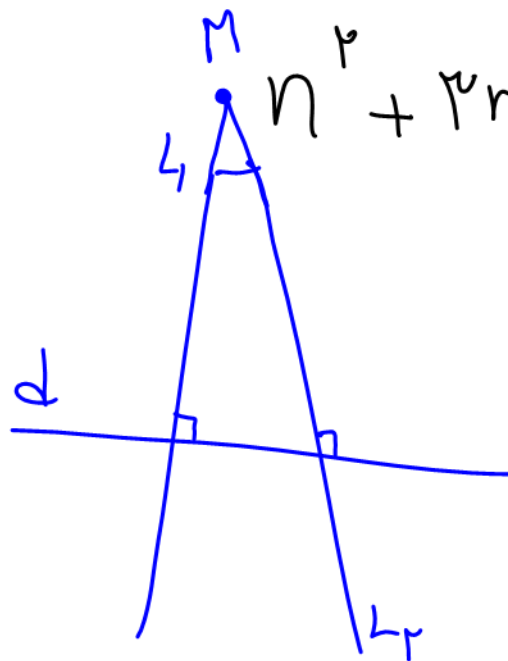
\*۳ اشباع (در نظر گرفتن همه حالتها)

\*۴ برهان خلف

\*۵ اثبات بازگشتی

لوا یا لول = لول  
منفر

فرد  $n^2 + 2n + 5 =$



$P \Rightarrow Q \equiv \sim Q \Rightarrow \sim P$



۱- کوچکترین مقدار  $m$  که برای آن نابرابری  $n! > 3^{n-1}$ ;  $n \geq m$  برقرار باشد کدام است؟

	۵ (۲)	<del>۴ (۱)</del>
↓	۷ (۴)	۶ (۳)

$n > 5$      $120 > 81$



۲- چند عدد طبیعی  $n$  برای عبارت  $2^{n+1} \geq n^3$  مثال نقض محسوب می شود؟

- $n=1 \rightarrow \checkmark$
- $n=2 \rightarrow 2^3 \geq 2^3 \checkmark$
- $n=3 \rightarrow 2^4 \geq 3^3 \times$
- $n=4 \rightarrow 2^5 \geq 4^3 \times$
- $n=5 \rightarrow 2^6 \geq 5^3 \times$
- $n=6 \rightarrow 2^7 \geq 6^3 \times$
- $n=7 \rightarrow 2^8 \geq 7^3 \times$

- $n=8 \rightarrow 2^9 \geq 8^3 \checkmark$
  - $n=9 \rightarrow 2^{10} \geq 9^3 \checkmark$
- ۳ (۱)  
۵ (۳)



۳- برای اثبات کدام گزینه نیاز به برهان خلف نیست؟

(۱) مجموع اعداد گویا و گنگ عددی گنگ است (۲) مجموع اعداد گویا عددی گویا است

(۳) عدد  $\sqrt{3}$  گنگ است

(۴) دو خط موازی با خط مفروض موازیند

$$x = \frac{p}{q} \text{ و } y = \frac{p'}{q'} \Rightarrow x+y = \frac{pq' + p'q}{qq'} = \frac{p''}{q''}$$

۴- کدام گزینه را نمی توان با برهان خلف اثبات کرد؟

(۱) اگر  $\sqrt{a}$  گنگ باشد  $\frac{\sqrt{a}}{a}$  نیز گنگ است

(۲) اگر  $a$  عددی صحیح و  $a^2$  فرد باشد آنگاه  $a$  نیز فرد است

(۳) مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ عددی گنگ است

(۴) حاصلضرب عدد گویا و عدد گنگ همواره گنگ است

$$\sqrt{6} \times 0 = 0$$

روش اول

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$$

همواره درست

۵- اگر  $x > 0$  ثابت کنید:  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 

روش دوم  
$$x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$$
 همواره درست



۶- ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{روش دوم}$$

$$\iff a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\iff a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$\iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\iff (a-b)^2 \geq 0 \quad \text{بدیهی}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\iff a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\iff a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$\iff (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

هواره درست



۷- ثابت کنید:  $x^2 + xy + y^2 \geq 0$





۸- ثابت کنید:  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$



۹- در اثبات نامساوی  $x^2 - xy + y^2 \geq 0$  به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟

$$(x + y)^2 + x^2 + y^2 \geq 0 \quad (۲)$$

$$(x - y)^2 + x^2 + y^2 \geq 0 \quad (۱)$$

$$x^2 + y^2 \geq (x - y)^2 \quad (۴)$$

$$(x - y)^2 \geq x^2 + y^2 \quad (۳)$$



۱۰- اگر  $a, b, c$  سه عدد صحیح و  $x, y, z$  همان اعداد با ترتیب دیگری باشند، کدام گزینه همواره درست نیست؟

(۱) حاصل  $abc + xyz$  زوج است (۲) حاصل  $(a - x)(b - y)(c - z)$  فرد است

(۳) حاصل  $(a + x)(b + y)(c + z)$  زوج است (۴) حاصل  $(a - x) + (b - y) + (c - z)$  صفر است



۱۱- اگر اعداد  $x, y$  گنگ و عدد  $2x - y$  گویا باشد، کدام گزینه گویا است؟

$$x - 2y \quad (۲)$$

$$2x + y \quad (۱)$$

$$(۴) \text{ هیچکدام}$$

$$x + 2y \quad (۳)$$



۱۲- برای اثبات کدام گزینه از روش اشباع استفاده می شود؟

(۱) حاصلضرب سه عدد متوالی همواره مضرب ۳ است.

(۲) مجموع دو عدد گویا همواره گویا است.

(۳) اگر تابع  $f$  پیوسته و تابع  $g$  ناپیوسته باشد، تابع  $f + g$  ناپیوسته است.

(۴) در متوازی الاضلاع قطرهای منصف یکدیگرند.



۱۳- ثابت کنید حاصلضرب سه عدد طبیعی متوالی مضرب ۶ است.



۱۴- ثابت کنید مجموع دو عدد گویا عددی گویا است.



۱۵- ثابت کنید اگر  $k$  حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه  $4k + 1$  مربع کامل است.





۱۶- برای چند عدد طبیعی یک رقمی  $n$  عبارت  $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$  زوج است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۶ (۱)



بخشپذیری: اگر عدد صحیح  $a$  مضربی از عدد طبیعی  $b$  باشد، آنگاه  $a$  بر  $b$  بخشپذیر است و می نویسیم:

$$b|a$$

مثال ۱: تعیین کنید کدام عبارت صحیح و کدام غلط است؟

$$0|1 \quad (4) \quad 9|12 \quad (3) \quad 25|5 \quad (2) \quad 1|5 \quad (1)$$

$$-27|27 \quad (8) \quad 24|-24 \quad (7) \quad 0|0 \quad (6) \quad 1|0 \quad (5)$$

۱- چند عدد طبیعی  $a$  وجود دارد که :

$$a \mid 14a$$

$$+ 5 \mid 142$$

$$a + 1 \mid 14$$





ویژگی‌های رابطه‌ی بخشپذیری:

۱- می‌توان هر مضربی از مقسوم علیه را به مقسوم اضافه کرد یا از آن کم کرد:  $b|a \Leftrightarrow b|a \pm nb$



۲- می توانیم هر عددی را در طرفین بخش پذیری ضرب کنیم، همچنین می توانیم یک عدد را از دو طرف ساده کنیم:

$$b|a \Leftrightarrow kb|ka$$



۳- می توانیم طرفین را به توان برسانیم یا از طرفین جذر بگیریم:

$$b|a \Leftrightarrow b^n|a^n$$



۴- می توانیم از دو رابطه‌ی بخشپذیری ترکیب خطی بسازیم یا طرفین را در هم ضرب کنیم:

$$b|a, d|c \Rightarrow bd|ac \quad b|a, b|c \Rightarrow b|ma \pm nc$$



$$b|a, a \neq 0 \Rightarrow |a| \geq |b|$$



$$b|a, a|b \Leftrightarrow |a| = |b|$$

پویشتر علمی  
جهاد



۲- اگر  $a = bc$  چندتا از گزاره‌های زیر درست است؟

- |            |              |          |           |
|------------|--------------|----------|-----------|
| الف. $a c$ | ب. $b a$     | ج. $b c$ | د. $bc a$ |
| هـ. $a bc$ | و. $b + c a$ | ز. $c b$ | ح. $c ab$ |
| ۴ (۱)      | ۵ (۲)        | ۳ (۳)    | ۲ (۴)     |



۳- اگر  $a^3 \mid b$  و  $b^4 \mid c^3$  ، آنگاه کدام گزینه الزاما صحیح است؟

$$a^4 \mid c \quad (۴)$$

$$a^6 \mid c \quad (۳)$$

$$a^8 \mid c \quad (۲)$$

$$c^3 \mid a \quad (۱)$$



۵- اگر  $a \mid 5n + 1$  و  $a \mid 4n + 3$  آنگاه ثابت کنید  $a > 1$  عددی اول است.



۶- اگر  $d|7n + 2$  و  $d|5n - 1$  آنگاه حداکثر مقدار ممکن برای  $d$  را بیابید.



۷- اگر  $12x - 8y \mid 6$ ، آنگاه کدام نتیجه گیری نا درست است؟

$$3 \mid x \quad (4)$$

$$3 \mid 2y \quad (3)$$

$$3 \mid 3x - 2y \quad (2)$$

$$3 \mid 3x + 2y \quad (1)$$



۸- اگر  $۲ + ۳k + ۴$  آنگاه ثابت کنید:  $۱۲ + ۲۴k + ۹k^۲$



۹- اگر  $1 + 4k$  و بتوان ثابت کرد  $m + 36k + 16k^2$  عدد  $m$  کدام است؟

۹ (۲)

۱۱ (۱)

۲ (۴)

۸ (۳)



پویشتر علمی  
جهاد

۱۰- اگر برای هر عدد صحیح  $d$  داشته باشیم:  $d | n^2 - n$  آنگاه تمامی مقادیر ممکن برای  $n$  را بیابید.



۱۱- چند عدد صحیح در رابطه ی  $n - 1 \mid n^2 + 1$  صدق می کند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)



۱۲- چند عدد طبیعی  $a$  وجود دارد که مضرب  $۱۲$  بوده و مقسوم علیه عدد  $۱۹۲$  می باشد؟

۶ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)



۱۳- کدام گزینه درست نیست؟

$$ac^3 | bc \Rightarrow a | b \quad (۲)$$

$$a^3 | b^3 \Rightarrow a | b \quad (۱)$$

$$b | a \Rightarrow b^3 | a^2 \quad (۴)$$

$$a | b \Rightarrow a^2 | b^3 \quad (۳)$$



۱۴- ثابت کنید:  $a^3 | b^4 \Rightarrow a^{11} | b^{15}$



ب م م (بزرگترین مقسوم علیه مشترک)

دو عدد صحیح  $a$  و  $b$  را در نظر می گیریم. ب م م آنها به صورت زیر تعریف می شود

$$(a, b) = d \Leftrightarrow \begin{cases} d|a, d|b \\ \forall m \in \mathbf{Z}: m|a, m|b \Rightarrow m \leq d \end{cases}$$

۱- ثابت کنید  $(ka, kb) = k(a, b)$



۲- ثابت کنید  $(a^n, b^n) = (a, b)^n$



روش تجزیه: دو عدد را تجزیه می‌کنیم، حاصلضرب عوامل مشترک با توان کوچکتر ب م م است.

۳- بزرگترین مقسوم علیه مشترک عددهای زیر را بدست آورید.

$$۱) (۲^۲ \times ۳ \times ۶, ۱۲ \times ۱۷^۲) =$$

$$۲) (۸!, ۱۰۰۰) =$$





۴- اگر  $d = (5n + 1, 4n + 3)$  آنگاه بزرگترین مقدار ممکن برای  $d$  را بدست آورید.



۵- ثابت کنید

$$(a, b) = |a| \Leftrightarrow a|b$$



۶- ثابت کنید

$$(a, \pm 1) = (na, \pm 1) = (a, na \pm 1) = 1$$



۷- اگر  $(n^3 - n, n^3 + n^2) = 42$  آنگاه  $n$  کدام است؟

۸ (۱)      ۷ (۲)

۹ (۳)      ۶ (۴)



۸- اگر  $(n^3 - n, n^4 - n) = 56$  آنگاه  $(2n, n + 4)$  کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)

۳ (۳)      ۴ (۴)



دو عدد نسبت به هم اول (متباین): اگر  $(a, b) = 1$  آنگاه این دو عدد نسبت به هم اول هستند.

۱- اگر  $(a, 15) = 1$  آنگاه بزرگترین عدد دو رقمی که می‌تواند به جای  $a$  قرار بگیرد را تعیین کنید.

۲- اگر  $(a, 30) = 1$  آنگاه کوچکترین عدد سه رقمی که می‌تواند به جای  $a$  قرار بگیرد را تعیین کنید.



۳- اگر  $(a, 70) = 1$  آنگاه تمام اعداد طبیعی کمتر از ۲۰ که می‌توانند به جای  $a$  قرار بگیرند را تعیین کنید.



نکته: اگر  $(a, b) = 1$  ویژگی‌های زیر برقرار است:

$$(a, b \pm na) = 1, (a^n, b^m) = 1, (ab, a \pm b) = 1$$

$$(a + b, a - b) = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$c | a \pm b \Rightarrow (a, c) = (b, c) = 1$$





۴- اگر دو عدد  $n^2 + 2$ ،  $n^3 + 3$  نسبت به هم اول نباشند، آنگاه ب م م آن ها کدام است؟

$$(1) 2 \quad (2) 11$$

$$(3) 13 \quad (4) 17$$