فصل اول

نظریه اعداد

درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویّه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روشهای استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و توسعه آن کمک شایانی می‌نماید.

انواع اثبات:

۱* اثبات مستقیم

۲* مثال نقض

۳* اشباع (در نظر گرفتن همه حالتها)

۴* برهان خلف

۵* اثبات بازگشتی

۱- کوچکترین مقدار m که برای آن نابرابری $n! > ۳^{n-۱}; n \geq m$ برقرار باشد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

۲- چند عدد طبیعی n برای عبارت $2^{n+1} \geq n^3$ مثال نقض محسوب می‌شود؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

۳- برای اثبات کدام گزینه نیاز به برهان خلف نیست؟

۱) مجموع اعداد گویا و گنگ عددی گنگ است ۲) مجموع اعداد گویا عددی گویا است

۳) عدد $\sqrt{۳}$ گنگ است ۴) دوخط موازی با خط مفروض موازیند

۴- کدام گزینه را نمی توان با برهان خلف اثبات کرد؟

۱) اگر $\sqrt{a}$ گنگ باشد $\frac{\sqrt{a}}{a}$ نیز گنگ است

۲) اگر a عددی صحیح و $a^۲$ فرد باشد آنگاه a نیز فرد است

۳) مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ عددی گنگ است

۴) حاصلضرب عدد گویا و عدد گنگ همواره گنگ است

۵- اگر $x > 0$ ثابت کنید: $x + \frac{1}{x} \geq 2$

۶- ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

۷- ثابت کنید: $x^{۲} + xy + y^{۲} \geq ۰$

۸- ثابت کنید: $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} \geq xy + xz + yz$

۹- در اثبات نامساوی $x^۲ - xy + y^۲ \geq ۰$ به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(x-y)^۲ + x^۲ + y^۲ \geq ۰$

۲) $(x+y)^۲ + x^۲ + y^۲ \geq ۰$

۳) $(x-y)^۲ \geq x^۲ + y^۲$

۴) $x^۲ + y^۲ \geq (x-y)^۲$

۱۰- اگر a,b,c سه عدد صحیح و x,y,z همان اعداد با ترتیب دیگری باشند، کدام گزینه همواره درست نیست؟

۱) حاصل $abc + xyz$ زوج است ۲) حاصل $(a-x)(b-y)(c-z)$ فرد است

۳) حاصل $(a+x)(b+y)(c+z)$ زوج است ۴) حاصل $(a-x)+(b-y)+(c-z)$ صفر است

۱۱- اگر اعداد x, y گنگ و عدد $۲x - y$ گویا باشد، کدام گزینه گویا است؟

۱) $۲x + y$

۲) $x - ۲y$

۳) $x + ۲y$

۴) هیچکدام

۱۲- برای اثبات کدام گزینه از روش اشباع استفاده می شود؟

۱) حاصلضرب سه عدد متوالی همواره مضرب ۳ است.

۲) مجموع دوعدد گویا همواره گویا است.

۳) اگر تابع f پیوسته و تابع g ناپیوسته باشد، تابع $f+g$ ناپیوسته است.

۴) در متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند.

۱۳- ثابت کنید حاصلضرب سه عدد طبیعی متوالی مضرب ۶ است.

۱۴- ثابت کنید مجموع دو عدد گویا عددی گویا است.

۱۵- ثابت کنید اگر k حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $۴k + ۱$ مربع کامل است.

۱۶- برای چند عدد طبیعی یک رقمی n عبارت $\frac{n^{۲}(n+۱)^{۲}}{۴}$ زوج است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

بخشپذیری: اگر عدد صحیح a مضربی از عدد طبیعی b باشد، آنگاه a بر b بخشپذیر است و می‌نویسیم:

$$b|a$$

مثال ۱: تعیین کنید کدام عبارت صحیح و کدام غلط است؟

۱) ۵|۱ ۲) ۵|۲۵ ۳) ۱۲|۹ ۴) ۱|۰

۵) ۰|۱ ۶) ۰|۰ ۷) ۲۴-|۲۴ ۸) ۲۷|۲۷-

۱- چند عدد طبیعی a وجود دارد که :

$$a|14a+5|142a+1|14$$

ویژگی‌های رابطه‌ی بخشپذیری:

۱- می‌توان هر مضربی از مقسوم علیه را به مقسوم اضافه کرد یا از آن کم کرد: $b|a \Leftrightarrow b|a \pm nb$

۲- می‌توانیم هر عددی را در طرفین بخشپذیری ضرب کنیم، همچنین می‌توانیم یک عدد را از دوطرف ساده کنیم:

$$b|a \Leftrightarrow kb|ka$$

۳- می‌توانیم طرفین را به توان برسانیم یا از طرفین جذر بگیریم: $b|a \Leftrightarrow b^n|a^n$

۴- می‌توانیم از دو رابطه‌ی بخشپذیری ترکیب خطی بسازیم یا طرفین را درهم ضرب کنیم:

$$\boldsymbol{b|a, b|c \Rightarrow b|ma \pm nc} \qquad b|a, d|c \Rightarrow bd|ac$$

۵-

$$b|a, a \neq 0 \Rightarrow |a| \geq |b|$$

-٦

$$b|a,a|b \Leftrightarrow |a| = |b|$$

۲- اگر $a = bc$ چندتا از گزاره‌های زیر درست است؟

الف. $a|c$ ب. $b|a$ ج. $b|c$ د. $bc|a$

هـ. $a|bc$ و. $b + c|a$ ز. $c|b$ ح. $c|ab$

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

۳- اگر $b^{4} \mid c^{3}$ و $a^{3} \mid b$ ، آنگاه کدام گزینه الزاما صحیح است؟

۱) $c^{3} \mid a$

۲) $a^{8} \mid c$

۳) $a^{6} \mid c$

۴) $a^{4} \mid c$

۵- اگر $a|۵n+۱$ و $a|۴n+۳$ آنگاه ثابت کنید $a>۱$ عددی اول است.

۶- اگر $d|7n+2$ و $d|5n-1$ آنگاه حداکثر مقدار ممکن برای d را بیابید.

۷- اگر $۶|۱۲x - ۸y$، آنگاه کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $۳|۳x + ۲y$ ۲) $۳|۳x - ۲y$ ۳) $۳|۲y$ ۴) $۳|x$

۸- اگر $4 | 3k + 2$ آنگاه ثابت کنید: $16 | 9k^2 + 24k + 12$

۹- اگر $۷|۴k+۱$ و بتوان ثابت کرد $۴۹|۱۶k^۲+۳۶k+m$ عدد m کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۹

۳) ۸ ۴) ۲

۱۰- اگر برای هر عدد صحیح d داشته باشیم: $d|n^2 - n$ آنگاه همه‌ی مقادیر ممکن برای n را بیابید.

۱۱- چند عدد صحیح در رابطه ی $n - ۱ \mid n^۲ + ۱$ صدق می کند؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲- چند عدد طبیعی a وجود دارد که مضرب ۱۲ بوده و مقسوم علیه عدد ۱۹۲ می‌باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۶

۱۳- کدام گزینه درست نیست؟

۱) $a^3|b^3 \Rightarrow a|b$

۲) $ac^3|bc \Rightarrow a|b$

۳) $a|b \Rightarrow a^2|b^3$

۴) $b|a \Rightarrow b^3|a^2$

۱۴- ثابت کنید: $a^{۳}|b^{۴} \Rightarrow a^{۱۱}|b^{۱۵}$

درس مبحث

پایه و رشته

جناب استاد

۱۵- اگر $a^{۲}|b^{۳}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $a|b$ ۲) $a^{۲}|b$ ۳) $a^{۳}|b^{۵}$ ۴) $a^{۵}|b^{۷}$

$a^2|b^3 \Rightarrow a^2|b^5$

$a^6|b^9 \xrightarrow{\text{افزایش}} a^6|b^{10}$

$$\boxed{a^m|b^n \Rightarrow a^x|b^y \qquad \frac{n}{m} \leq \frac{y}{x}}$$

۱۶- ثابت کنید اگر $a|b$ و $n \leq m$, $m, n \in \mathbb{N}$ آن‌گاه $a^n|b^m$

$a|b \Rightarrow a^n|b^n$ و $m \geqslant n \rightarrow m-n \geqslant 0$

$\Rightarrow a^n | b^n \times b^{m-n}$

$\Rightarrow a^n | b^m$

$a|b \Rightarrow a|b \pm ka$

$a|b, a|c \Rightarrow a|mb \pm nc$

۱۷- اگر $a-b|a$ آنگاه ثابت کنید $a-b|a+b$

$a-b|a \Rightarrow a-b|a-(a-b) \Rightarrow a-b|b$

$a-b|a,\ a-b|b \Rightarrow a-b|a+b$

۱۸- اگر $a \mid b+c \;, a \mid b-c$ **آنگاه ثابت کنید** $a \mid 2bc$

$$\longrightarrow a \mid (b+c)+(b-c) \Rightarrow a \mid 2b \xRightarrow{\text{افزایش مقسوم}} a \mid 2bc$$

۱۹- مجموع تمام عددهای صحیح که در رابطه ی $n^2+2 \mid n-3$ صدق می کند را بیابید.

$$n^2+2 \mid (n-3)(n+3) \Rightarrow n^2+2 \mid n^2-9 \Rightarrow n^2+2 \mid (n^2-9)-(n^2+2)$$

همواره درست $n^2+2 \mid n^2+2$ $n^2+2 \mid n^2+2$

$$\Rightarrow n^2+2 \mid -11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^2+2=1 \quad \times \\ n^2+2=11 \to n^2=9 \begin{cases} n=3 \; \checkmark \\ n=-3 \; \times \end{cases} \end{cases}$$

۲۰- تمام عددهای صحیح که در رابطه ی $n^3+2 \mid n^2+3$ صدق می کند را بیابید.

$$n^3+2 \mid (n^2+3)(n^4-3n^2+9)$$

$$n^3+2 \mid (n^3+2)(n^3-2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^3+2 \mid n^6+27 \\ n^3+2 \mid n^6-4 \end{cases} \longrightarrow n^3+2 \mid 27-(-4)$$

$$n^3+2 \mid 31$$

$$\begin{cases} n^3+2=31 \longrightarrow ✗ \\ n^3+2=1 \longrightarrow n=-1 \\ n^3+2=-1 \longrightarrow ✗ \\ n^3+2=-31 \longrightarrow ✗ \end{cases}$$

۲۱- دو عبارت $5n + 3$ و $3n^2 + 1$ بر چند عدد اول می توانند بخشپذیر باشند؟

$$p \mid (5n+3)(5n-3) \qquad p \mid 3n^2+1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \mid (25n^2-9)\times 3 \\ p \mid (3n^2+1)\times 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \mid 75n^2-27 \\ p \mid 75n^2+25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p \mid 52 \xrightarrow{52=2^2\times 13} \begin{cases} p=2 \\ p=13 \end{cases}$$

۲۲- اگر دو عبارت $۵n + ۳$ و $۳n + x$ بر هیچ عدد اولی بخشپذیر نباشند آنگاه مقدار x را بیابید.

$$p \mid 5n+3 \xrightarrow{\times 3} p \mid 15n+9$$

$$p \mid 3n+x \xrightarrow{\times 5} p \mid 15n+5x$$

$$\longrightarrow p \mid 5x-9$$

$$5x-9=1 \longrightarrow x=2$$

یا

$$5x-9=-1 \longrightarrow \times$$

۲۳- چند عدد طبیعی n وجود دارد که $120 \mid n!$ برقرار باشد؟

$$120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$$

$$\Rightarrow n = 1, 2, 3, 4, 5$$

۲۴- چند عدد طبیعی زوج n وجود دارد که $n! \mid ۷۲۰$ برقرار باشد؟

$$۷۲۰ = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶!$$

$$n! \mid ۶! \longrightarrow n \leqslant ۶$$

$$n = ۲, ۴, ۶$$

۲۵- چند عدد طبیعی n وجود دارد که $n|۷۲۰$ و $\boxed{۱۵|n}$ برقرار باشد؟

$n = 15k$

$\Rightarrow 15k|720 \rightarrow k|48$

$k = \underbrace{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48}_{\text{۱۰ جواب}}$

$k|2^4 \times 3^1$

$k = 2^{0,1,2,3,4} \times 3^{0,1}$

۲۶- عدد ۱۴۴ چند مقسوم علیه طبیعی دارد که مضرب فرد عدد ۶ باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۳

$6k \mid 144 \longrightarrow k \mid 24 \xrightarrow{\text{فرد } k} k=1,3$

۲۷- عدد ۳۶۰ چند مقسوم علیه طبیعی دارد که مضرب زوج عدد ۱۲ باشد؟

$12k \mid 360 \Rightarrow k \mid 30 \xrightarrow{k \text{ زوج}} k = 30 , 2 , 10 , 6$

۴ جواب

روش دوم:

$k \mid 30 \rightarrow k \mid 2 \times 3 \times 5$

$\boxed{\text{زوج}}\ k = 2^{1} \times 3^{1,0} \times 5^{1,0}$

۲۸- عدد ۱۴۴۰ چند مقسوم علیه طبیعی دارد که مربع کامل باشد؟

$k \mid 1440 \longrightarrow k \mid 2^5 \times 3^2 \times 5^1$

$n = 2^4 \times 3^2 \times 11$

1440	2
720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$\xrightarrow[\text{همه توان‌ها زوج}]{\text{در تجزیه مربع کامل}} k = 2^{\{0,2,4\}} \times 3^{\{0,2\}}$

جواب $= 3 \times 2 = 6$

۲۹- چند عدد مربع کامل سه رقمی وجود دارد؟

$$\sqrt{999} \geqslant ۳۱$$

$$100 \leqslant n^2 \leqslant 999$$

$$10 \leqslant n \leqslant ۳۱$$

جواب = ۲۲

۳۰- چند مربع کامل سه رقمی مضرب ۱۵ وجود دارد؟

n^2 مضرب ۱۵

$\leftarrow n^2$ مضرب ۳ $\Leftarrow n$ مضرب ۳ $\Leftarrow n$ مضرب ۵

$\leftarrow n^2$ مضرب ۵ $\Leftarrow n$ مضرب ۵

$۱۰۰ \leqslant n^۲ \leqslant ۹۹۹$

$۱۰ \leqslant n \leqslant ۳۱$

$\boxed{n = ۱۵}$ و $\boxed{n = ۳۰}$

۳۱- چند مربع کامل سه رقمی مضرب ۱۲ وجود دارد؟

n^2 مضرب ۱۲

n^2 مضرب ۳ $\Leftarrow$ n مضرب ۳

n^2 مضرب ۴ $\Leftarrow$ n مضرب ۲

$\Leftarrow$ n مضرب ۶

$100 \le n^2 \le 999$

$10 \le n \le 31$

$10 \le 6k \le 31$

$2 \le k \le 5$

۴ جواب

۳۲- چند عدد دورقمی وجود دارد که ۶برابر آنها مربع کامل باشد؟

$6n =$ مربع کامل

$2 \times 3 \times n =$ مربع کامل

$\Rightarrow n = 2 \times 3 \times q^2$

$10 \leqslant 2 \times 3 \times q^2 \leqslant 99$

$\rightarrow 2 \leqslant q^2 \leqslant 16$

$q^2 = 4, 9, 16$

$\rightarrow n = 6 \times 4 , 6 \times 9 , 6 \times 16$ جواب

۳۳- چند عدد سه رقمی وجود دارد که ۴۵برابر آنها مربع کامل باشد؟

$۴۵n =$ مربع کامل

$۳^۲ \times ۵ \times n =$ مربع کامل

$n = ۵q^۲$

$۱۰۰ \leqslant ۵q^۲ \leqslant ۹۹۹$

$۲۰ \leqslant q^۲ \leqslant ۱۹۹$

$۵ \leqslant q \leqslant ۱۴$

۱۰ تا = جواب

مقسوم علیه های ۸ : ۱، ۲، ۴، ۸

۱۲ : ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲

(۸و−۱۲)=۴ و (−۸و+۲)=۲

(۸و۱۲)=۴

ب م م (بزرگترین مقسوم علیه مشترک)

دو عدد صحیح a و b را در نظر می گیریم. ب م م آنها به صورت زیر تعریف می شود

d مقسوم علیه مشترک است

$$(a,b)=\boxed{d} \Leftrightarrow \begin{cases} d|a, d|b \\ \forall m \in Z: m|a, m|b \Rightarrow m \le d \end{cases}$$

d از بقیه مقسوم علیه های مشترک بزرگتر است

$$\underline{(a,b)=d} \Rightarrow \begin{cases} d|a, d|b \\ \forall m \in Z: m|a, m|b \Rightarrow m \leq d \end{cases}$$

۱- ثابت کنید $(ka,kb) = k(a,b)$

$$\Rightarrow \begin{cases} kd|ka, \quad kd|kb \\ \forall m \in Z, m|ka, \quad m|kb \Rightarrow m \leq kd \end{cases}$$

kd مقسوم علیه مشترک

kd از بقیه بزرگتر

$$\Rightarrow kd = (ka, kb)$$

$$k(a,b) = (ka, kb)$$

۲- ثابت کنید $(a^n, b^n) = (a, b)^n$

$$(a,b)=d \to \begin{cases} d \mid a,\ d \mid b \\ \forall m \in \mathbb{Z}: m \mid a, m \mid b \Rightarrow m \leqslant d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^n \mid a^n,\ d^n \mid b^n \\ \forall m \in \mathbb{Z}: m \mid a^n, m \mid b^n \Rightarrow m \leqslant d^n \end{cases}$$

d^n مقسوم علیه مشترک

d^n از بقیه بزرگتر

$$\Rightarrow d^n = (a^n, b^n)$$

$$\Rightarrow (a,b)^n = (a^n, b^n)$$

روش تجزیه: دو عدد را تجزیه می‌کنیم، حاصلضرب عوامل مشترک با توان کوچکتر ب م م است.

$$(۲^۲ \times ۳^۵ \times ۷ \text{ و } ۲^۴ \times ۷^۲ \times ۱۱) = ۲^۲ \times ۷^۱$$

۳- بزرگترین مقسوم علیه مشترک عددهای زیر را بدست آورید.

۱) $(۸۰۰,۱۸۰) = (۲^۵ \times ۵^۲ , ۲^۲ \times ۵ \times ۳^۲) = ۲^۲ \times ۵^۱$

۲) $(۲^۲ \times ۳ \times \underbrace{۶}_{۲\times۳} , ۱۲ \times ۱۷^۲) = (۲^۳ \times ۳^۲ \text{ و } ۲^۲ \times ۳ \times ۱۷^۲) = ۲^۲ \times ۳$

۳) $(8!,9!) = (8! \text{ و } 9\times 8!) = 8!\,\underbrace{(1,9)}_{\text{یک}} = 8!$

۴) $(8!,1000) = (2^7\times 3^2\times 5^1\times 7^1 \text{ و } 2^3\times 5^3) = 2^3\times 5^1$

۵) $(9!,60^2) = (2^7\times 3^4\times 5^1\times 7^1 \text{ و } 2^4\times 3^2\times 5^2) = 2^4\times 3^2\times 5^1$

۴- اگر $(5n + 1, 4n + 3) = d$ آنگاه بزرگترین مقدار ممکن برای d را بدست آورید.

$$d \mid 5n+1$$

$$d \mid 4n+3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \mid 20n+4 \\ d \mid 20n+15 \end{cases} \Rightarrow d \mid (20n+4) - (20n+15) \Rightarrow d \mid -11$$

$$\mathrm{Max}(d) = 11$$

۵- اگر $(۵n - ۱, ۷n + ۳) = d$ آنگاه تمام مقادیر ممکن برای d را بدست آورید.

$d \mid ۵n-۱$

$d \mid ۷n+۳$

$\Rightarrow d \mid ۷(۵n-۱) - ۵(۷n+۳) \Rightarrow d \mid -۲۲$

روش تستی

$d = ۱, ۲, ۱۱, ۲۲$

$\begin{vmatrix} ۵ & -۱ \\ ۷ & ۳ \end{vmatrix} = ۵ \times ۳ - (۷)(-۱) = ۲۲$

۶- اگر $d = (۲n^۲ + ۱,۴n + ۳)$ آنگاه بزرگترین مقدار ممکن برای d را بدست آورید.

$d \mid 4n+3$

$d \mid 2n^2+1$

$\longrightarrow d \mid (4n+3)(4n-3) - 8(2n^2+1)$

$\Rightarrow d \mid -9-8$

$d \mid -17 \rightarrow d_{max} = 17$

۷- اگر $(۱۲n + ۱, ۱۲n + ۷) = d$ آنگاه بزرگترین مقدار ممکن برای d را بدست آورید.

$d \mid ۱۲n+۱$

$d \mid ۱۲n+۷$

$\longrightarrow d \mid ۶ \longrightarrow$

$d = ۱$

$d = ۲$ ✗

$d = ۳$ ✗

$d = ۶$ ✗

۸- اگر $(۱۸n + ۳,۱۸n + ۹) = d$ آنگاه تمام مقادیر ممکن برای d را بدست آورید.

$$۳\underbrace{(۹n+۱ , ۹n+۳)}_{\text{یک}} = d \rightarrow \boxed{d = ۳}$$

۹- ثابت کنید

$$(a,b)=|a| \Leftrightarrow a|b$$

$(a,b)=|a| \Rightarrow a|b$

اثبات

$(a,b)=|a| \Rightarrow \begin{cases} |a|\,|a \text{ و } |a|\,|b \Rightarrow a|b \\ \forall m \dots \end{cases}$

$a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$

$\begin{cases} |a|\,|b \text{ و } |a|\,|a \\ \forall m: m|a, m|b \Rightarrow m \leq |a| \\ \Rightarrow |a|=(a,b) \end{cases}$

۱۰- ثابت کنید

$$(a,\pm 1) = (na,\pm 1) = (a, na \pm 1) = 1$$

$$(a, na\pm 1) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid na\pm 1 \end{cases} \Rightarrow d \mid n(a) - (na\pm 1)$$

$$d \mid \pm 1 \Rightarrow \boxed{d = 1}$$

$$(12, 12k+1) = 1$$

۱۱- اگر $(n^{۳} - n, n^{۳} + n^{۲}) = ۴۲$ آنگاه n کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷

۳) ۹ ۴) ۶

$$\left(n(n-۱)(n+۱) \text{ و } n^{۲}(n+۱)\right) = ۴۲$$

$$n(n+۱)\underbrace{\left(n-۱ \text{ و } n\right)}_{\text{یک}} = ۴۲ \longrightarrow n(n+۱) = ۴۲ \longrightarrow \begin{cases} n = ۶ \\ n = -۷ \end{cases}$$

۱۲- اگر $(n^۳ - n, n^۴ - n) = ۵۶$ آنگاه $(۲n, n + ۴)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱

۳) ۷ ۴) ۴

$$\big(n(n-1)(n+1) \text{ و } n(n-1)(n^2+n+1)\big) = 56$$

$$n(n-1)\underbrace{\Big(n+1 \text{ و } \underbrace{n^2+n}_{n(n+1)}+1\Big)}_{\text{یک}} = 56 \longrightarrow n(n-1) = 56$$

$$\longrightarrow n = 8$$

$$(2n \text{ و } n+4) = (16 \text{ و } 12) = 4$$

$(۴,۵)=۱$ $(۴,۹)=۱$ $(۵,۷)=۱$

دو عدد نسبت به هم اول (متباین):

اگر $(a,b) = ۱$ آنگاه این دو عدد نسبت به هم اول هستند.

۱- اگر $(a,۱۵) = ۱$ آنگاه بزرگترین عدد دو رقمی که می‌تواند به جای a قرار بگیرد را تعیین کنید.

۹۹ ✗ ۹۸ ✓

۲- اگر $(a,۳۰) = ۱$ آنگاه کوچکترین عدد سـه رقمی که می‌تواند به جای a قرار بگیرد را تعیین کنید.

۱۰۰ ✗ ۱۰۱ ✓

۳- اگر $(a,۷۰)=۱$ آنگاه تمام اعداد طبیعی کمتر از ۲۰ که می‌توانند به جای a قرار بگیرند را تعیین کنید.

۱ ~~۲~~ ۳ ~~۴~~ ۵ ~~۶~~ ۷ ~~۸~~ ۹ ~~۱۰~~ ۱۱ ~~۱۲~~ ۱۳ ~~۱۴~~

۱۵ ~~۱۶~~ ۱۷ ~~۱۸~~ ۱۹

جواب = {۱و۳و۹و۱۱و۱۳و۱۷و۱۹}

نکته: اگر $(a,b)=۱$ ویژگی‌های زیر برقرار است:

$(a,b\pm na)=۱, (a^n,b^m)=۱, (ab,a\pm b)=۱$

$(۳,۴)=۱$

$(a+b,a-b)=\begin{cases}۱ & \text{a و b یکی زوج یکی فرد}\\ ۲ & \text{a و b هر دو فرد}\end{cases}$

$(۳,۵)=۱$

$c|a\pm b \Rightarrow (a,c)=(b,c)=۱$

۱- نشان دهید دو عدد $9n + 5$, $7n + 4$ همواره نسبت به هم اول هستند.

$$(9n+5 , 7n+4) = d$$

$$\rightarrow \begin{cases} d \mid 9n+5 \\ d \mid 7n+4 \end{cases} \rightarrow d \mid 7(9n+5) - 9(7n+4) \rightarrow d \mid -1$$

$$\rightarrow d = 1$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

۲- اگر دو عدد $۳n+۲$, $۲n+۳$ نسبت به هم اول نباشند ، آنگاه ب م م آن ها کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۹

۳) ۵ ✓   ۴) ۷

$$d \mid 3n+2$$
$$d \mid 2n+3 \longrightarrow d \mid (6n+4)-(6n+9)$$

$$\boxed{d \mid -5} \longrightarrow \begin{cases} d=1 & \text{غ ق ق} \\ d=5 \end{cases}$$

۴- اگر دو عدد $n^3+3,\ n^2+2$ نسبت به هم اول نباشند ، آنگاه ب م م آن ها کدام است؟

۱) ۲
۲) ۱۱
۳) ۱۳
۴) ۱۷

$$\begin{cases} d \mid n^2+2 \\ d \mid n^3+3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d \mid n^3+2n \\ d \mid n^3+3 \end{cases} \Rightarrow d \mid 2n-3$$

$$\begin{cases} d \mid 2n-3 \\ d \mid n^2+2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d \mid 2n^2-3n \\ d \mid 2n^2+4 \end{cases} \Rightarrow d \mid -3n-4$$

$$\begin{cases} d \mid 2n-3 \\ d \mid -3n-4 \end{cases} \rightarrow d \mid -17$$

$$\boxed{d = 17}$$

$$\begin{cases} d \mid (n^2+2)(n^4-2n^2+4) \\ d \mid (n^3+3)(n^3-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid n^6+8 \\ d \mid n^6-9 \end{cases} \rightarrow d \mid 17$$

۵- به ازای چند عدد طبیعی یک رقمی n دو عدد $۵n+۲$ ، $۷n+۳$ نسبت به هم اول نیستند؟

$$d \mid ۵n+۲$$
$$d \mid ۷n+۳$$
$$\longrightarrow d \mid ۷(۵n+۲)-۵(۷n+۳) \longrightarrow d \mid -۱$$

پس دو عبارت همواره نسبت به هم اول‌اند

۶- اگر $(n, ۲) = ۱$ آنگاه ثابت کنید $n = ۲k + ۱$

برهان خلف:

اگر $n \neq ۲k+۱$ آنگاه $n = ۲k$

$\longrightarrow (n, ۲) = (۲k, ۲) = ۲$

پس به تناقض رسیدیم

۷- اگر $(n,۴) = ۲$ آنگاه ثابت کنید $n = ۴k + ۲$

$۲|n \Rightarrow n=۲q$

همچنین n نمی‌تواند مضرب ۴ باشد زیرا در این صورت $(n,۴)=۴$ که خلاف فرض است

$$\begin{cases} n=۴k & \times \\ n=۴k+۱ & \times \\ n=۴k+۲ & \checkmark \\ n=۴k+۳ & \times \end{cases}$$

روش دوم

$۲|n \rightarrow n=۲q$

$(۲q,۴)=۲ \rightarrow (q,۲)=۱$

$\Rightarrow q=۲k+۱$

$\Rightarrow n=۲(۲k+۱)$

۸- اگر $(n,6) = 3$ آنگاه ثابت کنید $n = 6k + 3$

$(n,6)=3 \to 3 \mid n \to n=3q$

$\Rightarrow (3q,6)=3 \longrightarrow (q,2)=1 \longrightarrow q=2k+1$

$\Rightarrow n=3(2k+1)=6k+3$

$(n,15)=1$ $\qquad (n,15)=3$ $\qquad \boxed{(n,15)=5}$

۹- به ازای چند عدد طبیعی کمتر از ۲۰ برای n دو عدد $n+2$ و $8n+3$ نسبت به هم اول نیستند؟

$$\left.\begin{array}{l} d \mid n+2 \\ d \mid 8n+3 \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid (8n+16)-(8n+3) \to d \mid 13 \Rightarrow \begin{cases} d=1 \\ d=13 \ \checkmark \end{cases}$$

$$\to 13 \mid n+2 \to n+2=13k \to n=13k-2$$

$$1 \leq 13k-2 \leq 20$$

$$\boxed{k=1} \to \boxed{n=11}$$

۱۰- به ازای چند عدد طبیعی کمتر از ۵۰ برای n دو عدد $5n+2$ ، $9n+3$ نسبت به هم اولند؟

$$\left.\begin{array}{l} d \mid 5n+2 \\ d \mid 9n+3 \end{array}\right. \longrightarrow d \mid (45n+18)-(45n+15) \longrightarrow d \mid 3 \quad \begin{cases} d=1 \\ d=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \mid 5n+2 \\ 3 \mid 9n+3 \end{cases} \longrightarrow 3 \mid (10n+4)-(9n+3) \longrightarrow 3 \mid n+1$$

$$\longrightarrow n+1=3k \longrightarrow n=3k-1 \qquad 1 \leq 3k-1 < 50$$

$$1 \leq k < 17 \longrightarrow \boxed{16 \text{ تا}}$$

یعنی به ازای ۱۶ مقدار برای n دو عبارت نسبت به هم اول نیستند

جواب $= 49-16 = 33$

۱۱- به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n دو عدد $۵n+۲$ و $۷n+۵$ نسبت به هم اولند؟

$$d \mid 5n+2,\quad d \mid 7n+5 \longrightarrow d \mid (35n+14)-(35n+25) \longrightarrow d \mid -11$$

$$d=11 \longrightarrow 11 \mid 5n+2,\quad 11 \mid 7n+5 \longrightarrow 11 \mid (15n+6)-(14n+10) \Rightarrow 11 \mid n-4$$

$$n-4=11k \longrightarrow n=11k+4 \qquad 10 \leq 11k+4 \leq 99$$

$$1 \leq k \leq 8 \longrightarrow$$ جواب $= 90-8 = 82$

۱۲- به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n دو عدد $n^{2} + 2 , 3n + 1$ نسبت به هم اول نیستند؟

$d \mid n^2+2$

$d \mid 3n+1$

$\longrightarrow d \mid (3n+1)(3n-1) - 9(n^2+2) \Rightarrow d \mid -19 \rightarrow \begin{cases} d=1 \\ d=19 \checkmark \end{cases}$

$19 \mid 3n+1$

$19 \mid 19n$ همواره درست

$\longrightarrow 19 \mid -(18n+6)+19n \rightarrow 19 \mid n-6$

$n-6=19k \rightarrow n=19k+6 \Rightarrow 10 \leq 19k+6 \leq 99$

$1 \leq k \leq 4 \rightarrow$ ۴ جواب

۱۳- اگر رابطه ی $(a,۵)|۴۴۴$ برقرار باشد نشان دهید a مضرب ۵ نیست.

$(a,۵)=\begin{cases} ۱ \to ۱|۴۴۴ \ \checkmark \\ ۵ \to ۵\nmid ۴۴۴ \end{cases}$

پس $(a,۵)\neq ۵$ یعنی a نمی‌تواند مضرب ۵ باشد

برهان خلف: اگر a مضرب ۵ باشد آنگاه

$a=۵k \to (a,۵)=(۵k,۵)=۵$ و $۵\nmid ۴۴۴$

به تناقض رسیدیم پس حکم درست است.

۱۴- اگر رابطه ی $(b,۶) = (a,۷)$ برقرار باشد نشان دهید a مضرب ۷ نیست و b نمی تواند زوج باشد.