



$$a = bq + r \quad 0 \leq r < b$$



۱۹- در تقسیم عدد فرد a بر ۹ باقیمانده برابر ۱۲ است، اگر $\frac{a+1}{۲}$ را بر ۱۹ تقسیم کنیم باقی مانده

چند است؟

۹ (۴)

۶ (۳)

۱۶ (۲)

۱۲ (۱)

$$\begin{aligned}
 a &= \overbrace{19q}^{\text{فرد}} + 12 \rightarrow \frac{a+1}{2} = \frac{19q+12}{2} = \frac{19(2k+1)+12}{2} \\
 & \rightarrow q = 2k+1 \qquad \qquad \qquad = 19k+14
 \end{aligned}$$



۲۰- در تقسیم عدد a بر ۲۴ باقیمانده برابر ۷ است، اگر $\frac{a-1}{۲}$ را بر ۲۴ تقسیم کنیم باقی مانده چند

است؟

۱۵ یا ۳ یا ۴ ✓

۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۶ یا ۴ (۱)

$$a = 24q + 7 \rightarrow \frac{a-1}{2} = \frac{24q + 6}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q = 2k \\ q = 2k+1 \end{array} \right. \rightarrow \frac{a-1}{2} = \frac{24(2k) + 6}{2} = 24k + 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q = 2k \\ q = 2k+1 \end{array} \right. \rightarrow \frac{a-1}{2} = \frac{24(2k+1) + 6}{2} = 24k + 15$$



۲۱- در تقسیم عدد a بر b اگر $a - b = ۱۴۸$ و باقیمانده برابر ۱۹ باشد آنگاه مجموع مقادیر

ممکن برای خارج قسمت کدام است؟

$$a = bq + r$$

$$۹ (۴)$$

$$۶ (۳)$$

$$۱۶ (۲)$$

$$۱۲ (۱)$$

$$۱۴۸ + b = bq + ۱۹$$

$$۱۲۹ = b(q - 1) \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q - 1 = 1 \rightarrow q = 2 \\ q - 1 = 4 \rightarrow q = 5 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} ۱۲۹ \times ۱ \\ ۴۲ \times ۳ \end{array}$$



۲۲- در تقسیم عدد a بر ۸۰۰ اگر باقیمانده دو برابر مکعب خارج قسمت باشد، آنگاه چند مقدار

برای a ممکن است؟

$$a = ۸۰۰q + ۲q^۳ \quad (۴) \quad ۹$$

$$\begin{aligned} ۰ &\leq ۲q^۳ < ۸۰۰ & (۳) \quad ۶ \\ ۰ &\leq q^۳ < ۴۰۰ & (۲) \quad ۱۶ \\ ۰ &\leq q < ۷ & (۱) \quad ۱۲ \end{aligned}$$



پویش علمی
جهاد





نکته:

۱- عدد زوج به صورت $2k$ و عدد فرد به صورت $2k + 1$ نمایش داده می شود.

۲- از هر دو عدد متوالی یکی زوج است، در حالت کلی از هر n عدد متوالی دقیقاً یکی از آنها بر n بخش پذیر است.

۳- حاصلضرب n عدد متوالی بر $n!$ بخش پذیر است.



۱- ثابت کنید هر عدد به صورت $n^3 - n$ بر ۶ بخشپذیر است.

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = \underbrace{(n-1)n(n+1)}_{\sim \text{عدری متوالی}}$$

می دانیم حاصل ضرب \sim عدری متوالی بر $6 = 3! = 3!$ بخشپذیر است



۲- ثابت کنید هر عدد به صورت $n^5 - n$ بر ۶ بخشپذیر است.

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = \underbrace{(n-1)n(n+1)}_{\text{سه عدد متوالی}}(n^2 + 1)$$



۳- ثابت کنید باقیمانده تقسیم مربع عدد فرد در تقسیم بر ۸ برابر ۱ است.

$$a = 2q + 1 \Rightarrow a^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4q(q + 1) + 1$$

رو عدد متوالی $2k = 2q(q+1)$

$$a^2 = 4(2k) + 1 = 8k + 1$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \overline{) 1} \\ \underline{1} \\ 0 \end{array}$$



۴- ثابت کنید باقیمانده تقسیم مربع عدد زوج در تقسیم بر ۸ برابر صفر یا ۴ است.

$$a = 2k \rightarrow a^2 = 4k^2$$

زوج $\rightarrow k^2 = 2q \Rightarrow a = 19$

فرد $\rightarrow k^2 = 2q+1 \Rightarrow a = 19+2$

{	$1k$	✓
	$1k+1$	x
	$1k+2$	x
	$1k+3$	x
	$1k+4$	✓
	$1k+5$	x
	$1k+6$	x
	$1k+7$	x



۵- ثابت کنید مربع هر عدد اول بزرگتر ۳ به صورت $3k + 1$ است.

$$a = \begin{cases} 3k & \times \text{ اول نیست} \\ 3k+1 & \rightarrow a^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(\dots) + 1 \\ 3k+2 & \rightarrow a^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(\dots) + 1 \end{cases}$$



۶- عدد زوج که مضرب ۴ نباشد را به کدام صورت می توان نمایش داد؟

$$4k + 2 \quad (۴) \quad \checkmark$$

$$4k + 1 \quad (۳) \quad \times$$

$$2k + 4 \quad (۲)$$

$$4k + 3 \quad (۱) \quad \times$$





۷- عدد فرد مضرب ۳ را به کدام صورت می توان نمایش داد؟

$$6k + 1 \quad (\times)$$

$$6k + 3 \quad (\checkmark)$$

$$3k + 1 \quad (\times)$$

$$2k + 3 \quad (\times)$$



۸- ثابت کنید مربع کامل به صورت $3 + 7k$ نمی تواند باشد.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{k} \rightarrow a^2 = 49k^2 \\
 & \sqrt{k+1} \rightarrow a^2 = (9k^2 + 12k + 1) = \sqrt{\quad} + 1 \\
 a = & \sqrt{k+2} \rightarrow a^2 = 49k^2 + 21k + 4 = \sqrt{\quad} + 4 \\
 & \sqrt{k+3} \rightarrow a^2 = \dots + 9 = \sqrt{\dots + 1} + 9 \\
 & \sqrt{k+4} \rightarrow a^2 = \dots + 16 = \sqrt{\dots + 2} + 16 \\
 & \sqrt{k+5} \rightarrow a^2 = \dots + 25 = \sqrt{\dots + 3} + 25 \\
 & \sqrt{k+6} \rightarrow a^2 = \dots + 36 = \sqrt{\dots + 4} + 36
 \end{aligned}$$

مربع کامل یا 7 بخش پذیر است یا در تقسیم بر 7 باقیمانده برابر 1 یا 2 یا 4 است



۹- اگر a عددی فرد و $a + 2$ بر b بخشپذیر باشد، آنگاه باقیمانده تقسیم عبارت $a^2 + b^2 + 3$ بر

۸ کدام است؟

۳ (۱)

۵ (۲) ✓

۷ (۳)

۲ (۴)

ط فرد $\Rightarrow a+2$ فرد $\Rightarrow a$ فرد

$$a^2 + b^2 + 3 = (1k+1) + (1k'+1) + 3 = 1(k+k') + 5$$



۱۰- اگر a عددی زوج و $a + 1$ بر b بخشپذیر باشد، آنگاه باقیمانده تقسیم $a^2 + b^2 + 2$ بر 8

کدام است؟

(۱) یا ۵

(۲) یا ۳

(۳) یا ۷ ✓

(۴) فقط ۵

زوج $a \rightarrow a+1$ فرد \rightarrow فرد a

$$a^2 + b^2 + 2 = \begin{cases} (8k+4) + (8k'+1) + 2 = 8(k+k') + 7 \\ (8k) + (8k'+1) + 2 = 8(k+k') + 3 \end{cases}$$



۱۱- اگر $(a, 12) = 1$ آنگاه بزرگترین عددی که $a^2 - 1$ همواره بر آن بخشپذیر باشد کدام است؟

۲۴ (۴)

۱۸ (۳)

۱۲ (۲)

۳۶ (۱)

$$a \text{ فرد} \rightarrow a^2 = 1k + 1 \rightarrow a^2 - 1 = 1k$$

$$a \text{ مضرب ۳ نیست} \rightarrow a^2 = 3k' + 1 \rightarrow a^2 - 1 = 3k'$$



۱۲- ثابت کنید اعداد اول همگی بصورت $4k+1$ یا $4k-1$ هستند. (بجز ۲)

$$a = \begin{cases} 4k & \text{اولی نیست} \\ 4k+1 & \checkmark \\ 4k+2 & \text{اولی نیست} \\ 4k+3 & \checkmark \end{cases}$$



۱۳- ثابت کنید اعداد اول بزرگتر از ۶ همگی بصورت $6k+1$ یا $6k-1$ هستند.

$$a = \left\{ \begin{array}{l} 9k \rightarrow \text{اولایی} \\ 9k+1 \checkmark \\ 9k+2 \rightarrow \text{اولایی} \\ 9k+3 \rightarrow \text{اولایی} \\ 9k+4 \rightarrow \text{اولایی} \\ 9k+5 \checkmark \end{array} \right.$$



۱۴- اگر p عدد اول باشد و $p+1$ مربع کامل باشد، چند عدد برای p یافت می شود؟

(۱) صفر

(۲) یک ✓

(۳) دو

(۴) بی شمار

$$p+1 = n^2 \rightarrow p = (n-1)(n+1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n-1 = 1 \rightarrow n=2 \\ n+1 = p \rightarrow p=3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n-1 = 1 \rightarrow n=2 \\ n+1 = p \rightarrow p=3 \end{array} \right.$$

۸

$$\left\{ \begin{array}{l} n+1 = 1 \rightarrow n=0 \\ n-1 = p \rightarrow p=-1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n+1 = 1 \rightarrow n=0 \\ n-1 = p \rightarrow p=-1 \end{array} \right.$$



۱۵- اگر n عدد اول سه رقمی باشد چند عدد اول در فاصله‌ی بین دو عدد $n!+2$ و $n!+n$ وجود دارد؟

(۳) حداقل ۲ عدد (۴) صفر

$$\frac{n-1}{2} (۲)$$

$$n (۱)$$

$n!+2$ و $n!+3$ و $n!+4$ و ... و $n!+n$
 بخش‌پذیر با ۲ بخش‌پذیر با ۳ بخش‌پذیر با ۴ ... بخش‌پذیر با n



۱۶- مجموع سه عدد اول متمایز برابر 2^4 شده است، حاصلضرب این اعداد کدام می تواند باشد؟

۴۲ (۴)

۱۱۵ (۳)

۱۷۰ (۲) ✓

۲۴۲ (۱)

$$p + q + r = 15 \rightarrow r = 2$$

$$\rightarrow p + q = 12$$

$$= 11 + 11 \quad X$$

$$= 3 + 19$$

$$= 8 + 17$$

$$\text{حاصلضرب} = 2 \times 19 \times 2 = 115$$

$$= 2 \times 8 \times 17 = 170$$



۱۷- اگر a, b, c سه عدد اول متمایز باشند و $a^2 - b^2 = c$ حاصل $a + b + c$ کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۶ (۲)

۱۰ (۱) ✓

$$(a-b)(a+b) = c$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_1$
 $\underbrace{\hspace{2cm}}_c$

$$\begin{cases} a - b = 1 \longrightarrow \\ a + b = c \longrightarrow c = a \end{cases} \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$a + b + c = 10$$



همنهستی:

اگر دو عدد a و b در تقسیم بر m باقیمانده‌های برابر داشته باشند آنگاه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a = mq + r \\ b = mq' + r \end{array} \right\} \Leftrightarrow m | a - b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

a با باقیمانده m همنهستی هستند

$$\begin{array}{l} 27 = 1 \times 3 + 24 \\ 44 = 1 \times 9 + 35 \end{array}$$

$$27 \equiv 24 \pmod{3}$$



۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید:

ب. $44 \equiv_{55} 99$ ✓

الف. $37 \equiv_5 12$ ✓

ت. $-41 \equiv_7 32$ ✗

پ. $-37 \equiv_{21} -5$ ✗

ج. $(3n-1)^2 \equiv_4 4$ ✓

ث. $(2n-1)^2 \equiv_8 1$ ✓



۲- اگر $a \equiv 12 \pmod{5}$ تمام اعداد یک رقمی که می توان به جای a قرار داد را بدست آورید.

$$a = 7, a = 2$$



۳- اگر $a \equiv 7 \pmod{11}$ آنگاه کدام گزاره نتیجه می شود؟

(۱) $a \equiv 11 - 7 \pmod{11}$ (۲) $11 \mid a - 7$

(۳) $11 \mid a + 7$ (۴) $7 \mid a - 11$



۴- اگر $26 \equiv 21^m$ آنگاه مقدار m را بیابید.

$$m \mid 21 - 26 \rightarrow m \mid -5 \rightarrow \boxed{m = 5}$$



۵- اگر $m^2 \equiv 15 \pmod{90}$ آنگاه مقدار m را بیابید.

$$m^2 \mid 90 - 15$$

$$m^2 \mid 75$$

$$m^2 \mid 3 \times 5^2$$

$$m^2 = 75, \boxed{m = 5}$$



۶- اگر $a \equiv 1 \pmod{8}$ آنگاه کدام گزاره نتیجه می شود؟

$$a = 8k - 1 \quad (۲)$$

$$a = 8k + 1 \quad (۱)$$

$$a = 4k - 1 \quad (۴)$$

$$a = 4k + 1 \quad (۳)$$





۷- اگر $a \equiv 2 \pmod{7}$ کوچکترین عدد سه رقمی که می‌توان به جای a قرار داد را بدست آورید.

$$a = 7k + 2 \rightarrow 7k + 2 \geq 100$$

$$\xrightarrow{k=15} a = 107$$



۸- اگر $a \equiv 11 \pmod{13}$ آنگاه چند عدد دو رقمی می توان به جای a قرار داد؟

۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)

$$a = 13k + 11 \rightarrow 1 \leq 13k + 11 \leq 99$$

$$0 \leq k \leq 6 \quad \text{لجواب}$$



۹- کلاس همنهشتی $[۷]_۹$ را به صورت مجموعه نمایش دهید.

$$[۷]_۹ = \{9k + ۷\} = \{\dots, -۲, ۷, ۱۶, ۲۵, \dots\}$$



۱۰- در کلاس همنهشتی $[5]_{13}$ چند عدد دو رقمی وجود دارد؟

۸ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۵ (۴)

$$[5]_{13} = \{13k + 5\}$$

$$10 \leq 13k + 5 \leq 99$$

$$5 \leq 13k \leq 94$$



۱۱- کدام گزینه با بقیه متفاوت است؟

$$(۲)_{۱۱} [۹]$$

۹

$$(۱)_{۱۱} [۲۰]$$

۹

$$(۳)_{۱۱} [-۱۳]$$

۹

$$(۴)_{۱۱} [۳۴]$$

۱



۱۲- کدام عدد متعلق به کلاس همبستگی $[7]_3$ می باشد؟

$$2k \\ 4572 (4)$$

$$2k+2 \\ 1134 (3)$$

$$3k+2 \\ 5603 (2)$$

$$91003 (1) \checkmark \\ 3k+1$$

$$[\checkmark]_3 = [1]_3$$



۱۳- عدد ۱۴۰۳ متعلق به کدام کلاس هم نهشتی نیست؟

$$n k + ۳$$

$$\times (۱) [۲۰]_۳$$

$$[۲]_۳$$

$$\times (۲) [۳]_۵$$

$$\times (۳) [۶]_{۱۱}$$

$$(۴) [۷]_۸$$

$$\begin{array}{r} ۱۲ \cdot ۳ \quad | \quad ۱۱ \\ \hline ۱۱ \quad | \quad ۱۲۷ \\ \hline ۲۰ \\ ۲۲ \\ \hline ۱۴۰ \end{array}$$



۱۴- ثابت کنید:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow -a \equiv -b \pmod{m}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a - b \Leftrightarrow m \mid -a - (-b)$$

$$\Leftrightarrow -a \equiv -b \pmod{m}$$



۱۵- ثابت کنید:

$$a \equiv b \Rightarrow \begin{cases} ka \equiv kb, ka \equiv kb \\ a^n \equiv b^n \\ a \pm c \equiv b \pm c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a \equiv b &\rightarrow m \mid a - b \rightarrow m \mid ka - kb \rightarrow ka \equiv kb \\ &\rightarrow km \mid ka - kb \Rightarrow ka \equiv kb \\ &\rightarrow m \mid (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &\Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n \\ &\rightarrow m \mid a \pm c - (b \pm c) \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c \end{aligned}$$



۱۶- ثابت کنید:

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pm km$$

$$a \equiv b \pmod{m} \rightarrow m | a - b \rightarrow m | a - b \pm km$$

$$\rightarrow m | a - (b \mp mk)$$

$$\Rightarrow a \equiv b \mp mk$$



۱۷- ثابت کنید می‌توانیم دو رابطه‌ی هم‌نهشتی با پیمانه‌ی یکسان را باهم جمع کرده یا از هم کم کنیم:

$$a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d, ac \equiv bd$$

$$m|a-b \rightarrow m|ac-bc \Rightarrow m|ac-bd$$

$$m|c-d \rightarrow m|bc-bd$$

$$\Rightarrow ac \equiv bd$$

$$1299 \times 14 \dots \times 14 \times 15 \cdot 2 \equiv 2 \times \underbrace{14 \times 14}_{=1} \times 15 \equiv 1$$

$$\begin{array}{r} 1299 \overline{) 11} \\ \underline{11} \\ 29 \\ \underline{22} \\ 79 \\ \underline{78} \\ 1 \end{array}$$



۱۸- ثابت کنید

$$a \equiv b \pmod{mn} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}, a \equiv b \pmod{n}$$

$$mn \mid a - b \begin{cases} \rightarrow m \mid a - b \rightarrow a \equiv b \pmod{m} \\ \rightarrow n \mid a - b \rightarrow a \equiv b \pmod{n} \end{cases}$$



۱۹- اگر $a \equiv 3 \pmod{8}$ باقیمانده‌ی تقسیم $5a + 4$ بر ۸ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc}
 & 5 \pmod{4} & 7 \pmod{3} & 3 \pmod{3} & 1 \pmod{1} \\
 a \equiv 3 & \rightarrow 5a \equiv 15 & \rightarrow 5a + 4 \equiv 19 \equiv 3
 \end{array}$$



۲۰- اگر $a \equiv 3 \pmod{4}$ باقیمانده‌ی تقسیم $3a + 4$ بر ۱۲ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc}
 & 5 \pmod{4} & 7 \pmod{3} & 11 \pmod{2} & \textcircled{1 \pmod{1}} \\
 a \equiv 3 & \rightarrow & 3a \equiv 9 & \rightarrow & 3a + 4 \equiv 12 \equiv 0 \pmod{12}
 \end{array}$$



۲۱- اگر $a + 3 \equiv 0 \pmod{7}$ آنگاه باقیمانده‌ی تقسیم $3a^3 + 4a + 1$ بر ۷ کدام است؟

$$\begin{aligned}
 & \text{(۱) } a \equiv 4 \pmod{7} \quad \text{(۲) } a \equiv 3 \pmod{7} \quad \text{(۳) } a \equiv 5 \pmod{7} \quad \text{(۴) } a \equiv 0 \pmod{7} \\
 & \begin{aligned}
 & 3a^3 + 4a + 1 \equiv 3(4)^3 + 4(4) + 1 \equiv 3(64) + 16 + 1 \equiv 192 + 16 + 1 \equiv 209 \equiv 6 \pmod{7} \\
 & 3a^3 + 4a + 1 \equiv 3(3)^3 + 4(3) + 1 \equiv 3(27) + 12 + 1 \equiv 81 + 12 + 1 \equiv 94 \equiv 3 \pmod{7} \\
 & 3a^3 + 4a + 1 \equiv 3(5)^3 + 4(5) + 1 \equiv 3(125) + 20 + 1 \equiv 375 + 20 + 1 \equiv 396 \equiv 1 \pmod{7} \\
 & 3a^3 + 4a + 1 \equiv 3(0)^3 + 4(0) + 1 \equiv 0 + 0 + 1 \equiv 1 \pmod{7}
 \end{aligned} \\
 & \Rightarrow 3a^3 + 4a + 1 \equiv 6 \pmod{7}
 \end{aligned}$$



۲۲- اگر $a + 3 \equiv 1 \pmod{5}$ آنگاه باقیمانده‌ی تقسیم $2a^3 - 2a + 5b + 3$ بر ۵ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc}
 & 4 \pmod{4} & 3 \pmod{3} & 2 \pmod{2} & 1 \pmod{1} \\
 a \equiv -2 \pmod{5} & \rightarrow & 2a^3 - 2a + 5b + 3 & \equiv & 2(-2)^3 - 2(-2) + 3 \\
 & & & & \equiv -16 + 4 + 3 \\
 & & & & \equiv -9 \equiv 1 \pmod{5}
 \end{array}$$

← صفر



۲۳- باقیمانده‌ی تقسیم $3! + 5!$ بر ۷ کدام است؟

۱ (۱)

۳ (۲)

۵ (۳)

۴ (۴) صفر

$$\underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2}_{-1} + \underbrace{3 \times 2}_{-1} \equiv 1 - 1 \equiv 0$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ \hline \end{array}$$



۲۴- باقیمانده‌ی تقسیم $8!$ بر 11 کدام است؟

۶ (۱)

۳ (۲)

۵ (۳) ✓

۲ (۴)





۲- اگر سوم اسفند در یک سال سه شنبه باشد تعیین کنید چهاردهم خرداد در همان سال چند شنبه

بوده است؟

۴ خرداد → ۱۷ فروردین → ۲۱ شهریور → ۳۰ بهمن → ۳ اسفند

$$\equiv \left(17 + 2 \times 31 + 3 \times 30 + 4 \right)$$

$$\equiv 17 + 2 \times 2 + 3 \times 2 + 4 \equiv 25$$

از سه شنبه ۲۵ روز عقب ← جمعه



۳- ۵ شهریور سالی سه شنبه است، ۱۰ اسفند همان سال روز است. ^{شنبه}

$$۵ \text{ شهریور} \leftarrow ۲۱ \text{ شهریور} \leftarrow ۳۰ \text{ بهمن} \leftarrow ۱۰ \text{ اسفند}$$

$$۱۰ + ۵ \times ۳۰ + ۲۶ \equiv ۷$$

$$۳ + ۵ \times ۲ + (-۲) \equiv ۱۱ \equiv ۴$$

از سه شنبه ۴ روز به جلو \leftarrow شنبه



۴- اگر در یک سال نهم اردیبهشت جمعه باشد تعیین کنید دومین پنج شنبه در ماه مهر، چندمین روز از ماه مهر است؟

۹ اردیبهشت ← ۲۱ اردیبهشت ← ۳۱ شهریور ← ۱۴

امهر جمعه
۷ مهر ۵ شنبه
۱۴ مهر ۵ شنبه

$$\begin{aligned}
 & 22 + 4 \times 1 + 1 = 27 \\
 & 1 + 4 \times 2 + 1 = 9
 \end{aligned}$$



مثال: حاصل همنهشتی‌های زیر را بدست آورید.

$$5) \quad 6^{97} \equiv 5 \pmod{11} \quad \equiv 1 \pmod{5}$$

$$6) \quad 6^{97} \equiv 7 \pmod{11} \quad \equiv -1 \pmod{7} \quad \equiv 6 \pmod{9}$$

$$7) \quad 5^{98} \equiv 12 \pmod{11} \quad \equiv 12 \pmod{11} \quad \equiv 1 \pmod{11}$$

$$8) \quad 3^{101} \equiv 1 \pmod{11} \quad \equiv 1 \pmod{11} \quad \equiv 1 \pmod{11} \quad \equiv 1 \pmod{11}$$



۹) $4101 \equiv 15$

$(4^2)^5 \times 4^1 \equiv 15 \quad (1)^5 \times 4 \equiv 15$

۱۰) $399 \equiv 14$

$(3^2)^2 \times 3^1 \equiv (-1)^2 \times 3 \equiv -1 \times 3 \equiv 14$

۱۱) $2100 \equiv 7$

$(2^2)^3 \times 2^1 \equiv (1)^3 \times 2 \equiv 2$

۱۲) $31398 \equiv 16$

$(3^4)^2 \times 3^2 \equiv 16 \quad 3^4 \times 9 \equiv 9$

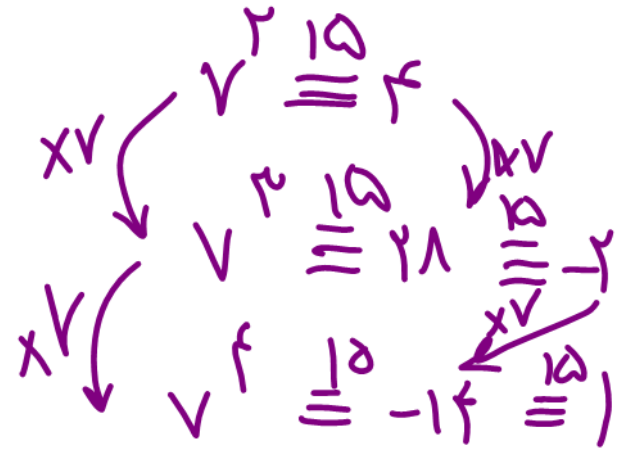
$5^7 \times 5 \equiv (5^2)^3 \times 5 \equiv (-1)^3 \times 5 \equiv 5$

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 13} \\ \underline{-2} \\ 11 \\ \underline{-10} \\ 1 \\ \underline{-1} \\ 0 \end{array}$$



$$13) \underbrace{7^{1399}}_{12} \equiv (7^2)^{699} \times 7^1 \equiv 12 \quad 7^{999} \times 7 \equiv 12 \pmod{13}$$

$$14) \underbrace{7^{30}}_{15} \equiv (7^4)^7 \times 7^2 \equiv 15 \quad 7^4 \times 7^2 \equiv 15 \pmod{17}$$





$$14.2 = 2k + 1$$

$$\equiv_{31} 14.2 \pmod{31}$$

$$\equiv_{31} 28 \pmod{31}$$

$$\equiv_{31} 28 \pmod{31}$$

$$\equiv_{31} 28 \pmod{31}$$

$$\equiv_{61} 11.55 \pmod{61}$$

$$\equiv_{61} 605 \pmod{61}$$

$$\equiv_{61} 605 \pmod{61}$$

$$\equiv_{61} 605 \pmod{61}$$



۱۷- اگر $a + 7^{12}$ بر ۱۲ بخشپذیر باشد آنگاه کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱) ✓

$$7^{12} \equiv_{12} (7^2)^6 \times 7^0 \equiv_{12} 1^6 \times 7^0 \equiv_{12} 7$$

$$7^{12} + a \equiv_{12} 7 + a \equiv_{12} 0$$



۱۸- اگر $m + 5^{13}$ بر ۱۳ بخشپذیر باشد آنگاه کوچکترین عدد طبیعی دو رقمی m کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۸ (۳)

۲۱ (۲) ✓

۱۵ (۱)

$$5^{13} \equiv 5^{12} \equiv (5^2)^6 \times 5^1 \equiv (-1)^6 \times 5 \equiv 5$$

$$5^{12} + m \equiv 0 \Rightarrow 5 + m \equiv 0 \rightarrow m \equiv -5 \equiv 1 \equiv 21$$

$$m = 12k - 5 \geq 10$$



۱۹- اگر $a + 7^{13}$ بر 2^3 بخشپذیر باشد آنگاه کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

$$7^{13} \equiv 7^2 \pmod{8} \quad \text{و} \quad 7^2 \equiv (-1)^2 \pmod{8}$$

$$\equiv 1 \pmod{8} \quad \text{و} \quad 7^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$7^{13} + a \equiv 1 + a \pmod{8} \equiv 0 \pmod{8}$$

$$7^2 \equiv 49 \pmod{8} \equiv 1 \pmod{8}$$



۲۱- باقیمانده تقسیم 5^{20} بر ۴۱ کدام است؟

۴ (۱)

۸ (۲)

۱ (۳)

۷ (۴)

$$5^{20} \equiv (5^4)^5 \pmod{41} \equiv 625^5 \pmod{41}$$

$$625 \equiv 625 - 15 \times 41 = 625 - 615 = 10 \pmod{41}$$

$$10^5 \equiv 10^4 \times 10 \pmod{41}$$

$$10^2 \equiv 100 \equiv 100 - 2 \times 41 = 100 - 82 = 18 \pmod{41}$$

$$10^4 \equiv 18^2 \equiv 324 \equiv 324 - 7 \times 41 = 324 - 287 = 37 \pmod{41}$$

$$10^5 \equiv 37 \times 10 = 370 \equiv 370 - 9 \times 41 = 370 - 369 = 1 \pmod{41}$$

$$5^{20} \equiv 1 \pmod{41}$$



۲۲- اگر عدد $5^n - 1$ بر ۱۳ بخش پذیر باشد کوچکترین مقدار n کدام است؟

۱۲ (۱)

۶ (۲)

۱۴ (۳) ✓

۲ (۴)

$$\begin{aligned} & 5^n - 1 \equiv 0 \pmod{13} \\ & 5^n \equiv 1 \pmod{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 5^2 \equiv 25 \equiv 12 \pmod{13} \\ & 5^4 \equiv 12^2 \equiv 144 \equiv 1 \pmod{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 5^6 \equiv 12 \cdot 1 \equiv 12 \pmod{13} \\ & 5^8 \equiv 12^2 \equiv 1 \pmod{13} \end{aligned}$$



۲۳- اگر عدد $1 - 3^n$ بر ۱۱ بخش پذیر باشد کوچکترین مقدار n کدام است؟

۳ (۱)

۶ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

Handwritten solution in Persian:

$1 - 3^n \equiv 0 \pmod{11}$
 $3^n \equiv 1 \pmod{11}$
 ۳^۱ ≡ ۳
 ۳^۲ ≡ ۹
 ۳^۳ ≡ ۲۷ ≡ ۵
 ۳^۴ ≡ ۸۱ ≡ ۶
 ۳^۵ ≡ ۲۴۳ ≡ ۱
 پس $n=5$ صحیح است.



۲۴- اگر $7^n - 1$ بر ۲۵ بخشپذیر باشد، آنگاه n به کدام صورت است؟

(۱) $5k$

(۲) $3k$

(۳) $6k$

(۴) $4k$ ✓

$$7^n \equiv 25 \pmod{1}$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} 7^2 \equiv 25 \pmod{1} \\ 7^4 \equiv 25 \pmod{1} \end{array} \right\} \text{برابران ۲} \\ & \left. \begin{array}{l} 7^2 \equiv 25 \pmod{1} \\ 7^4 \equiv 25 \pmod{1} \end{array} \right\} \text{برابران ۳} \\ & \Rightarrow (7^4)^k \equiv 25 \pmod{1} \end{aligned}$$



۲۵- چند عدد دو رقمی n وجود دارد که عدد $1 - 8^n$ بر ۱۹ بخشپذیر است؟

۱۵ (۱) ✓

۶ (۲)

۷ (۳)

۱۶ (۴)

$$8^n \equiv 1 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow n = 4k$$

$$10 \leq 4k \leq 99$$

$$2 \leq k \leq 14$$

۱۵ جواب

Handwritten solution showing the cycle of powers of 8 modulo 19:

$$\begin{array}{l}
 8^1 \equiv 8 \pmod{19} \\
 8^2 \equiv 7 \pmod{19} \\
 8^3 \equiv 18 \pmod{19} \\
 8^4 \equiv 1 \pmod{19} \\
 8^5 \equiv 8 \pmod{19} \\
 8^6 \equiv 7 \pmod{19} \\
 8^7 \equiv 18 \pmod{19} \\
 8^8 \equiv 1 \pmod{19}
 \end{array}$$

The cycle length is 4. The powers of 8 that are congruent to 1 modulo 19 are $8^4, 8^8, 8^{12}, \dots$. The number of two-digit numbers n such that $8^n \equiv 1 \pmod{19}$ is the number of n in the range $10 \leq n \leq 99$ that are multiples of 4. These are $12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96$. There are 25 such numbers.



۲۶- اگر $1 - 5^n$ بر ۱۳ بخشپذیر باشد تعداد اعداد رقمی n کدام است؟

۲۲ (۱)

۲۳ (۲)

۱۵ (۳)

۱۶ (۴)

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

توان

$$5^n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{n-1}$$

$$n = 4k$$

$$10 \leq k \leq 99$$

$$2 \leq k \leq 24$$

۲۲ جواب



۲۷- اگر $42 + 7^n$ بر 43 بخشپذیر باشد تعداد اعداد طبیعی کمتر از ۵۰ برای n کدام است؟

۸ (۲)

۷ (۳)

۶ (۴)

۹ (۱)

$$7^n \equiv 42 - 43 \pmod{43}$$

$$n = 9k$$

$$1 \leq 9k < 50$$

$$1 \leq k \leq 5$$

