



پویش علمی  
جهاد





۲۸- اگر  $4^n + 1$  بر ۳ بخشپذیر باشد آنگاه  $n$  به کدام صورت است؟

$3k + 2$  (۴)

$6k$  (۳)

$3k$  (۲)

$6k + 3$  (۱) ✓

$$4^n + 1 \equiv 1 + 1 \pmod{3} \rightarrow 2 \pmod{3}$$

$$4^{2k+1} + 1 \equiv 4^{2k} \cdot 4 + 1 \equiv (16)^k \cdot 4 + 1 \equiv 1^k \cdot 4 + 1 \equiv 4 + 1 \equiv 5 \pmod{3} \equiv 2 \pmod{3}$$



۲۹- اگر  $3^n + 1$  بر ۴۱ بخشپذیر باشد، آنگاه تعداد اعداد طبیعی کمتر از ۵۰ برای  $n$  کدام است؟

۴ (۱)

۶ (۲) ✓

۷ (۳)

۸ (۴)

$$3^n + 1 \equiv 0 \pmod{41} \rightarrow 3^n \equiv -1 \pmod{41}$$

$$3^{2k+1} \equiv -1 \pmod{41}$$

$$3^{2k+1} \equiv -1 \pmod{41}$$

$$3^{2k+1} \equiv -1 \pmod{41}$$



۳۰- اگر  $5^n + 8$  بر ۱۱ بخشپذیر باشد تعداد اعداد طبیعی کمتر از ۳۰ برای  $n$  کدام است؟

۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

$$5^n + 8 \equiv 0 \pmod{11} \rightarrow 5^n \equiv -8 \equiv 3 \pmod{11}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 25 \\ \hline 22 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$5^{k+2} \equiv 5^k \pmod{11} \Rightarrow 5^{k+2} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\begin{aligned} 2 < k+2 < 11 \\ 2 < k < 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5^0 &\equiv 1 \\ 5^1 &\equiv 5 \\ 5^2 &\equiv 3 \\ 5^3 &\equiv 4 \\ 5^4 &\equiv 10 \\ 5^5 &\equiv 9 \\ 5^6 &\equiv 7 \\ 5^7 &\equiv 8 \\ 5^8 &\equiv 2 \\ 5^9 &\equiv 6 \\ 5^{10} &\equiv 1 \end{aligned}$$



۳۱- اگر  $7^n - 6$  بر  $43$  بخشپذیر باشد، آنگاه برای  $n$  چند مقدار طبیعی دورقمی بیشتر از  $70$  می توان پیدا کرد؟

۴ (۱)

۵ (۲) ✓

۶ (۳)

۷ (۴)

$$7^n \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^2 \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^4 \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^6 \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^8 \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{10} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{12} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{14} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{16} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{18} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{20} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{22} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{24} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{26} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{28} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{30} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{32} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{34} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{36} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{38} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{40} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{42} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{44} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{46} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{48} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{50} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{52} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{54} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{56} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{58} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{60} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{62} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{64} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{66} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{68} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^{70} \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^k \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^k \equiv 6 \pmod{43}$$

$$7^0 < 7^k < 7^9$$

$$1 < k < 9$$

۱۶  $k < 12$  جواب ۵



قضیه فرما: اگر عدد اول باشد و  $(a, p) = 1$  آنگاه  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

$$\begin{aligned} 6 &\equiv 6 \pmod{7} \\ 6^2 &\equiv 1 \pmod{7} \\ 6^3 &\equiv 6 \pmod{7} \\ 6^4 &\equiv 1 \pmod{7} \\ 6^5 &\equiv 6 \pmod{7} \\ 6^6 &\equiv 1 \pmod{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 &\equiv 12 \pmod{13} \\ 12^2 &\equiv 1 \pmod{13} \\ 12^3 &\equiv 12 \pmod{13} \\ 12^4 &\equiv 1 \pmod{13} \\ 12^5 &\equiv 12 \pmod{13} \\ 12^6 &\equiv 1 \pmod{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14 &\equiv 14 \pmod{17} \\ 14^2 &\equiv 1 \pmod{17} \\ 14^3 &\equiv 14 \pmod{17} \\ 14^4 &\equiv 1 \pmod{17} \\ 14^5 &\equiv 14 \pmod{17} \\ 14^6 &\equiv 1 \pmod{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23 &\equiv 23 \pmod{29} \\ 23^2 &\equiv 1 \pmod{29} \\ 23^3 &\equiv 23 \pmod{29} \\ 23^4 &\equiv 1 \pmod{29} \\ 23^5 &\equiv 23 \pmod{29} \\ 23^6 &\equiv 1 \pmod{29} \end{aligned}$$

مثال ۱: باقیمانده‌ی تقسیم‌های زیر را بدست آورید.

(الف) باقیمانده تقسیم  $6^{11}$  بر ۱۱

$$6^{11} \equiv 6 \pmod{11}$$

فرما



$$\begin{array}{r} 94 \\ 13 \overline{) 95} \\ \underline{-1} \end{array}$$

(ب) باقیمانده تقسیم  $8^{100}$  بر  $13$

$$8^{100} \equiv 13 \pmod{13} \quad 8^2 \equiv 64 \pmod{13} \equiv 12 \pmod{13} \quad 8^4 \equiv 12^2 \pmod{13} \equiv 1 \pmod{13}$$

فرما

(پ) باقیمانده تقسیم  $14^{200}$  بر  $19$

$$14^{200} \equiv 19 \pmod{19} \quad 14^2 \equiv 196 \pmod{19} \equiv 4 \pmod{19} \quad 14^4 \equiv 4^2 \pmod{19} \equiv 16 \pmod{19}$$

فرما



ت) باقیمانده تقسیم  $6^{392}$  بر ۳۱

$$6^{392} \equiv 5 \pmod{31}$$

$$6^{392} \equiv 6^{30} \times 6^2 \pmod{31}$$

$$6^{30} \equiv 1 \pmod{31}$$

$$6^2 \equiv 36 \equiv 5 \pmod{31}$$

ث) باقیمانده تقسیم  $17^{48} - 363$  بر ۷

$$17^{48} - 363 \equiv -29 \pmod{7}$$

$$17^{48} - 363 \equiv 1 - 1 \times 27 \pmod{7}$$

$$17^{48} - 363 \equiv 1 - 27 \pmod{7}$$

$$17^{48} - 363 \equiv 1 - 2 \pmod{7}$$

$$17^{48} - 363 \equiv -1 \pmod{7}$$

$$17^{48} - 363 \equiv 6 \pmod{7}$$





$$\begin{array}{r} 225 \overline{) 29} \\ 232 \\ \hline -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 149 \overline{) 29} \\ 174 \\ \hline -5 \end{array}$$

ج) باقیمانده تقسیم  $1361 - 15^9$  بر 29

$$\begin{array}{r} 29 \\ \hline 15^9 - 1361 \end{array} \equiv \begin{array}{r} 29 \\ \hline (15^{21})^3 \times 15^4 - (1361)^2 \times 13^7 \end{array} \equiv$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \hline (225)^2 - (149)^2 \times 13 \end{array} \equiv \begin{array}{r} 29 \\ \hline (7-7)^2 - (-5)^2 \times 13 \end{array} \equiv -49 \times 7 + 125 \times 13$$

ج) باقیمانده تقسیم  $25^{200} + 26^{200} + \dots + 36^{200}$  بر 41

$$\begin{array}{r} 29 \\ \hline 1 \times 7 + 1 \times 13 \end{array} \equiv 1(20) \equiv 1(-9) \equiv -72 \equiv 15$$

$$25^{200} + 26^{200} + 27^{200} + \dots + 36^{200}$$

$$(25^{200})^5 + (26^{200})^5 + (27^{200})^5 + \dots + (36^{200})^5$$

فرما

$$\begin{array}{r} 41 \\ \hline 1 + 1 + \dots + 1 \end{array} \equiv 12$$

تا 12



۲- باقیمانده تقسیم  $۳۳^{۱۲۰} + \dots + ۱۶^{۱۲۰} + ۱۵^{۱۲۰} + ۱۴^{۱۲۰}$  بر  $۱۳$  کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۹ (۳) ۳ (۴) ۶

$$\begin{aligned} & (14^{120})^{10} + (15^{120})^{10} + \dots + (29^{120})^{10} \\ & \quad \quad \quad + (29^{120})^{10} \\ & \quad \quad \quad \text{صفر} \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \equiv_{13} 1 + 1 + \dots + 1 \\ & \quad \quad \quad \text{فردا} \\ & \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{20-1} \\ & \quad \quad \quad \equiv_{13} 19 \equiv_{13} 6 \end{aligned}$$



۳- باقیمانده تقسیم  $1444^{900} + \dots + 1403^{900} + 1402^{900} + 1401^{900}$  بر ۱۱ کدام است؟

۸ (۴)

۳ (۳)

۷ (۲) ✓

۴ (۱)

$$= 1444^{900} + \dots + 1403^{900} + 1402^{900} + 1401^{900} \pmod{11}$$

۴ - ۴  
← مضرب ۱۱



۴- باقیمانده تقسیم عدد  $۱۴۰^{۸۰۱} + \dots + ۱۰۳^{۸۰۱} + ۱۰۲^{۸۰۱} + ۱۰۱^{۸۰۱}$  بر ۱۷ کدام است؟

۱۳ (۴)

۹ (۳) ✓

۷ (۲)

۱۴ (۱)

$$\equiv_{17} ۱۴ \cdot (۱۴^{۸۰۰})^{۵} + \dots + (۱۰۲^{۸۰۰})^{۵} + (۱۰۱^{۸۰۰})^{۵}$$

$$\equiv_{17} ۱۴ \cdot (۱۴ + ۱۰۱) - \underbrace{۱۰۲ - ۱۱۹ - ۱۳۶}_{\text{صفر}} \equiv_{17} ۱۴ \cdot (۱۱۵) - ۰ \equiv_{17} ۱۴ \cdot (-۱ + ۴) \equiv_{17} ۹$$



قاعده‌ی ضرب پیمانه‌ها (ادغام): اگر اعداد صحیحی باشند که  $a \equiv b \pmod{m}$  و  $a \equiv b \pmod{n}$

$$a \equiv b \pmod{[m,n]}$$

آنگاه

مثال ۱: اگر  $a \equiv 1 \pmod{7}$  و  $a \equiv 1 \pmod{8}$  باقیمانده‌ی تقسیم  $a$  بر ۵۶ و ۲۸ را بدست آورید.

Handwritten derivation showing the relationship between congruences modulo 7 and 8, and their combination modulo 56. It shows a congruence modulo 7, an arrow pointing to a congruence modulo 56 with '۵۶' circled, and another congruence modulo 8. A blue arrow points from the circled '۵۶' to the text 'کاهش پیمانه' (reducing the modulus).



مثال ۲: اگر  $a \equiv 1 \pmod{5}$  و  $a \equiv 2 \pmod{6}$  باقیمانده‌ی تقسیم  $a$  بر  $30$  را بدست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv 1 \pmod{5} \\ a \equiv 6 \pmod{5} \\ a \equiv 11 \pmod{5} \\ a \equiv 16 \pmod{5} \\ a \equiv 21 \pmod{5} \\ a \equiv 26 \pmod{5} \end{array} \right\} a \equiv 26 \pmod{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv 2 \pmod{6} \\ a \equiv 8 \pmod{6} \\ a \equiv 14 \pmod{6} \\ a \equiv 20 \pmod{6} \\ a \equiv 26 \pmod{6} \end{array} \right\} a \equiv 26 \pmod{6}$$



مثال ۳: اگر  $a \equiv 2 \pmod{6}$  و  $a \equiv 4 \pmod{8}$  باقیمانده‌ی تقسیم  $a$  بر  $۱۲$  چقدر است؟

$$\begin{array}{l}
 a \equiv 2 \pmod{6} \\
 a \equiv 4 \pmod{8}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 a \equiv 4 \pmod{8} \\
 a \equiv 2 \pmod{6}
 \end{array}
 \right.
 \begin{array}{l}
 [1, 6] \\
 [2, 8]
 \end{array}
 \rightarrow a \equiv 10 \pmod{24}$$

$$a \equiv 10 \pmod{24} \rightarrow a \equiv 10 \pmod{12} \rightarrow a \equiv 10 \pmod{12}$$



مثال ۴: اگر  $a \equiv 2 \pmod{12}$  و  $a \equiv 8 \pmod{15}$  باقیمانده‌ی تقسیم  $a$  بر ۲۰ را بیابید.

$$\begin{array}{l}
 a \equiv 2 \pmod{12} \rightarrow a \equiv 2 \pmod{4} \equiv -2 \\
 a \equiv 8 \pmod{15} \rightarrow a \equiv 8 \pmod{5} \equiv 3 \equiv -2
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} a \equiv 2 \pmod{12} \\ a \equiv 8 \pmod{15} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} [4, 5] \\ a \equiv -2 \\ a \equiv -2 \\ a \equiv 18 \end{array}$$





تست ۵: باقیمانده‌ی  $3^{101}$  بر ۵۵ چقدر است؟

۱ (۱)

۱۱ (۲)

۳ (۳) ✓

۳۶ (۴)

$$55 = [11 \cdot 5]$$

$$\left. \begin{array}{l} 3^{101} \pmod{55} \\ 3^{101} \pmod{11} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3^{101} \pmod{5} \\ 3^{101} \pmod{11} \end{array}$$



تست ۶: باقیمانده‌ی  $3^{1000}$  بر ۵۶ چقدر است؟

۲۵ (۱) ✓

۳۳ (۲)

۳۹ (۳)

۱۱ (۴)

$$56 = [7, 8]$$

$$\left. \begin{aligned} 3^{1000} &\equiv 1 \pmod{7} \\ 3^{1000} &\equiv 1 \pmod{8} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\dots \equiv 1 \pmod{7} \\ &\dots \equiv 1 \pmod{8} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 3^{1000} &\equiv 3 \pmod{7} \\ 3^{1000} &\equiv 3 \pmod{8} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\dots \equiv 3 \pmod{7} \\ &\dots \equiv 3 \pmod{8} \end{aligned}$$



تست ۷: باقیمانده‌ی  $2^{111}$  بر ۷۷ چقدر است؟

~~۲۳ (۱)~~

۵۷ (۲) ✓

~~۴۳ (۳)~~

~~۱۳ (۴)~~

~~$77 = [7, 11]$~~

$$\left. \begin{array}{l} 2^{111} \\ 2^{110} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \equiv 2 \pmod{7} \\ \equiv 1 \pmod{7} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2^{111} \equiv 2 \pmod{7} \\ 2^{110} \equiv 1 \pmod{7} \end{array}$$



تست ۸: باقیمانده‌ی تقسیم  $7^{16} + 12^{16}$  بر ۸۴ کدام است؟

~~۵۷ (۳)~~

~~۴۶ (۲)~~

~~۲۳ (۱)~~

$84 = [7 \text{ و } 12]$  <sup>۳۷ (۴)</sup>

$$\begin{array}{l} 12^{16} + 7^{16} \equiv 12 + (7^{16}) \pmod{84} \equiv 12 + 1 \pmod{84} \\ 12^{16} + 7^{16} \equiv 12 + 7 \pmod{84} \end{array}$$

?



تست ۹: باقیمانده‌ی تقسیم  $9 \times (24^{23} - 21^{23})$  بر ۵۶ کدام است؟

۱ (۱)

۳ (۲) ✓

۵ (۳)

۷ (۴)

$$56 = [1, 7]$$

$$(24^{23} - 21^{23}) \times 9 \equiv (0 - 5^{23}) \times 1 \equiv -(5^2)^{11} \times 5 \equiv -5$$

$$(24^{23} - 21^{23}) \times 9 \equiv ?$$



تست ۱۰: باقیمانده‌ی تقسیم  $۱۳۳ \times (۲۴۱^{۲۱} - ۲۱^{۹۸})$  بر ۷۲ کدام است؟

۲۷ (۱) ✓

۳۶ (۲)

۴۵ (۳)

۵۴ (۴)

$$۷۲ = [۱۸, ۹]$$

$$(۲۴۱^{۲۱} - ۲۱^{۹۸}) \times ۱۳۳ \equiv (۰ - ۰) \times ۱۳۳ \equiv ۰$$

$$(۲۴۱^{۲۱} - ۲۱^{۹۸}) \times ۱۳۳ \equiv (۰ - ۵^{۹۸}) \times ۵ \equiv -(۵^2)^{۴۹} \times ۵ \equiv -۱ \times ۵$$



تست ۱۱: اگر  $2^n - 1$  بر ۳۵ بخشپذیر باشد، آنگاه  $n$  به کدام صورت است؟

$$8k \quad (۴)$$

$$6k \quad (۳)$$

$$12k \quad (۲) \quad \checkmark$$

$$6k + 3 \quad (۱)$$

$$2^n = [5, 7]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^n \equiv 1 \pmod{5} \rightarrow n = 4k' \\ 2^n \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow n = 6k'' \end{array} \right. \Rightarrow n = 12k$$



تست ۱۲: اگر  $2^n - 1$  بر ۲۱۷ بخشپذیر باشد، آنگاه تعداد اعداد دورقمی  $n$  کدام است؟

۷ (۱)

۶ (۲) ✓

۵ (۳)

۴ (۴)

$$217 = [4, 19, 7]$$

$$\left. \begin{array}{l} 2^n \equiv 1 \pmod{4} \rightarrow n = 2q \\ 2^n \equiv 1 \pmod{19} \rightarrow n = 18q' \end{array} \right\} \Rightarrow n = 18k$$

$$10 \leq 18k \leq 99$$

$$1 \leq k \leq 5$$





تست ۱۳: اگر  $5^n + 1$  بر ۹۱ بخشپذیر باشد، آنگاه  $n$  به کدام صورت است؟

$$\begin{array}{cccc} (۱) & 5k + 6 & (۲) & 12k \\ (۳) & 1 + 6k & (۴) & 12k \end{array} \rightarrow 5^n \equiv -1 \pmod{91} \rightarrow 5^n + 1 \equiv 0 \pmod{91}$$

$$91 = [13, 7]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5^6 \equiv -1 \pmod{7} \rightarrow 5^2 \equiv -1 \pmod{7} \text{ و } 5^4 \equiv 1 \pmod{7} \rightarrow 5^{4k} \equiv 1 \pmod{7} \\ 5^6 \equiv -1 \pmod{13} \rightarrow 5^2 \equiv -1 \pmod{13} \text{ و } 5^4 \equiv 1 \pmod{13} \rightarrow 5^{4k+2} \equiv -1 \pmod{13} \end{array} \right.$$



نکته: به کمک بسط دو جمله ای نیوتن (خیام) داریم:

مقریب  $a$   $b$

$$(a + b)^n \equiv a^n + b^n$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$(a+b)^n \equiv a^n + b^n$$

$$(5+9)^n \equiv 5^n + 9^n$$

۱- عدد  $17^{10} - 11^{10} - 6^{10}$  بر عدد  $99$  بخش پذیر است.

$$17^{10} \equiv 11^{10} + 6^{10}$$





۲- باقیمانده‌ی تقسیم  $19^{14} - 12^{14} - 7^{14}$  بر  $84$  کدام است؟

۲۱ (۴)

۱۲ (۳)

صفر (۲) ✓

۲۳ (۱)

$$19^{14} \equiv 12 \times 7 \pmod{84} \equiv 12^{14} + 7^{14} \pmod{84}$$

$$\Rightarrow 19^{14} - 12^{14} - 7^{14} \equiv 0 \pmod{84}$$



۳- باقیمانده‌ی تقسیم  $12^{99} + 5^{99} + 7^{99}$  بر  $(35)$  کدام است؟

$$12^{99} \equiv 5^{99} + 7^{99} \pmod{35}$$

۲۱ (۴)

۱۱ (۳)

۲۶ (۲) ✓

~~۱۹ (۱)~~

$$\Rightarrow 12^{99} + 5^{99} + 7^{99} \equiv 5^{99} + 12^{99} \pmod{35}$$

$$\equiv 2 \times 12^{99}$$

$$\equiv 2 \times 2^{99} \equiv 2 \times (2^4)^{25} \equiv 2 \times 16^{25} \equiv 2 \pmod{35}$$

$$\equiv 2 \times (-2)^{99} \equiv -2^{100} \equiv -2 \pmod{35}$$

$$- (2^4)^{25} \times 2 \equiv -16^{25} \times 2 \equiv -2 \pmod{35}$$



۴- به ازای هر عدد طبیعی  $n$  عبارت  $28^n - 11^n - 17^n$  بر  $m$  بخشپذیر است، اگر  $m$  بیشترین مقدار ممکن باشد آنگاه باقیمانده تقسیم  $(195 - m)!$  بر  $11$  کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳) ✓

۱۰ (۲)

۱ (۱)

$$28^n \equiv 11^n + 17^n$$

$$\rightarrow m = 187$$

$$(195 - 187)! \equiv 1! \equiv 1 \times 7 \times 4 \times 5 \times 4 \times 2 \times 2 \equiv 5$$



۵- به ازای هر عدد طبیعی  $n$  عبارت  $25^n - 11^n - 14^n$  بر  $m$  بخشپذیر است، اگر  $m$  بیشترین مقدار دورقمی ممکن باشد آنگاه باقیمانده تقسیم  $m!$  بر  $1000$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۱۰

(۳) ۵

(۴) صفر ✓

$$25^n - 11^n - 14^n \equiv 0 \pmod{11 \times 14}$$

$$77! \equiv 0 \pmod{1000}$$



## رقم یکان:

رقم یکان هر عدد باقی مانده‌ی تقسیم بر ۱۰ است، پس کافی است همنهشتی به پیمانه‌ی ۱۰ را

در نظر بگیریم:

$a$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$a^2$	۰	۱	۴	۹	۶	۵	۶	۹	۴	۱
$a^3$	۰	۱	۸	۷	۴	۵	۶	۳	۲	۹
$a^4$	۰	۱	۶	۱	۶	۵	۶	۱	۶	۱
$a^5$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۴	۷	۸	۹
$a^6$	۰	۱	۴	۹	۶	۵	۶	۹	۴	۱
$a^7$	۰	۱	۸	۷	۴	۵	۶	۳	۲	۹



نکته ۱: اگر به توان عددی ۴ واحد اضافه یا کم کنیم رقم یکان عوض نمی شود.

$$a^n \equiv a^{n+4k} \equiv a^{n-4k}$$

۱- اگر  $a^n \equiv 1$  آنگاه رقم یکان  $a^{5n+1}$  را بیابید.

$$a^{5n+1} \equiv a^{n+4n+1} \equiv 1$$





۲- اگر  $a^{2n} \equiv 4 \pmod{8}$  آنگاه کدام گزینه درست است؟

$$a^{4n} \equiv 8 \pmod{8} \quad (\times)$$

$$a^n \equiv 8 \pmod{8} \quad (\times)$$

$$a^{2 \cdot n} \equiv 4 \pmod{8} \quad (\times)$$

$$\underline{a^{1 \cdot n} \equiv 4 \pmod{8}} \quad (\checkmark)$$

$$a^{2n+1n} \equiv 4 \pmod{8}$$



نکته ۲: اگر رقم یکان عددی برابر صفر یا ۱ یا ۵ یا ۶ باشد، توان در محاسبه رقم یکان بی تاثیر است.

۳- رقم یکان عدد  $۱^{۹۷} + ۵^{۹۸} + ۶^{۹۹}$  را بدست آورید.

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 + 5 + 6 \equiv 12 \end{array}$$



۴- رقم یکان عدد  $(5^{2n} + 6^{2n+3}) + 11^{2n-1} \times 5^{211}$  را بیابید.

$$\downarrow$$
$$(5 + 6) + 1 \times 5 \stackrel{!}{=} 9$$



نکته ۳: اگر رقم یکان عددی برابر ۴ یا ۹ باشد برای محاسبه رقم یکان توان های این عدد به زوج یا فرد بودن توان توجه می کنیم.

$$4^{2n} \equiv 6 \pmod{10} \quad \text{و} \quad 4^{2n+1} \equiv 4 \pmod{10}$$

$$9^{2n} \equiv 1 \pmod{10} \quad \text{و} \quad 9^{2n+1} \equiv 9 \pmod{10}$$



۵- رقم یکان عدد  $5^{98} - 4^{92} + 4^{102} \times (9^{101} + 6^{101})$  را بدست آورید.

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \text{زوج} \quad \downarrow \text{زوج} \quad \downarrow \text{زوج} \quad \downarrow \text{زوج} \quad \downarrow \text{زوج} \\
 (6 + 9) \times 6 + 6 - 5 \equiv 1
 \end{array}$$



نکته ۴: برای محاسبه رقم یکان  $a^b$  باید توان را بر ۴ تقسیم کنیم و بجای توان، باقیمانده تقسیم بر ۴ را جایگزین کنیم. در حالتی که باقیمانده صفر می شود باید توان را برابر ۴ در نظر بگیریم.

$$\underline{b = 4q + r} \Rightarrow a^b \equiv a^{b-4q} \equiv a^r$$

$$b = 4q \Rightarrow a^b \equiv a^4$$



مثال : رقم یکان عددهای زیر را بدست آورید.

$$1) \quad 11101 + 12101 + 13101$$

↓ خورش  
 $11101 = 1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$   
 $12101 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$   
 $13101 = 1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$

$$2) \quad 23100 + 24100 + 25100$$

↓ خورش  
 $23100 = 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$   
 $24100 = 2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$   
 $25100 = 2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$



۳)  $1396^{1397} + 1397^{1396}$

$\equiv 9 + 1 \equiv 10 \pmod{10}$

$1396 = 4k$

خوارش

۴)  $135^{5n^2+1} + 134^{n^2+n} + 20!$

انقض  
انقض

$5 + 9 + 0 \equiv 1 \pmod{10}$

$m! \equiv 0, m \geq 5$





$$\begin{aligned}
 & 5) \quad 91^{92} + 92^{93} + 93^{94} + \dots + 99^{100} \\
 & \quad \downarrow \quad \downarrow^{(k+1)} \quad \downarrow^{(k+2)} \quad \text{فرز} \quad \downarrow^{k+2} \quad \downarrow^{k+2} \quad \downarrow^{2k} \\
 & \equiv 1 + 2 + 2^2 + 3 + 5 + 6 + 7^2 + 1^2 + 1 \equiv 1 \\
 & \equiv 1 + 2 + 9 + 2 + 5 + 6 + 9 + 2 + 1 \equiv 2 + 5 + 2 \equiv 9 \\
 & 6) \quad (1 + 2 + 3 + \dots + 99)^{98} \\
 & \quad \equiv \left( \frac{99 \times 100}{2} \right)^{98} \equiv (99 \times 50)^{98} \equiv \dots
 \end{aligned}$$



$$7) (1! + 2! + 3! + \dots + 14 \cdot 2!)^{1+2+3+\dots+99} \equiv (1+2+4+4+\dots)^{99 \times 50}$$

$$\begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ 99 \times 50 & k+2 \\ \equiv 10 & \equiv 2 \\ \equiv 9 & \end{matrix}$$

$$8) (1! + 3! + 5! + \dots + 1399!)^{1!+2!+3!+\dots+99!} \equiv (1+9+\dots)^{1!+2!+\dots}$$

$$\begin{matrix} \equiv 10 \\ \equiv 9 \\ \equiv 9 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \equiv 10 \\ \equiv 9 \\ \equiv 9 \end{matrix}$$



$$9) (2! + 4! + 6! + \dots + 4 \cdot 4!)^{1+3+5+\dots+99}$$

$\xrightarrow{\text{صفر}}$

$$\equiv_{10} (2+4+\dots)^{99 \times 50} \equiv_{10} 2^{99 \times 50} \equiv_{10} 2^{4950}$$

$$10) (2! + 3! + 4! + \dots + 44!)^{99!}$$

$\xrightarrow{\text{صفر}}$

$$\equiv_{10} (2+3+4+\dots)^{99!} \equiv_{10} 2^{99!}$$

$$\equiv_{10} 2^{4k} \equiv_{10} 2^2 \equiv_{10} 4$$



۱۱- اگر  $a \equiv 3 \pmod{10}$  و  $b \equiv 8 \pmod{10}$  آنگاه رقم یکان  $(a+1)(a+2) + (b+3)(b+3)$  را بیابید.

$$\equiv (3+1)(3+2) + (8+3)(8+3) \equiv 4 \times 5 + 1 \times 1 \equiv 1 \pmod{10}$$



۱۲- اگر  $a \equiv 7 \pmod{10}$  آنگاه رقم یکان  $(2a + 2)^{101} + (a + 1)^{99}$  را بیابید.

$$\begin{aligned} & \equiv_{10} (1)^{99} + (2)^{101} \equiv_{10} \\ & \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} k+2 \\ \hline 2 \end{array} \right\} \downarrow \\ 1 + \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{جورس} \\ \downarrow \\ 2 + 2 \equiv_{10} 1 \end{array} \end{aligned}$$



۱۳- اگر  $a \equiv 1 \pmod{10}$  و  $b \equiv 8 \pmod{10}$  آنگاه رقم یکان  $(a+1)^{100} - (b+3)^{100}$  را بیابید.

$$\begin{array}{r}
 2100 \\
 - \quad 100 \\
 \hline
 2000
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 100 \\
 - \quad 10 \\
 \hline
 90
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 10 \\
 - \quad 1 \\
 \hline
 9
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2000 \\
 - \quad 90 \\
 \hline
 1910
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 90 \\
 - \quad 9 \\
 \hline
 81
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 9 \\
 - \quad 1 \\
 \hline
 8
 \end{array}$$



۱۴- اگر دو عدد  $4a$  و  $5a + 6$  رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان  $a^{200} - a$  کدام است؟

۶ (۴)

۲ (۳) ✓

۴ (۲)

۸ (۱)

$$5a + 6 \equiv 4a \pmod{10} \rightarrow a \equiv -6 \pmod{10} \rightarrow a \equiv 4 \pmod{10}$$

$$a^{200} - a \equiv 4^{200} - 4 \pmod{10}$$

↓  
زوج

$$4^{200} - 4 \equiv 6 - 4 \equiv 2 \pmod{10}$$



۱۵- اگر  $a$  عدد اول دو رقمی باشد و دو عدد  $۱۳۴$  و  $۲۳۱$  به پیمانه  $a$  همنهشت باشند، رقم یکان  $a^a$  را بیابید.

$$۲۳۱ \equiv ۱۳۴ \pmod{a} \rightarrow a \mid ۲۳۱ - ۱۳۴ \rightarrow a \mid ۹۷$$

$$a = ۱۳ و ۲۹$$

$$a = ۲۹ \rightarrow a^a \equiv ۲۹ \pmod{۹}$$

۲۹  
۱۱۱  
۹

فرد





۱۶- اگر  $a$  عدد اول باشد و دو عدد  $۹۹$  و  $۳۹۳$  به پیمانه  $a^2$  همبخت باشند، آنگاه

رقم یکان  $a^{۱۴۰۲}$  را بیابید.

$$۳۹۳ \equiv ۹۹ \pmod{a^2} \rightarrow a^2 \mid ۳۹۳ - ۹۹$$

$$a^2 \mid ۲۹۴$$

$$a^2 \mid ۲ \times ۳^۲ \times ۷ \rightarrow a^2 = ۳^۲ \rightarrow a = ۳$$

$$a^{۱۴۰۲} \equiv ۱۰ \pmod{۳^۲} \quad \begin{matrix} \text{ک} \\ \text{ک}+۲ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} ۳^۲ \\ ۱۰ \end{matrix} \equiv ۹$$



۱۷- اگر دو عدد  $a^2 - 1$  و  $4a - 5$  رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان  $a^3 + 3a$  کدام است؟

۹ (۴)

۲ (۳)

۴ (۲) ✓

۷ (۱)

$$a^2 - 1 \equiv 4a - 5 \pmod{10} \rightarrow a^2 - 4a + 4 \equiv 0 \pmod{10}$$

$$(a-2)^2 \equiv 0 \pmod{10} \xrightarrow{\text{مربع عددی مقربا}} a-2 \equiv 0 \pmod{10} \rightarrow a \equiv 2 \pmod{10}$$

چون خود عدد مقربا.

$$a^3 + 3a \equiv 2^3 + 3 \times 2 \equiv 1 + 6 \equiv 7 \pmod{10}$$



۱۸- اگر دو عدد  $a^2 - 1$  و  $14a + 6$  رقم یکسان برابر داشته باشند، رقم یکسان  $a^2 + a$  کدام است؟

۸ (۴)

۲ (۳) ✓

۳ (۲)

۷ (۱)

$$a^2 - 1 \equiv 14a + 6 \rightarrow a^2 - 14a - 6 \equiv 0$$

$$a^2 - 14a + 49 \equiv 0 \rightarrow (a - 7)(a - 7) \equiv 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \equiv 7 \rightarrow a^2 + a \equiv 7 + 7 \equiv 14 \\ a \equiv 7 \rightarrow a^2 + a \equiv 49 + 7 \equiv 56 \end{array} \right.$$



۱۹- اگر دو عدد  $a^2 + a$  و  $11a + 9$  رقم یکسان برابر داشته باشند، رقم یکسان  $a^4 - a^2$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲) ✓

۱ (۱)

$$a^2 + a - 11a - 9 \equiv 0$$

$$\underline{a^2 - 10a - 9 \equiv 0}$$

$$a^2 - 10a + 21 \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \equiv 12 \\ a \equiv 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - a^2 \\ a^2 - a^2 \end{cases} \equiv \begin{matrix} (a-12)(a-7) \equiv 0 \\ 1-9 \equiv -8 \\ 1-9 \equiv -8 \end{matrix}$$



۲۰- باقیمانده تقسیم عدد  $51^{98} + 31^{202}$  بر ۷۰ کدام است؟

۲۲ (۱) ✓

۴۳ (۲) ✓

۱۴ (۳) ✓

۵۰ (۴) ✓

$$[70 | 10] = 20$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \hline \hline \hline \end{array} + \begin{array}{r} 1 \\ \hline \hline \hline \end{array}$$



تقسیم طرفین همنهشتی: اگر بخواهیم طرفین همنهشتی را ساده کنیم، لازم است در صورت امکان پیمانه را نیز ساده کنیم، البته اگر پیمانه قابل ساده شدن نباشد آن را تغییر نمی‌دهیم.

$$ac \equiv_m bc \Rightarrow a \equiv_{(m,c)} b$$



۱- اگر  $۵۲ \equiv ۴a \pmod{۱۲}$  باقیمانده تقسیم  $a$  بر ۳ چقدر است؟



۲- اگر  $۱ + ۶a \equiv ۲۵ \pmod{۳۰}$  باقیمانده تقسیم  $a$  بر ۵ چقدر است؟





۳- اگر عبارت  $135 + 6a$  بر ۵ بخشپذیر باشد، آنگاه باقیمانده تقسیم  $a$  بر ۵ چقدر است؟



۴- اگر عبارت  $1 - 6a$  بر  $11$  بخشپذیر باشد، آنگاه باقیمانده تقسیم  $a$  بر  $11$  را بیابید.



۵- اگر  $12b \equiv 18a$  کدام نتیجه گیری درست نیست؟

$$a \equiv 2b \quad (۴)$$

$$4a \equiv 8b \quad (۳)$$

$$3a \equiv 6b \quad (۲)$$

$$4a \equiv 18b \quad (۱)$$



۶- اگر  $12a \equiv 18b \pmod{9}$  کدام نتیجه گیری به پیمانه‌ی ۳ درست نیست؟

$$a \equiv 0 \pmod{3}$$

$$2 \equiv b \pmod{3}$$

$$4a \equiv 6b \pmod{3}$$

$$2a \equiv 3b \pmod{3}$$



۷- اگر  $20a \equiv 28b \pmod{70}$  کدام نتیجه گیری درست نیست؟

$$a \equiv 0 \pmod{7} \quad (۴)$$

$$b \equiv 0 \pmod{7} \quad (۳)$$

$$5a \equiv 7b \pmod{7} \quad (۲)$$

$$5a \equiv 42b \pmod{35} \quad (۱)$$



۸- اگر  $18b \equiv 36a^{24}$  کدام نتیجه گیری به پیمانه‌ی ۴ درست است؟

$$a \equiv 0 \pmod{4}$$

$$b \equiv 2a \pmod{4}$$

$$a \equiv 2b \pmod{4}$$

$$a \equiv b \pmod{4}$$



۹- عبارت  $[۲]_۵ \cap [۱]_۴$  را به کدام فرم می توان نوشت؟

(۱)  $[۲]_۲$

(۲)  $[۷]_۲$

(۳)  $[۱۲]_۲$

(۴)  $[۱۷]_۲$



۱۰- دو مجموعه  $E$  [۵] و  $H$  [۲] چند عضو مشترک دو رقمی دارند؟





پویش علمی  
جهاد

