



پویش علمی
جهاد





20- باقیمانده تقسیم عدد $51^{98} + 31^{202}$ بر 70 کدام است؟

(1) 22

(2) 43

(3) 14

(4) 50



تقسیم طرفین همنهشتی: اگر بخواهیم طرفین همنهشتی را ساده کنیم، لازم است در صورت امکان پیمانه را نیز ساده کنیم، البته اگر پیمانه قابل ساده شدن نباشد آن را تغییر نمی‌دهیم.

$$ac \equiv bc \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{(m, c)}}$$

$$9 \equiv 18 \pmod{18} \xrightarrow[\text{gcd}(18, 9)=9]{\div 9} 1 \equiv 2 \pmod{2} \rightarrow 1 \equiv 2 \pmod{2}$$

$$9 \equiv 27 \pmod{27} \xrightarrow[\text{gcd}(27, 9)=9]{\div 9} 1 \equiv 3 \pmod{3}$$



1- اگر $a \equiv 52 \pmod{12}$ باقیمانده تقسیم a بر 3 چقدر است؟

$$a \equiv 52 \pmod{12} \xrightarrow{\div 3}$$

$$a \equiv 17 \pmod{12} \rightarrow a \equiv 5 \pmod{12} \\ \rightarrow a \equiv 1 \pmod{3}$$



2- اگر $6a + 1 \equiv 25 \pmod{30}$ باقیمانده تقسیم a بر 5 چقدر است؟

$$9a \equiv 24 \pmod{30} \xrightarrow{\div 9} a \equiv 4 \pmod{5}$$



3- اگر عبارت $6a + 135$ بر 5 بخشپذیر باشد، آنگاه باقیمانده تقسیم a بر 5 چقدر است؟

$$\cancel{6a + 135} \equiv 0 \rightarrow 6a \equiv 0 \xrightarrow{\div 6} a \equiv 0$$

مضرب 6



4- اگر عبارت $a - 1$ بر 11 بخشپذیر باشد، آنگاه باقیمانده تقسیم a بر 11 را بیابید.

$$9a - 1 \equiv 0 \pmod{11} \rightarrow 9a \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\rightarrow 9a \equiv 12 \pmod{11}$$

$$\begin{array}{l} \div 9 \\ \hline \rightarrow a \equiv 2 \pmod{11} \end{array}$$



5- اگر $6a \equiv 12b \pmod{18}$ کدام نتیجه گیری درست نیست؟

$$\checkmark a \equiv 2b \pmod{4} \quad (4)$$

$$\checkmark 4a \equiv 8b \pmod{6} \quad (3)$$

$$\checkmark 3a \equiv 6b \pmod{9} \quad (2)$$

$$4a \equiv 18b \pmod{9} \quad (1)$$

$$9a \equiv 12b \xrightarrow{\div 3} a \equiv 2b \xrightarrow{\times 3} 3a \equiv 6b$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3a \equiv 12b \xrightarrow[\text{بماند}]{\text{کاهش}} 3a \equiv 6b$$



6- اگر $12a \equiv 18b \pmod{9}$ کدام نتیجه گیری به پیمانه‌ی 3 درست نیست؟

$$\sqrt{a \equiv 0 \pmod{4}} \quad (4)$$

$$\boxed{2 \equiv b \pmod{3}} \quad (3)$$

$$\sqrt{4a \equiv 6b \pmod{2}} \quad (2)$$

$$\sqrt{2a \equiv 3b \pmod{1}} \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\div 9} 2a \equiv 2b \pmod{4} \xrightarrow{\times 2} 4a \equiv 4b \pmod{8} \\ \text{صفر} \end{array}$$

$$\rightarrow 2a \equiv 0 \pmod{4} \xrightarrow{\div 2} a \equiv 0 \pmod{2}$$



7- اگر $20a \equiv 28b \pmod{70}$ کدام نتیجه گیری درست نیست؟

$$\sqrt{a \equiv 0 \pmod{4}} \quad (4)$$

$$\boxed{b \equiv 0 \pmod{3}} \quad (3)$$

$$\sqrt{5a \equiv 7b \pmod{7}} \quad (2)$$

$$\sqrt{5a \equiv 42b \pmod{35}} \quad (1)$$

دو طرف را بر 7 تقسیم می‌کنیم

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\div 7} \quad 2a \equiv 4b \pmod{10} \xrightarrow{(\cdot 5)} \quad 10a \equiv 20b \pmod{50} \xrightarrow{\div 10} \quad a \equiv 2b \pmod{5} \\ & \xrightarrow{(\cdot 5)} \quad 5a \equiv 10b \pmod{25} \end{aligned}$$

$$\rightarrow 5a \equiv 10b + 5a \pmod{25}$$



8- اگر $a \equiv 18 \pmod{24}$ کدام نتیجه گیری به پیمانه‌ی 4 درست است؟

$$a \equiv 0 \pmod{4}$$

$$b \equiv 2a \pmod{4}$$

$$a \equiv 2b \pmod{4}$$

$$a \equiv b \pmod{4}$$

$$\begin{array}{l} \div 18 \\ \hline (24 \text{ و } 18) = 6 \end{array}$$

$$2a \equiv b \pmod{4}$$



9- عبارت $[1]_4 \cap [2]_5$ را به کدام فرم می توان نوشت؟

$$\begin{array}{l}
 [17]_{20} \quad (4) \\
 a \equiv 1 \pmod{4} \\
 a \equiv 5 \pmod{5} \\
 \hline
 [12]_{20} \quad (3) \\
 a \equiv 12 \pmod{20} \\
 \hline
 [7]_{20} \quad (2) \\
 a \equiv 7 \pmod{20} \\
 \hline
 [2]_{20} \quad (1) \\
 a \equiv 2 \pmod{20} \\
 \hline
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 [5]_{20} \\
 a \equiv 5 \pmod{20} \\
 \hline
 [7]_{20} \\
 a \equiv 7 \pmod{20} \\
 \hline
 \end{array} \right.
 \left\{ \begin{array}{l}
 a = 5k + 2 \equiv 1 \pmod{4} \rightarrow 5k \equiv -1 \pmod{4} \\
 \downarrow \\
 (1) k \equiv -1 \pmod{4} \\
 k = 4q - 1 \\
 \Rightarrow a = 5(4q - 1) + 2 = 20q - 3
 \end{array} \right.$$



10- دو مجموعه $[5]_6$ و $[2]_5$ چند عضو مشترک دو رقمی دارند؟

$$a = 9k' + 5 \equiv 2 \rightarrow 9k' \equiv -3$$

$$\downarrow$$

$$(1) k' \equiv -3$$

$$\Rightarrow a = 9(5k - 3) + 5 \quad k' = 5k - 3$$

$$a = 30k - 13$$

$$10 \leq 30k - 13 \leq 99$$

$$1 \leq k \leq 3$$

۳ جواب



11- باقیمانده تقسیم 2^{39} بر 41 را بیابید.

$$2^{40} \equiv 1 \pmod{41} \rightarrow 2^{40} \equiv 42 \pmod{41}$$

$$\rightarrow 2^{40} \equiv 1 \pmod{41} \rightarrow 2^{39} \equiv 21 \pmod{41}$$

فرما



12- باقیمانده تقسیم 3^{28} بر 31 را بیابید.

$$3^2 \equiv 9 \pmod{31} \rightarrow 3^4 \equiv 81 \equiv 20 \pmod{31}$$

$$3^4 \equiv 20 \pmod{31} \rightarrow 3^8 \equiv 160 \equiv 4 \pmod{31}$$

$$3^8 \equiv 4 \pmod{31} \rightarrow 3^{16} \equiv 16 \pmod{31}$$

$$3^{16} \equiv 16 \pmod{31} \rightarrow 3^{24} \equiv 256 \equiv 10 \pmod{31}$$

$$3^{24} \equiv 10 \pmod{31} \rightarrow 3^{28} \equiv 10 \cdot 3^4 \equiv 10 \cdot 20 \equiv 200 \equiv 7 \pmod{31}$$

فرما



معادله **همنهشتی**: معادله‌ی $ax \equiv b \pmod{m}$ همنهشتی نام دارد، برای حل معادله سعی می‌کنیم ضریب x

را ساده کنیم، برای این کار می‌توان طرفین را ساده کرد یا هر مضربی از پیمانه را از طرفین کم کرد،

معادله‌ی $ax \equiv b \pmod{m}$ با شرط $(a \text{ و } m) | b$ بی‌شمار جواب صحیح دارد.

مثال: جواب‌های معادله همنهشتی زیر را پیدا کنید.

$$\begin{aligned}
 1) \quad 9a &\equiv 183 \pmod{21} \xrightarrow{\div 3} 3a \equiv 61 \pmod{7} \rightarrow 3a \equiv 5 \pmod{7} \rightarrow 3a \equiv 12 \pmod{7} \\
 &\xrightarrow{\div 3} a \equiv 4 \pmod{7} \rightarrow \boxed{a = 7k + 4}
 \end{aligned}$$



پوینتر علمی
چهارم



$$3 \equiv 3 \pmod{15}$$

$$2) \quad 12 a \equiv 333 \pmod{15} \rightarrow (-3) a \equiv 3 \pmod{15} \rightarrow a \equiv -1 \pmod{15}$$

$$12 \equiv -3 \pmod{15}$$

$$3) \quad 17 a \equiv 130 \pmod{4} \rightarrow (1) a \equiv 2 \pmod{4} \rightarrow a \equiv 2 \pmod{4}$$

$$17 \equiv 1 \pmod{4}$$



4- کدام گزینه جواب معادله‌ی $11 \equiv a^7 \pmod{13}$ نیست؟

$$226 \pmod{4} \checkmark$$

$$108 \pmod{3}$$

$$143 \pmod{2}$$

$$94 \pmod{1}$$

$$v \pmod{k+3}$$

$$v \pmod{k+2}$$

$$v \pmod{k+2}$$

$$\begin{array}{ccc}
 1 \pmod{a} \equiv 1 & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (-1) \pmod{a} \equiv (-1) & \rightarrow & a \equiv 1
 \end{array}$$



5- کدام معادله جواب ندارد؟

$$66a \equiv 19 \pmod{35} \quad (4)$$

$$18a \equiv 666 \pmod{42} \quad (3)$$

$$14a \equiv 50 \pmod{35} \quad (2)$$

$$2a \equiv 33 \pmod{5} \quad (1)$$

$$(11, 32) | 999$$

$$(14, 35) | 50$$



6- اگر عدد $2x^2 + 3x - 2$ مضرب 11 باشد، کدام عدد می تواند به جای x قرار بگیرد؟

99 (4

98 (3

97 (2 ✓

96 (1

$$2x^2 + 3x - 2 \equiv 0$$

$$(2x - 1)(x + 2) \equiv 0$$

$$2x - 1 \equiv 0 \quad 2x \equiv 1 \quad 2x \equiv 12$$

$$x \equiv 6$$

$$\boxed{11k + 6}$$

$$x + 2 \equiv 0$$

$$x \equiv -2$$

$$x \equiv 9$$

$$\boxed{11k + 9}$$



7- اگر عدد $6x^2 + 7x + 1$ مضرب 6 باشد، کدام عدد می تواند به جای x قرار بگیرد؟

$$9k+5$$

$$95 (4)$$

$$9k$$

$$96 (3)$$

$$9k+1$$

$$97 (2)$$

$$9k+2$$

$$98 (1)$$

$$9x^2 + 7x + 1 \equiv 0 \pmod{6} \rightarrow 7x \equiv -1 \pmod{6}$$

$$\downarrow$$

$$x \equiv -1 \pmod{6} \quad (1)$$

$$x \equiv 5 \pmod{6}$$

$$x = 9k + 5$$



8- در رابطه $12 \mid 5n - 7$ کدام عدد می تواند به جای n قرار بگیرد؟

$$12k - 2$$

94 (4)

$$12k - 1$$

95 (3)

$$12k + 1$$

97 (2)

$$12k$$

96 (1)

$$5n - 7 \equiv 0 \pmod{12}$$

$$5n \equiv 7 \pmod{12} \rightarrow 5n \equiv -5 \pmod{12}$$

$$\div 5 \rightarrow n \equiv -1 \pmod{12}$$

$$12k - 1$$



9- اگر چهار برابر عددی در همنهشتی به پیمانہ 5 با 11 همنهشت باشد، آنگاه باقیمانده تقسیم آن عدد بر 5 را بیابید.

$$4a \equiv 11 \pmod{5} \rightarrow 4a \equiv 14 \pmod{5} \xrightarrow{\div 4} a \equiv 4 \pmod{5} \rightarrow a = 5k + 4$$

پس باقیمانده تقسیم a بر 5 برابر 4 است.



10- چند عدد سه رقمی وجود دارد که مضرب 11 بوده و باقیمانده تقسیم آن بر 4 و 5 برابر 1 باشد؟

$$\begin{array}{l}
 a \equiv 1 \pmod{4} \\
 a \equiv 1 \pmod{5}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 a \equiv 1 \pmod{20} \\
 a = 20k
 \end{array}
 \right.
 , a = 11k \rightarrow 11k \equiv 1 \pmod{20} \rightarrow 11k \equiv 120 + 1$$

$$\xrightarrow{\div 11} k \equiv 11 \pmod{20} \rightarrow k = 20q + 11$$

$$a = 11(20q + 11) = 220q + 121$$

$$100 \leq 220q + 121 \leq 999$$

$$0 \leq q \leq 4$$

در جواب



11- چند عدد سه رقمی وجود دارد که مضرب 13 بوده و باقیمانده تقسیم آن بر 21 برابر 1 باشد؟

$$a \equiv 1 \pmod{21} \quad a = 13k \quad 13k \equiv 1 \pmod{21} \rightarrow -8k \equiv 1 \pmod{21}$$

$$-8k \equiv -20 \pmod{21}$$

$$2k \equiv 5 \pmod{21} \quad 2k \equiv 26 \pmod{21}$$

$$k \equiv 13 \pmod{21}$$

$$k = 21q + 13$$

$$a = 13(21q + 13) = 273q + 169$$

$$100 \leq 273q + 169 \leq 999$$

$$11 \leq q \leq 13$$



12- بزرگترین عدد سه رقمی مضرب 7 رایباید که باقیمانده تقسیم آن بر 22، از سه برابر خارج قسمت 2 واحد کمتر باشد.

$$a = 22q + 3q - 2$$

$$3q - 2 < 22$$

$$q < 1$$

$$a = 25q - 2 \equiv 0 \pmod{22} \quad 25q \equiv 2 \pmod{22} \rightarrow 3q \equiv 2 \pmod{22}$$

$$3q \equiv 1 \pmod{22} \rightarrow 3q \equiv 1 \pmod{22} \rightarrow q \equiv 15 \pmod{22}$$

$$\Rightarrow q = 15$$

$$a = 22 \times 15 - 2 = 328$$

$$۱۲۳۴۵۶۷ = \underline{۱۲۳۴۵۰۰} + ۶۷ = ۴k + ۲$$

نکته: برای تعیین باقیمانده‌ی تقسیم یک عدد بر 4 فقط دو رقم سمت راست عدد را بر 4 تقسیم

میکنیم.

$$۱۴۰۲ = ۴k + ۲$$

1- اگر عدد $\overline{1223a}$ بر 4 بخش پذیر باشد a را بدست آورید.

$$\rightarrow \overline{۲a} = \text{مضرب ۴} \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ a=۶ \end{cases}$$



نکته: برای تعیین باقیمانده‌ی تقسیم یک عدد بر 3 و 9 باید مجموع ارقام عدد را بر 3 و 9 تقسیم کنیم،

$$\overline{abcde} \equiv e + 1 \cdot d + 1 \cdot 0 \cdot c + 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot b + 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot a \equiv e + d + c + b + a \pmod{9}$$

3- اگر عدد $\overline{12ab}$ بر 36 بخش پذیر باشد a را بدست آورید.

$$\begin{aligned} \overline{12ab} &\equiv 0 \pmod{36} \rightarrow \begin{cases} b=0 \rightarrow 1+2+a+2+0 \equiv 0 \pmod{9} \rightarrow 5+a \equiv 0 \pmod{9} \rightarrow \boxed{a=4} \\ b=2 \rightarrow 1+2+a+2+2 \equiv 0 \pmod{9} \rightarrow a \equiv 0 \pmod{9} \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=9 \end{cases} \\ b=1 \rightarrow 1+2+a+2+1 \equiv 0 \pmod{9} \rightarrow 1+2+a \equiv 0 \pmod{9} \rightarrow \boxed{a=5} \end{cases} \end{aligned}$$



4- میانگین کوچکترین و بزرگترین عدد سه رقمی به صورت \overline{aba} که بر 12 بخشپذیر باشد کدام

است؟

574 (4)

مضرب 3

x

x

✓

x

x

✓

570 (3)

مضرب 4

x

✓

x

✓

x

✓

540 (2)

بزرگترین

198

188

$$\frac{1888 + 252}{2} = \frac{1140}{2} = 570$$

348 (1)

مضرب 3

x

✓

مضرب 4

x

✓

است
a رزجا
کوچکترین

202
212
222
232
242
252



نکته: برای تعیین باقیمانده‌ی تقسیم یک عدد بر 11 به این صورت عمل می‌کنیم که مثلاً بجای عدد

عبارت $a - b + c - d + e - f$ را بر 11 تقسیم می‌کنیم.

$$\overline{fedcba} \equiv a + 1 \cdot b + 1 \cdot c + 1 \cdot d + 1 \cdot e + 1 \cdot f \equiv a - b + c - d + e - f$$

5- اگر عدد $\overline{12a23}$ بر 11 بخش پذیر باشد a را بدست آورید.

$$\overline{12a23} \equiv 3 - 2 + a - 2 + 1 \equiv 0 \rightarrow a \equiv 0 \rightarrow \boxed{a=0}$$



6- اگر عدد $\overline{12a3b}$ بر 11 و 4 بخش پذیر باشد a و b را بدست آورید.

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{بدر } 4} \overline{12b} \equiv 0 \pmod{4} \quad \begin{cases} b = 2 \\ b = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} & 2 - 2 + 9 - 2 + 1 \equiv 0 \pmod{11} \quad \boxed{a = 2} \\ & 9 - 2 + a - 2 + 1 \equiv 0 \pmod{11} \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a + 2 \equiv 0 \pmod{11} \\ & \boxed{a = 9} \end{aligned}$$



7- اگر عدد $1ba227$ بر 66 بخشپذیر باشد a کدام می تواند باشد؟

$$99 = 2 \times 3 \times 11$$

0 (4

2 (3 ✓

4 (2

6 (1

زوج a

$$\rightarrow a - b + 1 - a + 7 - 2 + 2 \equiv 0$$

$$1 - b \equiv 0 \rightarrow b = 1$$

مضرب

$$\rightarrow 2 + 2a \equiv 0 \quad 2a \equiv -2 \quad a \equiv -1 \quad a \equiv 2$$



8- مجموع باقیمانده های تقسیم عدد 736521 بر 4 و 9 و 10 چقدر است؟

$$\begin{array}{r}
 15 \quad (2) \\
 7 \quad (4) \\
 13 \quad (1) \\
 8 \quad (3) \checkmark
 \end{array}$$

$21 = 4k + 1$
 $مع. = 24 = 9k + 6$
 $بقیه = 10k + 1$



9- اگر عدد $\overline{6aa}$ بر 23 بخشپذیر باشد مقدار a را بیابید.

$$\overline{9aa} = 900 + 10a + a \equiv 0 \pmod{23}$$

$$\begin{array}{r} 900 \quad | \quad 23 \\ \underline{46} \quad | \quad 26 \\ 140 \quad | \\ \underline{138} \quad | \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11a \equiv -900 \pmod{23} \\ \downarrow \\ -12a \equiv 2 \pmod{23} \\ \downarrow \\ 4a \equiv 11 \pmod{23} \\ \downarrow \\ a \equiv 11 \pmod{23} \end{array}$$



10- اگر عدد $\overline{3aa}$ بر 19 بخشپذیر باشد مقدار a را بیابید.

$$\overline{3aa} \equiv 0 \pmod{19}$$

$$300 + 10a + a \equiv 0 \pmod{19}$$

$$11a \equiv -2 \pmod{19}$$

$$11a \equiv 17 \pmod{19}$$

$$(-1)a \equiv 17 \pmod{19}$$

$$\rightarrow 11a \equiv 17 \pmod{19} \rightarrow 11a \equiv 1 \pmod{19} \rightarrow a \equiv 9 \pmod{19}$$



11- اگر عدد $22a34b$ بر 99 بخشپذیر باشد a و b را بدست آورید.

$$\begin{array}{r} 22 \\ \boxed{2=a} \\ \leftarrow \boxed{b=4} \\ \hline 99 \end{array}$$

اگر $a=2$ و $b=4$

$$\begin{array}{r} 41 \\ \boxed{2=b \mid a=1} \\ 22 \\ \hline 99 \end{array}$$



12- کوچکترین عدد طبیعی n را بیابید که دو عدد $9n + 1$ و $7n + 4$ نسبت به هم اول نباشند.

$$d \mid 9n+1 \rightarrow d \mid 9 \cdot 2n+7$$

$$d \mid 7n+4 \rightarrow d \mid 9 \cdot 2n+14$$

$$\rightarrow d \mid 29$$

$$\Rightarrow 29 \mid 7n+4 \rightarrow 7n+4 \equiv 0 \pmod{29} \quad 7n \equiv -4 \pmod{29}$$

$$7n \equiv 25 \pmod{29} \rightarrow n \equiv 4 \pmod{29}$$

$$n = 29k + 4 \xrightarrow{k=0} \boxed{n=4}$$



13- به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n دو عدد $5n + 1$ و $7n + 2$ نسبت به هم اول نیستند؟

$$\begin{aligned} d \mid 5n+1 & \rightarrow d \mid 5 \rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 5 \\ d \mid 7n+2 & \rightarrow d \mid 7 \rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 7 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 5 \mid 5n+1 \rightarrow 5n+1 \equiv 1 \pmod{5} \quad 7 \mid 5n-1 \rightarrow 5n-1 \equiv -1 \pmod{7}$$

$$1 \leq k+1 \leq 99 \quad 1 \leq k \leq 99 \quad \text{پایان}$$



14- به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n دو عدد $15n + 4$ و $7n - 3$ نسبت به هم اولند؟

$$\begin{aligned}
 d \mid 15n + 4 &\rightarrow d \mid 7 \times (15n + 4) = 105n + 28 \\
 d \mid 7n - 3 &\rightarrow d \mid 7 \times (7n - 3) = 49n - 21 \\
 &\rightarrow d \mid 7^2
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} d=1 \\ d=7^2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 7n - 3 &\equiv_{7^2} 7n - 3 \\
 7n &\equiv_{7^2} 3 \rightarrow 7n \equiv_{7^2} -10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7n &\equiv_{7^2} 3 \\
 7n &\equiv_{7^2} -10 \\
 7n &\equiv_{7^2} -10 \quad \text{یا} \quad 7n \equiv_{7^2} k-10 \leq 99 \quad \boxed{k=1} \quad \text{پس } 7n - 1 = 90
 \end{aligned}$$



15- اگر معادله همنهشتی $6x^9 \equiv 2a + 5$ دارای جواب باشد، کدام عدد می تواند به جای a قرار

بگیرد؟
 $98 \equiv 1$ ✓

$$96 \equiv 4 \pmod{97}$$

$$99 \equiv 3 \pmod{97}$$

$$97 \equiv 2 \pmod{97}$$

$$\frac{1}{96} (499) \mid 2a+5 \rightarrow 4 \mid 2a+5$$

$$2a+5 \equiv 0$$

$$2a \equiv -5$$

$$2a \equiv -2$$

$$a \equiv -1$$



16- اگر معادله همنهشتی $a x \equiv 24 \pmod{90}$ دارای جواب باشد، کدام معادله حتما جواب دارد؟

$$a x \equiv 3 \pmod{9} \quad \checkmark$$

$$a x \equiv 4 \pmod{8} \quad \times$$

$$a x \equiv 45 \pmod{90} \quad \times$$

$$a x \equiv 2 \pmod{6} \quad \times$$

$$a = 1k$$

$$a = 2k$$

$$a = 3k$$

$$(a, 9) \mid 24$$

$$(a, 2 \times 3^2 \times 5) \mid 2^2 \times 3 \rightarrow a \neq 5k$$

$$a \neq 9k$$



17- امروز 5شنبه است، اگر $2m + 5$ روز دیگر دوشنبه باشد، آنگاه m^{1402} روز دیگر چند شنبه

است؟

(1) شنبه

(2) یکشنبه

(3) جمعه

(4) 2شنبه ✓

$$2m + 5 \equiv 2 \pmod{7} \quad 2m \equiv -1 \pmod{7} \rightarrow 2m \equiv 6 \pmod{7}$$

$$m \equiv 3 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow m^{1402} \equiv 3^{1402} \pmod{7}$$

$$\equiv 3^{1402 \pmod{6}} \pmod{7} \quad \text{فرما}$$

$$\equiv 3^2 \pmod{7}$$



18- اگر رقم یکان دو عدد $2m + 5$ و $m + 1$ برابر باشد، باقیمانده تقسیم $123(m + 1)$ بر 5

رایباید.

$$9m + 1 \equiv 2m + 5 \pmod{10}$$

$$7m \equiv 4 \pmod{10}$$

$$m \equiv 2 \pmod{5}$$

$$\rightarrow m \equiv 2 \pmod{5} \rightarrow (m+1) \equiv 3 \pmod{5} \rightarrow 123(m+1) \equiv 123 \cdot 3 \equiv 369 \equiv 4 \pmod{5}$$



معادله سیاله: هر معادله به صورت $ax + by = c$ که در آن x و y عددهای صحیح باشند یک معادله سیاله نام دارد.

مثال 1: برای معادله‌های زیر یک جواب اولیه پیدا کنید.

$$9x + 4y = 14$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$7x + 5y = 11$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$3m + 5n = 8$$

$$\begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow 7(2 - \cancel{ak}) + 5(-1 + \cancel{vk}) = 11$$



$$ax + by = c$$

نکته: اگر $(a,b)|c$ آنگاه معادله سیاله بی شمار جواب دارد که به صورت زیر بدست می آید:

$$17x + 10y = 19$$

$$\begin{cases} x = x_0 + k \frac{b}{(a,b)} \\ y = y_0 - k \frac{a}{(a,b)} \end{cases}$$



2- جوابهای کلی معادله‌های زیر را پیدا کنید.

ب. $8x + 3y = 13$

$$\begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = -1 - 8k \end{cases}$$

الف. $5x + 7y = 10$

$$\begin{cases} x = 2 - 7k \\ y = 0 + 5k \end{cases}$$

$$\underline{2x + 4y = 5}$$

د. $6x + 8y = 10$

$$\begin{cases} x = -1 + 4k \\ y = 2 - 3k \end{cases}$$

ج. $4x + 9y = 15$

$$\begin{cases} x = -4 + 9k \\ y = 2 - 4k \end{cases}$$



3- اگر $7x + 12y = 10$ آنگاه کدام گزینه می‌تواند به جای x قرار بگیرد؟

$x = 12k - 2$ (4) ✓ $x = 7k - 2$ (3) $x = 12k + 2$ (2) $x = 7k + 1$ (1)



4- اگر $17x + 12y = 10$ آنگاه کوچکترین عدد دو رقمی که می‌تواند به جای x قرار بگیرد کدام است؟

16 (4)

14 (3)

10 (2)

11 (1)

$$\begin{cases} x = 2 + 12k \geq 10 \\ y = -2 \end{cases} \xrightarrow{k=1} x = 14$$



حل معادله‌ی سیاله به روش همنهشتی: معادله سیاله را به معادله همنهشتی تبدیل می‌کنیم و با حل معادله همنهشتی، یکی از مجهول‌ها بدست می‌آید. با جایگذاری در معادله مجهول دیگر هم بدست می‌آید، در مورد مسایل پرداخت پول، خرید تمبر، توزین و ... باید جوابهای نامنفی را بشماریم.

$$ax + by = c \rightarrow ax = c - by \rightarrow a/c - by \Rightarrow c \stackrel{a}{=} by$$

$$\begin{matrix} \text{پایا} \\ \rightarrow \end{matrix} by = c - ax \rightarrow b/c - ax \Rightarrow c \stackrel{b}{=} ax$$

مثال 1: معادله‌های زیر را به روش همنهشتی حل کنید،

$$15x + 9y = 20 \quad \text{(الف)}$$

جواب ندارد $\frac{20}{9}$ و $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$



جوابدار $\rightarrow 1/4$ و $(19, 32) = 1$

ب) $19x + 32y = 40$

$$19x = 40 - 32y \rightarrow 19 \mid 40 - 32y \rightarrow 40 \equiv_{19} 2y$$

$$\rightarrow 5 \equiv_{19} 2y \Rightarrow 24 \equiv_{19} 4y \rightarrow 6 \equiv_{19} y$$

$$\rightarrow y = 19k + 6 \xrightarrow{\text{در معادله}} 19x + 32(19k + 6) = 40$$

$$\rightarrow x = \frac{40 - 32 \times 19k - 32 \times 6}{19} = -32k - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -32k - 1 \\ y = 19k + 6 \end{cases}$$

پ) $14x + 23y = 15$

$$15 - 14x = 23y \rightarrow 23 \mid 15 - 14x \rightarrow 14x \equiv_{23} 15 \equiv_{23} 1$$

$$\rightarrow 7x \equiv_{23} 19 \rightarrow 7x \equiv_{23} 42 \rightarrow x \equiv_{23} 6 \quad x = 23k + 6$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} 14(23k + 6) + 23y = 15 \rightarrow y = \frac{15 - 14 \times 23k - 14 \times 6}{23} = -14k - 2$$



مثال 2: با 5000 تومان چند تمبر 300 تومانی و چند تمبر 500 تومانی می توان خرید.

$$300x + 500y = 5000 \rightarrow 3x + 5y = 50 \rightarrow 3x = 50 - 5y$$

$$\rightarrow 3 \mid 50 - 5y \rightarrow 50 \equiv 5y \rightarrow y \equiv 10 \quad y = 5k + 10$$

در مکان $\rightarrow 3x + 5(5k + 10) = 50 \Rightarrow x = -5k$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -5k \geq 0 \rightarrow k \leq 0 \\ y = 5k + 10 \geq 0 \rightarrow k \geq -2 \end{array} \right.$$

$$k \geq -2$$

k	0	-1	-2	-3
x	0	5	10	15
y	10	7	4	1



$$y \leftarrow \rightarrow x$$

مثال 3: به چند طریق می توان یک کیسه 36 کیلویی را با وزنه های 3 و 5 کیلویی وزن کرد؟

$$3x + 5y = 36 \rightarrow \begin{cases} x = 12 - 5k \geq 0 & k \leq 2 \\ y = 0 + 3k \geq 0 & \rightarrow k \geq 0 \end{cases} \quad k = 0, 1, 2$$



تست 4: به ازای کدام مقدار n معادله سیاله‌ی $35x + 63y = 5n + 2$ جواب دارد؟

1 (1) ✓

2 (2)

3 (3)

4 (4)

$$5n+2 \rightarrow r \mid 5n+2 \quad \text{شرط جواب} \quad (35, 63) \mid 5n+2$$



تست 5: به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n معادله سیاله‌ی $66x + 99y = 5n + 1$ جواب دارد؟

1 (1)

2 (2)

3 (3)

4 (4)

$$n+1 \equiv 0 \pmod{99} \quad n+1 \equiv 0 \pmod{66} \quad n+1 \equiv 0 \pmod{99}$$

$$n \equiv -1 \pmod{99} \rightarrow n \equiv 98 \pmod{99}$$

$$10 \leq 99k + 98 \leq 99 \quad k=0, 1, 2$$



تست 6: اگر معادله سیاله‌ی $36x + 30y = 5n^2 + 4$ جواب داشته باشد آنگاه باقیمانده n بر 6 کدام می‌تواند باشد؟

1 (4

3 (3

4 (2 ✓

5 (1

$$(29, 30) \parallel 5n^2 + 4 \rightarrow 5n^2 + 4 \equiv 0 \pmod{29} \quad (-1)n^2 + 4 \equiv 0 \pmod{29}$$

$$\Rightarrow n^2 \equiv 4 \pmod{29}$$



تست 7: چند عدد به صورت $33\dots3377\dots77$ وجود دارد که از ارقام 3 و 7 ساخته شده و مجموع ارقام آن برابر 73 باشد؟

(1) 2

(2) 3

(3) 4

(4) 5

$$3x + 7y = 73 \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 7k > 0 & k \leq 0 \\ y = 10 + 3k > 0 & k \geq -3 \end{cases}$$

$$k = 0, -1, -2, -3$$



تست 8: معادله سیاله $17x + 18y = 987$ در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

4 (4)

3 (3)

6 (2)

5 (1)

$$\begin{cases} x = -987 + 18k > 0 \\ y = 987 - 17k > 0 \end{cases}$$

$$k > 54$$

$$k \leq 58$$

$$51, 57, 54, 58$$

$$\begin{array}{r} 987 \overline{) 18} \\ 9 \cdot 18 \\ \hline 18 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 987 \overline{) 17} \\ 18 \cdot 17 \\ \hline 157 \\ 154 \\ \hline 3 \end{array}$$