



فصل دوم

گراف و مدل سازی



تست ۳: در یک گراف از مرتبه $P = ۸$ رأسی با درجه $\Delta = ۷$ وجود دارد. در مکمل این گراف

حداکثر درجهی رأس کدام است؟

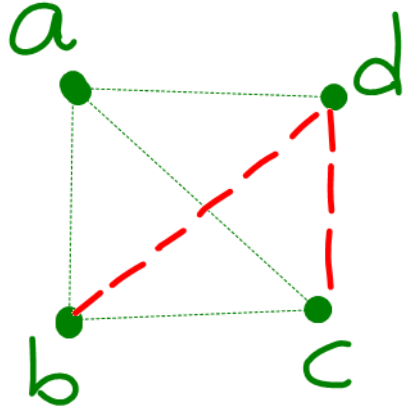
۷ (۲) ۸ (۱)

۵ (۴) ۶ (۳) ✓

تظیر این رأس در مکمل، رأسی است

پس حداکثر درجه رأسی در مکمل برابر $\Delta = ۹$

است



تست ۴: اگر در یک گراف ۴ راسی داشته باشیم:

$$|N_G(a)| = 3, d(b) = 2, |N_G[c]| = 3, |N_G[d]| = 2$$

تعداد یال‌ها در مکمل این گراف کدام است؟

$$q + \bar{q} = \frac{p(p-1)}{2}$$

$$2 + \bar{q} = \frac{4 \times 3}{2} \Rightarrow \bar{q} = 2$$

۱ (۲)	۳ (۱)
۴ (۴)	۲ (۳)



تست ۵: اندازه گراف G ، ۴ برابر اندازه گراف مکمل آن است. حداقل مرتبه گراف G چقدر است؟

$$q + \bar{q} = \frac{p(p-1)}{2}$$

۵ (۲) ✓	۴ (۱)
۷ (۴)	۶ (۳)

$$\Delta \bar{q} = \frac{p(p-1)}{2} \left\{ \begin{array}{l} p = 5 \text{ مرتب ۵} \\ p-1 = 5 \text{ مرتب ۵} \end{array} \right.$$



تست ۶: چند گراف ۷ منتظم مرتبه ۱۰ وجود دارد؟

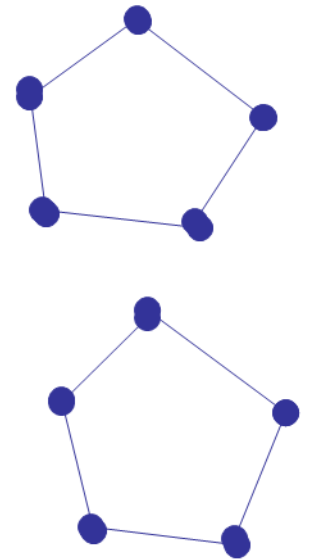
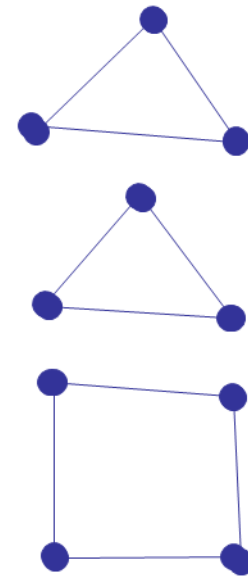
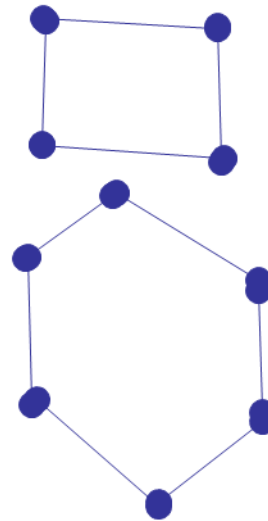
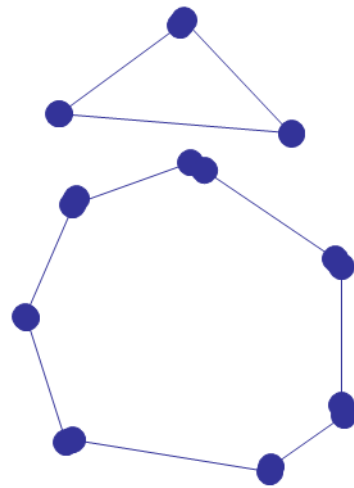
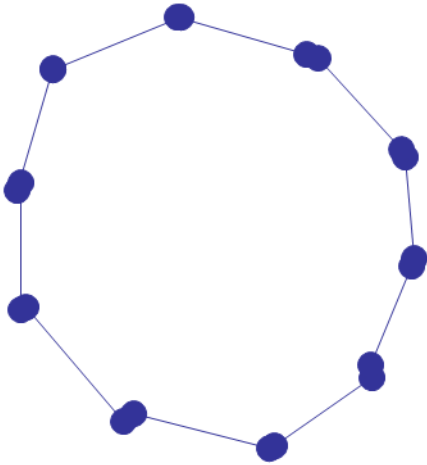
مکمل این گراف ۲- منتظم مرتبه ۱۰ است

۶ (۲)

۷ (۱)

۴ (۴)

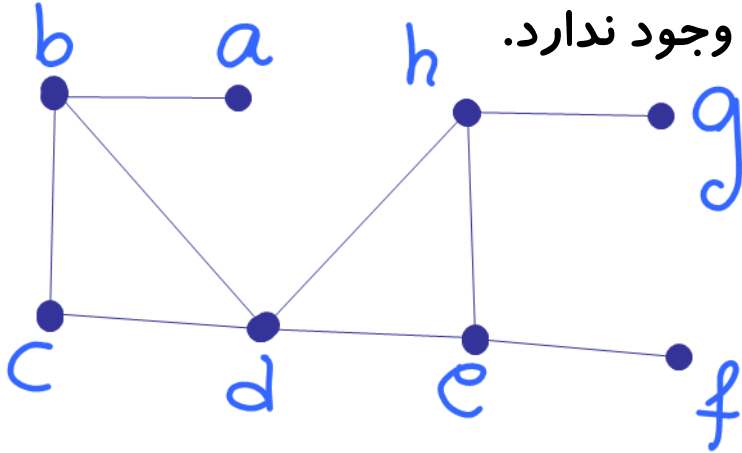
۵ (۳) ✓





مسیر: دنباله ای از رأس های گراف است که در آن هر دو رأس متوالی با یک یال

به هم وصل شده اند (مجاورند) و در دنباله رأس تکراری وجود ندارد.

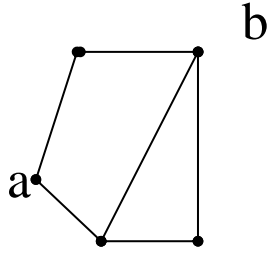


ab cdh

ah dh

abcdeh

abe h

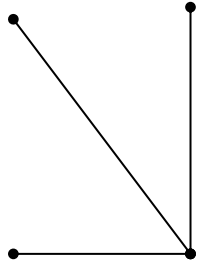


مثال ۷: در گراف شکل زیر چند مسیر از a به b وجود دارد؟

سه تا مسیر



مثال ۸: در گراف شکل زیر چند مسیر وجود دارد؟



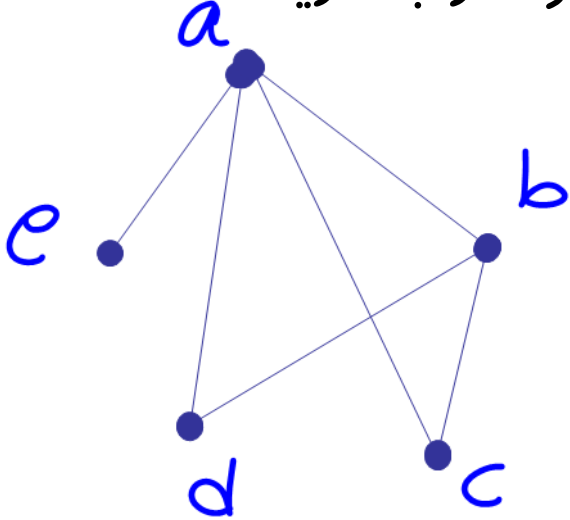
$$\left. \begin{array}{l} ۴ = \text{مسیر بدون یال (رأسها)} \\ ۲ = \text{مسیر شامل یک یال} \\ ۴ = \text{مسیر شامل دو یال} \end{array} \right\} \text{جمع} = ۱۰$$



مثال ۹: در یک گراف ۵ راسی داریم:

$$|N_G(a)| = ۴, d(b) = ۳, |N_G[c]| = ۳, |N_G[d]| = ۳, |N_G[e]| = ۲$$

این گراف را رسم کنید و تمام مسیرهای بین دو راس a, b در این گراف را بشمارید.

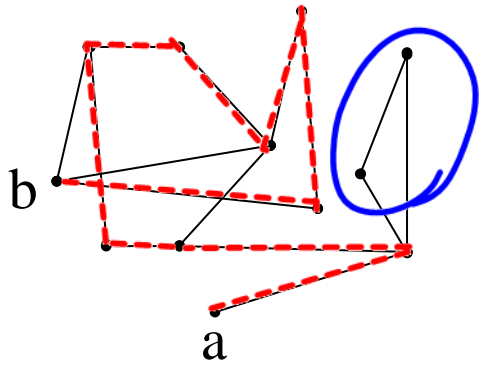


ab
acb
adb

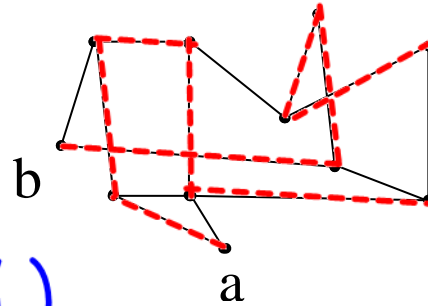


طول مسیر: تعداد یال های مسیر است که در واقع یکی کمتر از تعداد رأس های مسیر است.

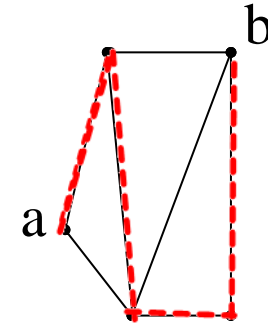
مثال ۱۰: در گراف های زیر تعیین کنید طولانی ترین مسیر از a به b چه طولی دارد؟



مسیر طول ۹



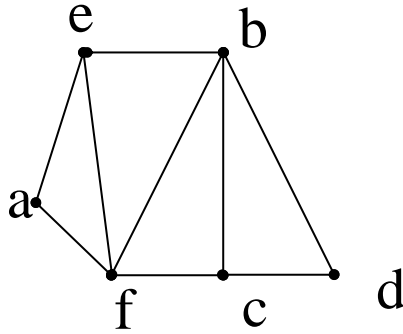
مسیر طول ۱۰



مسیر طول ۴



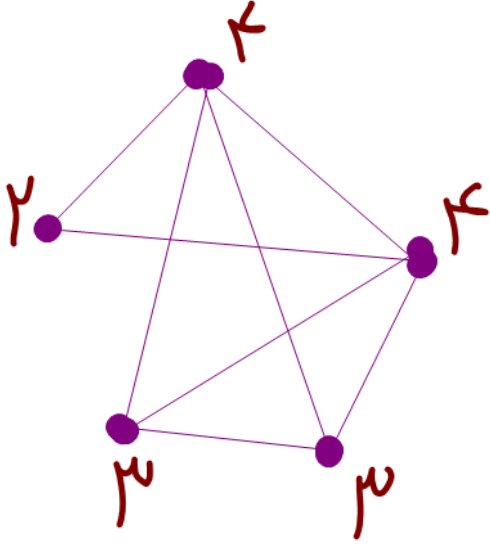
مثال ۱۱: در گراف شکل زیر چند مسیر به طول ۳ از a به b وجود دارد؟



$aefb$
 $afeb$
 $afc b$



مثال ۱۲: در گرافی با درجه راسهای ۲ و ۳ و ۳ و ۴ و ۴ بین دوراس با ماکزیمم درجه، چند مسیر به طول ۴



وجود دارد؟ هیچ



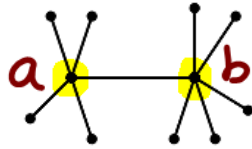
تست ۱۳: در گراف مقابل، چند مسیر به طول ۳ وجود دارد؟

(۱) ۳۰

(۲) ۹

(۳) ۲۰

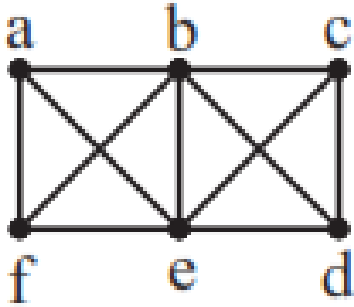
(۴) ۱۱



۲۰ جواب → (۴) a b (۵)



تست ۱۴: در گراف روبه‌رو، چند مسیر به طول ۳ از a به b وجود دارد؟



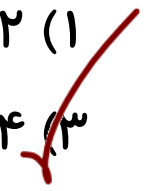
۳ (۲)

۲ (۱)

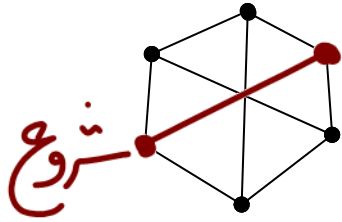
۶ (۴)

۴ (۳)

afeb
aefb
aecb
aedb



تست ۱۵: در گراف شکل روبرو چند مسیر به طول ۲ وجود دارد؟



- | | |
|--------|--------|
| ۱۸ (۲) | ۲۴ (۱) |
| ۱۲ (۴) | ۳۶ (۳) |

$$\boxed{9} \boxed{3} \boxed{2} \div 2 = 18$$

← میرفت و برگشت یکسان است

تست ۱۶: در یک گراف ساده با ۵ راس فقط یک مسیر به طول ۴ وجود دارد، اندازه این گراف کدام است؟

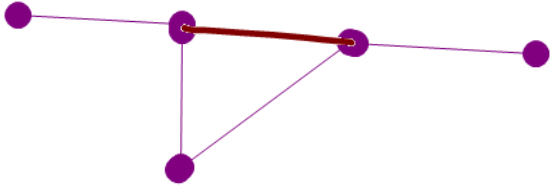
است؟

۳ (۱)

۴ (۲)

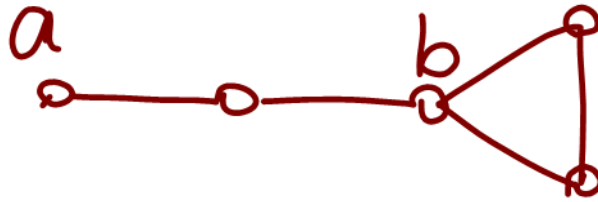
۲ حداقل ۴ ✓

۵ (۴)





تست ۱۷: در یک گراف ساده با ۵ راس فقط یک مسیر بین دو راس a و b وجود دارد، اگر طول این مسیر برابر ۲ باشد، حداکثر اندازه این گراف کدام است؟



۴ (۲)

۳ (۱)

۲ (۴)

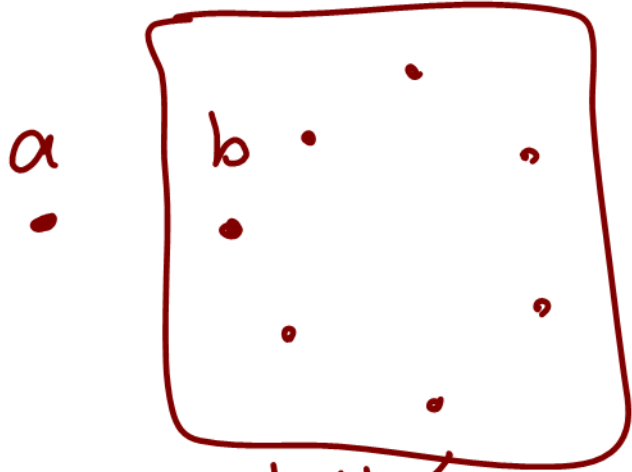
۵ (۳) ✓



تست ۱۸: در یک گراف ساده از مرتبه ۸ هیچ مسیری بین دو راس a و b وجود ندارد، حداکثر اندازه

این گراف کدام است؟

- | | |
|----------|--------|
| ۲۱ (۲) ✓ | ۱۵ (۱) |
| ۲۷ (۴) | ۲۵ (۳) |

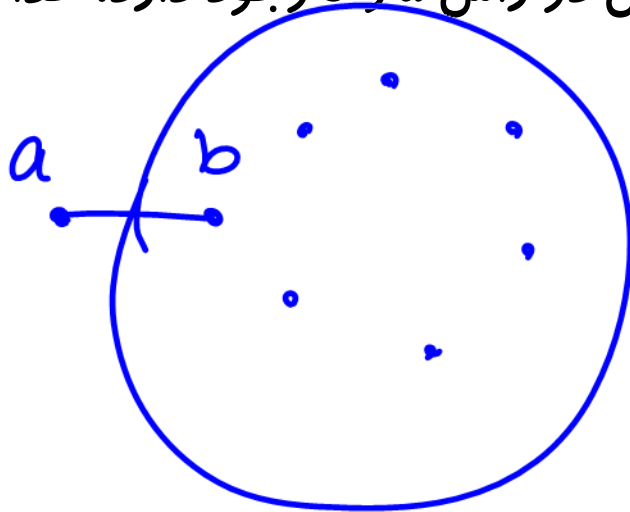


گراف کامل ۷ راسی

$$9 = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$



تست ۱۹: در یک گراف ساده از مرتبه ۸ فقط یک مسیر بین دو راس a و b وجود دارد، حداکثر اندازه



این گراف کدام است؟

- | | |
|--------|--------|
| ۲۲ (۲) | ۲۶ (۱) |
| ۱۸ (۴) | ۲۱ (۳) |

$$K_V \rightarrow 9 = \frac{9 \times 8}{2} + 1 = 22$$



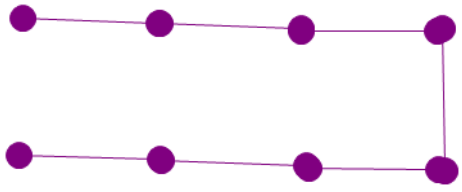
تست ۲۰: در گرافی از مرتبه ۸ بین هر دوراس دقیقا یک مسیر وجود دارد، این گراف چند یال دارد؟

۷ (۲) ✓

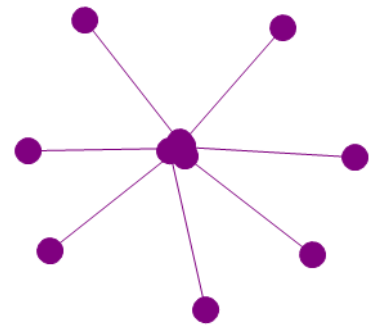
۸ (۱)

۶ (۴)

۹ (۳)



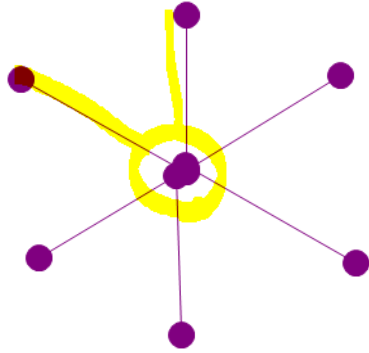
$$g = 7$$



$$g = 7$$



تست ۲۱: در گرافی از مرتبه ۷ بین هر دوراس دقیقا یک مسیر وجود دارد، اگر $\Delta = 6$ این گراف چند مسیر به طول ۲ دارد؟



۷ (۲)

۱۵ (۱) ✓

۶ (۴)

۱۴ (۳)

$$\text{مسیر طول ۲} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$



مجاور دارد؟

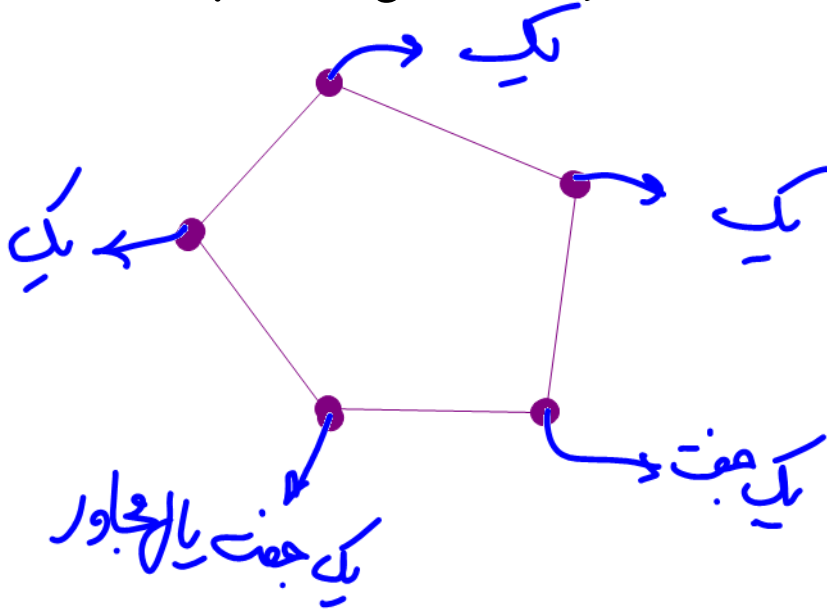
۴ (۱)

۱۰ (۳)

۵ (۲) ✓

۶ (۴)

تست ۲۳: در گرافی از مرتبه ۵ بین هر دوراس دقیقا ۲ مسیر وجود دارد، این گراف چند جفت یال





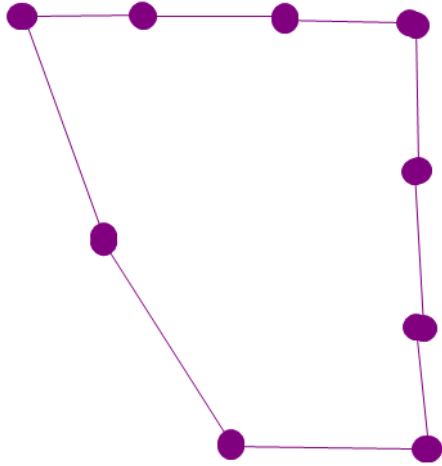
تست ۲۴: در گرافی از مرتبه ۹ بین هر دوراس دقیقا ۲ مسیر وجود دارد، این گراف چند یال دارد؟

۱۲ (۲)

۱۸ (۱)

۶ (۴)

۹ (۳) ✓





نکته: در گراف کامل می‌توانیم تعداد مسیرهای موجود بین دو رأس را با اصل ضرب بدست آوریم.

۱- در گراف K_7 بین دو رأس a و b چند مسیر به طول ۳ وجود دارد؟



۲۰ (۲)

۶۰ (۱)

۱۲ (۴)

۳۰ (۳)





۲- در گراف K_8 بین دو رأس a و b چند مسیر به طول ۴ وجود دارد؟



۶۰ (۲)

۱۲۰ (۱) ✓

۲۱۰ (۴)

۲۴ (۳)

۳- در گراف k_5 چند مسیر به طول ۲ وجود دارد؟

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

۸ (۴)

۳۰ (۳) ✓

$$\boxed{5} \quad \boxed{4} \quad \boxed{3} \div 2 = 2.$$

← می‌رفت و برگشت یکبار است



۴- در گراف K_8 چند مسیر به طول ۳ وجود دارد؟

$$\boxed{8} \quad \boxed{7} \quad \boxed{6} \quad \boxed{5} \quad \div 2 = 182$$

← میر رفت و برگشت

۱۶۸ (۲)

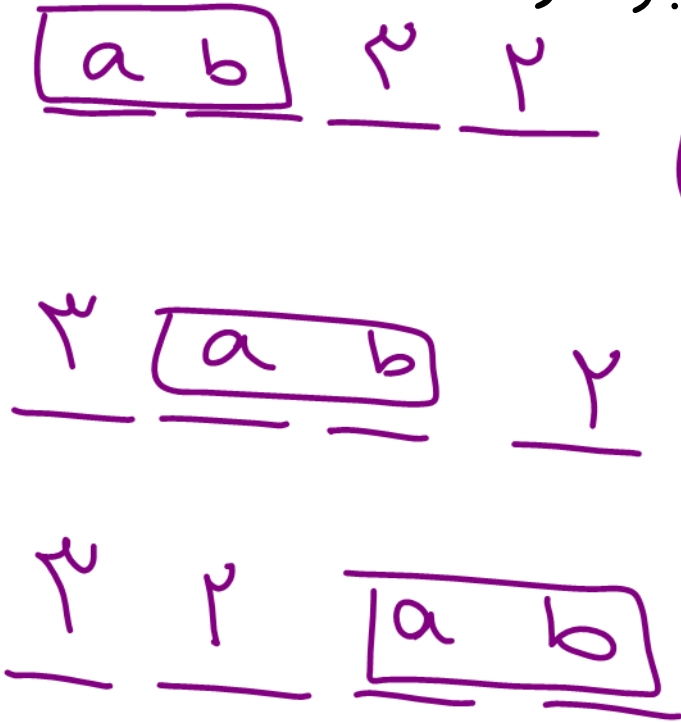
۸۴۰ (۱) ✓

۶۸۰ (۴)

۳۳۶ (۳)



۵- در گراف k_5 چند مسیر به طول ۳ شامل یال ab وجود دارد؟



۱۵ (۲)

۲۴ (۱)

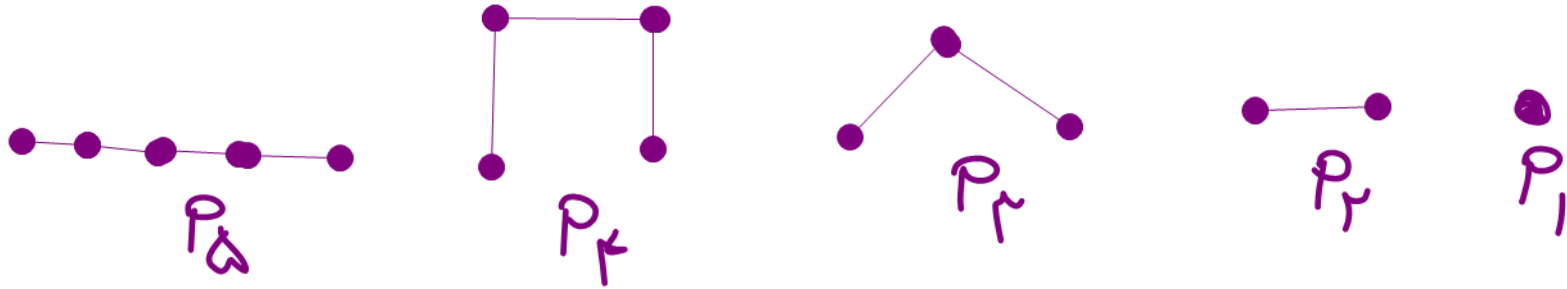
۳۶ (۴)

۱۸ (۳)

۱۸ = جمع



نکته: گراف ساده از مرتبه n که فقط از یک مسیر n راسی تشکیل شده باشد را با P_n نمایش می دهند.



۶- در گراف P_n مجموع مرتبه و اندازه کدام می تواند باشد؟

مرتبه = n

اندازه = $n-1$

مجموع = $2n-1$

۲۰ (۲)

۲۵ (۱) ✓

۳۶ (۴)

۳۰ (۳)



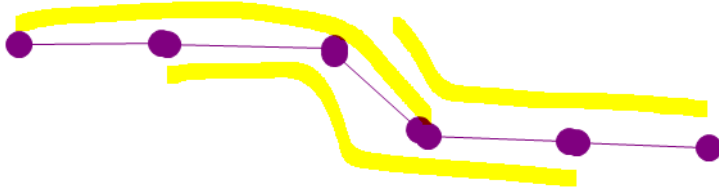
۷- در گراف P_n چند مسیر به طول ۳ وجود دارد؟

۲ (۲)

۳ (۱)

۶ (۴)

۴ (۳)



در گراف P_n تعداد مسیرها به طول k برابر $n-k$ است

$$0 \leq k \leq n-1$$



۸- گراف P_3 با راس های $\{a, b, c\}$ چند زیر گراف دارد؟



- | | |
|----------|--------|
| ۱۲ (۲) ✓ | ۱۱ (۱) |
| ۱۴ (۴) | ۱۳ (۳) |

زیر گراف

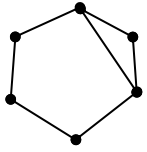
- بدون یال $\rightarrow 2^3 - 1 = 7$
- یک یال $\rightarrow \binom{3}{1} \times 2^1 = 3$
- دو یال $\rightarrow \binom{3}{2} = 1$

راس بلا تکلیف

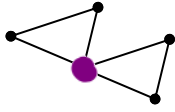
جمع = ۱۲



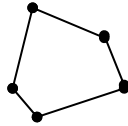
دور: مسیری در گراف ساده که ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق است تعداد یال هایی که در یک دور طی می شود طول دور نام دارد. بدیهی است که طول دور حداقل برابر ۳ است.



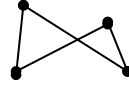
دور بطول ۶
دور بطول ۳



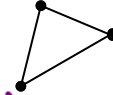
دور بطول ۳



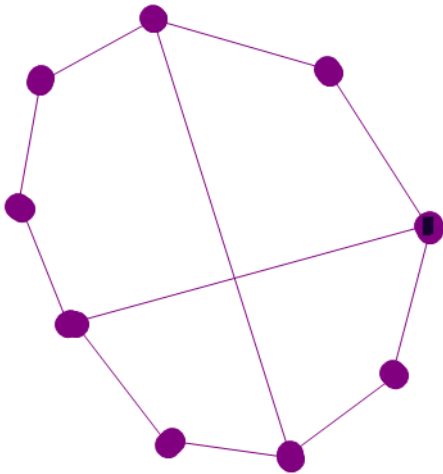
دور بطول ۵



دور بطول ۴



دور بطول ۳



یک گراف ۹ راسی رسم کنید که دور به طول ۵ و ۶ و ۷ داشته باشد

۵ و ۶ و ۷



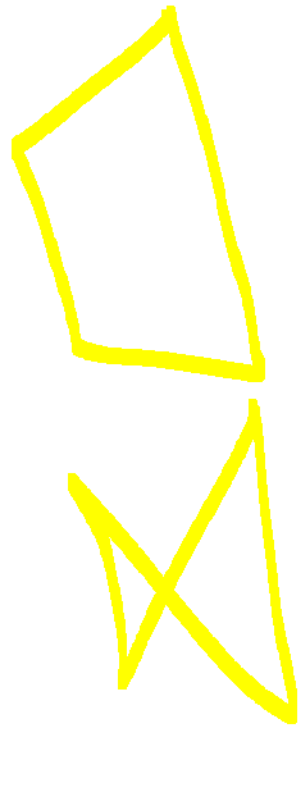
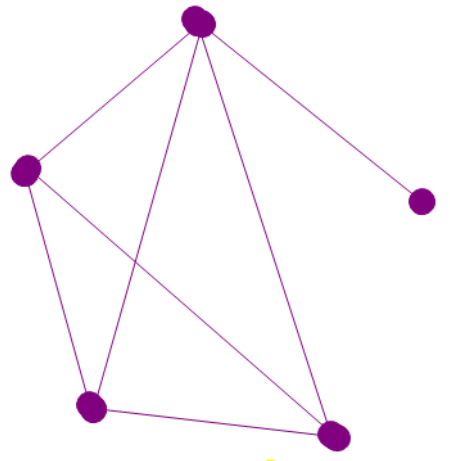
۱- در گرافی با درجه رأس های ۱ و ۳ و ۳ و ۳ و ۴ چند دور به طول ۴ وجود دارد؟

۲ (۲)

۱ (۱) صفر

۴ (۴)

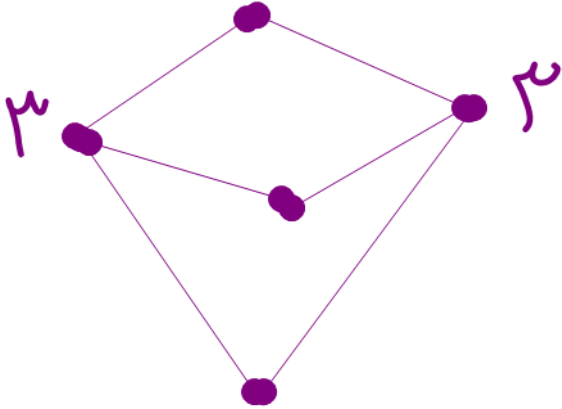
۳ (۳) ✓





۲- در گرافی با درجه رأس های ۲ و ۲ و ۳ و ۳ دو رأس با درجه ی ماکزیمم مجاور نیستند. در این

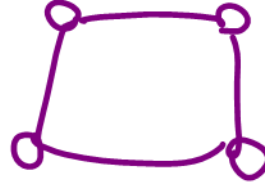
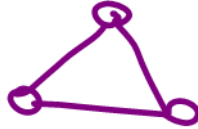
گراف چند دور به طول ۳ وجود دارد؟



- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۴ (۴) وجود ندارد ✓



۳- گراف ۲ منتظم از مرتبه $p = 10$ حداکثر چند دور دارد؟



۲ (۲)

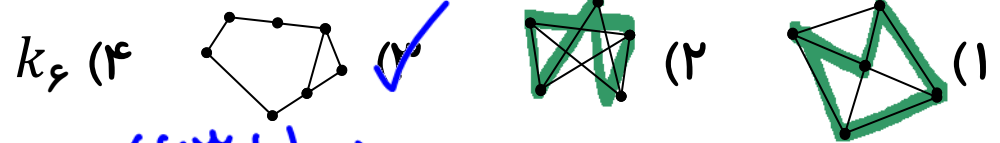
۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳) ✓



۴- در کدام گراف دور به طول ۵ وجود ندارد؟



k_6 (۴)

دور طول ۳ و ۴ و ۵ دارد

دارد

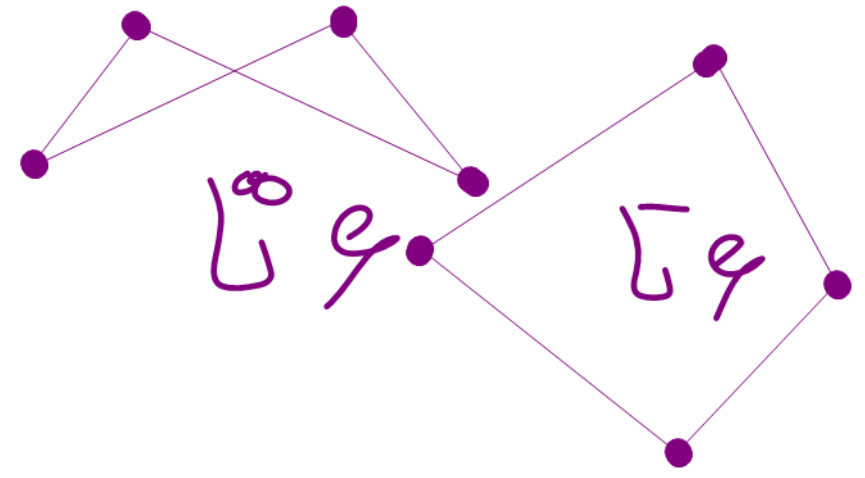
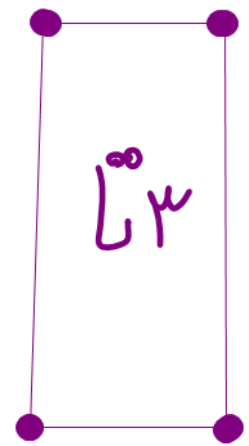
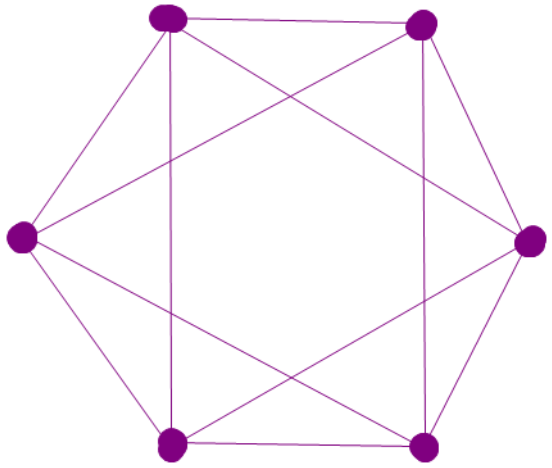
۵- یک گراف ساده ۶ رأسی ۴ منتظم، دارای چند دور با طول ۴ است؟

۹ (۱)

۱۰ (۲)

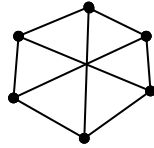
۱۲ (۳)

۱۵ (۴) ✓





۶- گراف شکل مقابل چند دور به طول ۴ دارد؟



۸ (۲)

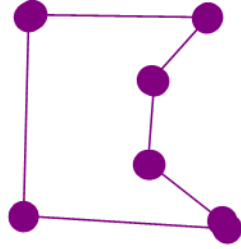
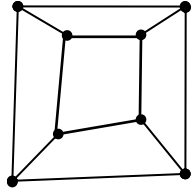
۷ (۱)

۱۰ (۴)

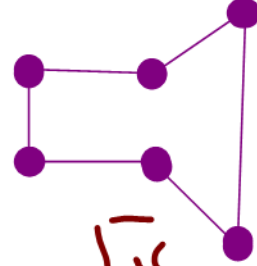
۹ (۳) ✓



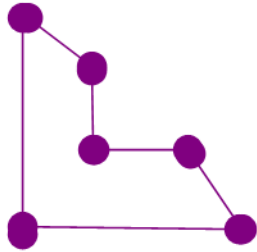
۷- در گراف شکل مقابل چند دور به طول ۶ وجود دارد؟



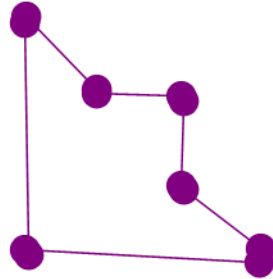
گراف ۱



گراف ۲



گراف ۳



گراف ۴

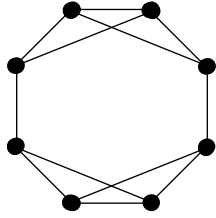
۸ (۲)
۲۰ (۴)

۱۲ (۱)
۱۶ (۳)





۸- در گراف شکل مقابل چند دور به طول ۷ وجود دارد؟



۸ (۲)

۶ (۱)

۱۲ (۴)

۱۶ (۳)



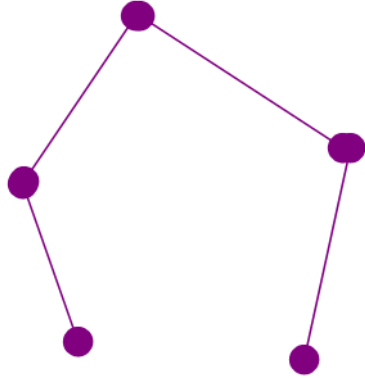
۹- در مکمل گراف P_5 چند دور وجود دارد؟

۴ (۲)

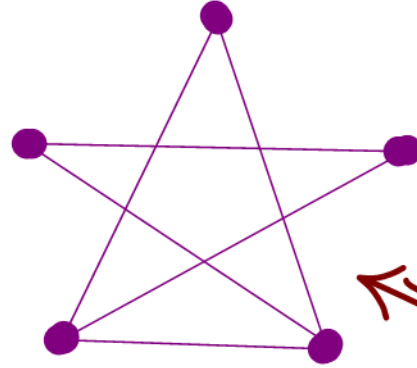
۵ (۱)

۲ (۴)

۳ (۳) ✓

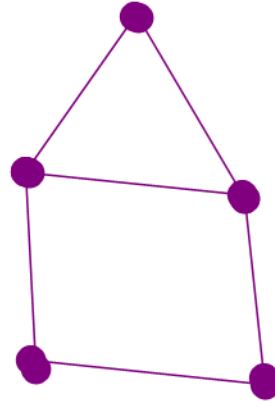


P_5



K_5

گراف مکمل



دور ۵



نکته: برای محاسبه‌ی تعداد دورهای به طول n در گراف k_p ابتدا راس‌های مورد نظر را انتخاب

می‌کنیم، سپس با n راس انتخاب شده به تعداد $\frac{(n-1)!}{2}$ دور می‌سازیم.

۱- در گراف k_4 چند دور به طول ۳ وجود دارد؟

$$\binom{4}{3} \times \frac{(3-1)!}{2} = 4 \times 1 = 4$$

۶ (۲)

۳ (۱)

۲ (۴)

۴ (۳) ✓



۲- در گراف K_8 چند دور به طول ۴ وجود دارد که شامل راس a باشد؟

$$\binom{7}{4} \times 24 \quad (1)$$

$$\binom{7}{4} \times 12 \quad (2)$$

$$\binom{7}{3} \times 3 \quad (3) \quad \checkmark$$

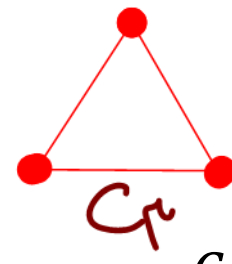
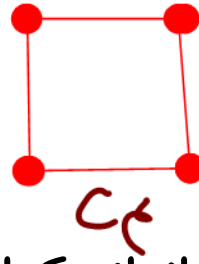
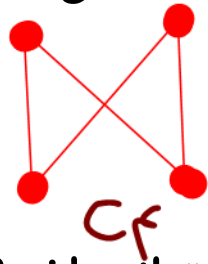
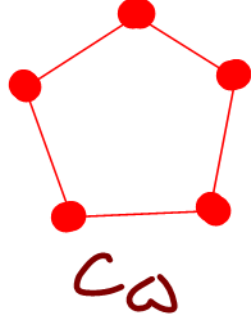
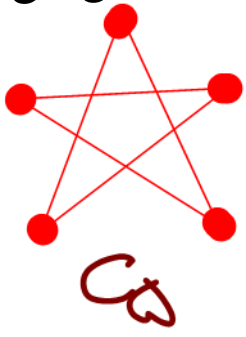
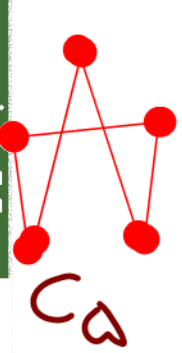
$$\binom{7}{3} \times 6 \quad (4)$$

چون راس a را در نظر بگیریم

$$\binom{7}{4} \times \frac{(8-1)!}{2} = \binom{7}{2} \times 2$$



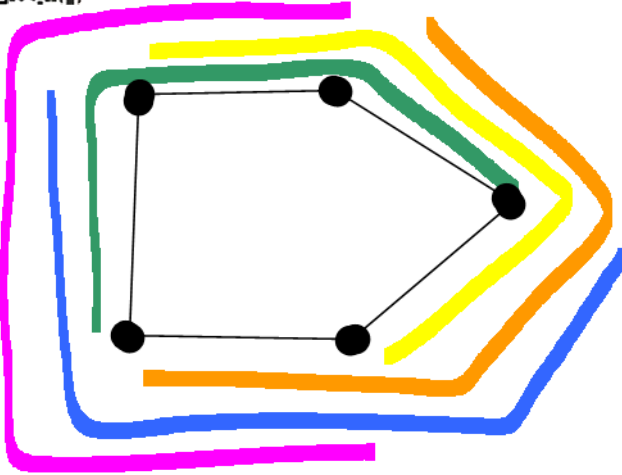
نکته: گراف ساده از مرتبه n که فقط از یک دور n راسی تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می دهند.



۳- در گراف C_n مجموع مرتبه و اندازه کدام می تواند باشد؟

- ۲۵ (۱)
- ۲۰ (۲) ✓
- ۴۹ (۴)
- ۱۷ (۳)

$$C_n \begin{cases} \text{مرتبه} = n \\ \text{اندازه} = n \end{cases} \rightarrow \text{مجموع} = 2n$$



۴- در گراف C_5 چند مسیر به طول ۳ وجود دارد؟

۶ (۲)

۵ (۱) ✓

۳ (۴)

۱۰ (۳)

در گراف C_n تعداد مسیرها به طول k
برابر n است $۰ < k \leq n-1$



۵- در گراف C_n چند زیر گراف به صورت P_n وجود دارد؟

میربغول n

$$n - 2 \quad (2)$$

$$n \quad (1) \checkmark$$

$$n - 1 \quad (4)$$

$$2n \quad (3)$$



۶- در گراف k_6 چند زیر گراف به صورت C_5 وجود دارد؟

انتخاب رأسها

دور بطول ۵

۶۰ (۲)

۴۸ (۱)

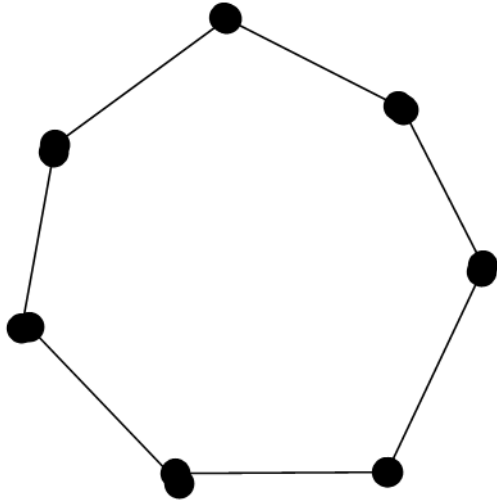
۹۰ (۴)

۷۲ (۳)

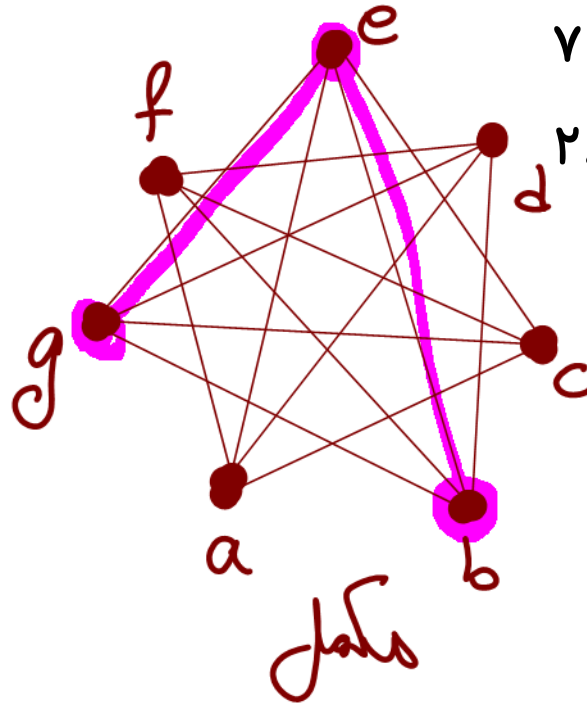
$$\binom{6}{5} \times \frac{(5-1)!}{2} = 6 \times 12 = 72$$



۷- در مکمل گراف C_7 با راس های $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ چند زیر گراف به صورت P_3 وجود دارد؟



گراف



مکمل

۷۰ (۲)

۴۹ (۱)

۲۸ (۴)

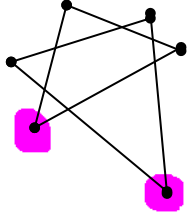
۴۲ (۳) ✓

۲:۳
۷ ۴ ۳

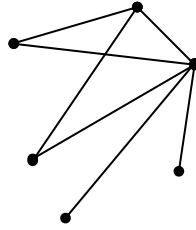
← میر رفت و برگشت



گراف همبند: گرافی که در آن بین هر دو رأس حداقل یک مسیر وجود دارد.



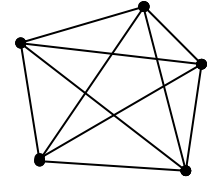
ناهمبند



همبند



ناهمبند



همبند



ویژگی های گراف همبند و ناهمبند

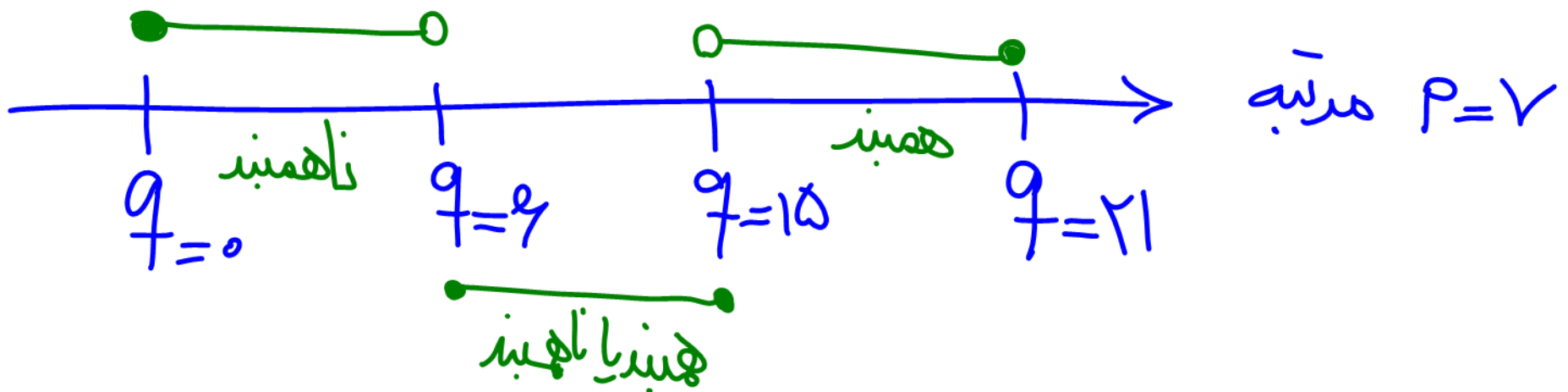
I. گراف های کامل همگی همبند هستند و گراف های تهی همگی ناهمبند هستند. (به جز یک راسی)

II. گراف های یک منتظم همگی ناهمبند هستند (به جز دو راسی) و گراف های $p - 1$ منتظم همگی همبند هستند.



III. اگر در یک گراف $\Delta = p - 1$ (راس فول) گراف همبند است و با شرط $\delta = 0$ (راس ایزوله) گراف ناهمبند است.

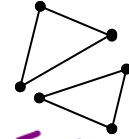
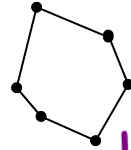
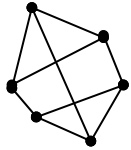
IV. اگر در یک گراف $q < p - 1$ گراف ناهمبند است و $q > \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ گراف حتما همبند است.





۷. در هر گراف اگر $\delta \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ گراف حتما همبند است، همچنین در یک گراف r منتظم اگر $r \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ گراف حتما همبند است.

در منتظم و $r \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ حتماً همبند



منتظم
و $r \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$
همبند

منتظم و $r < \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$
ناهمبند

حالا اگر $r = 1$ $\delta = 4 \rightarrow$ حتماً همبند باشد
 $\delta = 3 \rightarrow$ حتماً همبند



۱- چند گراف ناهمبند مرتبه ۵ وجود دارد، به طوری که رأس تنها (منفرد) نداشته باشد؟



۴ (۲)

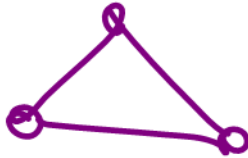
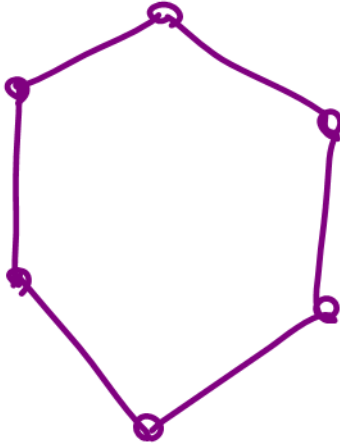
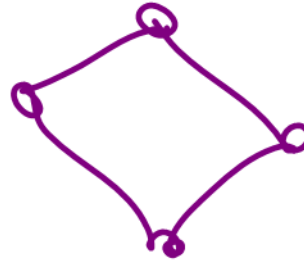
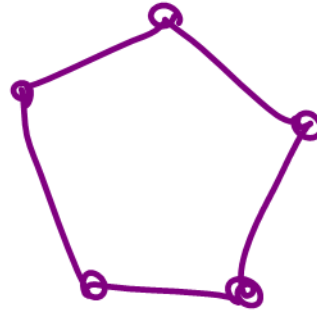
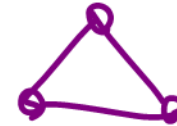
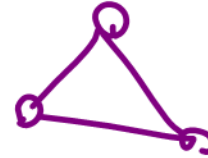
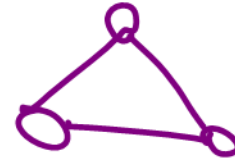
۵ (۱)

۲ (۴)

۳ (۳)

۲- چند گراف ۲ منتظم ناهمبند از مرتبه‌ی $P = 9$ وجود دارد؟

۲ (۲)	۱ (۱)
۳ (۴)	۴ (۳)





۳- گراف همبند از مرتبه $P = 6$ حداقل و حداکثر چند یال دارد؟

$$10 - 5 \quad (1) \quad 15 - 5 \quad (2) \quad \checkmark$$

$$10 - 6 \quad (3) \quad 15 - 6 \quad (4)$$

$$\min(q) = 5$$

$$\max(q) = 15$$

گراف با $P=6$ حداقل چند یال داشته باشد تا معین شود همبند؟

$$q = 11$$



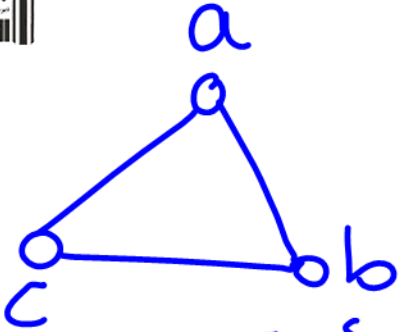
۴- در گراف C_3 چند زیر گراف همبند وجود دارد؟

۸ (۲)

۱۰ (۱) ✓

۹ (۴)

۷ (۳)



یک رأس تنها

بدون یال → $\binom{3}{1} = 3$
 یک یال → $\binom{3}{2} = 3$
 دو یال → $\binom{3}{2} = 3$
 سه یال → $\binom{3}{3} = 1$

جمع → ۱۰

بدون یال از گراف همبند



۵- چند گراف همبند از مرتبه ۴ وجود دارد؟

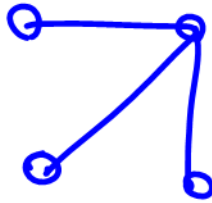
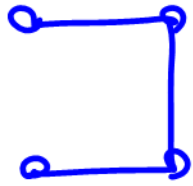
۷ (۲)

۴ (۱)

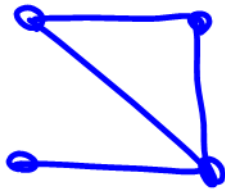
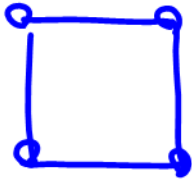
۵ (۴)

۶ (۲)

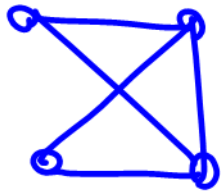
$g = 3$



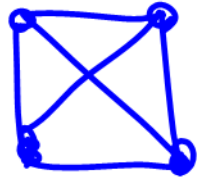
$g = 4$



$g = 5$

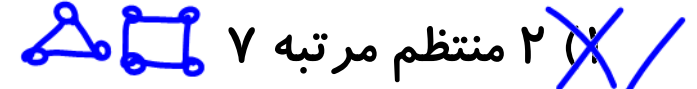


$g = 6$





۶- کدام گراف حتماً همبند است؟



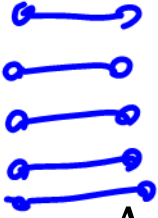
۱) ۲ منتظم مرتبه ۷

۳) ۴ منتظم مرتبه ۸

۲) گرافی با $P = 10$ و $q = 30$! $q \geq 7$ حتماً همبند

۳) گرافی با $P = 13$ و $\Delta = 10$

با $\Delta = 12$ حتماً همبند



۱- منتظم مرتبه ۱۰ ~~هوا~~ ~~ناهنجند~~

۴) گراف مرتبه ۸ که در آن $\Delta = \delta + ۳ = ۵$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = ۵ \\ \delta = ۲ \end{array} \right.$$

۷- کدام گراف قطعاً همبند است؟

۲- منتظم مرتبه ۶ ~~هوا~~ ~~ناهنجند~~

۴- منتظم مرتبه ۱۰ ~~هوا~~ ~~ناهنجند~~





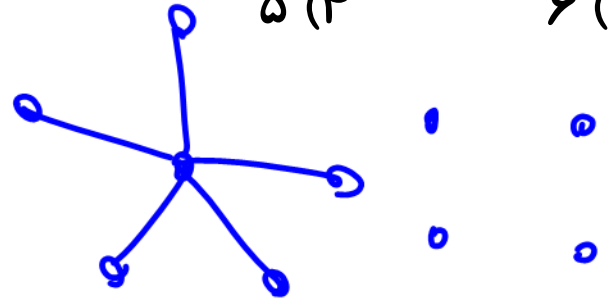
۸- یک گراف از مرتبه $p = 10$ دارای ۵ یال است. این گراف حداقل از چند بخش جدا از هم

تشکیل شده است؟

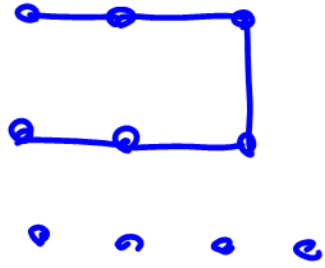
۴ (۱)

۶ (۳)

۷ (۲)



۵ بخش



۵ یال



۵ بخش



۹- یک گراف از مرتبه $p = 10$ دارای ۵ یال است. این گراف حداکثر از چند بخش جدا از هم

تشکیل شده است؟
برای ۵ یال حداقل ۴ رأس لازم است.

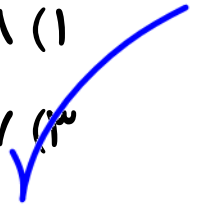
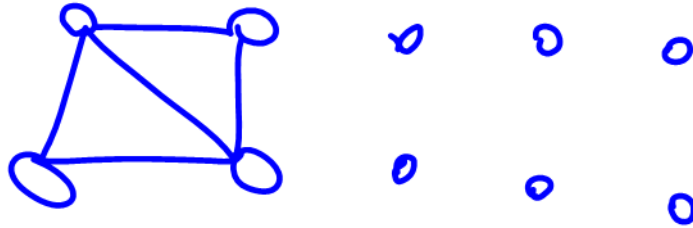
تشکیل شده است؟

۶ (۲)

۸ (۱)

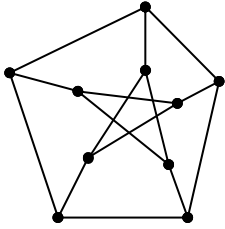
۵ (۴)

۷ (۳)





۱۰- در گراف شکل مقابل با حذف چند یال مطمئن هستیم گراف ناهمبند می شود؟



$$q = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

$$\boxed{7 \quad (4)}$$

$$8 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

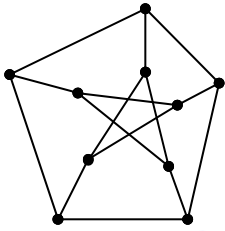
$$6 \quad (3)$$

$$\text{جواب} = 10 - 1 = 9$$

$$q = 1 \text{ ناهمبند معین}$$



۱۰- گراف شکل مقابل چند زیر گراف ناهمبند با سه راس دارد؟



$$\left. \begin{array}{l} \text{سه راس بیرون مال} = \binom{10}{3} = 120 \\ \text{یک مال و یک راس تنها} \rightarrow \binom{10}{1} \binom{1}{1} = 10 \end{array} \right\} \text{جمع} \rightarrow 130$$