



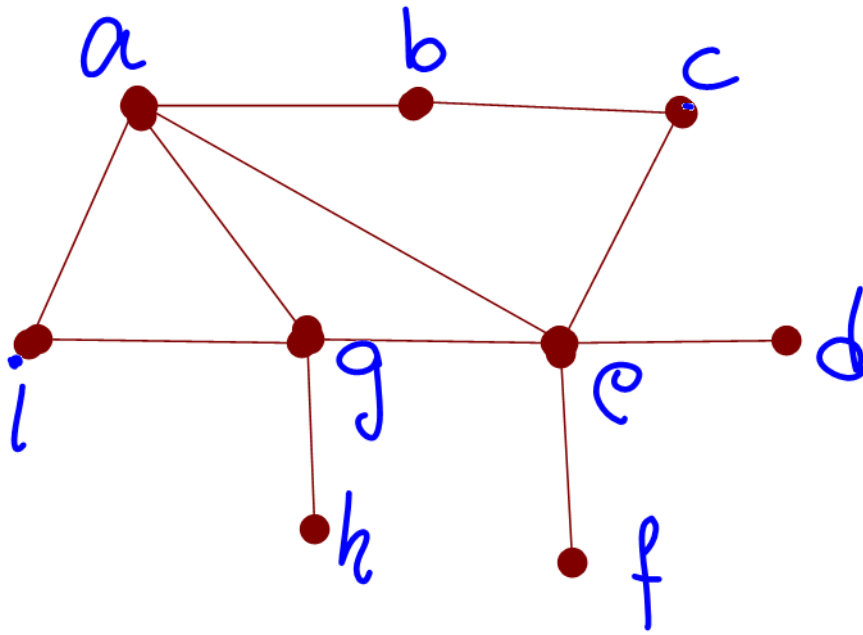
فصل دوم

مدل سازی با گراف



مجموعه احاطه گر: زیرمجموعه‌ی D از مجموعه رأس‌های گراف (مجموعه‌ی V) احاطه گر است هر گاه هر رأس از گراف یا در

D باشد یا بایکی از اعضای D مجاور باشد.



$$\{a, b, c, \dots, h, i\} \checkmark$$

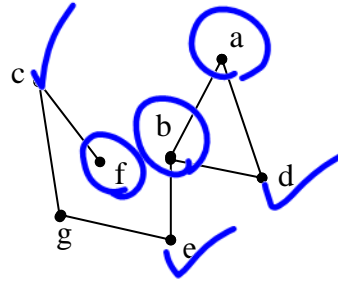
$$\{a, c, d, f, h\} \checkmark$$

$$\{b, g, e\} \checkmark$$

$$\{i, d, e, g, h\} \text{ احاطه گر نیست}$$

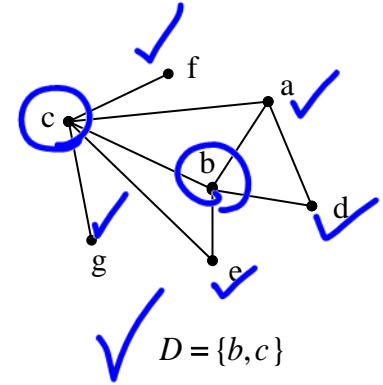


مثال ۱: در کدام گراف مجموعه داده شده احاطه گر نیست؟



$$D = \{a, b, f\}$$

احاطه گر نیست



$$D = \{b, c\}$$



۲- گراف تهی چند مجموعه احاطه گر دارد؟

۱ (✓)

۲ (صفر)

۳ (۲)

۴ (به تعداد راس هایش)

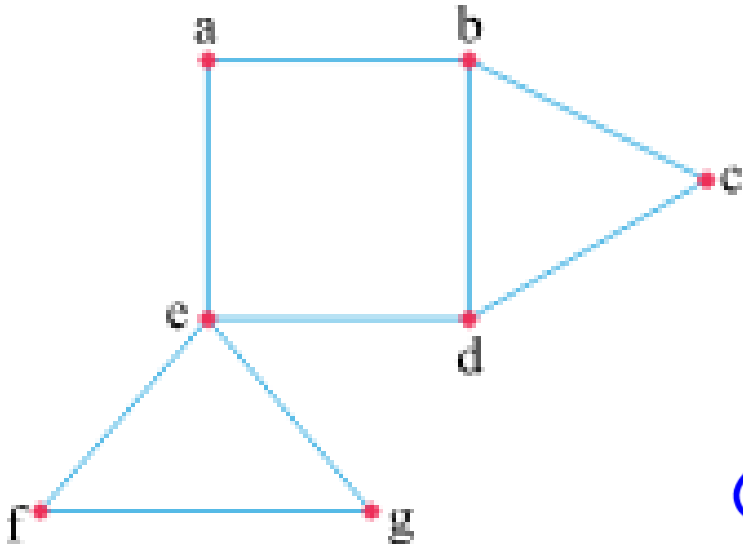
مجموعه تمام راسهای گراف = $\{a, b, c, d\}$ →

a
b
c

a
d



۳- برای گراف شکل مقابل مجموعه های احاطه گر ۲ و ۳ و ۴ عضوی بنویسید.



$\{e, b, c\} \rightarrow$ دو عضوی

$\{g, f, b, c\} \rightarrow$ سه عضوی

$\{a, b, c, f, g\} \rightarrow$ چهار عضوی



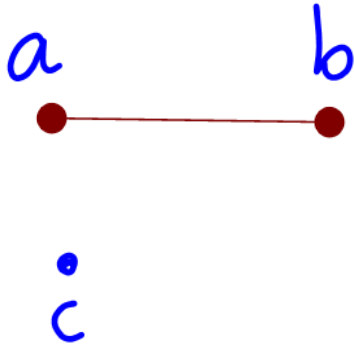
۴- گرافی که فقط یک یال دارد چند مجموعه احاطه گر دارد؟

(۴) به تعداد راس‌ها

۲ (۳)

۱ (۲)

۳ (۱) ✓



$\{a, c\}$

$\{b, c\}$

$\{a, b, c\}$



۵- گراف منتظم مرتبه ۴ چند مجموعه احاطه گر دارد؟



۴ (۲)

۶ (۱)

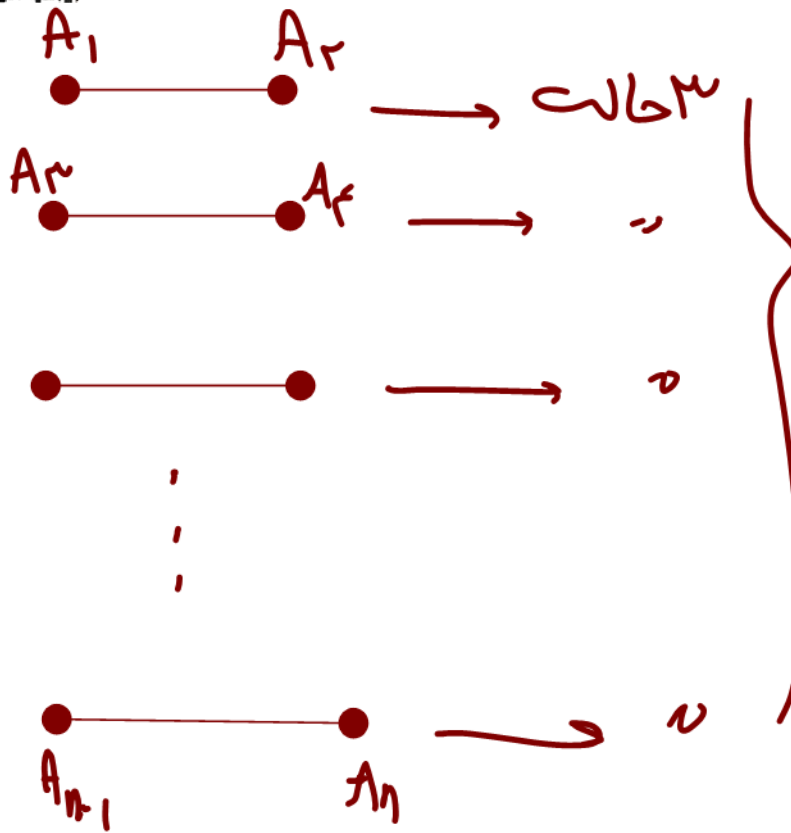
۸ (۴)

۹ (۳) ✓

$$\text{جواب} = 3 \times 3 = 9$$



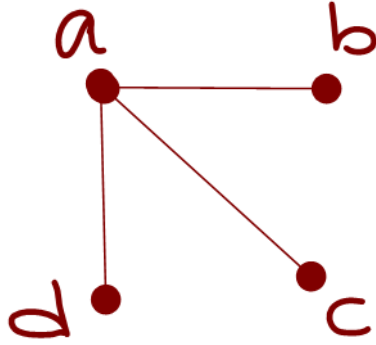
۶- گراف منتظم مرتبه n چند مجموعه احاطه گر دارد؟



$$\text{جواب} = n^{\frac{n}{2}} = \sqrt{n^n}$$



۷- گرافی با درجه راس های ۳ و ۱ و ۱ و ۱ چند مجموعه احاطه گر دارد؟



۱۰ (۲)

۱۱ (۱)

۹ (۳)

۸ (۴)

۱ تا ۸ $\Rightarrow \{a, \overset{b}{\textcircled{2}}, \overset{c}{\textcircled{2}}, \overset{d}{\textcircled{2}}\}$ شامل رأس a

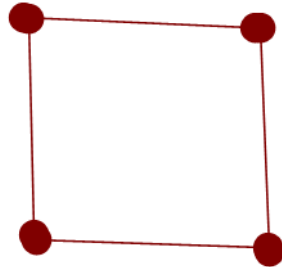
احاطه $\Rightarrow \{b, c, d\}$ بدون رأس a

$$۹ = ۱ + ۱ = ۲ \text{ جواب}$$

۸- کدام گزینه درست نیست؟

- (۱) در گراف کامل هر زیرمجموعه ناتهی از راسهای گراف، یک مجموعه احاطه گراست. ✓
- (۲) تعداد راسهایی که یک راس از گراف می تواند احاطه کند با درجه آن راس برابر است. (۲)
- (۳) در گراف تهی فقط مجموعه تمام راسها، مجموعه ی احاطه گر است. ✓
- (۴) در گراف 2 منتظم مرتبه 4 ، هر زیرمجموعه 2 عضوی از راسهای گراف یک مجموعه احاطه گر است. ✓

C_4





۹- گراف کامل از مرتبه ۷ چند مجموعه احاطه گر دو عضوی دارد؟

انتخاب دو رأس گواه

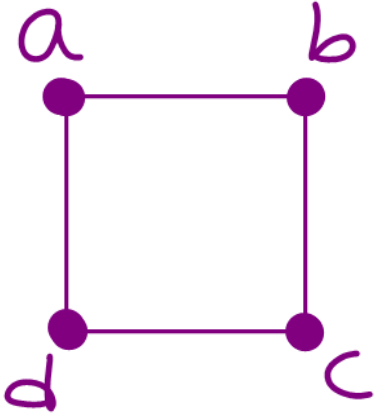
$$\binom{7}{2} = 21$$



۱۰- گراف کامل از مرتبه ۶ چند مجموعه احاطه گر دارد؟

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های n -تایی} = 2^n - 1 = 2^6 - 1 = 63$$

برابر مجموعه ۶-تایی



۱۱- گراف ۲ منتظم مرتبه ۴ چند مجموعه احاطه گر دارد؟

دو عضو چهار عضو سه عضو

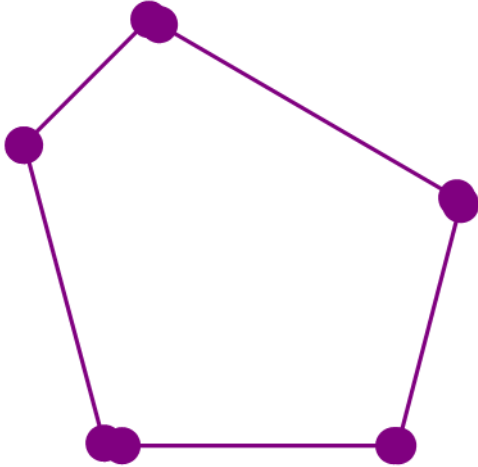
$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6 + 4 + 1 = 11$$



۱۲- گراف ۲ منتظم مرتبه ۵ چند مجموعه احاطه گر ۳ عضوی دارد؟

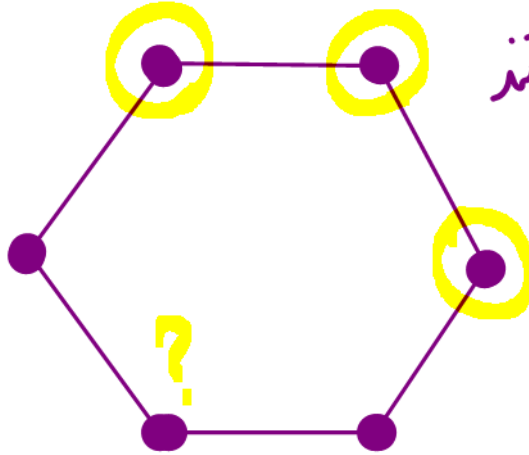
رنگ مجموعه ۳ عضوی

$$\binom{5}{3} = 10$$





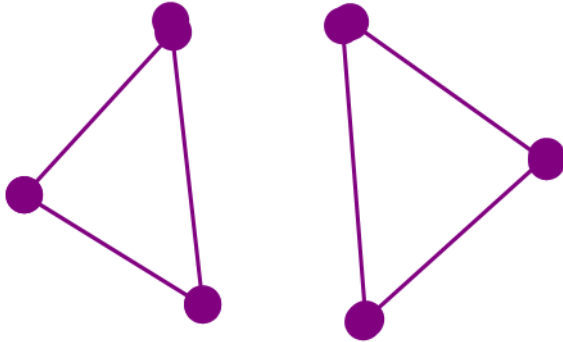
۱۳- گراف ۲ منتظم مرتبه ۶ چند مجموعه احاطه گر ۳ عضوی دارد؟



انتخاب ۳ رأس که به هم نرسند



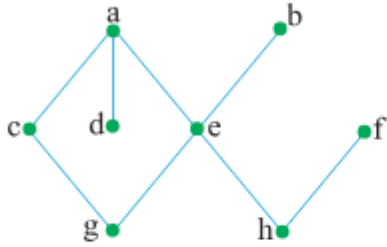
$$\binom{6}{3} - 9 = 20 - 9 = 11$$



$$\binom{3}{2} \binom{3}{1} + \binom{3}{1} \binom{3}{2} = 9 + 9 = 18$$



۱۴- کدامیک از مجموعه‌های زیر برای گراف G در شکل زیر، احاطه‌گر به شمار می‌رود؟



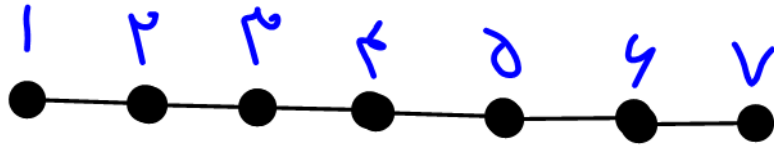
d $\{c, e, f\}$

b $\{d, g, h\}$

f $\{a, b, c, d, e\}$
 $\{a, e, h\}$



۱۵- گراف P_7 چند مجموعه احاطه گر ۵ عضوی دارد؟



$$\binom{7}{5} - 2 = 21 - 2 = 19$$

$$\downarrow$$

$$\{1, 2, 4, 6, 7\}$$

$$\{3, 4, 5, 6, 7\}$$

—

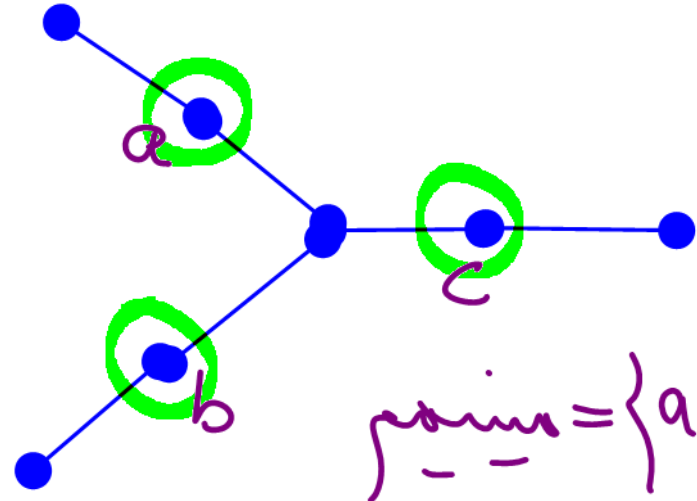
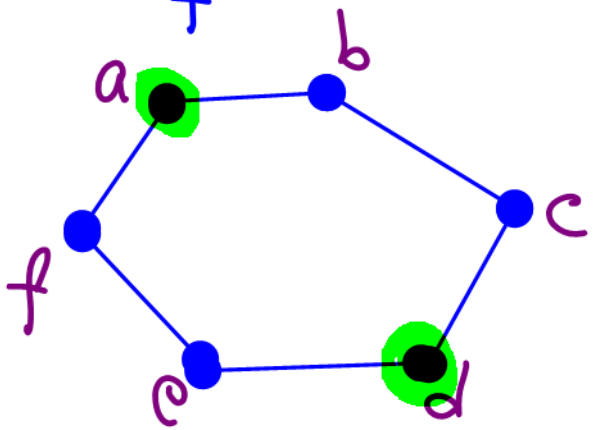
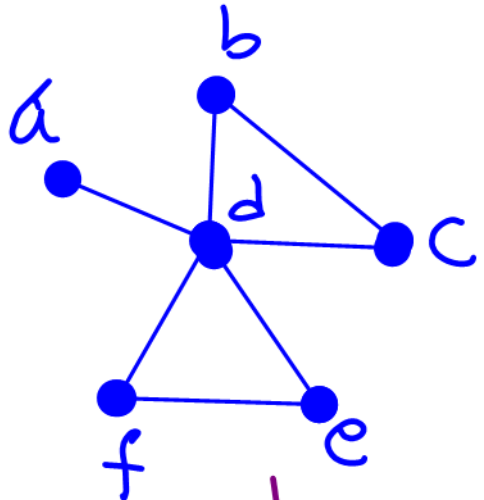


مجموعه احاطه گر مینیمم:

در بین مجموعه های احاطه گر، مجموعه ای که کمترین عضو را دارد مجموعه مینیمم یا γ -مجموعه

نامیده می شود.

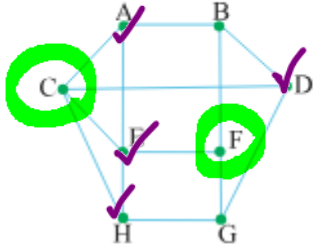
$$\gamma = \{d\}$$



$$\gamma = \{a, b, c\}$$

$$\gamma = \{a, d\} \text{ یا } \{b, e\} \text{ یا } \{c, f\}$$

۱- گراف شکل زیر را با حداقل چند رأس می‌توان احاطه نمود؟



$\{c, f\}$ $\{f, d\}$

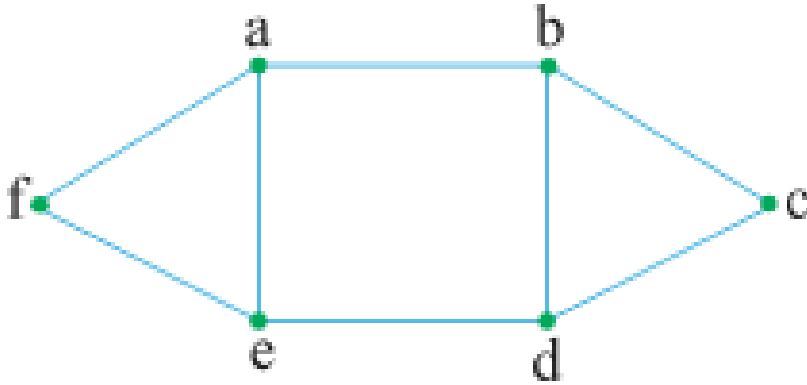
۳ (۲)

۵ (۴)

۲ (۱) ✓
۴ (۳)

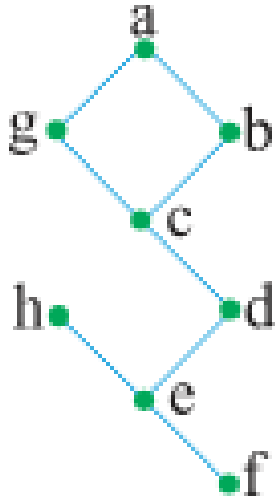


۲- گراف شکل مقابل چند مجموعه احاطه گر مینیمم شامل راس a دارد؟


 $\{a, b\}$
 $\{a, c\}$
 $\{a, d\}$



۳- گراف شکل مقابل چند مجموعه احاطه گر مینیمم دارد؟



$$\{e, a, c\} \quad \{e, d, a\}$$

$$\{e, a, b\}$$

$$\{e, a, g\}$$

$$\{e, b, c\}$$

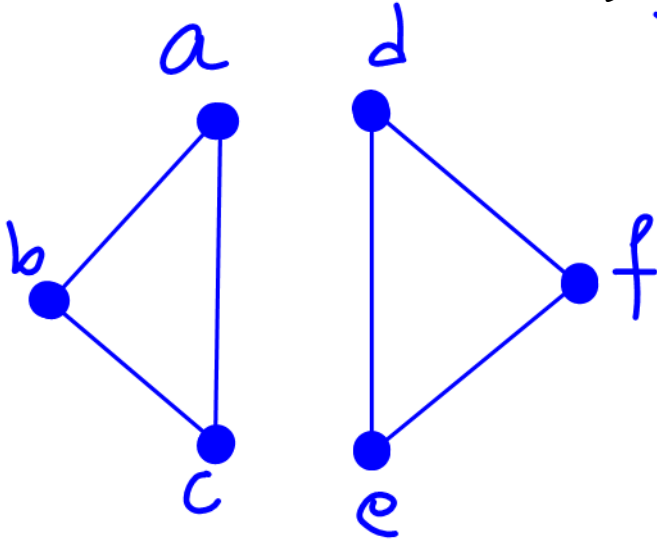
$$\{e, b, g\}$$

$$\{e, c, g\}$$



۴- گراف ۲ منتظم ناهمبند از مرتبه ۶ چند مجموعه احاطه گر مینیمم دارد؟

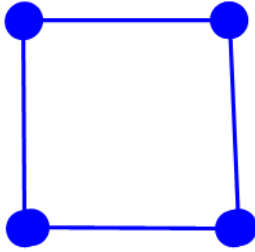
دو عقوی



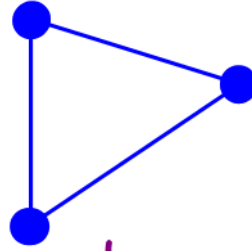
$$\text{جواب} = \binom{3}{1} \binom{3}{1} = 9$$

۵- گراف ۲ منتظم ناهمبند از مرتبه ۷ چند مجموعه احاطه گر مینیمم دارد؟

حفتوی

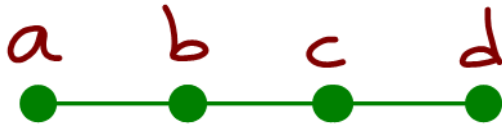


۴ راسی



۳ راسی

$$\text{جواب} = \binom{7}{2} \times \binom{7}{1} = 21 \times 7 = 147$$



$\{a, c\}$ $\{a, d\}$

$\{b, c\}$ $\{b, d\}$

۶- گراف P_4 چند مجموعه احاطه گر مینیمم دارد؟

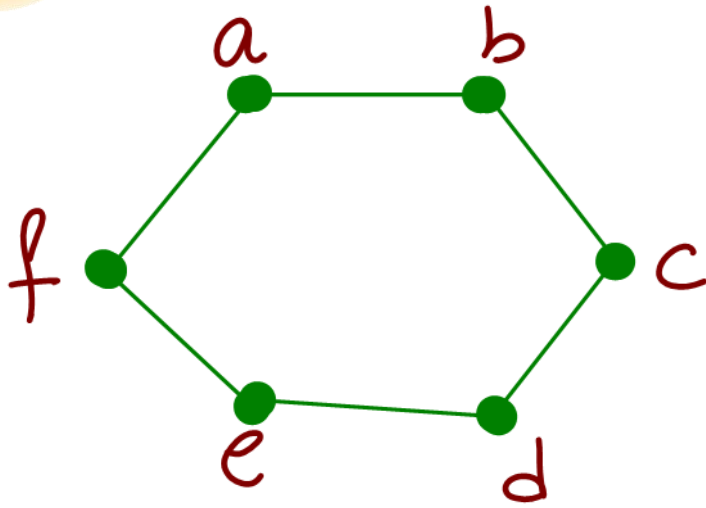
۲ عضو

۶ (۲)

۲ (۱)

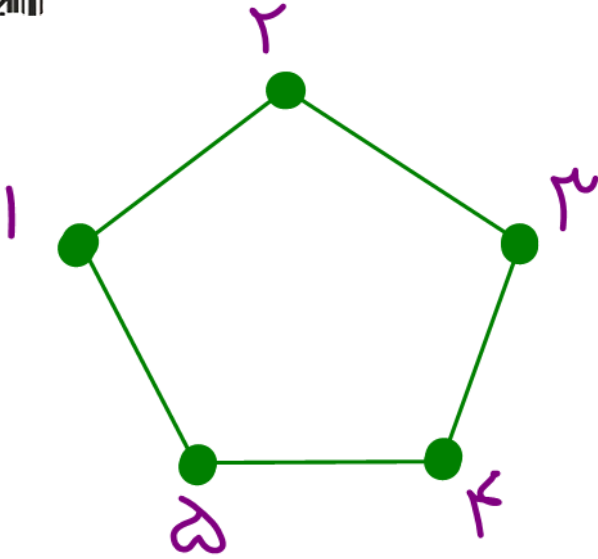
۴ (۳) ✓

۵ (۳)



۷- گراف C_6 چند مجموعه احاطه گر ۲ عضوی دارد؟ $[۳]$

$$\{a, d\} \quad \{b, e\} \quad \{c, f\}$$



تست ۸: گراف C_5 چند مجموعه احاطه گر مینیمم دارد؟

روعضوی

۴ (۲)

۷ (۱)

۵ (۳) ✓

۶ (۳)

{ ۱, ۳ } { ۱, ۴ }

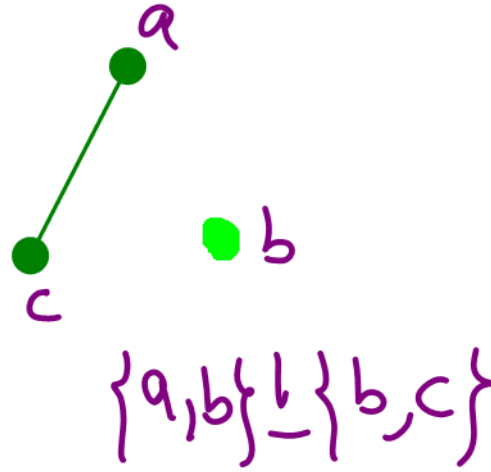
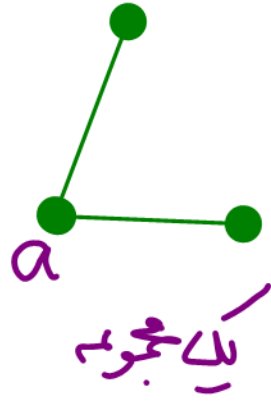
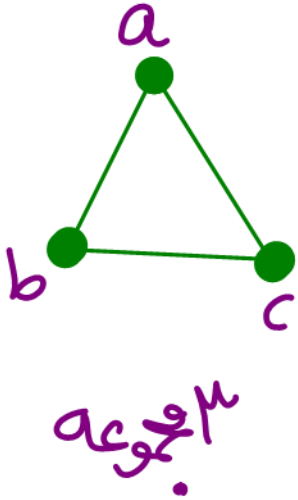
{ ۲, ۴ } { ۲, ۵ }

{ ۳, ۵ }



تست ۹: گرافی از مرتبه ۳ فقط یک مجموعه احاطه گر مینیمم دارد، اندازه این گراف کدام است؟

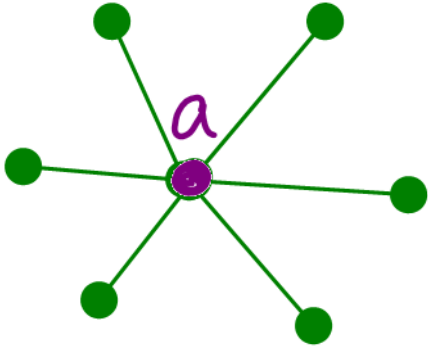
- | | |
|---------|-------|
| ۲ (۲) ✓ | ۳ (۱) |
| ۴ (صفر) | ۱ (۳) |





۱۰- گرافی از مرتبه ۷ مجموعه احاطه گر مینیمم یک عضوی دارد، حداقل اندازه این گراف کدام است؟

۸ (۲)	۴ (۱)
۱۲ (۴)	۶ (۳) ✓

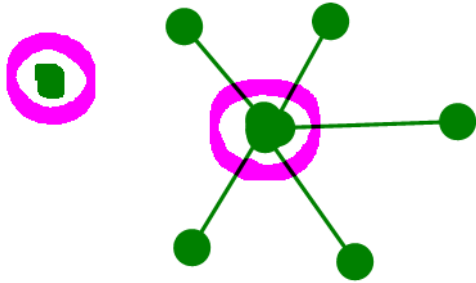


یعنی رأسی وجود دارد که با تمام رأسهای
دیگر مجاور است. (راس با درجه ۶)

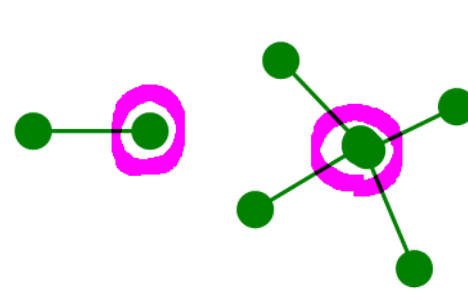
$$r_{\min} = 6$$



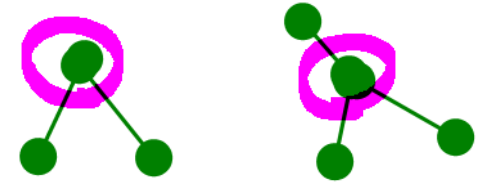
۱۱- گرافی از مرتبه ۷ مجموعه احاطه گر مینیمم دو عضوی دارد، حداقل اندازه این گراف را بیابید.



$$7 = 5$$



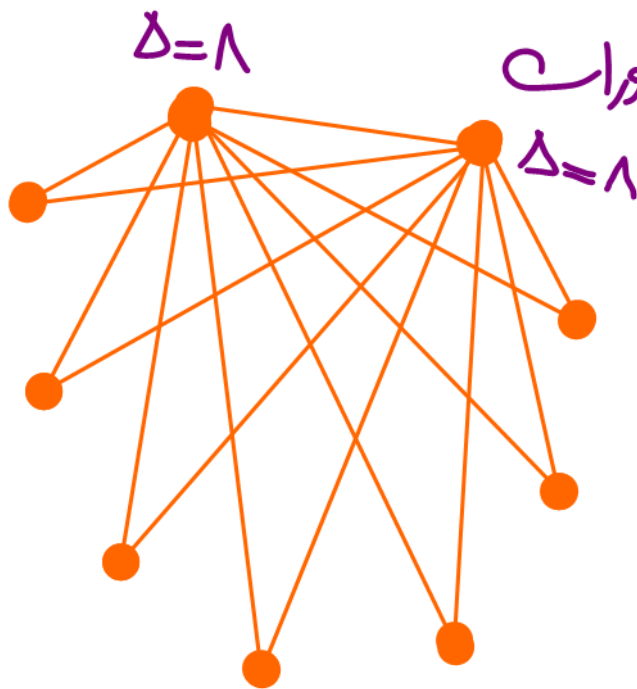
$$7 = 5$$



$$7 = 5$$



۱۲- گرافی از مرتبه ۹ دارای دو مجموعه احاطه گر مینیمم یک عضوی است، حداقل اندازه این گراف را بیابید.



در این گراف ۲ رأس وجود دارد که با همه رأسها محاط است
(رأس با درجه ۸)

$$q_{\min} = 15$$



۱۳- گرافی از مرتبه ۷ با $\Delta = 6$ فقط یک مجموعه احاطه گر مینیمم دارد، حداکثر اندازه این گراف کدام است؟

۱۷ (۲)

۱۶ (۱)

۱۹ (۴)

۱۸ (۳)

راسی که با هم، راسها مجاور است
بسیار گراف با یک رأس احاطه می شود

یعنی درجه بقیه راسها کمتر از $\Delta = 6$ است

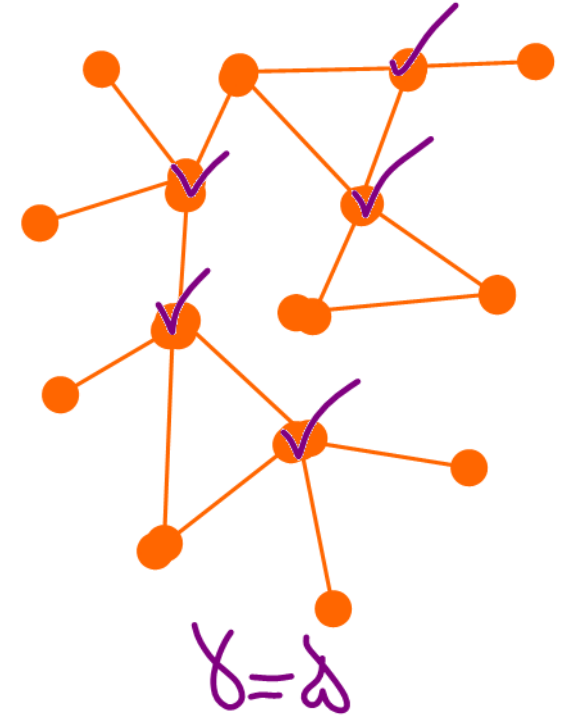
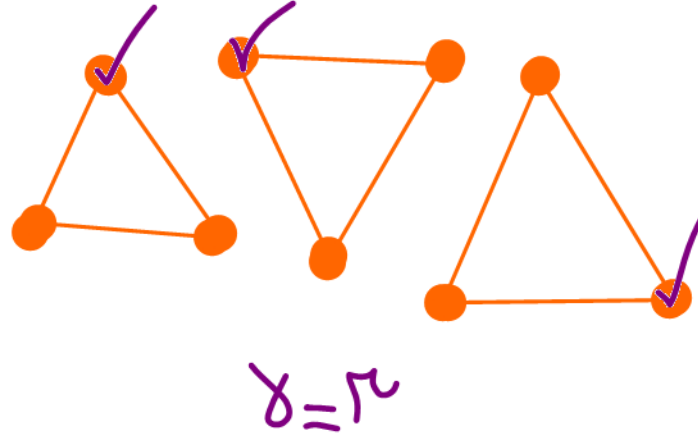
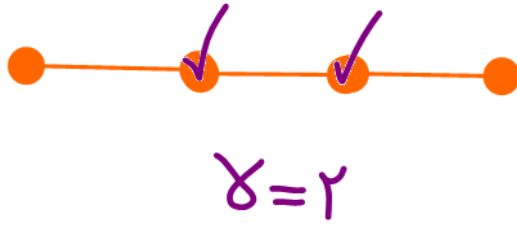
$$f = \frac{\sum d(v_i)}{2} = \frac{24}{2} = 12 = 11$$

درجه ها $6, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6$

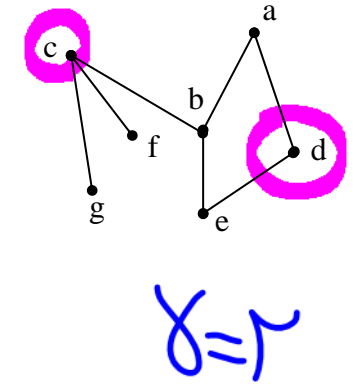
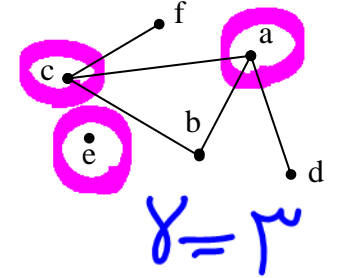
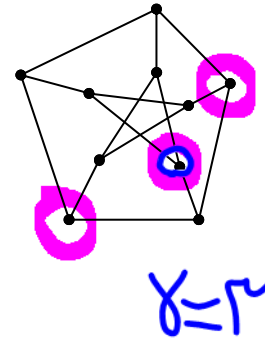
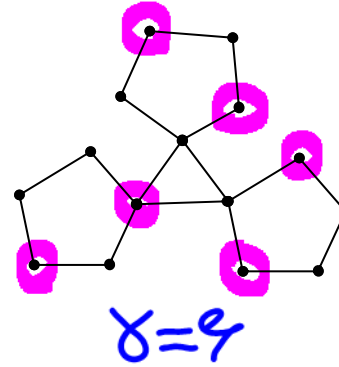
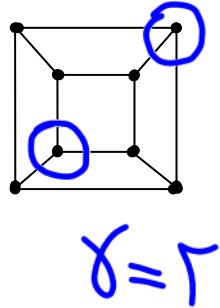
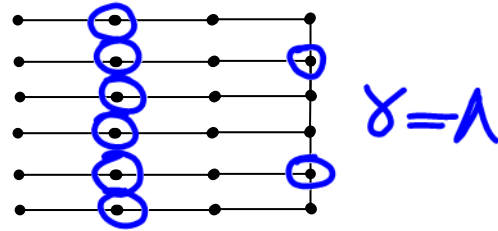
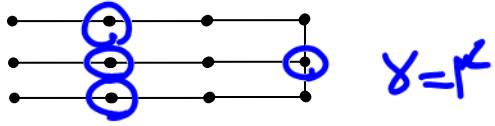
عدد احاطه گری:

تعداد اعضای کوچکترین مجموعه احاطه گر در هر گراف را عدد احاطه گری می نامند

و با $\gamma(G)$ نمایش می دهند.

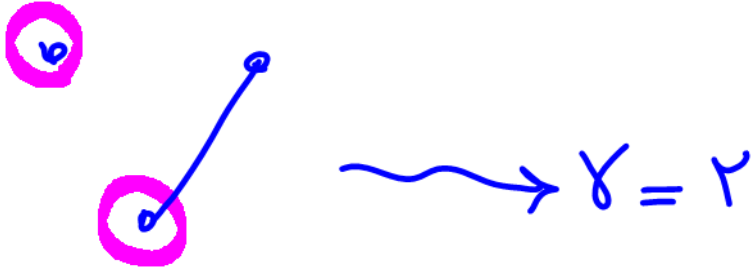


۱- در گراف های زیر عدد احاطه گری را بیابید.



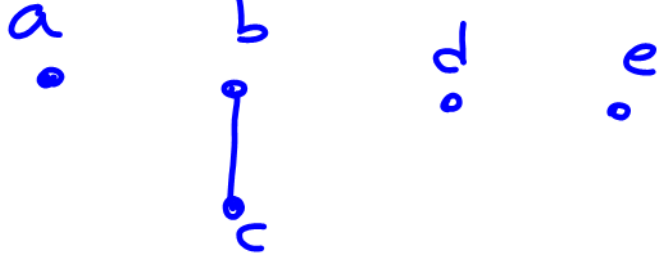


۲- گرافی با سه راس رسم کنید که عدد احاطه گری آن ۲ باشد.





۳- گرافی با ۵ راس رسم کنید که عدد احاطه گری آن ۴ باشد.





۴- گرافی با ۶ راس رسم کنید که عدد احاطه گری آن ۶ باشد.

سرف توی ۶ راسی

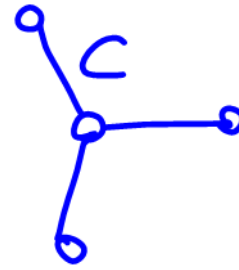
a d e
 b c f



۵- گرافی با ۶ راس رسم کنید که عدد احاطه گری آن ۳ باشد و کمترین تعداد یال را داشته باشد.

a

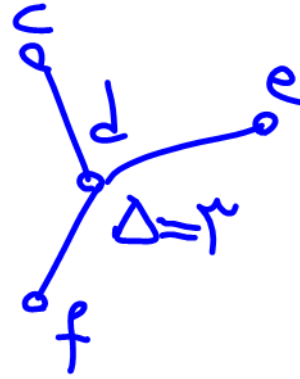
b



$$g_{\min} = 3$$



۶- گرافی با ۶ راس رسم کنید که در آن $\Delta = \gamma = 3$ باشد.



$$\{a, b, d\} = \text{مجموعه احاطه مرکزی}$$

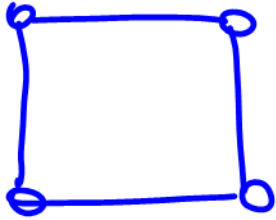


۷- تمام گراف های با ۳ راس را رسم کنید که در آن $\gamma = 2$ باشد.

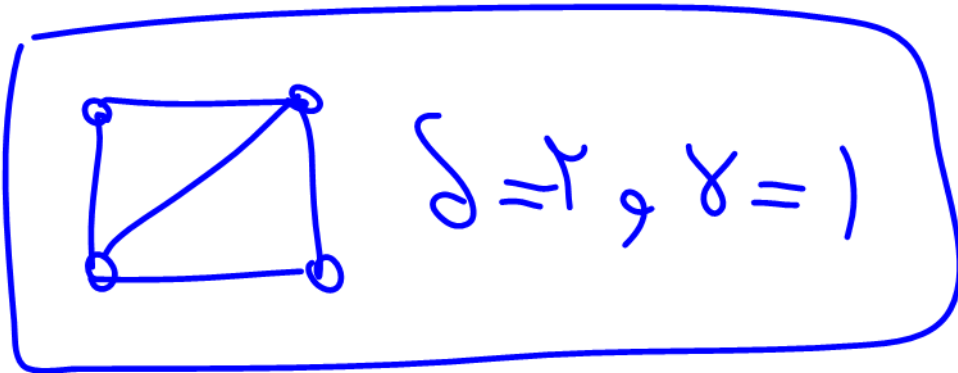




۸- تمام گراف های با ۴ راس را رسم کنید که در آن $\delta = \gamma = 2$ باشد.



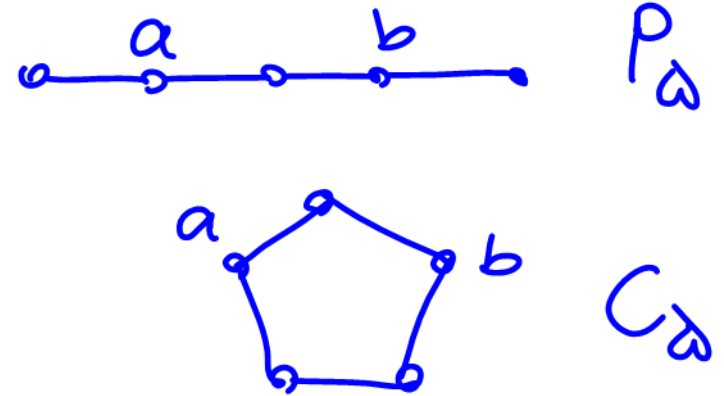
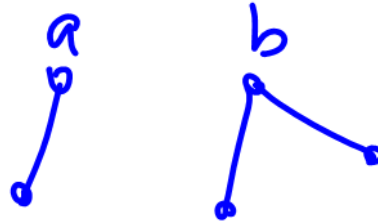
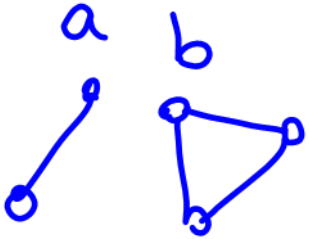
$$\delta = 2, \gamma = 2 \quad \checkmark$$



$$\delta = 2, \gamma = 1 \quad \times$$

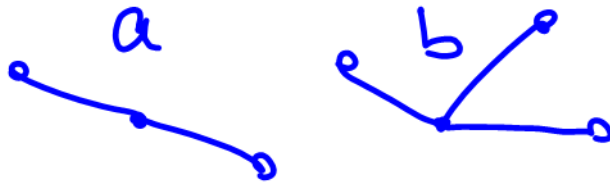


۹- تمام گراف های با ۵ راس را رسم کنید که در آن $\Delta = \gamma = 2$ باشد.





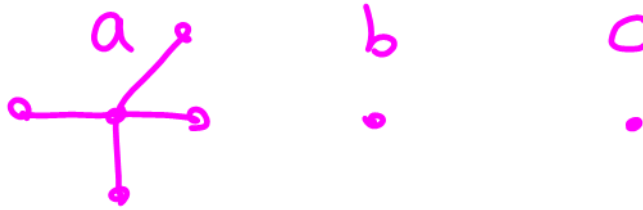
۱۰- گرافی با ۷ راس رسم کنید که عدد احاطه گری آن ۲ باشد و فقط یک مجموعه احاطه گر مینیمم داشته باشد.



$$\{a, b\} = \text{احاطه گر}$$



۱۱- گرافی با ۷ راس و کمترین یال رسم کنید که عدد احاطه گری آن ۳ باشد و فقط یک مجموعه احاطه گر مینیمم داشته باشد.



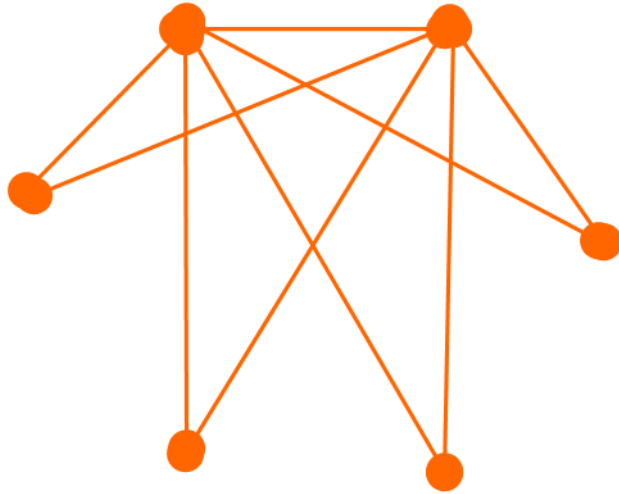
$$f_{min} = K$$



۱۲- گرافی با ۶ راس و کمترین یال رسم کنید که عدد احاطه گری آن ۱ باشد و فقط ۲ مجموعه احاطه گر مینیمم داشته باشد.

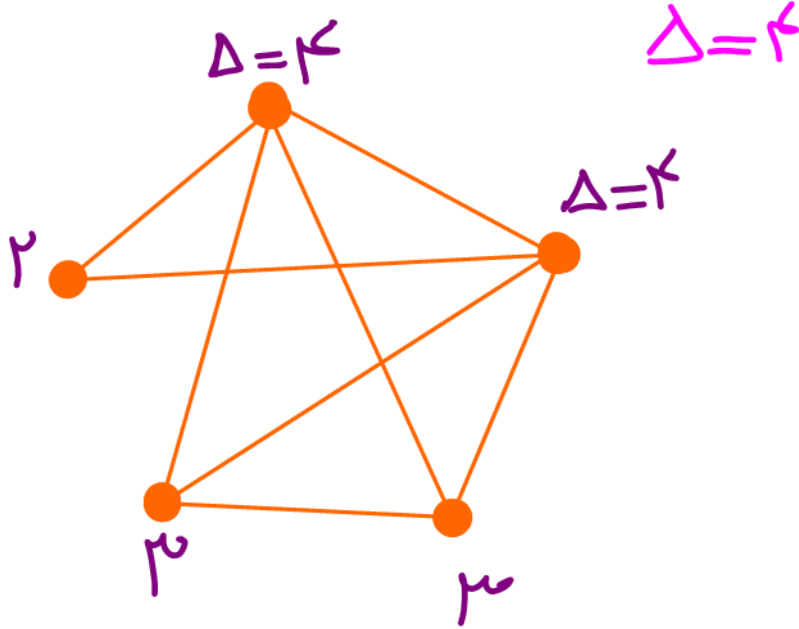
$$\Delta = 5$$

$$f_{\min} = 9 = \text{کمترین تعداد یال}$$





۱۳- گرافی با ۵ راس و بیشترین یال رسم کنید که عدد احاطه گری آن ۱ باشد و فقط ۲ مجموعه احاطه گر مینیمم داشته باشد.

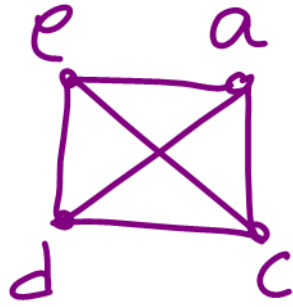


$$4, 3, 3, 2$$

$$q_{fmax} = 1$$



۱۴- گرافی با ۵ راس رسم کنید که عدد احاطه گری آن ۲ باشد و دقیقاً ۴ مجموعه احاطه گر مینیمم داشته باشد.



b

$\{a, b\}$

$\{c, b\}$

$\{d, b\}$

$\{e, b\}$

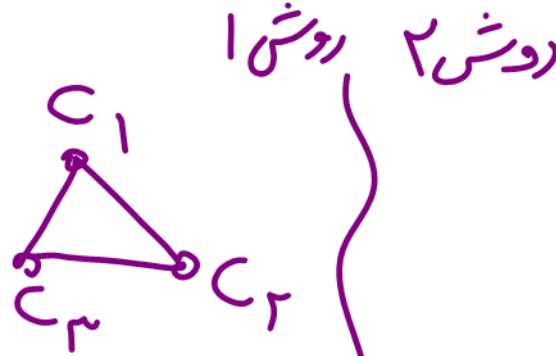
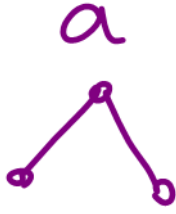


۱۵- گرافی با ۵ راس رسم کنید که عدد احاطه گری آن ۳ باشد و دقیقاً ۴ مجموعه احاطه گر مینیمم داشته باشد.



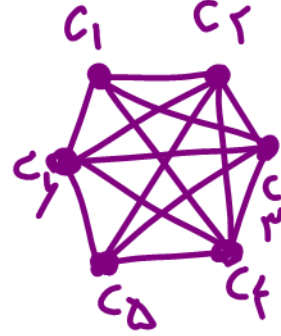


۱۶- گرافی با ۸ راس رسم کنید که عدد احاطه گری آن ۳ باشد و ۶ مجموعه احاطه گر مینیمم داشته باشد.



a

b

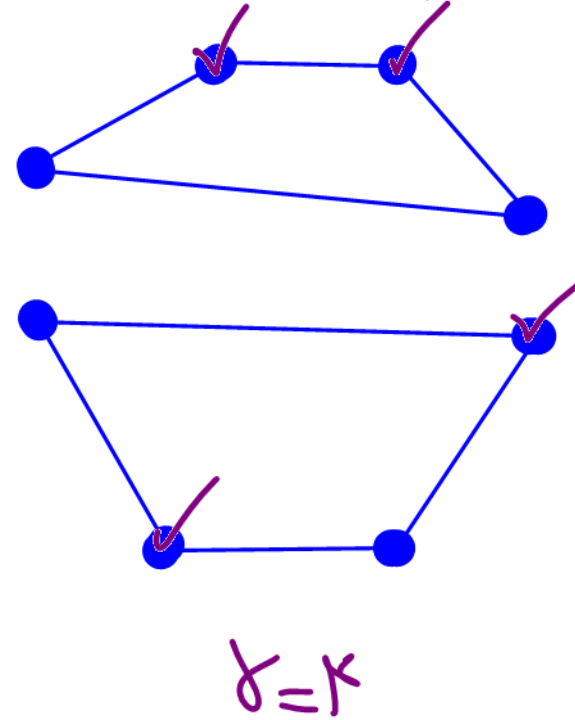
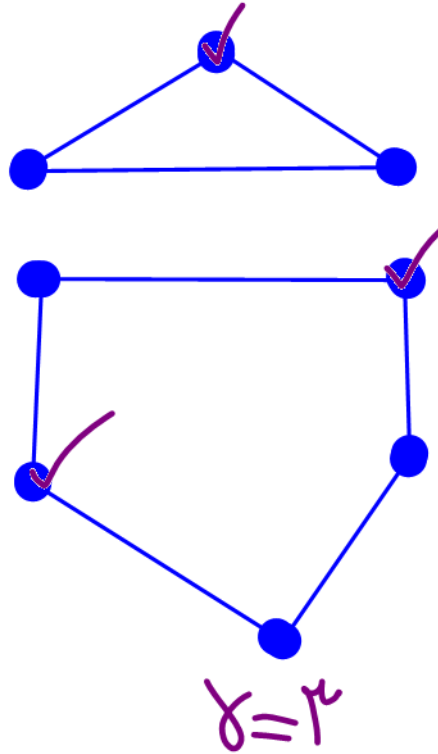
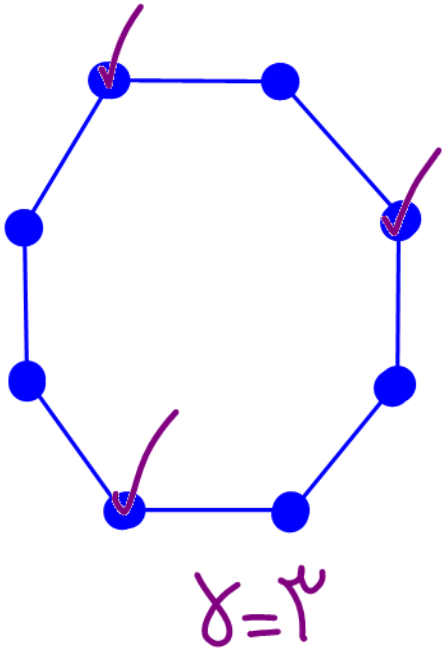


:

۱



۱۷- گراف ۲ منتظم مرتبه ۸ را به شکل های مختلف رسم کنید و در هر حالت عدد احاطه گری را بیابید.



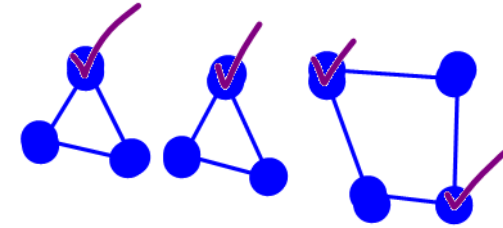
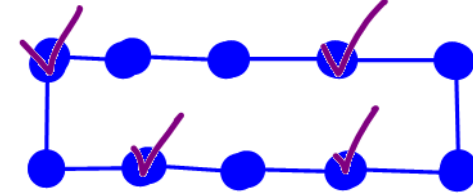


۱۸- در گراف ۲ منتظم مرتبه ۱۰ بیشترین عدد احاطه گری را بیابید.

$$۱۰ \text{ ضلعی} \rightarrow ۴ = ۳$$

$$۵ \text{ و } ۵ \text{ ضلعی} \rightarrow ۴ = ۳$$

$$۴ \text{ و } ۳ \text{ و } ۳ \text{ ضلعی} \rightarrow ۴ = ۴$$





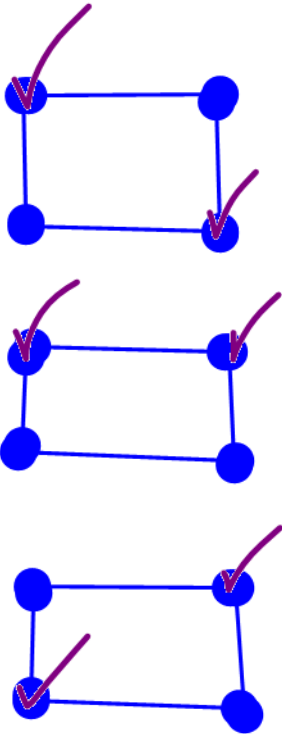
۱۹- در گراف ۲ منتظم مرتبه ۱۲ حداکثر عدد احاطه‌گری کدام است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)





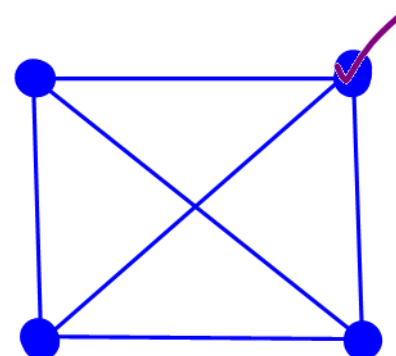
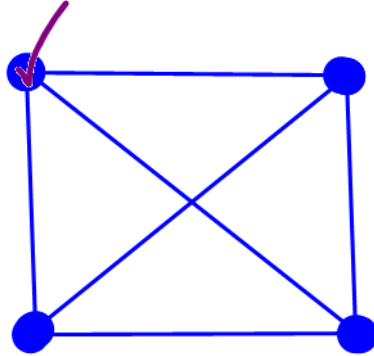
۲۰- در گراف ۳ منتظم ناهمبند مرتبه ۸ عدد احاطه گری کدام است؟

۴ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲) ✓

۳ (۱)





۲۱- در گراف امنتظم مرتبه ۱۰ عدد احاطه گری کدام است؟

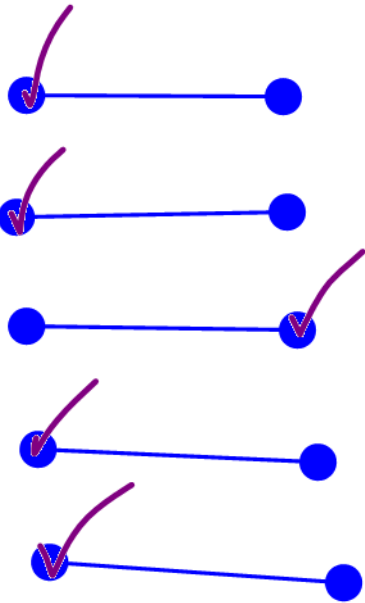
۱۰ (۱)

۵ (۲)

۲ (۳)

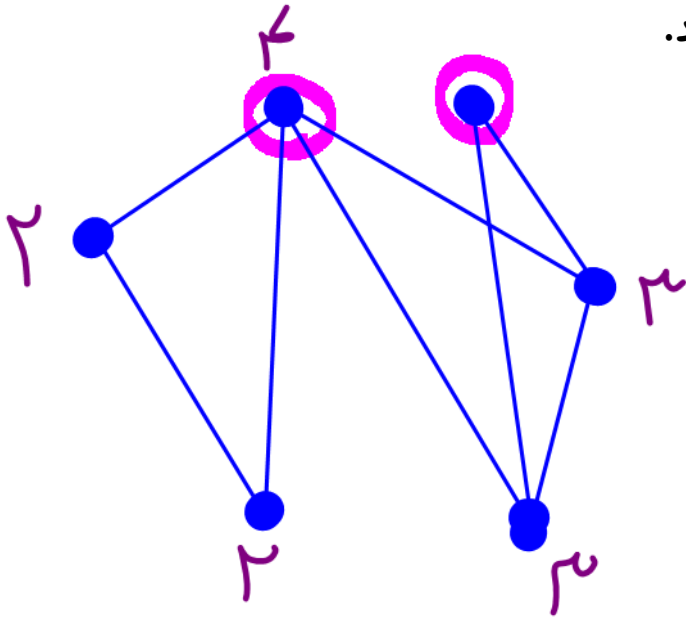
۴ (۴)

$$\delta = 5$$





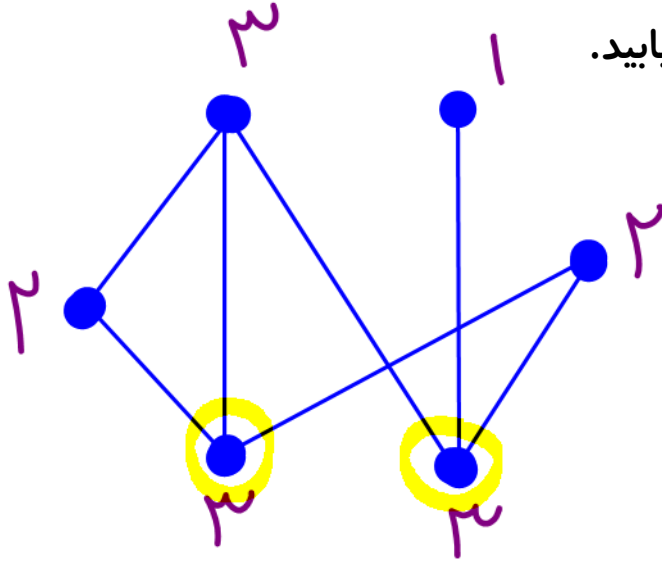
۲۲- در گرافی با درجه راس های ۴ و ۳ و ۲ و ۲ و ۲ عدد احاطه گری را بیابید.



$$\delta = 2$$



۲۳- در گرافی با درجه راس های ۳ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ عدد احاطه گری را بیابید.



$$\delta = 2$$



۲۴- در گراف ۸ منتظم مرتبه ۱۰ عدد احاطه گری کدام است؟

۴ (۴)

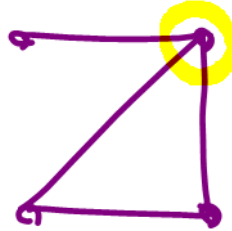
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

هدر آس از این گراف، فقط بایک آس مجاور نیست

۲۵- در گراف ناهمبند از مرتبه ۵ حداقل عدد احاطه گری را بیابید.



$$\delta = 2$$



۲۶- اگر در یک گراف از مرتبه ۸ عدد احاطه گری برابر یک باشد، حداقل اندازه کدام است؟

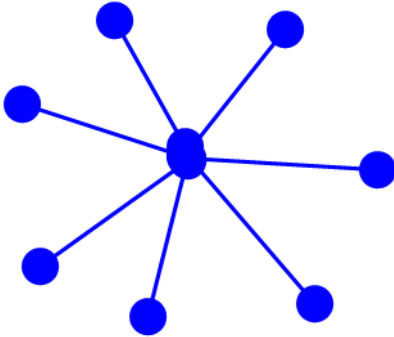
$$\Delta = 7$$

۸ (۲)

۷ (۱) ✓

۲۲ (۴)

۶ (۳)



وگزار فقط یک مجموعه احاطه در منوعیم داشته باشم

۲۷- اگر در یک گراف از مرتبه ۵ عدد احاطه گری برابر یک باشد، حداکثر اندازه کدام است؟

$$\Delta = 4$$

$$8 (2)$$

$$7 (1)$$

$$9 (4)$$

$$6 (3)$$

$$4, 3, 3, 3, 3$$

$$f = \frac{\sum d(u_i)}{2} = \frac{16}{2} = 8$$



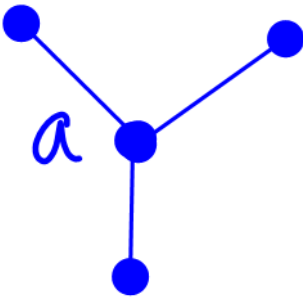
۲۸- در یک گراف از مرتبه ۵ اگر عدد احاطه گری برابر دو باشد، حداقل اندازه کدام است؟

۳ (۲)

۵ (۱)

۴ (۴)

۲ (۳)

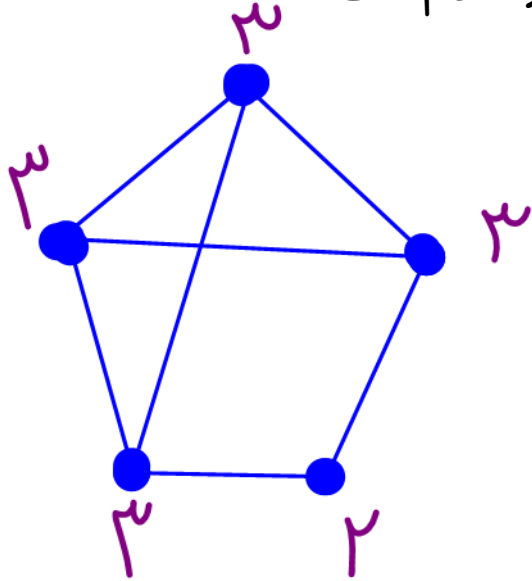


• b

$$g_{\min} = 3$$



۲۹- در یک گراف از مرتبه ۵ اگر عدد احاطه گری برابر دو باشد، حداکثر اندازه کدام است؟



۷ (۲) ✓

۸ (۱)

۹ (۴)

۶ (۳)

$$2, 3, 3, 3, 3, 3 \rightarrow 9 = 7$$



۳۰- کدام گزینه کمترین عدد احاطه گری را دارد؟

(۱) دو منتظم مرتبه ۸ $۳ \leq ۴$

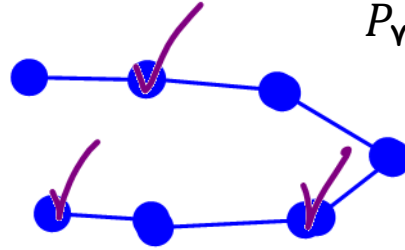
(۲) گرافی با ۶ راس و ۱۳ یال ✓

(۴) گراف P_7

$$\chi = 2$$

(۲) گراف تهی دو راسی

$$\chi = 3$$



معایب با گراف $g_k = 15 \leftarrow k$

پس در هر شرایطی این گراف راس

درجه ۵ دارد $\chi = 1$



۳۱- در یک گراف از مرتبه ۶ اگر اندازه برابر ۴ باشد، حداکثر عدد احاطه گری کدام است؟

- | | |
|-------|-------|
| ۳ (۲) | ۲ (۱) |
| ۴ (۴) | ۱ (۳) |



۳۲- در یک گراف از مرتبه ۷ اگر اندازه برابر ۵ باشد، حداقل عدد احاطه گری کدام است؟

۳ (۲) ۲ (۱)

۴ (۴) ۱ (۳)



معرفی نماد سقف صحیح

برای هر عدد حقیقی، کوچکترین عدد صحیحی که بزرگتر یا مساوی عدد مورد نظر باشد را با سقف صحیح آن نمایش می‌دهند.

$$n - 1 < x \leq n \Leftrightarrow [x] = n$$

نکته:

الف. در گراف کامل عدد احاطه گری برابر یک است. $\gamma(k_p) = 1$.

ب. اگر در گرافی یک راس فول داشته باشیم، عدد احاطه گری برابر یک است و بالعکس

ج. در گراف P_n عدد احاطه گری برابر $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ است.

د. در گراف C_n عدد احاطه گری برابر $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ است.

ه. در هر گراف مرتبه n با بزرگترین درجه راس Δ عدد احاطه گری حداقل برابر $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ و حداکثر برابر $n - \Delta$ است.



۱- گرافی با ۶ راس و $\Delta = 4$ رسم کنید که عدد احاطه گری آن برابر $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ باشد.



۲- گرافی با ۵ راس و $\Delta = 2$ رسم کنید که عدد احاطه گری آن برابر $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ باشد.



۳- گرافی با ۶ راس و $\Delta = 3$ رسم کنید که عدد احاطه گری آن برابر $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ نباشد.

