



فصل سوم

ترکیبیات

مربع لاتین: یک جدول مربعی $n \times n$ از اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ که در هر سطر و ستون آن اعداد بدون تکرار قرار گرفته باشند، مربع لاتین نام دارد.

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۱	۲
۲	۱

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴

D	C	B	A	سری
۴	۳	۲	۱	۱
۳	۴	۱	۲	۲
۲	۱	۴	۳	۳
۱	۲	۳	۴	۴



۱- چند مربع لاتین 3×3 به صورت مقابل وجود دارد؟

۱ (۱) ✓ ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲



۲- چند مربع لاتین 3×3 به صورت مقابل وجود دارد؟

۱ (۱) ✓ ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳



نکته: مربع های لاتین 3×3 فقط به دو صورت هستند.

۱	۲
۲	۱

A	B	C
C	A	B
B	C	A

C	B	A
B	A	C
A	C	B

$$۶ = ۳! : \text{تعداد حالت ها}$$

$$۶ = \text{تعداد حالت ها}$$

تعداد مربع های لاتین ۲×۲ برابر ۲ است.

تعداد مربع های لاتین ۳×۳ برابر ۱۲ است.

۳- اگر همه درایه های واقع بر قطر اصلی در یک مربع لاتین 3×3 برابر ۲ باشد جمع درایه های واقع بر قطر

فرعی کدام است؟

(۱) ۶ یا ۵

(۳) ۳ یا ۵

(۲) ۶ ✓

(۳) ۳

۲		۳
	۲	
۱		۲

۱	۳	۴	۲
۲	۴	۳	۱
۴	۲	۱	۳
۳	۱	۲	۴



۴- چند مربع لاتین 3×3 به صورت مقابل وجود دارد؟

۱ (۱) ۲ (۲)
۳ (۳) ۴ (۴)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۱	۳	۱

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲



۵- کدام گزینه مربع لاتین 3×3 است؟

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

(۱)

۱		
		۲
	۱	

(۲)

	۲	
	۱	۲

(۳)

۱		۲
۲		۱

(۴)



۶- چند مربع لاتین 3×3 به صورت مقابل وجود دارد؟

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

۲ (۲)

۶ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

$$12 = 3 \times 3 \times 3$$



۷- در مربع لاتین 3×3 مجموع تمام درایه ها چقدر است؟

۱۸ (۱)

۱۲ (۲)

۲۴ (۳)

۳۶ (۴)

۱	۲	۳
۲	۱	۲
۲	۳	۱

$$\text{جمع} = ۱ + ۲ + ۳ = ۶$$

$$\text{جمع} = ۶$$

$$\text{جمع} = ۶$$



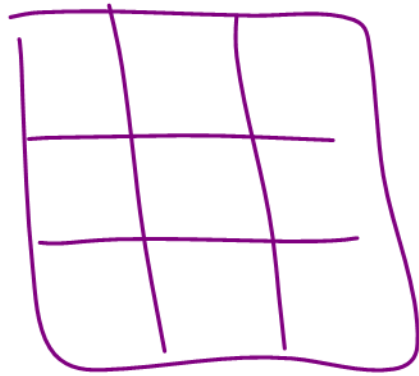
۸- در مربع لاتین 3×3 حاصلضرب تمام درایه ها چقدر است؟

(۱) ۲۱۶

(۲) ۱۲۰

(۳) ۱۸۰

(۴) ۱۴۴



$$\left. \begin{array}{l} \text{حاصلضرب} = 9 \\ \sim = 9 \\ \sim = 9 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضرب}} 216$$



۹- اگر مربع مقابل یک مربع لاتین باشد، مقدار X کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴) ✓

۴	۲	۳	۱
۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۳	۲	$X=۴$



۴	۲	۳	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۳	۴	۲
۲	۳	۱	X

۱۰- اگر مربع مقابل یک مربع لاتین باشد، برای X چند حالت ممکن است؟

۳	۲	۱	۳
۳	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱
۱	۴	۳	۲=X

۳	۲	۱	۳
۳	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۲
۲	۲	۳	۱=X

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)



۱۱- اگر مربع مقابل یک مربع لاتین باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۸ (۱)

۱۱ (۲)

۱۲ (۳)

۴ (۴)

$$a = 2, b + c = 2 + 4$$

۴	۳	۲	۱
۴	۲	۱	۴
۲	۱	$b=2$	$c=2$
۱	$a=2$	۳	۲



۱۲- به چند طریق مربع لاتین مقابل را می توان تکمیل کرد؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۴	۲	۳	۱
۲	۱	۴	۳
۱	۳	۲	۴
۳	۴	۱	۲



حالت ۲

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	
۳	۴	۱	
۴			۱

برای سکتون اول

۲ حالت

برای سکتون اول

۱۳- چند مربع لاتین به صورت مقابل وجود دارد؟

۱۶ (۲) ۸ (۱)

۲ (۴) ۴ (۳)

۱۴- چند مربع لاتین به صورت مقابل وجود دارد؟

۸ (۱) ۶ (۲)
۲ (۴) ۴ (۳)

۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۲			۳
۳			۲

۲ حالت

۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۳			۲
۲			۳

۲ حالت



۱۵- در مربع لاتین 5×5 حاصلضرب درایه های ستون سوم چقدر است؟

۱۵۰ (۴)

۲۵ (۳)

۱۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

در هر ستون درایه ها ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ وجود دارد

$$۱۲۰ = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = \text{حاصلضرب}$$

در مربع $n \times n$ حاصلضرب درایه های هر ستون برابر $n!$ است



۱۶- در مربع لاتین 7×7 میانگین درایه های سطر آخر را بیابید

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4$$



۱۷- در مربع لاتین 7×7 واریانس درایه های سطر ششم چقدر است؟

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$$

۷ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۱, ۲, ۳, ..., ۷

$$\Rightarrow s^2 = d^2 \frac{n^2 - 1}{12} = 1 \times \frac{49 - 1}{12} = 4$$

برابر جدات دنباله حسابی بعوض $a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d$

$$s^2 = d^2 \times \frac{n^2 - 1}{12}$$



۱۸- مجموع تمام اعضای یک مربع لاتین $n \times n$ چند است؟

$$(1) \quad (n!)^n$$

$$(2) \quad n \times (n^2 - 1)$$

$$\frac{n^2(n+1)}{2} \quad (3)$$

$$\frac{n^2(n-1)}{2} \quad (4)$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$\text{جمع کل} = n \times \frac{n(n+1)}{2}$$



۱۹- اگر دو عضو از یک مربع لاتین 4×4 انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد مجموع آنها برابر ۴ باشد؟

$$\frac{1}{4} (1)$$

$$\frac{11}{60} (2)$$

$$\frac{1}{15} (3)$$

$$\frac{1}{6} (4)$$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1} + \binom{4}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{4 \times 4 + 6}{\frac{16 \times 15}{2}} = \frac{22}{120} = \frac{11}{60}$$



۲۰- اگر دو عضو از دوسطر در یک مربع لاتین 4×4 انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد مثل هم باشند؟

$$\frac{1}{4} (1) \checkmark$$

$$\frac{3}{16} (2)$$

$$\frac{1}{15} (3)$$

$$\frac{1}{6} (4)$$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{4}{2} + \binom{4}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{4}{2} \times 4 \times 4} = \frac{4 \times 4}{4 \times 4 \times 4} = \frac{1}{4}$$

حرها



۲۱- اگر دو عضو از یک مربع لاتین $n \times n$ انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد مثل هم باشند؟

$$\binom{n}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{n+1} \quad (2)$$

$$\frac{1}{n^2+n} \quad (3)$$

$$\frac{\binom{n}{1}}{\binom{n^2}{2}} \quad (4)$$

$$P(A) = \frac{\binom{n}{2}_{1,1} + \binom{n}{2}_{2,2} + \dots + \binom{n}{2}_{n,n}}{\binom{n^2}{2}} = \frac{n \times \frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n^2(n^2-1)}{2}} = \frac{n-1}{n^2-1} = \frac{1}{n+1}$$



۲۲- اگر سه عضو از سه سطر در یک مربع لاتین 4×4 انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد مجموع آنها برابر با

۱۰ باشد؟

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2} \times 3 + \binom{4}{2} \times 2}{\binom{4}{2} \times 4 \times 4 \times 4} = \frac{6 + 6}{64} = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$$

نمط
انتخاب
نمط

۳ و ۳ و ۴
۲ و ۴ و ۴

$$\frac{3}{32} (2)$$

$$\frac{2}{15} (3)$$

$$\frac{1}{16} (1)$$

نکته : یک روش برای ساختن مربع های لاتین ، روش چرخشی است.

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۳	۵	۱	۲	۴
۲	۳	۵	۱	۴
۴	۲	۳	۵	۱

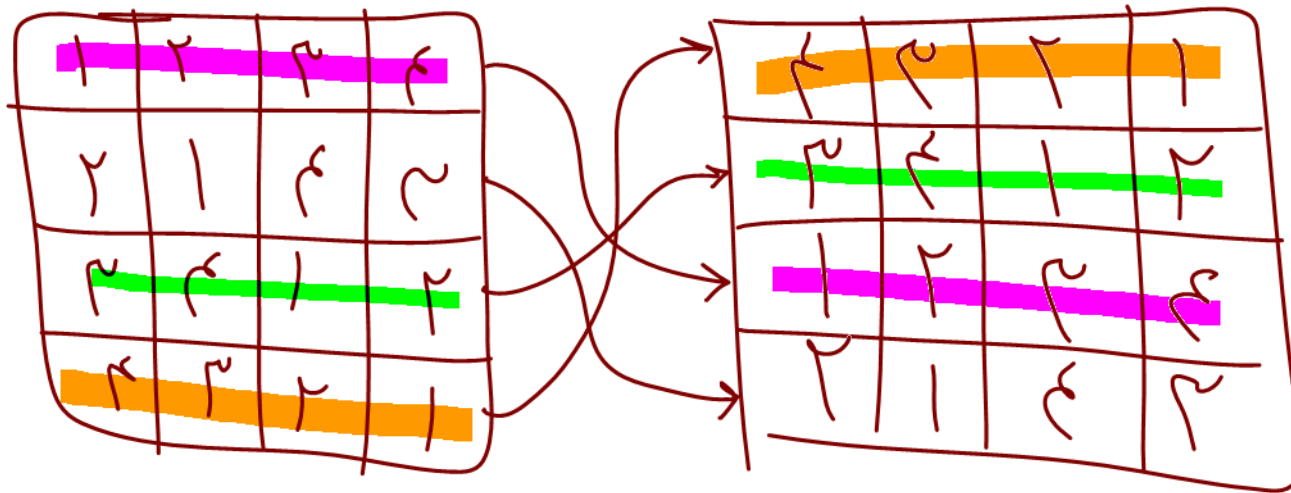
۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۴
۲	۳	۱	۴
۴	۲	۳	۱

۳	۱	۲	۴
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۳	۱
۱	۲	۳	۴

نکته : در مربع های لاتین ، باجابجا کردن دوسطر یا دوستون ، همچنان مربع لاتین بدست می آید.

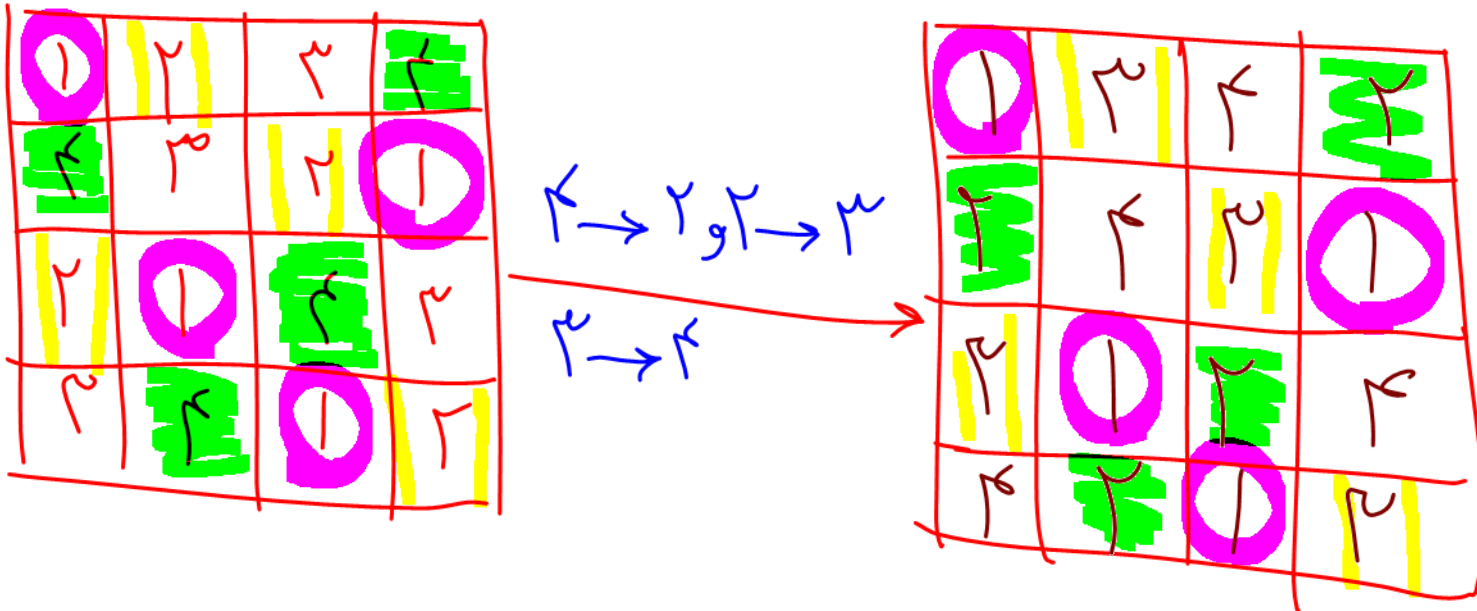
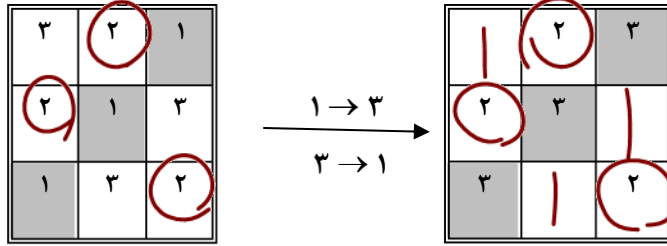
C	B	A
B	A	C
A	C	B

B	A	C
C	B	A
A	C	B





نکته ۴: در مربع های لاتین ، با جایگشت روی اعداد جدول ، همچنان مربع لاتین بدست می آید.





۴	۳	۲	۱
۲	۲	۱	۴
۲	۱	۴	۳
۱	۴	۳	۲

$$4 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2$$

$$2 \rightarrow 4$$

۳	۲	۴	۱
۲	۴	۱	۳
۴	۱	۳	۲
۱	۳	۲	۴

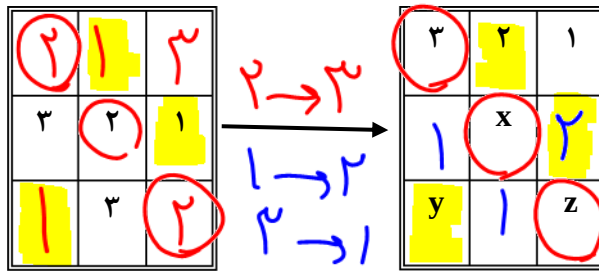
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

$$\begin{array}{l} 4 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 4, 1 \rightarrow 3 \end{array}$$

۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱



۱- با اعمال جایگشت روی اعضای مربع A مربع B بدست آمده است، حاصل $x+y+z$ کدام است؟



$$x=2, z=3$$

$$y=2$$

$$\begin{array}{cc} 8(2) & 9(1) \\ 6(3) & 7(3) \end{array}$$



۲- با اعمال جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین 4×4 چند مربع لاتین جدید به وجود می آید؟

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

۲۴ (۳)

۲۳ (۳)

$$1 - (1 \times 2 \times 3 \times 4)$$



۳- با اعمال جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین $n \times n$ چند مربع لاتین جدید به وجود می آید؟

$$n^2 - 1 \quad (۲)$$

$$n! \quad (۱)$$

$$n! - 1 \quad (۳)$$

$$n^n \quad (۳)$$

مربع های لاتین متعامد: دو مربع های لاتین ، متعامدند اگر خانه هایی که در یک جدول با رقم a پر شده اند، در جدول دیگر رقم تکراری نداشته باشند.

☐ ۴ ورزشکار
☐ ۴ قیمت
☐ ۴ روز
☐ ۴ مدل بزرگ

فوزا

وزن

وزن

روز ۱	روز ۲	روز ۳	روز ۴
روز ۱	روز ۲	روز ۳	روز ۴
روز ۱	روز ۲	روز ۳	روز ۴
روز ۱	روز ۲	روز ۳	روز ۴

Diagram illustrating a swap operation between two 2x2 grids. The top grid contains the values 2 and 1 in its top row. The bottom grid contains the values 1 and 2 in its top row. A double-headed arrow between the grids is labeled "swapped", indicating that the values in the top row of the top grid are swapped with the values in the top row of the bottom grid.

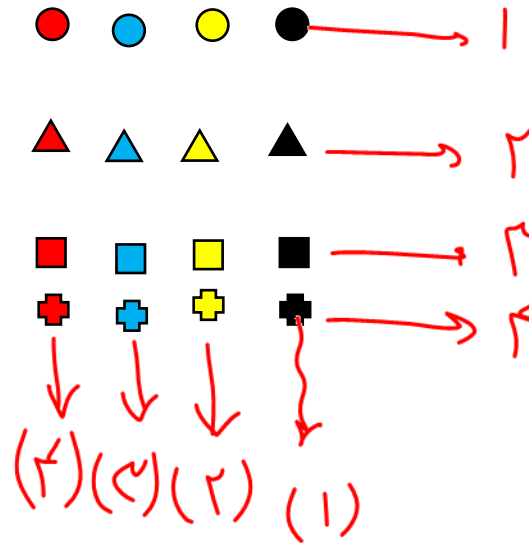


مستطامند

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۲	۱	۳	۴
۴	۳	۲	۱

۱	۲	۳	۴
۴	۳	۱	۲
۲	۱	۳	۴
۳	۴	۲	۱

۱- در مربع زیر شکل های داده شده را طوری قرار دهید که در هر سطر و ستون، رنگ یا شکل تکراری نداشته باشیم.



۱	۴	۳	۲
۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳

رنگ ها

۱	۲	۴	۳
۴	۳	۱	۲
۲	۱	۳	۴
۳	۴	۲	۱

شکل ها

♣ در مربع های لاتین 3×3 ، هر مربع با ۶ مربع دیگر متعامد است

و با ۵ مربع دیگر متعامد نیست.

A		
	A	
		A

(۴ حالت دارد)

متعامدند

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

با ۹ نامتعامد است



۲- یک مربع لاتین 3×3 با چند مربع لاتین متعامد است؟

۵ (۲)

۶ (۱)

۱۲ (۳)

۱۱ (۳)



۴- چند مربع لاتین به صورت

زیر متعامد باشد؟

۳		

وجود دارد که با مربع

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

★ در مربع های لاتین 3×3 ، اگر فقط جای دوسطر یا فقط دو ستون را باهم عوض کنیم، دو مربع متعامد به وجود می آید.

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۲	۱

۱	۲	۳	۴
۴	۳	۱	۲
۲	۴	۳	۱
۳	۱	۲	۴

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱

متعامد نیست

متعامدند

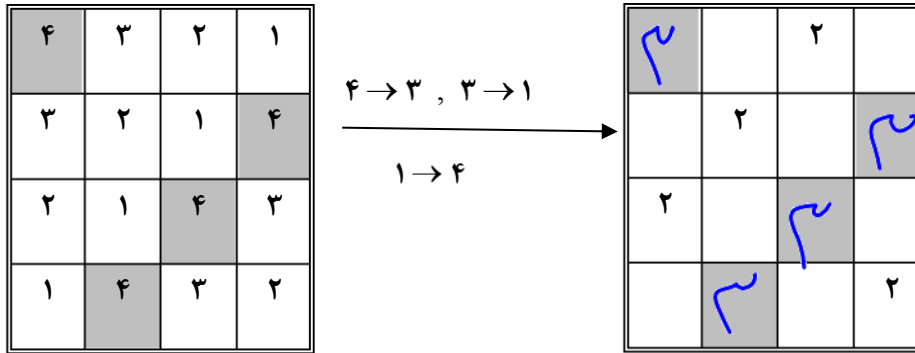


★ مربع های لاتین متعامد از مرتبه 2×2 و 6×6 وجود ندارد.

✓ تمام مربع های لاتین 4×4 لزوماً متعامد نیستند



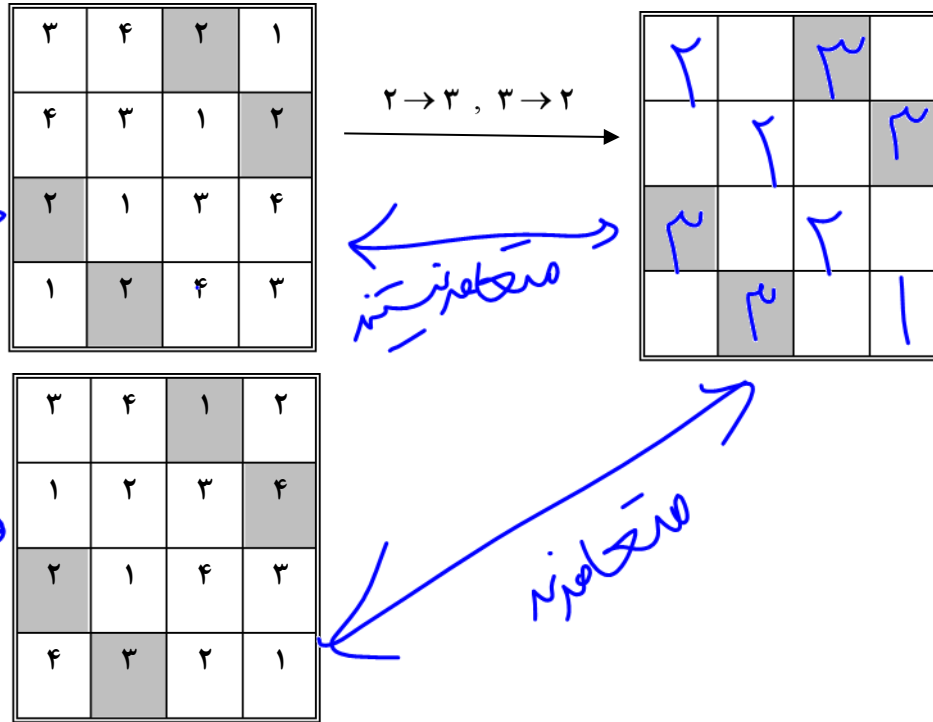
★ اگر یک مربع لاتین داشته باشیم، با اعمال جایگشت روی اعضای مربع، مربعی بدست می آید که بامربع اولیه متعامد نیست.



متعامد نیستند

★ اگر دو مربع لاتین متعامد داشته باشیم، با اعمال جایگشت روی یکی از مربع ها، مربعی بدست می آید که

بامربع اولیه متعامد است.





★ یک روش برای ساختن دومربع متعامد ، روش چرخشی برای مربع مرتبه فرد است.

۵	۴	۳	۲	۱
۴	۳	۲	۱	۵
۳	۲	۱	۵	۴
۲	۱	۵	۴	۳
۱	۵	۴	۳	۲

متعامد

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

روش کتاب درسی (روش ترکیب یا ادغام) برای بررسی مربع های متعامد به صورت زیر است:

۴	۳	۲	۱
۳	۲	۱	۴
۲	۱	۴	۳
۱	۴	۳	۲

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

ادغام

۴۱	۳۲	۲۳	۱۴
	۲۱		
		۴۱	
			۲۱

متعامد نیستند

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

ادغام

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

متعامدند



۵- قرار است ۳ کارگر با ۳ نوع ماشین رنگ سازی و ۳ نوع رنگ متفاوت در ۳ روز اول هفته کار کنند، به گونه ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع رنگ دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر رنگ در هر ماشین دقیقاً یک بار کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه ریزی کنید.

۳	۲	۱
۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

روز ۱
روز ۲
روز ۳

رنگ ها

۳	۲	۱
۱	۲	۲
۲	۱	۳

روز ۱
روز ۲
روز ۳

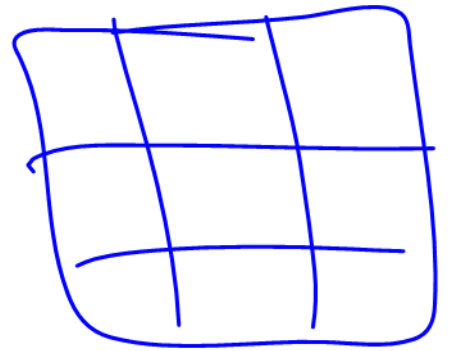
انجام

۱۳	۲۲	۳۱
۲۱	۳۳	۱۲
۳۲	۱۱	۲۳

در مربع حاصل از ارقام کعبه
تکراری نداریم پس برنامه ریزی درست انجام شده است.



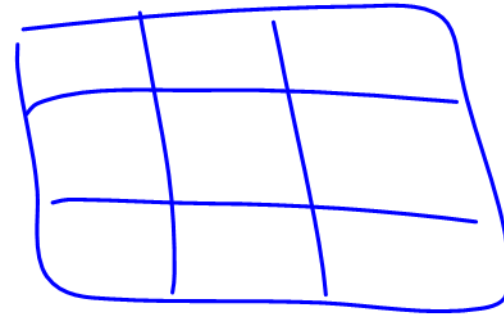
۶- قرار است ۳ کارگر با ۳ نوع ماشین رنگ سازی و ۳ نوع رنگ متفاوت در ۳ روز اول هفته کار کنند، به گونه ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع رنگ دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر رنگ در هر ماشین دقیقاً یک بار کار گرفته شود. برای این مسئله چند برنامه ریزی می توان انجام داد؟



رنگ ها

۷۲ ← ۱۲ × ۶

۶ حالت ←

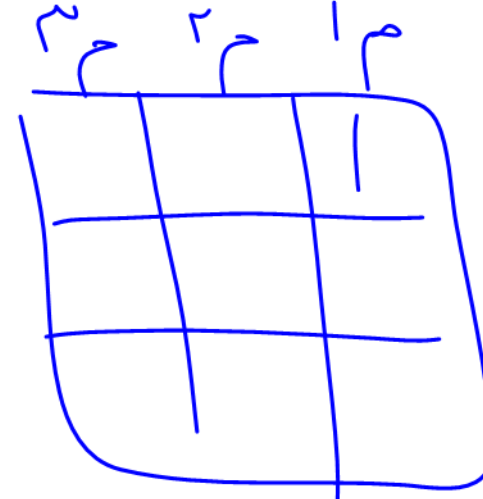
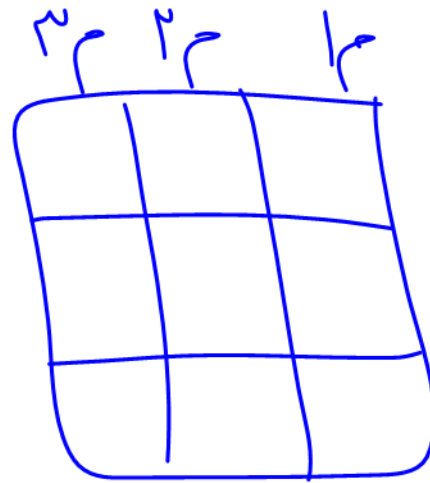


کارها

۱۲ حالت ×



۷- قرار است ۳ کارگر با ۳ نوع ماشین رنگ سازی و ۳ نوع رنگ متفاوت در ۳ روز اول هفته کار کنند، به گونه ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع رنگ دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر رنگ در هر ماشین دقیقاً یک بار کار گرفته شود. اگر کارگر ۱ در روز اول با ماشین ۱ کار کند، برای این مسئله چند برنامه ریزی می توان انجام داد؟



کارگر (۳ حالت) $\times$ (۶ حالت) $\Leftarrow 6 \times 6 \Leftarrow 36$

۲۴



۸- قرار است ۳ کارگر با ۳ نوع ماشین رنگ سازی و ۳ نوع رنگ متفاوت در ۳ روز اول هفته کار کنند، به گونه ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع رنگ دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر رنگ در هر ماشین دقیقاً یک بار کار گرفته شود. اگر برنامه رنگ ۱ در سه روز معلوم باشد، برای این مسئله چند برنامه ریزی می توان انجام داد؟

X	●	۱
۱	X	●
●	۱	X

زنگ
۲ حالت

کارگر
 $2 \times 4 = 8 \Rightarrow 8 \times 3 = 24$



۹- قرار است ۴ متخصص با ۴ نوع دستگاه و ۴ نوع ابزار متفاوت در ۴ روز اول هفته کار کنند، به گونه ای که هر متخصص با هر نوع دستگاه و هر نوع ابزار دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر ابزار در هر ماشین دقیقاً یک بار استفاده شود. برای این مسئله برنامه ریزی کنید.

روز	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۲	۳	۴
۲	۲	۱	۴	۳
۳	۳	۴	۱	۲
۴	۴	۳	۲	۱

متخصصها

روز	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۴	۳	۲
۲	۴	۲	۱	۳
۳	۲	۳	۴	۱
۴	۳	۱	۲	۴

ابزارها

ترکیب

۱	۲	۳	۴
۱۱	۲۳	۳۴	۴۲
۲۴	۱۳	۴۱	۳۳
۳۲	۴۴	۱۳	۲۱
۴۲	۳۱	۲۲	۱۴



۱۰- در روش ترکیب مربع های لاتین 3×3 ، مجموع تمام اعضای مربع حاصل چند است؟

۱۹۸ (۲)

۱۸۰ (۱)

۲۴۴ (۳)

۶۶ (۳)

۱۱	۲۲	۳۳	→ ۶۶
۳۲	۱۳	۲۱	→ ۶۶
۲۳	۳۱	۱۲	→ ۶۶



۱۱- اگر دو مربع مقابل متعامد باشند، حاصل جمع

درایه های واقع بر مربع های رنگی چقدر است؟

۱۲ (۲)

۱۶ (۱)

۸ (۴)

۱۰ (۳)

۴	۳	۲	۱
۳	۲	۱	۴
۲	۱	۴	۳
۱	۴	۳	۲

			۱
		۲	
	۳		
۴			



۱۲- اگر دو مربع لاتین مقابل متعامد باشند، حاصل $x+y+z$ کدام است؟

۸ (۱)

۷ (۲)

۶ (۳)

~~۴ (۴) این دو مربع متعامد نیستند~~

۴	۳	۲	۱
۳	۱	۲	۴
۲	۱	۳	۴
۱	۲	۳	۴

۱ = x

۲ = y

۳ = z



۱۳- اگر دو مربع لاتین مقابل متعامد باشند، حاصل xyz کدام است؟

۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۲	۱
۴	۳	۱	۲
۲	۱	۴	۳

۱۶ (۲)

۱۲ (۱)

۲۴ (۴)

۱۸ (۳)

$$xyz = 4 \times 2 \times 3 = 24$$



پویش علمی
جهاد

