



پویش علمی
چهار



بارمبندی ریاضیات گسسته پایه دوازدهم سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

شهریور و دی	نوبت دوم	نوبت اول	محدوده فصل	فصل
۷	۶	۱۵	کل	۱
۶	۲	۵	تا صفحه ۴۲	۲
	۵		صفحه ۴۲ به بعد	
۷	۷		کل	۳
۲۰	۲۰	۲۰		جمع



باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	ساعت شروع: ۸ صبح	نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۳/۲۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۲		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش http://aee.medu.gov.ir	
ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.)		
نمره			



۱

درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. **ص**

ب) حاصل $(3m+1, 3m+2)$ برابر ۱ می باشد. **ص**

ج) تعداد رئوس فرد هر گراف، عددی فرد است. **ص**

د) عدد احاطه‌گری P_1 برابر عدد ۳ است. **غ**

$$\left\lfloor \frac{5}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4+4}{4} \right\rfloor = 4$$



راسی متصل به هم در گرس داریم

۱/۵	<p>۲ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>الف) در یک گراف از مرتبه p، اگر $\chi(G) = 1$ باشد، در این صورت حداقل تعداد بالها برابر $(p-1)$ است.</p> <p>ب) در یک مربع لاتین چرخشی 4×4 مجموع درایه های روی قطر اصلی برابر 4 است.</p> <p>ج) تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه 3 عضوی به یک مجموعه 5 عضوی برابر 9 است.</p>
-----	--

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

$$\left\{ \binom{5}{3}, \binom{4}{4}, \binom{3}{5} \right\}$$

$$2 \times 2 \times 2$$



۰/۷۵

۳ اگر x, y, z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 - 2xy + z^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + 1 + z^2 \geq 0$$

نزاره بدهی اب
روابط برشته پذیرند



۴	اگر $a \mid 2m+3$ و $a \mid m+7$ در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای a وجود دارد؟
۱	

$$\left. \begin{array}{l} a \mid 2m+3 \\ a \mid m+7 \Rightarrow a \mid 2m+14 \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid (2m+3) - (2m+14) \\ \Rightarrow a \mid -11$$

پس a می‌تواند 1 یا 11 باشد یعنی ۲ جواب



۵	باقی مانده تقسیم a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ می باشد، باقی مانده تقسیم a بر ۲۰ را محاسبه کنید. (با راه حل)
۱/۵	

$$a = 4q + 3 \rightarrow 5a = 20q + 15 \Rightarrow a = 20(q - q') - 1$$

$$a = 5q' + 4 \rightarrow 4a = 20q' + 16$$

$$\Rightarrow a = 20(q - q') - 1 + 20 - 20$$

$$\Rightarrow a = 20 \underbrace{(q - q' - 1)}_k + 19 \Rightarrow a = 20k + 19$$

یعنی a بر ۱۹ برابر است.



۶

در معادله سیاله $15x + 19y = 7$ ، بزرگترین عدد ۲ رقمی طبیعی که می توان برای x در نظر گرفت چه مقداری می باشد؟ (با راه حل)

$$15x + 19y = 7 \Rightarrow 19y = 7 - 15x \Rightarrow 19 \mid 7 - 15x$$

$$\Rightarrow 15x \equiv 7 \pmod{19} \Rightarrow 15x \equiv 7 + 19 + 19 \pmod{19} \Rightarrow 15x \equiv 45 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow x \equiv 3 \pmod{19} \Rightarrow x = 19k + 3$$

$$\Rightarrow 15(19k + 3) + 19y = 7$$

$$\Rightarrow y = \frac{7 - 15(19k + 3)}{19} = -15k - 2$$

$$\Rightarrow 19k + 3 \leq 99$$

$$19k \leq 96 \rightarrow k \leq \frac{96}{19}$$

$$k=5 \rightarrow x=98$$



۷

به گراف ۸ رأسی ۳-منتظم چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به گراف کامل شود؟ (با راه حل)

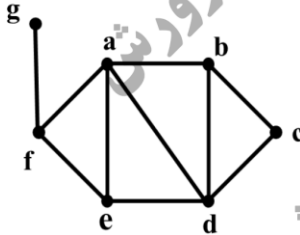
۱

$$\begin{aligned} \text{تعداد یالها در ۳ منتظم مرتبه ۸ برابر ۱۲} &= \frac{۳ \times ۸}{۲} = ۱۲ \\ \text{تعداد یالها در گراف کامل مرتبه ۸ دارای ۲۸} &= \frac{۸ \times ۷}{۲} = ۲۸ \\ \text{بنابراین باید} & ۲۸ - ۱۲ = ۱۶ \text{ یال اضافه کنیم تا کامل شود} \end{aligned}$$



۸

گراف G به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این گراف به سوالات زیر پاسخ دهید.



$abcdea$

الف) مجموعه $N_G(g)$ را بنویسید.

ب) یک دور به طول ۵ با شروع از رأس a بنویسید.

ج) درجه رأس c در گراف \bar{G} (مکمل گراف G) را مشخص کنید.

$$d(c) + d(\bar{c}) = 9$$

$$2 + d(\bar{c}) = 9$$

$$d(\bar{c}) = 7$$

$$N(g) = \{f\}$$



۹

گراف زیر را در نظر بگیرید.

الف) یک مجموعه احاطه گر غیر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.

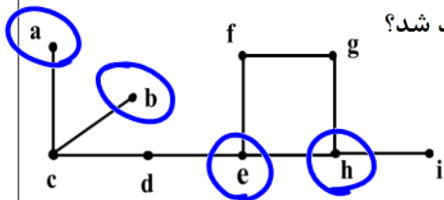
ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.

ج) با اضافه کردن چه یالی به گراف، عدد احاطه گری گراف ۲ خواهد شد؟

کمی و h و f و c

{a, b, e, h}

hf ⊆ cf

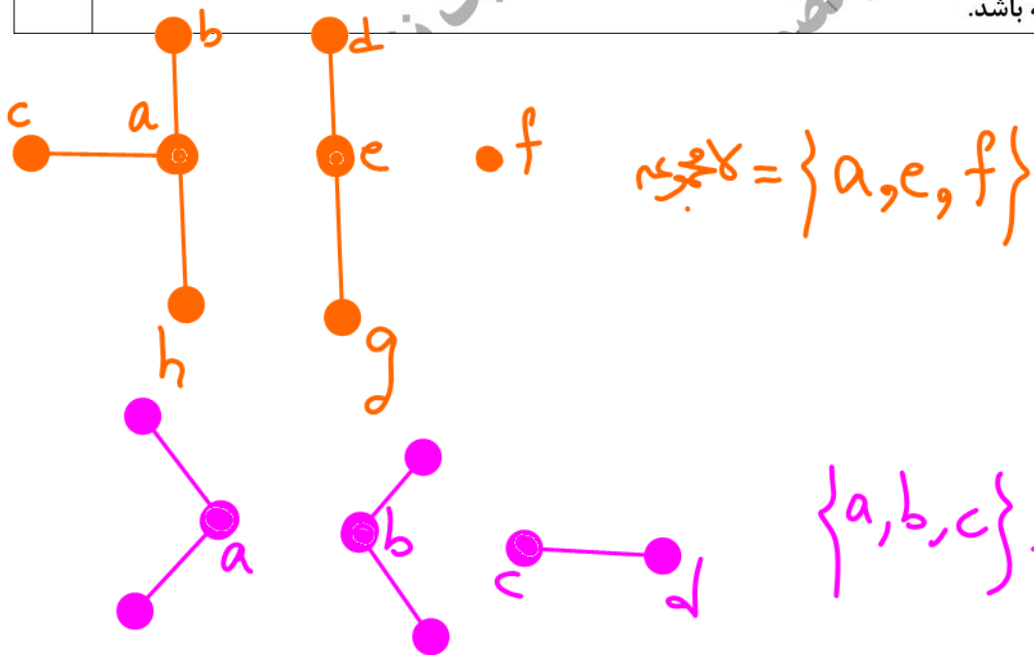


۱/۵

دوازدهم ریاضی

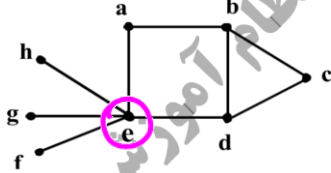


۱۰	الف) یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه‌گری ۳ رسم کنید که <u>یک</u> مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۳ داشته باشد.
۱	ب) یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه‌گری ۳ رسم کنید که <u>بیش از یک</u> مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۳ داشته باشد.





۱/۷۵



۱۱ الف) عدد احاطه‌گری گراف مقابل را با ارائه راه حل، تعیین کنید.

ب) این گراف چند γ -مجموعه دارد؟

الف. در این گراف $n=6$ و $\Delta=5$ پس $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = 2$ یعنی $2 \geq \Delta$

همچنین مجموع $\{e, d\}$ و $\{e, c\}$ احاطه‌گر است پس $2 = \Delta$

ب. $\{e, d\}$ یا $\{e, c\}$ یا $\{e, b\}$ یا $\{e, a\}$ یعنی سه جواب



۱/۵	اگر داشته باشیم $A = \{7, 8, 9\}$ و $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ در این صورت چند کد با شش کاراکتر متمایز می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از A و چهار حرف از B باشد؟	۱۲
-----	---	----

باید ابتدا ۲ رقم از A و ۴ حرف از B انتخاب کنیم پس آنرا در ترتیب ۲ رقم ۴ حرف بنویسیم:

$$\begin{aligned}
 & \binom{4}{2} \times \binom{6}{4} \times 6! = 6 \times 15 \times 720 = 65 \times 720 \\
 & = 46800
 \end{aligned}$$

جایگشت
و کاراکتر

انتخاب دو رقم از A

انتخاب ۴ حرف از B



۱۳

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۲

برای x_4 فقط ۰ را قایل قبول است:

$$2x_4 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow \binom{12}{2} = 66$$

$$2x_4 = 2 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 8 \Rightarrow \binom{10}{2} = 45$$

} جواب = 66 + 45 = 111



۱۴ قرار است ۳ راننده با ۳ نوع ماشین در ۳ مسیر متفاوت در ۳ روز اول هفته رانندگی کنند به گونه ای که هر راننده با هر نوع ماشین، هر مسیری را دقیقاً یکبار طی کرده باشد و نیز هر ماشین، هر یک از مسیرها را دقیقاً یک بار طی کند. برای این مسأله برنامه ریزی کنید.

	ماشین ۱	۲	۳
روز ۱	۱	۲	۳
۲	۳	۱	۲
۳	۲	۳	۱

	ماشین ۱	۲	۳
روز ۱	۳	۲	۱
۲	۲	۱	۳
۳	۱	۳	۲

مهر محمد علی محمدی
 درمحل حاصل از کتاب
 عدد تکمیلی نهایی برنامهریزی
 در سال ۱۳۸۵

راننده

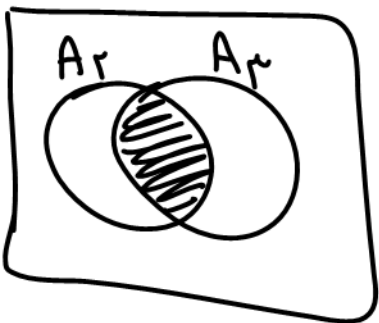
ارکان

روز ۱
۲
۳

روز ۱
۲
۳



۱۵	چند رمز ۴ رقمی با ارقام ۱ تا ۵ می توان نوشت به طوری که هر رمز، حداقل یک رقم ۳ و یک رقم ۲ را شامل باشد؟ (نیاز به محاسبه پاسخ نهایی نمی باشد)
۲	



$$|A_2 \cap A_3| = |M| - |\overline{A_2 \cap A_3}|$$

$$= |M| - |\overline{A_2} \cup \overline{A_3}|$$

$$= |M| - (|\overline{A_2}| + |\overline{A_3}| - |\overline{A_2} \cap \overline{A_3}|)$$

$$\begin{array}{l} |M| \\ |A_2| \\ |A_3| \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ 2 \\ 2 \end{array} \Rightarrow 5^4$$

$$\begin{array}{l} |A_2| \\ |A_3| \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \Rightarrow 2^4$$

$$\begin{array}{l} |A_2| \\ |A_3| \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \Rightarrow 2^4$$

$$|\overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 2^2 - 2 - 2 = 2^2 - 2^1 - 2^1$$

$$\text{جواب} = 5^4 - (2^4 + 2^4 - 2^2)$$



باسمه تعالی

ساعات شروع: ۸ صبح	نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی فیزیک	ریاضیات گسسته
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۰۳/۲۸	تعداد صفحه: ۲	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۱		
ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.)		
نمره			



۱

درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $a \mid b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت $|a| > |b|$.ب) برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b اگر $(a \mid c, b \mid c)$ و $(\forall m > 0, a \mid m, b \mid m \Rightarrow c \leq m)$ آن گاه $[a, b] = c$.پ) برای هر دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m ، اگر باقی مانده تقسیم a بر m مساوی r باشد، در این صورت $a \equiv r^m$.

ت) بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲- برابر ۲- است.

۱

فغ

ص

ص

فغ



۲

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n ، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

۱

$$n = 2k \rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 - 10k + 7$$

$$= 4k^2 - 10k + 6 + 1$$

$$= 2(2k^2 - 5k + 3) + 1$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 2q + 1$$

عددس فرد است.



$$k$$

۰/۷۵

۳ اگر عددی مانند k در Z باشد، به طوری که $۵ \mid ۴k + ۱$ ، ثابت کنید $۲۵ \mid ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$.

$$\begin{aligned} ۵ \mid ۴k + ۱ &\rightarrow ۲۵ \mid ۱۶k^۲ + ۸k + ۱ \\ ۵ \mid ۴k + ۱ &\rightarrow ۲۵ \mid ۲۰k + ۵ \Rightarrow ۲۵ \mid ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶ \end{aligned}$$



۴

باقی مانده تقسیم عدد $A = 27^{20} + 18$ را بر ۱۳ بیابید.

۱

می دانیم $1 \equiv 1 \pmod{13}$ و $5 \equiv 18 \pmod{13}$ پس:

$$27^{20} + 18 \equiv (1)^{20} + 5 \equiv 1 + 5 \equiv 6 \pmod{13}$$

پس باقی مانده برابر ۶ است.



۵

اگر در یک سال، اول مهر شبیه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

۱/۲۵

اول مهر تا اول بهمن ۱۲ = ۱۲ × ۳ روز است

از اول بهمن تا ۱۲ بهمن ۱۱ روز است

$$\Rightarrow ۱۲ + ۱۱ \equiv ۵$$

شنبه	یکشنبه	دو شنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

بنابراین ۱۲ بهمن ۵ شنبه است



۶

جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید.

الف) اگر درجه یک رأس فرد باشد، آن را رأس $\dots\dots\dots$ می‌نامیم.

ب) گرافی را که تمام رئوس آن تنها باشد، هیچ یالی نداشته باشد، گراف $\dots\dots\dots$ می‌نامیم.

پ) تعداد یال‌های گراف K_n ، برابر با $\dots\dots\dots$ است.

ت) گراف G را $\dots\dots\dots$ می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

همینه

۱

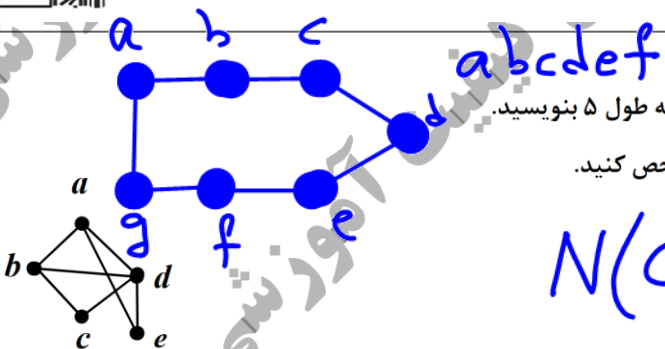


۷

به سوالات زیر کوتاه پاسخ دهید.

الف) گراف C_7 را رسم کنید. سپس یک مسیر به طول ۵ بنویسید.ب) در گراف شکل زیر، $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.

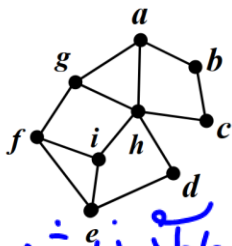
$$N(c) = \{d, g\}$$



۱



۱/۲۵



۸ الف) مجموعه احاطه گر مینیمال را تعریف کنید.

ب) برای گراف شکل روبه‌رو، یک مجموعه احاطه گر با ۴ عضو انتخاب کنید.

 $\{e, f, g, h\}$

مجموعه احاطه‌ری که با حذف هر کدام از اعضا مجموعه دیگر احاطه‌ری نباشد



۱

۱۰ ابتدا گراف P_9 را رسم کنید. سپس یک مجموعه احاطه گر مینیمم از آن را مشخص کنید.



$$\text{کلیه} = \{1, 5, 9\}$$

$$\text{مجموعه ۳ عضوی} = \{2, 4, 8\}$$

$$\text{مجموعه ۵ عضوی} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

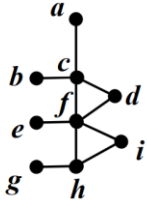


۱۱

گراف شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف) یک γ -مجموعه مشخص کنید.

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.



$$\{c, f, h\} = \text{احاطه مینیم}$$

$$\{a, b, f, h\} = \text{مینیمال ۴ عضوی}$$

$$\{a, b, e, g, d, h, i\} = \text{مینیمال ۷ عضوی}$$



۱۲

۶ کتاب متفاوت تاریخ و ۵ کتاب متفاوت ادبیات را به چند طریق می توان در یک ردیف کنار هم چید به طوری که:
الف) کتاب های تاریخ همواره کنار هم باشند.
ب) به صورت یک در میان قرار بگیرند.

الف. کتابها تاریخ را در یک بسته در نظر می گیریم سپس جایگاه بسته تاریخ در ۵ جایگاه را مدبر می آفریم

$$9! \times 9! = 720 \times 720 =$$

ب.

$$\frac{9}{5} \frac{5}{1} \frac{5}{5} \frac{4}{1} \frac{4}{5} \frac{3}{1} \frac{3}{5} \frac{2}{1} \frac{2}{5} \frac{1}{1} \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 9! \times 5! = 720 \times 120 =$$



۱۳

با ارقام ۱، ۱، ۱، ۳، ۳، ۵، ۶، ۷، ۹ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت؟

$$\frac{9!}{2! \times 2!} = \frac{9 \times \cancel{8} \times \cancel{7} \times \cancel{6} \times 5!}{2 \times 2} = 2 \times 7 \times 120 =$$



مشبه

۱۴

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_3 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟ ۱/۵

$$x_5 > 2$$

$$x_1 + x_2 + 1 + x_4 + x_5 + x_6 = 12 - 2$$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 9$$

$$\text{جواب} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{9}{3} = 124$$



۱۵

الف) مربع لاتین A را در نظر بگیرید. با اعمال جایگشت
 مربع لاتین B را به دست آورید.

۱ → ۳

۲ → ۲

۳ → ۴

۴ → ۱

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامدند؟ دلیل بیاورید.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ادعای

$$\begin{bmatrix} 34 & 41 & 12 & 22 \\ 22 & 12 & 41 & 34 \\ 12 & 22 & 34 & 41 \\ 41 & 34 & 22 & 12 \end{bmatrix}$$

صفا در نیستند
 چون بعد از از هم
 تکرار می کنند

۲

میان

۱۶

به چند طریق می توان ۵ سیب را بین ۳ نفر توزیع کرد، به طوری که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد؟

۱/۲۵

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow \binom{4}{2} = 6$$

همان آبع پوش از ۵ عضوی به ۳ عضوی

$$\begin{aligned} 2^5 - (2 \times 2^5 - 2) &= 2^5 - (2^5 - 2) \\ &= 2^5 - 2^5 + 2 = 2 \end{aligned}$$

$$= 2^5 - 2^5 + 2 = 2$$



۱۷	ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول تحصیل باشند، لاقلاً ۷ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه ۱/۲۵ تولدشان یکسان است.
----	--

$$۱۴ = ۷ \times ۲ \Rightarrow ۷ \text{ روز هفته و } ۲ \text{ ماه}$$

قریباً ۵۰۵ کبوتر (دانش آموزان) در ۱۴ لانه قرار بگیرند

$$\begin{array}{r} ۱۴ \\ ۵۰۵ \overline{) ۶} \\ \underline{۵۰۴} \\ ۱ \end{array} \Rightarrow ۵۰۵ > ۱۴ \times ۶$$

تعداد کبوترها لانه برابر لانه‌ها بیشتر است ($n=۱۴$ و $k=۶$)

$$۵۰۵ \Rightarrow nk+1 \quad ۵۰۵ > ۱۴ \times ۶ + ۱$$

بنابراین لانه‌ای با حداقل ۷ کبوتر داریم.



باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	ساعت شروع : ۸ صبح	نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه : ۲	تاریخ امتحان : ۱۴۰۰/۰۳/۸	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۴۰۰		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	
ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد		
	نمره		



۱

درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.
 الف) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.
 ب) هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ برقرار باشد.

۰/۵



۲

جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید.

الف) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a | b$ آن گاه عدد a شمارنده عدد b است.ب) m عددی صحیح است. حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با $2m$ است.

۰/۷۵



۳

۱/۲۵

به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچکتر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن ها است.

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

هواره درست است
روا جا برکت پذیرند



۴

ثابت کنید اگر $p \geq 5$ عددی اول باشد، آن گاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می شود.

۰/۷۵

هر عدد صحیح به یکی از ۴ حالت زیر قابل نمایش است:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = 4k \quad \times \\ p = 4k + 1 \quad \checkmark \\ p = 4k + 2 \quad \times \\ p = 4k + 3 \quad \checkmark \end{array} \right.$$

از طرفی $p = 4k$ عدد اول نیست و $p = 4k + 2$ نیز زوج است و نمی تواند اول باشد ($p > 5$)
بنابراین عدد اول فقط می تواند بصورت $4k + 1$ یا $4k + 3$ باشد



۵

باقی مانده تقسیم عدد $11 + 9 \times (1000)^{25} = A$ را بر ۷ بیابید.

۰/۷۵

$$\text{می دانیم } 1000 \equiv -1$$

$$(1000)^{25} \times 9 + 11 \equiv (-1)^{25} \times 9 + 11 \equiv -9 + 11 \equiv 2$$

پس باقی مانده برابر ۲ است.



۶

معادله $\sqrt{x} \equiv 1$ را حل کنید.

$$\sqrt{x} \equiv 1 \Rightarrow \sqrt{x} \equiv 1 + 2k \Rightarrow \sqrt{x} \equiv 2l \Rightarrow x \equiv 4l^2$$

$$\Rightarrow x = 4k + 4$$



۷

گراف G که به صورت مقابل است را در نظر بگیرید.

الف) $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.

$$N(c) = \{a, e, d\}$$

ب) بزرگ‌ترین درجه در گراف \bar{G} مربوط به کدام رأس و چند است؟ $\Delta = 3$ یا a برابر c

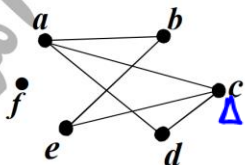
پ) دوری به طول ۵ برای رأس a بنویسید.

$a b e c d a$

ت) آیا گراف G همبند است؟

حیرت‌زای رأس f تنها عویله وصل نیست

۲





۸

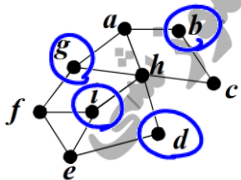
تفاوت بین مجموعه احاطه‌گر مینیمال و مینیمم چیست؟ توضیح دهید.

مجموعه احاطه‌گری که با حذف هر کدام از اعضا در احاطه‌گری نباشد مینیمال است
 بعضی از مینیمال‌ها، کمترین تعداد عناصر دارند که مینیمم محسوب
 می‌شوند. پس مجموعه‌ها را احاطه‌گر مینیمال می‌گویند مینیمم نباشند



۹

در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

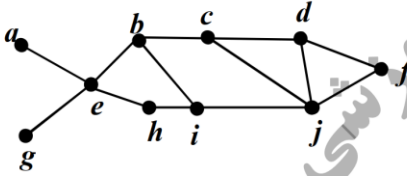


مینیمال اعضا = $\{d, g, h, b\}$

در این گراف $4 = 8 - 4$ است $\{d, h, b, g\}$ مینیمال ۴ عضوی است مینیمم محسوب نمی شود



۱/۵



۱۰ عدد احاطه‌گری گراف شکل زیر را با ارائه راه حل، تعیین کنید.

در این گراف $n=10$ و بزرگترین درج را $m=5$ است

$$x \geq \left\lceil \frac{n}{m+1} \right\rceil \Rightarrow x \geq \left\lceil \frac{10}{5+1} \right\rceil \Rightarrow x \geq 2$$

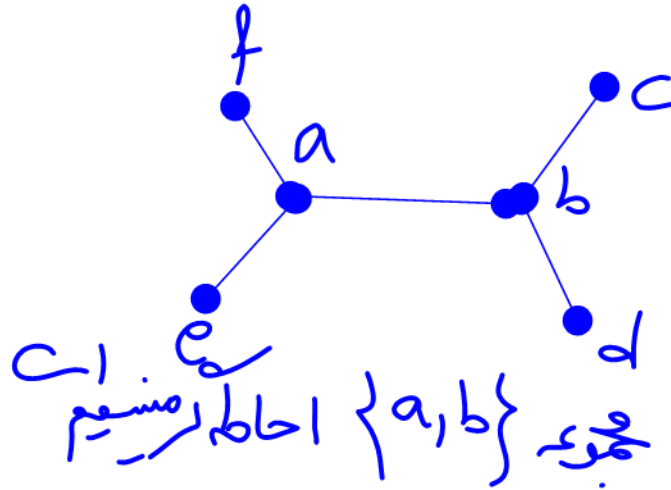
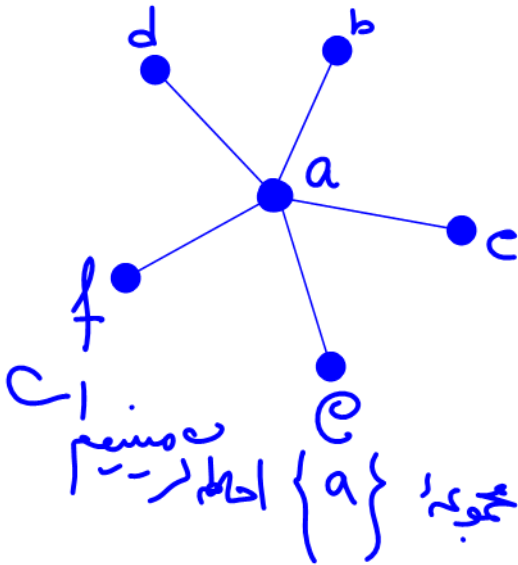
همچنین مجموع $\{k \text{ و } e\}$ احاطه‌گر است پس $x=2$



۱۱

الف) یک گراف ۶ رأسی که γ - مجموعه آن با اندازه یک باشد، رسم کنید.
 ب) یک گراف ۶ رأسی که γ - مجموعه آن با اندازه دو باشد، رسم کنید.

۱/۵





۱۲

کوتاه پاسخ دهید.

می‌خواهیم با حروف «ب» و «ج» و ارقام ۱، ۲، ۴، ۵، ۶، ۸، ۱۰ رمزهای شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است:

الف) تعداد رمزهایی که هر یک از آن‌ها با یک حرف آغاز و حرف دیگر خاتمه یابد.

ب) تعداد رمزهایی که در آن‌ها حروف کنار هم باشند.

$$\frac{1}{\text{حرف}} \rightarrow 2 \times 6! = 144$$

$$21! \times 6 \text{ رقم و } \boxed{21}$$



۲	به چند طریق می توان از بین ۶ نوع گل ۱۲ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم : از گل نوع اول حداقل یک شاخه، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم.	۱۳
---	---	----

حداقل ۳

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 = 12$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + 1 = 12 - 1$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 9 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$



۱۴ مربع لاتین A را در نظر بگیرید. ابتدا سطر اول و سطر دوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل ستون دوم و $1/5$ سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را B نام‌گذاری کنید. متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

جابجایی سطرها اول و دوم

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

ستون دوم را عوض کن

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

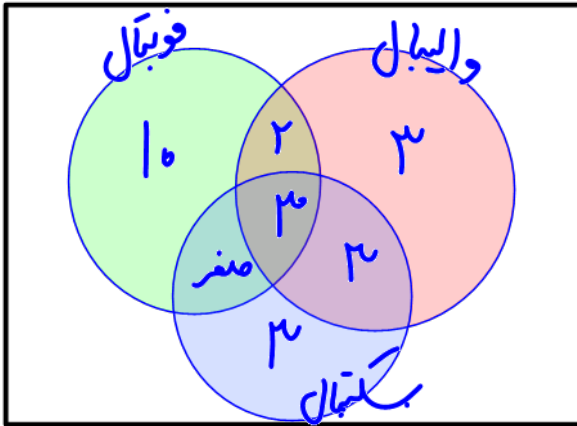
اعداد A و B

۲۱	۳۲	۱۲
۱۲	۲۱	۳۳
۳۳	۱۲	۲۱

اعداد ارقامی تکراری داریم
پس A و B متعامد نیستند



۱۵	در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟
----	--



$$10 + 3 + 2 = 16 = \text{فقط در یک رشته}$$

$$34 - 16 = 18 = \text{ورزش نمی‌کنند}$$



۱۶

الف) به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟ ۱

ب) به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداکثر یک کلاه داده شود؟

الف. همان تابع پوش از ۴ عنصری به ۳ عنصری

$$3^4 - (3 \times 2^4 - 3) = 81 - (48 - 3) = 81 - 45 = 36$$

ب. تابع یک به یک از ۴ عنصری به ۸ عنصری

$$1 \times 7 \times 6 \times 5 = 1410$$



۱۷

گل قرار گرفته است؟

۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه

۰/۷۵

۵۴ شاخه گل همان ۵۴ کبوتر و حداقل ۵ شاخه یعنی $k+1=5$

پس $54 \gg nk+1$ و n تعداد گلدانها است

$$\Rightarrow 54 \gg 4n+1 \Rightarrow 54 \gg 4n \Rightarrow \frac{54}{4} \gg n$$

پس $n=13$ حداقل تعداد گلدانها است