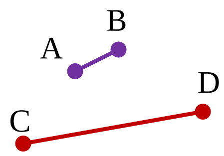
نسبت وتناسب در هندسه

خواص نسبت وتناسب :

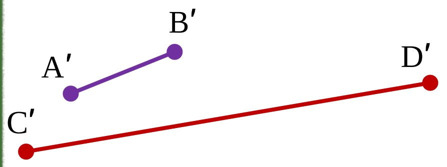
طرفین وسطین	$b \neq ۰ \quad , \quad d \neq ۰$	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰} \Leftrightarrow ۳\times۱۰=۶\times۵$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$
معکوس کردن طرفین تناسب	a و b و c و $d \neq 0$	$\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰} \Leftrightarrow \frac{۵}{۲}=\frac{۱۰}{۴}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$
تعویض جای طرفین با وسطین	a و b و c و $d \neq 0$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{۹} \Leftrightarrow \frac{۹}{۳}=\frac{۶}{۲}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$
ترکیب نسبت در صورت	$b \neq ۰ \quad , \quad d \neq ۰$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶} \Leftrightarrow \frac{۵}{۳}=\frac{۱۰}{۶}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$
ترکیب نسبت در مخرج	$b \neq ۰ \quad , \quad d \neq ۰$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶} \Leftrightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$
تفضیل نسبت در صورت	$b \neq ۰ \quad , \quad d \neq ۰$	$\frac{۳۰}{۲۱}=\frac{۲۰}{۱۴} \Leftrightarrow \frac{۹}{۲۱}=\frac{۶}{۱۴}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$
تفضیل نسبت در مخرج	$b \neq ۰ \quad , \quad d \neq ۰$	$\frac{۳۰}{۲۱}=\frac{۲۰}{۱۴} \Leftrightarrow \frac{۳۰}{۹}=\frac{۲۰}{۶}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$
	$b \neq ۰ \quad , \quad d \neq ۰$	$\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۱۲} \Leftrightarrow \frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۱۲}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
	$b_۱$ و $b_۲$ و... و $b_n \neq 0$	$\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=.....=\frac{a_n}{b_n} \Leftrightarrow \frac{a_۱+a_۲+....+a_n}{b_۱+b_۲+....+b_n}=\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=....=\frac{a_n}{b_n}$	
		$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲} \Leftrightarrow \frac{\cancel{۲+۴+۶+۸}\ ۲۰}{\cancel{۳+۶+۹+۱۲}\ ۳۰}=\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲}$	

فرض کنیم پاره خط AB به طول ۲cm و پاره خط CD به طول ۵ CM باشنددر این صورت نسبت طول های این دو پاره خط برابر است با $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}=\frac{۲}{۵}$.



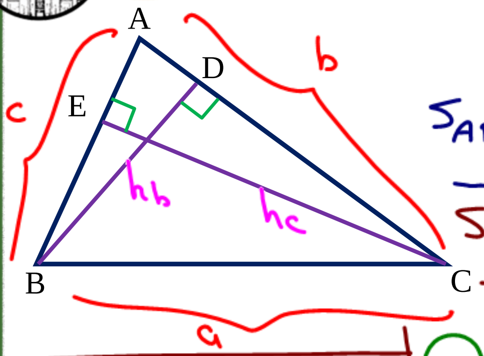
حال برای پاره خط های $A'B'=۴$ و $C'D'=۱۰$ نیز داریم $\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$ و

در نتیجه می توان نوشت : $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}=\frac{A'B'}{C'D'}$



مثال : در مثلث ABC رابطه محاسبه مساحت را با استفاده از یک ضلع و ارتفاع وارد بر آن نوشته و سپس با استفاده از یک ضلع دیگر و ارتفاع نظیر آن نیز بنویسید و با استفاده از این دو رابطه یک تناسب هندسی به دست آورید.

حل :



$S_{ABC}=\frac{1}{2}b\times h_b$

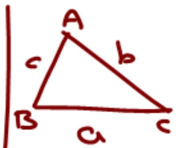
$S_{ABC}=\frac{1}{2}c\times h_c$

$\frac{1}{2}b\times h_b=\frac{1}{2}c\times h_c$

$b\times h_b=c\times h_c$

$\frac{b}{c}=\frac{h_c}{h_b}$

$\begin{cases}\frac{b}{c}=\frac{h_c}{h_b}\\ \frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}\\ \frac{a}{c}=\frac{h_c}{h_a}\end{cases}$



$S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\times\sin C$

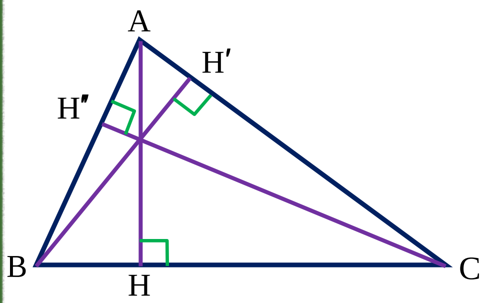
$S_{ABC}=\frac{1}{2}a\times c\times\sin B$

$\cancel{\frac{1}{2}}ab\sin C=\cancel{\frac{1}{2}}a\times c\times\sin B$

$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}\Rightarrow\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}$

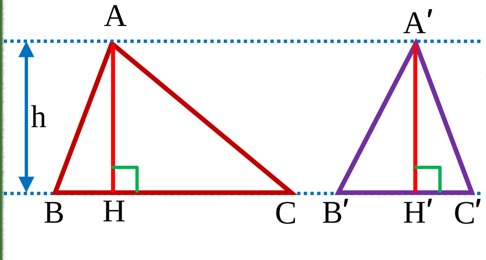
$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$

نکته : در هر مثلث نسبت اندازه های هر دو ضلع با نسبت ارتفاع وارد بر آنها رابطه معکوس دارد به عبارتی می توان نوشت :



$$\frac{AB}{AC}=\frac{BH'}{CH''} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{BC}=\frac{AH}{CH''} \quad \text{و} \quad \frac{AC}{BC}=\frac{AH}{BH'}$$

مثال : اگر اندازه های ارتفاع های دو مثلث برابر باشند ، ثابت کنید نسبت مساحت های این دو مثلث برابر نسبت اندازه های قاعده هایی است که این ارتفاع ها برآنها وارد می شود .



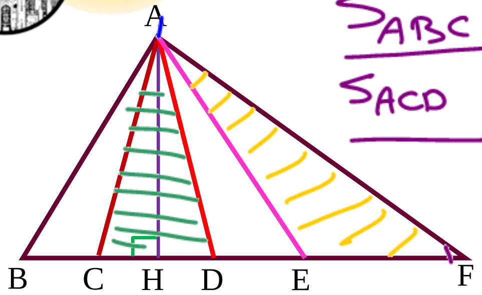
طبق فرض : $\boxed{AH=A'H'=h}$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}AH}\times BC}{\cancel{\frac{1}{2}A'H'}\times B'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

مثال : در شکل مقابل مثلث های ABC و ACD و ADE و AEF را که در رأس A مشترکند ، در نظر بگیرید .

الف)چرا ارتفاع رأس A همه این مثلث ها یکی است ؟

ب) نسبت $\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}$ و نسبت $\frac{S_{ACD}}{S_{AEF}}$ را به دست آورید .



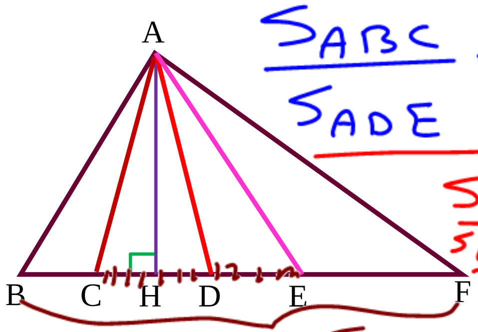
$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}=\frac{\frac{1}{2}BC\times AH}{\frac{1}{2}CD\times AH}=\frac{BC}{CD}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{AEF}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}AH}\times CD}{\cancel{\frac{1}{2}AH}\times EF}=\frac{CD}{EF}$$

نکته : اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده وقاعده های مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد ، نسبت مساحت های آنها برابر با نسبت اندازه های قاعده های آنهاست. مثلاً در شکل زیر داریم :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}=\frac{BC}{CD}$$

مثال : درشکل مقابل حاصل $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}$ و $\frac{S_{ACD}}{S_{ACE}}$ و $\frac{S_{ACE}}{S_{ABF}}$ را بنویسید.

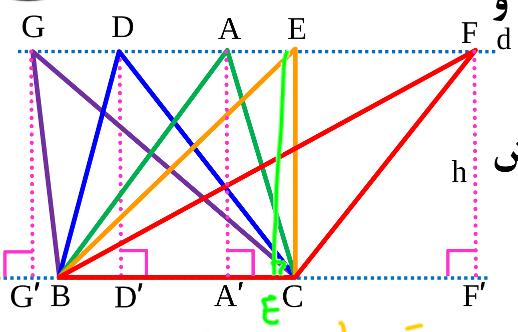


$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\frac{BC}{DE}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{ACE}}=\frac{CD}{CE}$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABF}}=\frac{CE}{BF}$$

مثال : در شکل مقابل خط d با BC موازی است .



الف)چرا ارتفاع های وارد بر قاعده BC در مثلث های GBC و DBC و ABC و EBC و FBC همگی با هم برابراست ؟

$FF' = EE' = AA' = DD' = GG'$

ب) اگر طول همه این ارتفاع ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم ، مساحت همه این مثلث ها چقدر است ؟

$S_{GBC} = \frac{1}{2} GG' \times BC$

$S_{DBC} = \frac{1}{2} DD' \times BC$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AA' \times BC$

$S_{EBC} = \frac{1}{2} EE' \times BC$

$S_{FBC} = \frac{1}{2} FF' \times BC$

تعریف واسطه (میانگین) هندسی : اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد ، یعنی داشته باشیم : $\frac{b}{c} = \frac{a}{b}$ یا $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$ با طرفین وسطین کردن تناسب نتیجه می شود : $b^2 = ac$ در این صورت b را واسطه هندسی a و c می نامیم .مثلاًگر دو پاره خط به طول های ٤ و ٩ واحد داشته باشیم ، پاره خطی که ٦ واحد طول دارد واسطه هندسی بین آنهاست زیرا داریم : $6^2 = 4 \times 9$

$6^2 = 4 \times 9$

$4 \times 9 = a^2$

$a = \pm 6$

جناب استاد حمیدرضا کمالی خوش خلق

حل تمرین های صفحه ۳۳ کتاب درسی فصل ۲

$\frac{36}{25}+\frac{81}{25}+\frac{75}{25}=\frac{192}{25}$

۱ – اگر $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=\frac{3}{5}$ **حاصل** $x+y+z$ **و** x^2+y^2+z **را به دست آورید .**

$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=\frac{3}{5}$

$x+y+z=\frac{6}{5}+\frac{9}{5}+\frac{15}{5}=\frac{30}{5}=6$

$\frac{x+y+z}{2+3+5}=\frac{3}{5}\Rightarrow x+y+z=6$

$\frac{x}{2}=\frac{3}{5}\Rightarrow x=\frac{6}{5}$

$\frac{y}{3}=\frac{3}{5}\Rightarrow y=\frac{9}{5}$

$\frac{z}{5}=\frac{3}{5}\Rightarrow z=3$

۲ – طول پاره خط L **را به دست آورید که واسطه هندسی بین دو پاره خط به طول های ۸ و ۱۰ سانتی متر باشد .**

$b^2=8\times 10=80\longrightarrow b=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

16×5

۳ – طول اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی متر هستند و بلند ترین ارتفاع آن ۱۰ سانتی متر است . طول دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید .

روش اول

$S=\frac{1}{2}\times 4\times 10=20$

$S=\frac{1}{2}\,6\times h\longrightarrow S=20=3h\to h=\frac{20}{3}$

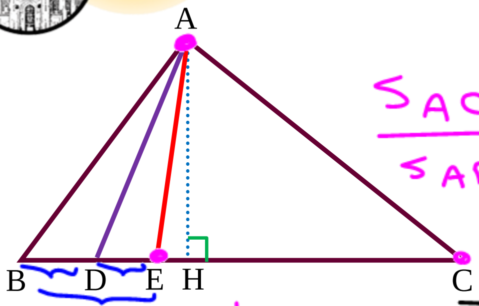
$S=\frac{1}{2}\times 8\times h'\longrightarrow S=20=4h'\to h'=5$

روش دوم

$\begin{cases}a=4\\h_a=10\end{cases}$ $\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}\Rightarrow\frac{4}{6}=\frac{h_b}{10}\Rightarrow h_b=\frac{10\times 4}{6}=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}$

$\begin{cases}a=4\\h_a=10\end{cases}$ $\frac{a}{c}=\frac{h_c}{h_a}\Rightarrow\frac{4}{8}=\frac{h_c}{10}\Rightarrow h_c=\frac{10\times 4}{8}=5$

۴ – در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE است و دو برابر مساحت مثلث ABD است . نسبت های $\frac{CE}{BE}$ و $\frac{DE}{BD}$ را به دست آورید .



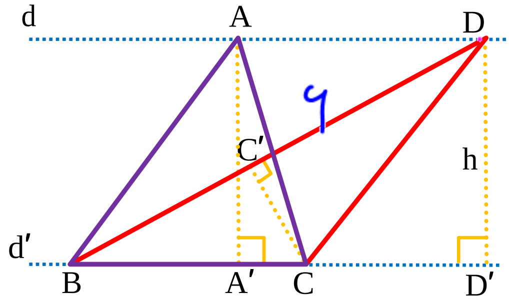
$\frac{S_{ACE}}{S_{ADE}} = 3 \Rightarrow \frac{\cancel{\frac{1}{2}AH} \times CE}{\cancel{\frac{1}{2}AH} \times DE} = 3 \Rightarrow \boxed{CE = 3DE}$

$\frac{S_{ACE}}{S_{ABD}} = 2 \to \frac{\cancel{\frac{1}{2}AH} \times CE}{\cancel{\frac{1}{2}AH} \times BD} = 2 \to \boxed{CE = 2BD}$

$\begin{cases} DE = \frac{1}{3}CE \\ BD = \frac{1}{2}CE \end{cases} \Rightarrow \frac{DE}{BD} = \frac{\frac{1}{3}\cancel{CE}}{\frac{1}{2}\cancel{CE}} = \frac{2}{3}$ ، $\frac{CE}{BE} = \frac{CE}{\frac{1}{2}CE + \frac{1}{3}CE} = \frac{6}{5}$

$BE = BD + DE$

۵ – در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC ، $8cm^2$ است . اگر $BD = 6cm$ باشد ، فاصله نقطه C از BD را به دست آورید .



$d \parallel d' \to \boxed{AA' = DD'}$ فاصله دو خط موازی

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AA' \times BC$

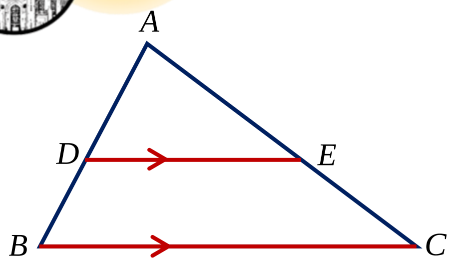
$S_{DBC} = \frac{1}{2} DD' \times BC$

$AA' = DD'$

$\Rightarrow S_{DBC} = S_{ABC} = 8$

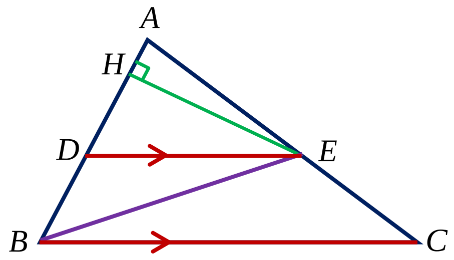
$S_{DBC} = 8 \to \frac{1}{2} CC' \times \underbrace{DB}_{6} = 8 \to 3CC' = 8 \to \boxed{CC' = \frac{8}{3}}$

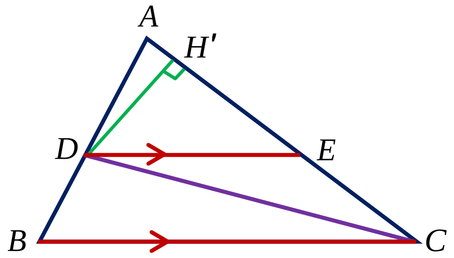
قضیه تالس

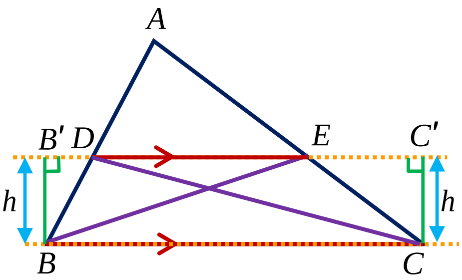


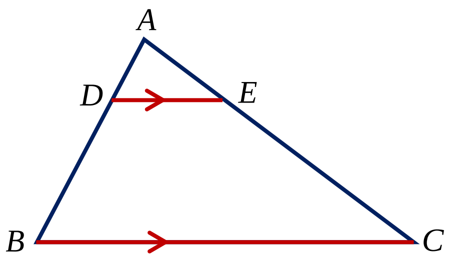
قضیه تالس : هرگاه در یک مثلث ، خط راستی موازی یکی از اضلاع ، دوضلع دیگر را در دو نقطه قطع کند ، روی آن دو ضلع چهار پاره خط جدا می کند که اندازه های آنها تشکیل یک تناسب می دهند . مثلاً در شکل مقابل داریم : $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

اثبات



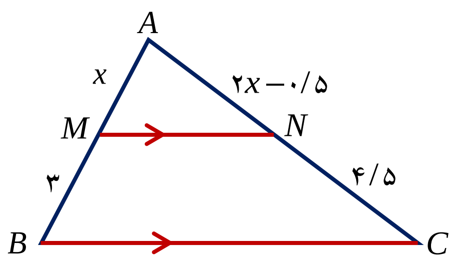






مثال : در شکل مقابل $DE \parallel BC$ و $AD = ۱$ و $DB = ۳$ و $AE = ۰/۸$ به کمک قضیه تالس طول AC را به دست آورید .

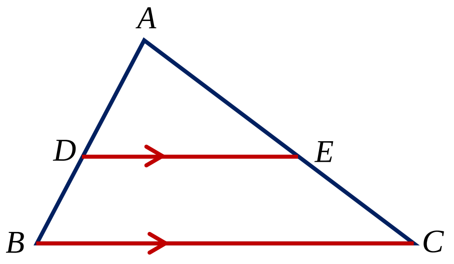
مثال : در شکل مقابل $MN \parallel BC$ به کمک قضیه تالس و با تشکیل یک معادله مقدار x را به دست آورید .

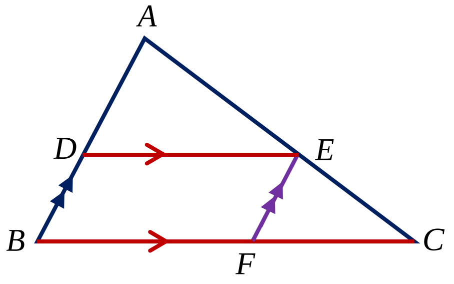


تعمیم قضیه تالس (قضیه تالس جز به کل)

اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند ، و با ضلع سوم آن موازی باشد ، مثلثی به وجود می آید که اندازه ضلع های آن با اندازه های ضلع های مثلث اصلی متناسبند . مثلاً در شکل مقابل داریم :

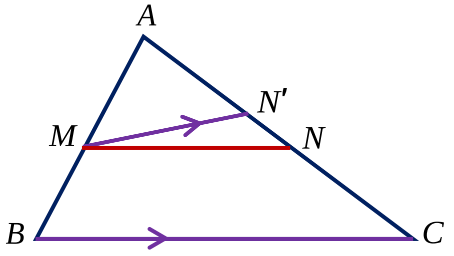
$$DE \parallel BC \quad \Rightarrow \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

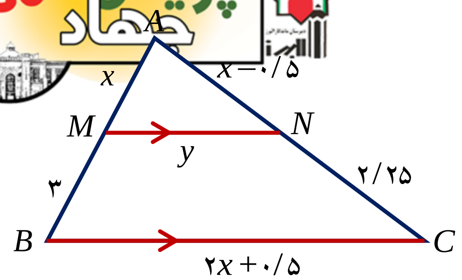




عکس قضیه تالس :

اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها چهار پاره خط با اندازه های متناظراً متناسب جدا کند ، آنگاه آن خط با ضلع سوم مثلث موازی است .





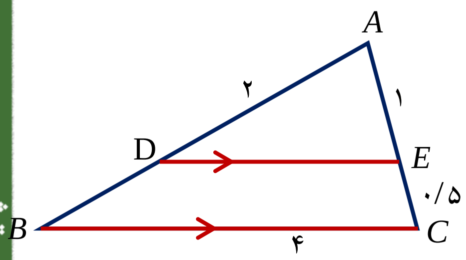
مثال : در شکل مقابل $MN\|BC$ مقادیر x و y را به دست آورید.

حل :

$$\overset{\Delta}{ABC}:\quad MN\|BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{\text{۳}}=\frac{x-\cdot/\text{۵}}{\text{۲}/\text{۲۵}} \Rightarrow x=\text{۲}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:\quad MN\|BC \xrightarrow[\text{جز به کل}]{\text{تالس}} \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{\text{۲}}{\text{۵}}=\frac{y}{\text{۴}/\text{۵}} \Rightarrow y=\text{۱}/\text{۸}$$

حل تمرینات صفحه۳۶ فصل ۲



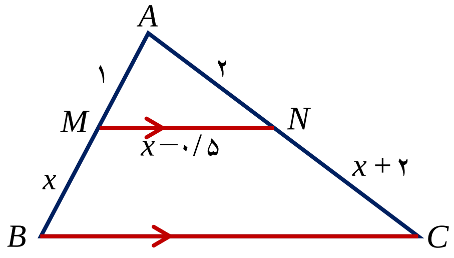
۱ – در شکل مقابل $DE\|BC$ با توجه به اندازه پاره خط ها طول DE و AB را به دست آورید .

حل :

$$\overset{\Delta}{ABC}:\quad DE\|BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{\text{۲}}{DB}=\frac{\text{۱}}{\cdot/\text{۵}} \Rightarrow DB=\text{۱}$$

$$AB=AD+DB=\text{۲}+\text{۱}=\text{۳}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:\quad DE\|BC \xrightarrow[\text{جز به کل}]{\text{تالس}} \frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{\text{۱}}{\text{۱}/\text{۵}}=\frac{DE}{\text{۴}} \Rightarrow DE=\frac{\text{۸}}{\text{۳}}$$

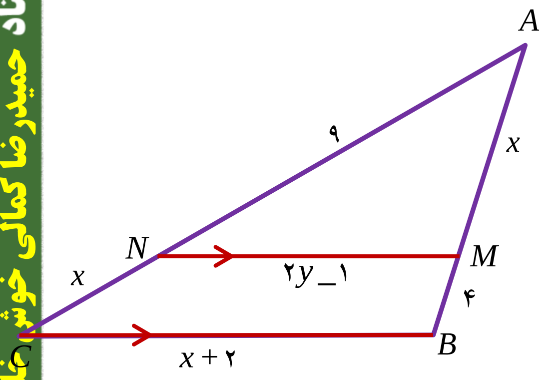


۲ – در شکل مقابل اگر $MN\|BC$ ، مقدار x را به دست آورده و سپس BC را نیز بیابید .

حل :

$$\overset{\Delta}{ABC}:\quad MN\|BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{\text{۱}}{x}=\frac{\text{۲}}{x+\text{۲}} \Rightarrow x=\text{۲}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:\quad MN\|BC \xrightarrow[\text{جز به کل}]{\text{تالس}} \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{\text{۱}}{\text{۳}}=\frac{\text{۱}/\text{۵}}{BC} \Rightarrow BC=\text{۴}/\text{۵}$$

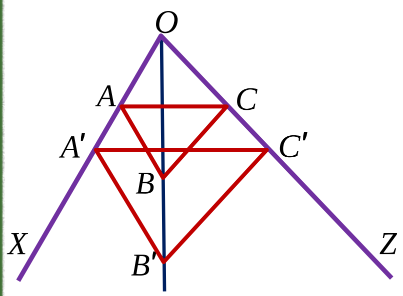


۳ – در شکل مقابل $MN\|BC$ مقادیر x و y را به دست آورید.

حل :

$$\overset{\Delta}{ABC}:\quad MN\|BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{\text{۴}}=\frac{\text{۹}}{x} \Rightarrow x=\text{۶}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:\quad MN\|BC \xrightarrow[\text{جز به کل}]{\text{تالس}} \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{\text{۶}}{\text{۱۰}}=\frac{\text{۲}y-\text{۱}}{\text{۸}} \Rightarrow y=\text{۲}/\text{۹}$$



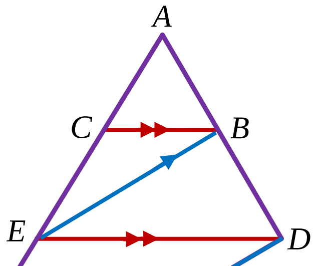
۴ – در شکل مقابل می دانیم $AB\|A'B'$ و $BC\|B'C'$ با استفاده از قضیه تالس و عکس آن ثابت کنید : $AC\|A'C'$

حل :

$$\overset{\Delta}{OA'B'}:\quad AB\|A'B' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA}{AA'}=\frac{OB}{BB'}$$

$$\overset{\Delta}{OC'B'}:\quad BC\|B'C' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OB}{BB'}=\frac{OC}{CC'}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{AA'}=\frac{OC}{CC'} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} AC\|A'C'$$



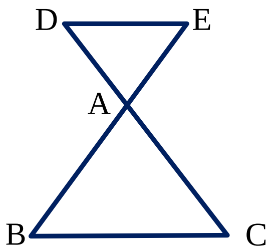
۵ – در شکل مقابل اگر $BC\|DE$ و $BE\|DF$ به کمک قضیه تالس در مثلث های ADE و ADF تناسب ها با یکدیگر ومقایسه ثابت کنید $AE^{2} = AC \times AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است) .

حل :

$$\overset{\Delta}{AED}: \quad CB\|ED \xrightarrow{\text{جز به کل}} \frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$$

$$\overset{\Delta}{ADF}: \quad BE\|DF \xrightarrow{\text{جز به کل}} \frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AD}$$

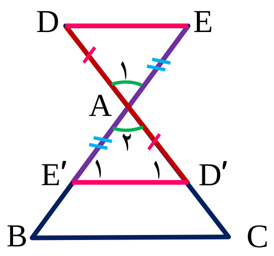
$$\Rightarrow \frac{AC}{AE}=\frac{AE}{AF} \quad \Rightarrow \quad AE^{2} = AC \times AF$$



٦ – در شکل مقابل می دانیم $DE\|BC$ ثابت کنید $\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}$

(راهنمایی هم اندازه AE و AD را به ترتیب بر رو ی AB و AC جداکنید .)

حل :



ابتدا نقاط E′ و D′ را به ترتیب بر روی AB و AC طوری انتخاب می کنیم که : $AE'=AE$ و $AD'=AD$ باشد . در این صورت می توان نوشت :

$$\left.\begin{array}{l} AD=AD' \\ \hat{A}_1=\hat{A}_2 \\ AE=AE' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ADE} \equiv \overset{\Delta}{AD'E'} \Rightarrow ED=E'D' \,,\, \hat{D}=\hat{D}'_1$$

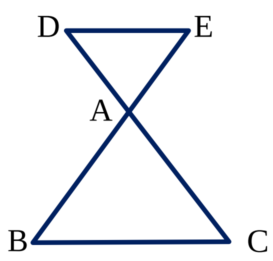
$$\xrightarrow{\text{عکس خاصیت خطوط موازی و مورب}} E'D'\|ED \xrightarrow{ED\|BC} E'D'\|BC$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \quad E'D'\|BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE'}{AB}=\frac{AD'}{AC}=\frac{E'D'}{BC}$$

$$\xrightarrow{AE'=AE\,,\; AD'=AD\,,\; E'D'=EC} \frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}=\frac{ED}{BC}$$

٧ – تعریف شکل های متشابه را از کتاب نهم به یاد آورید . آیا می توانید در مسئله ٦ ثابت کنید ، مثلث های ADE و ABC متشابهند.

حل :

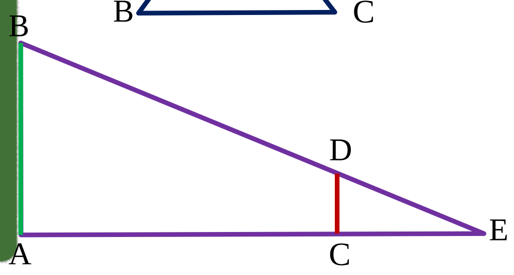


$$DE\|BC \quad , \quad \text{مورب} \quad EB \Rightarrow \hat{B}=\hat{E}$$

$$DE\|BC \quad , \quad \text{مورب} \quad DC \Rightarrow \hat{C}=\hat{D}$$

$$\xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{ADE}$$

٨ – یکی از کاربرد های قضیه تالس از زمان های دور تا کنون ، محاسبه فاصله های غیر قابل دسترس بوده است . به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند ، در زمانی معین ، طول سایهٔ درخت را روی زمین اندازه می گیریم ، سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می گویند ، طوری به صورت عمودی جا به جا می کنیم

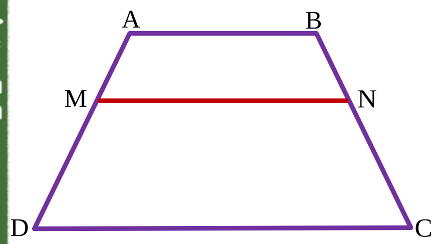


که سایهٔ آن روی امتداد سایهٔ درخت قرار گیرد و نوک سایهٔ شاخص نیز بر نوک سایهٔ درخت منطبق شود . نشان دهید که چگونه با داشتن طول سایهٔ درخت و طول سایهٔ شاخص و ارتفاع شاخص می توان ارتفاع درخت را به دست آورد . اگر طول سایهٔ درخت ۱۲۰ متر ، طول سایهٔ شاخص ٦ متر و طول شاخص ۱/۵ متر باشد بلندی درخت چند متر است ؟

حل :

$$AB \perp AE \quad , \quad DC \perp AE \quad \Rightarrow \quad AB \parallel DC$$

$$\overset{\Delta}{ABE}: \quad CD \parallel AB \quad \Rightarrow \quad \frac{EC}{EA} = \frac{DC}{AB} \quad \Rightarrow \quad \frac{۶}{۱۲۰} = \frac{۱/۵}{AB} \quad \Rightarrow \quad AB = ۳۰$$

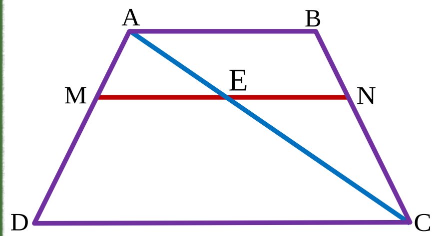


۹ – در ذوزنقه مقابل $MN \parallel AB \parallel CD$ ثابت کنید :

$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ (قضیه تالس در ذوزنقه)

راهنمایی : یکی از قطرهای ذوزنقه رارسم کنید .

حل :

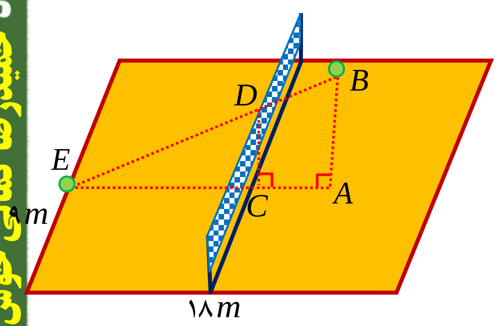


$$\overset{\Delta}{ADC}: \quad ME \parallel DC \quad \xrightarrow{\text{تالس}} \quad \frac{AM}{MD} = \frac{AE}{EC}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \quad EN \parallel AB \quad \xrightarrow{\text{تالس}} \quad \frac{AE}{EC} = \frac{BN}{NC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

۱۰– ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع ۹×۹ تفکیک می شود و طور والیبال مردان با ارتفاع ۴۳/ ۲ متر روی خط وسط نسب شده است . در یک لحظه یک بازیکن با قد ۱۸۰ سانتی متر و در فاصله دو متری طور به هوا پریده و توپی را که در ارتفاع ۳۰ سانتی متری بالای سرش است با ضربه ابشار مماس بر طور وسط روانه زمین حریف می کند و توپ رو خط انتهای زمین حریف می نشیند . این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده است.



حل :

$$\overset{\Delta}{EAB}: \quad CD \parallel AB \quad \xrightarrow[\text{جز به کل}]{\text{تالس}} \quad \frac{EC}{EA} = \frac{CD}{AB} \quad \Rightarrow \quad \frac{۹}{۱۱} = \frac{۲/۴۳}{AB} \quad \Rightarrow \quad AB = ۲/۹۷m$$

$$x = AB - ۱۸۰ = ۲۹۷ - ۱۸۰ = ۱۱۷cm$$

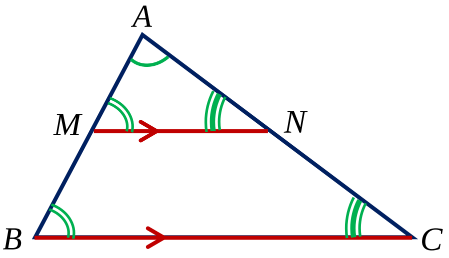
تشابه مثلث ها

در چند ضلعی های متشابه زوایای نظیر به نظیر برابر بوده و اضلاع نظیر به نظیر متناسبند.

مثلاً دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند اگر و فقط اگر زوایای نظیر به نظیر برابر بوده و اضلاع نظیر به نظیر متناسب باشند یعنی داشته باشیم :

$$\overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \hat{A}=\hat{A}' \ , \ \hat{B}=\hat{B}' \ , \ \hat{C}=\hat{C}' \ , \ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

قضیه اساسی تشابه مثلث ها :



اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی ، دو ضلع دیگر (و یا امتداد آنها)را در دو نقطه قطع کند ، مثلثی با آنها تشکیل می دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

$$\underbrace{\overset{\Delta}{ABC}: \ MN \parallel BC}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{\overset{\Delta}{AMN} \approx \overset{\Delta}{ABC}}_{\text{حکم}}$$

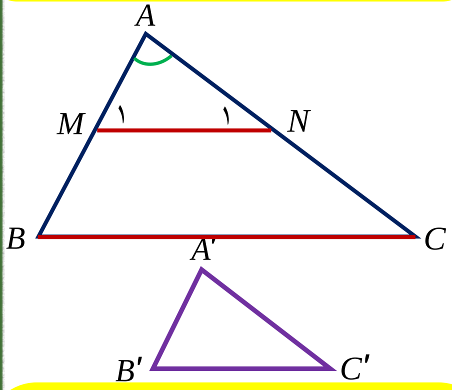
اثبات :

$$\overset{\Delta}{ABC}: \ MN \parallel BC \begin{cases} \xrightarrow{\text{AC مورب}} \hat{N}_1=\hat{C} \\ \xrightarrow{\text{AB مورب}} \hat{M}_1=\hat{B} \\ \xrightarrow[\text{جز به کل}]{\text{تالس}} \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC} \end{cases} \xrightarrow{\hat{A}=\hat{A}} \overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{AMN}$$

شرط آنکه دو مثلث متشابه باشند آن است که زوایا نظیر به نظیر برابر بوده و و اضلاع نظیر به نظیر متناسب باشند در اینجا ثابت کردیم زوایای نظیر به نظیر برابر بوده و اضلاع نظیر به نظیر متناسبند پس دو مثلث متشابهند

در حالت کلی ، در سه حالت ، دو مثلث متشابهند .

قضیه اول : هر گاه دو زاویه از مثلثی ، با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند ، دو مثلث متشابه اند .



$$\underbrace{\hat{B}=\hat{B}' \ , \ \hat{C}=\hat{C}'}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{\overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{A'B'C'}}_{\text{حکم}}$$

اثبات :

$$\begin{matrix} \overset{\Delta}{ABC}: & \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \\ \overset{\Delta}{A'B'C'}: & \hat{A}'+\hat{B}'+\hat{C}'=180^\circ \end{matrix} \Rightarrow \hat{A}+\cancel{\hat{B}}+\cancel{\hat{C}}=\hat{A}'+\cancel{\hat{B}'}+\cancel{\hat{C}'} \Rightarrow \hat{A}=\hat{A}'$$

برهان : روی اضلاع AB و AC پاره خط های AM و AN را به ترتیب هم اندازه $A'B'$ و $A'C'$ جدا می کنیم .

$$\left.\begin{matrix} AM=A'B' \\ \hat{A}=\hat{A}' \\ AN=A'C' \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{A'B'C'} \ \overset{\Delta}{AMN} \Rightarrow \begin{cases} MN=B'C' \\ \hat{N}_1=\hat{C}' \\ \hat{M}_1=\hat{B}' \end{cases}$$

$$\hat{M}_1=\hat{B}, \ \hat{N}_1=\hat{C} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \overset{\Delta}{AMN} \approx \overset{\Delta}{ABC}$$

$$\left.\begin{matrix} \overset{\Delta}{A'B'C'} \cong \overset{\Delta}{AMN} \\ \overset{\Delta}{AMN} \approx \overset{\Delta}{ABC} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{A'B'C'} \approx \overset{\Delta}{ABC}$$

$$\overset{\Delta}{AMN} \approx \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

$$, \hat{M}_1=\hat{B}, \hat{N}_1=\hat{C}$$

$$\overset{\Delta}{AMN} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow AM=A'B'$$

$$, AN=A'C', MN=B'C'$$

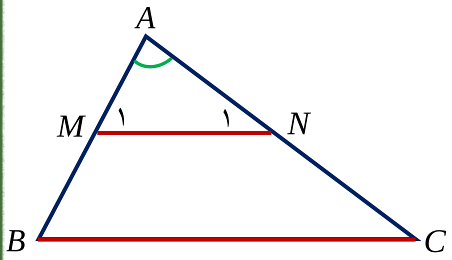
$$, \hat{A}=\hat{A}', \hat{M}_1=\hat{B}', \hat{N}_1=\hat{C}'$$

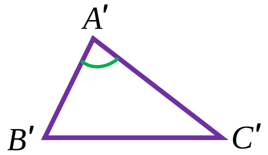
پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ دارای زوایای برابر و اضلاع متناسبند و در نتیجه متشابهند

قضیه دوم : هر گاه اندازه های دو ضلع از مثلثی با اندازه های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها هم اندازه باشند ، دو مثلث متشابهند .

اگر دو ضلع متناسب باشند حتماً باید زاویه بین همان دو ضلع برابر باشد

$$\underbrace{\hat{A}=\hat{A}' \ , \ \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{\overset{\Delta}{ABC}\approx \overset{\Delta}{A'B'C'}}_{\text{حکم}}$$





اثبات :

برهان : روی اضلاع AB و AC پاره خط های AM و AN را به ترتیب هم اندازه A'B' و A'C' جدا می کنیم .

$$\left.\begin{array}{r} AM=A'B' \\ \hat{A}=\hat{A}' \\ AN=A'C' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{A'B'C'} \quad \overset{\Delta}{AMN} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} MN=B'C' \\ \hat{N}_1=\hat{C}' \\ \hat{M}_1=\hat{B}' \end{array}\right.$$

زیرا طبق برهان داریم : $AM=A'B'$

طبق فرض داریم : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}$

$$\frac{AM}{AB}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN\parallel BC$$

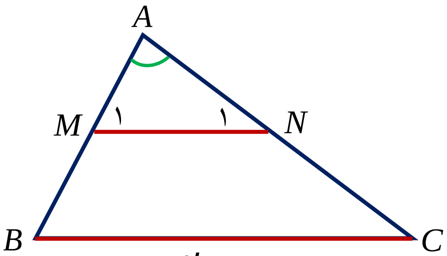
$$MN\parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \overset{\Delta}{AMN}\approx \overset{\Delta}{ABC}$$

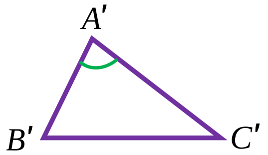
زیرا دو مثلث ABC و A'B'C' دارای زوایای برابر و اضلاع متناسبند

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{A'B'C}\cong \overset{\Delta}{AMN} \\ \overset{\Delta}{AMN}\approx \overset{\Delta}{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{A'B'C'}\approx \overset{\Delta}{ABC}$$

قضیه سوم : هر گاه اندازه سه ضلع از مثلثی ، با اندازه های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند ، دو مثلث متشابهند .

$$\underbrace{\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{\overset{\Delta}{ABC}\approx \overset{\Delta}{A'B'C'}}_{\text{حکم}}$$





اثبات :

برهان : روی اضلاع AB و AC پاره خط های AM و AN را به ترتیب هم اندازه A'B' و A'C' جدا می کنیم .

زیرا طبق برهان داریم : $AM=A'B'$

طبق فرض داریم : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}$

$$\frac{AM}{AB}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN\parallel BC$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \ MN\parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \overset{\Delta}{AMN}\approx \overset{\Delta}{ABC} \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{تعمیم}} \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$$

$$\xrightarrow{AM=A'B'} \frac{A'B'}{AB}=\frac{MN}{BC} \xrightarrow{\text{فرض}} \frac{B'C'}{BC}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow MN=B'C'$$

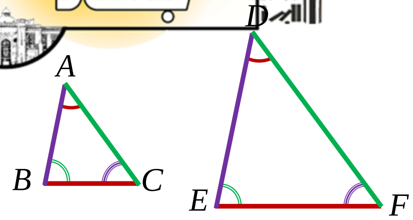
طبق فرض داریم : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$

$$A'B'=AM \ , \ A'C'=AC \ , \ B'C'=BC \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{A'B'C'}\cong \overset{\Delta}{AMN}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{A'B'C'} \quad \overset{\Delta}{AMN} \\ \overset{\Delta}{AMN}\approx \overset{\Delta}{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{A'B'C'}\approx \overset{\Delta}{ABC}$$

زیرا دو مثلث ABC و A'B'C' دارای زوایای برابر و اضلاع متناسبند

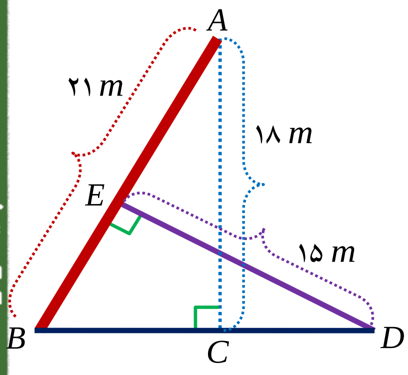
نکته بسیار مهم : در دو مثلث متشابه ، اضلاع مقابل به زوایای برابر ، متناسبند.



این عبارت به این معنی است که اگر دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{DEF}$ با یکدیگر متشابه بوده و زوایای $\hat{A}$ و $\hat{D}$ با یکدیگر برابر باشند ، آنگاه اضلاع مقابل به این زوایا متناسبند و در صورت و مخرج یک کسر قرار می گیرند . در این صورت داریم :

$$\hat{A}=\hat{D} \quad , \quad \hat{B}=\hat{E} \quad , \quad \hat{C}=\hat{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=\frac{AB}{DE}$$

مثال : مطابق شکل رو به رو ، یک تیر (دکل) انتقال برق به ارتفاع ۲۱ متر ، در اثر وزش باد خم شده و در موقعیت جدید ، نوک آن از زمین ۱۸ متر فاصله دارد . می خواهیم با قرار دادن یک تیرفلزی به طول ۱۵ متر ، عمود برآن آن را به طورموقت سر پا نگه داریم . پای این تیر فلزی را باید در چه فاصله ای از پای تیر انتقال برق محکم کنیم ؟



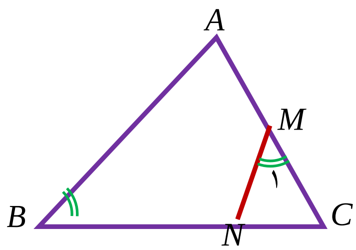
حل :

$$\overset{\Delta}{ABC} \ , \ \overset{\Delta}{BDE} \ : \ \hat{B}=\hat{B} \quad , \quad \hat{C}=\hat{E}=۹۰^\circ \quad \Rightarrow \quad \overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{BDE}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{BDE} \quad \Rightarrow \quad \frac{DE}{AC}=\frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{۱۵}{۱۸}=\frac{BD}{۲۱} \quad \Rightarrow \quad BD=۱۷/۵$$

یعنی باید تیر فلزی را در فاصله ۱۷/۵ متری از پای دکل برق محکم کنیم .

مثال : در مثلث ABC از نقطه M وسط AC زاویه $N\hat{M}C$ را مساوی زاویه $\hat{B}$ جدا کرده ایم . اگر $NC=۲$ و $NB=۴$ طول AC را به دست آورید .



حل :

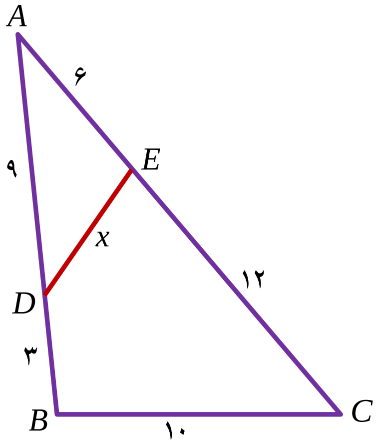
$$\overset{\Delta}{ABC} \ , \ \overset{\Delta}{MNC} \ : \ \hat{C}=\hat{C} \quad , \quad \hat{B}=\hat{M}_۱ \quad \Rightarrow \quad \overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{MNC}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{NMC} : \quad \Rightarrow \quad \frac{NC}{AC}=\frac{MN}{AB}=\frac{MC}{BC} \xrightarrow{MC=\frac{AC}{۲}} \frac{NC}{AC}=\frac{AC}{۲BC}$$

$$\Rightarrow \quad AC^۲=۲NC\times BC=۲NC(BN+NC)=۲\times۲(۴+۲)=۲۴ \quad \Rightarrow \quad AC=۲\sqrt{۶}$$

مثال : در شکل مقابل اندازه هر پاره خط روی آن نوشته شده است .

اندازه x را به دست آورید .



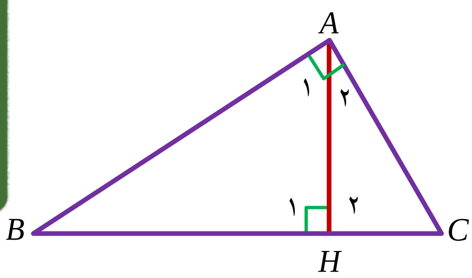
حل :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{AE}{AB}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲} \\ \frac{AD}{AC}=\frac{۹}{۱۸}=\frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC} \xrightarrow{\hat{A}=\hat{A}} \overset{\Delta}{ADE} \approx \overset{\Delta}{ABC}$$

$$\overset{\Delta}{ADE} \approx \overset{\Delta}{ABC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{۱۰}=\frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad x=۵$$

اثبات قضیه فیثا غورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزاویه

مثال : ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ، ارتفاع وارد بر وتر ، آن را به دو مثلث قائم الزاویه تفکیک می کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه اند .



حل :

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A}=\hat{H}_{۱}=۹۰^\circ\\ \hat{B}=\hat{B}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{زز}}\overset{\Delta}{ABC}\approx\overset{\Delta}{ABH}$$

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A}=\hat{H}_{۲}=۹۰^\circ\\ \hat{C}=\hat{C}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{زز}}\overset{\Delta}{ABC}\approx\overset{\Delta}{ACH}$$

و چون دو مثلث $\overset{\Delta}{ABH}$ و $\overset{\Delta}{ACH}$ هر دو با مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متشابه اند پس این دو مثلث با یکدیگر نیز متشابه هستند یعنی داریم : $\overset{\Delta}{ABH}\approx\overset{\Delta}{ACH}$.

قسمت سوم این مسئله را به روش مستقیم و بدون استفاده از دو قسمت قبل نیز می توان به صورت زیر محاسبه کرد :

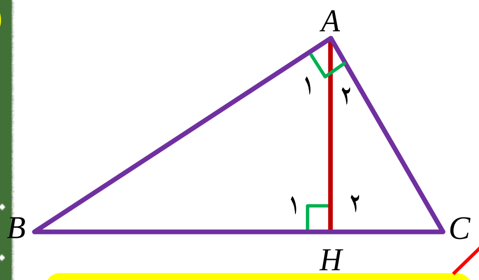
$$\overset{\Delta}{ABH}:\quad \hat{A}_{۱}+\hat{B}+\hat{H}_{۱}=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\hat{H}_{۱}=۹۰^\circ}\hat{A}_{۱}+\hat{B}=۹۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{A}_{۱}+\hat{A}_{۲}=۹۰^\circ}\hat{A}_{۱}+\hat{B}=\hat{A}_{۱}+\hat{A}_{۲}\Rightarrow\hat{B}=\hat{A}_{۲}\xrightarrow{\hat{H}_{۱}=\hat{H}_{۲}=۹۰^\circ}\overset{\Delta}{ABH}\approx\overset{\Delta}{ACH}$$

نتیجه : در هر مثلث قائم الزاویه ، ارتفاع وارد بر وتر ، آن را به دو مثلث قائم الزاویه تفکیک می کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه اند .

مثال : در مثلث قائم الزاویه ABC $(A=۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده و ثابت کنید AB واسطه هندسی BH و BC است .

حل:



وقتی AB واسطه هندسی BH و BC باشد داریم : $AB^{۲}=BH.BC$

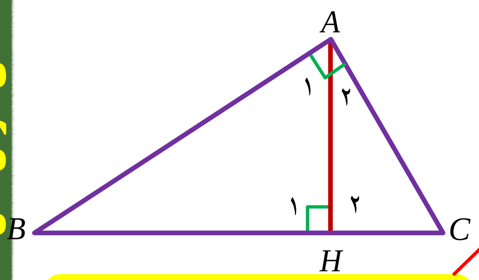
$$\underbrace{\hat{A}=۹۰^\circ\quad,\quad\hat{H}_{۱}=\hat{H}_{۲}=۹۰^\circ}_{\text{فرض}}\quad\Rightarrow\quad\underbrace{AB^{۲}=BC.BH}_{\text{حکم}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A}=\hat{H}_{۱}=۹۰^\circ\\ \hat{B}=\hat{B}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{زز}}\overset{\Delta}{ABC}\approx\overset{\Delta}{ABH}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}\approx\overset{\Delta}{ABH}\quad\Rightarrow\quad\frac{AH}{AC}=\underbrace{\frac{AB}{BC}}_{\text{وسطین}}=\underbrace{\frac{BH}{AB}}_{\text{طرفین}}\quad\Rightarrow\quad AB^{۲}=BH.BC$$

مثال : در مثلث قائم الزاویه ABC $(A=۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده و ثابت کنید AC واسطه هندسی CH و BC است .

حل:



وقتی AC واسطه هندسی CH و BC باشد داریم : $AC^{۲}=CH.BC$

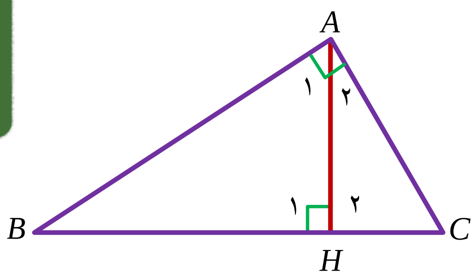
$$\underbrace{\hat{A}=۹۰^\circ\quad,\quad\hat{H}_{۱}=\hat{H}_{۲}=۹۰^\circ}_{\text{فرض}}\quad\Rightarrow\quad\underbrace{AC^{۲}=CH.BC}_{\text{حکم}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A}=\hat{H}_{۲}=۹۰^\circ\\ \hat{C}=\hat{C}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{زز}}\overset{\Delta}{ABC}\approx\overset{\Delta}{ACH}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}\approx\overset{\Delta}{ACH}\quad\Rightarrow\quad\frac{AH}{AB}=\underbrace{\frac{AC}{BC}}_{\text{وسطین}}=\underbrace{\frac{CH}{AC}}_{\text{طرفین}}\quad\Rightarrow\quad AC^{۲}=CH.BC$$

مثال : در مثلث قائم الزاویه ABC $(A=۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده و ثابت کنید AH واسطه هندسی BH و CH است .

حل:



$$\underbrace{\hat{A}=۹۰^\circ \quad , \quad \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{AH^۲=BH.CH}_{\text{حکم}}$$

$$\overset{\Delta}{ABH}:\ \hat{A}_۱+\hat{B}+\hat{H}_۱=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{H}_۱=۹۰^\circ} \hat{A}_۱+\hat{B}=۹۰^\circ$$

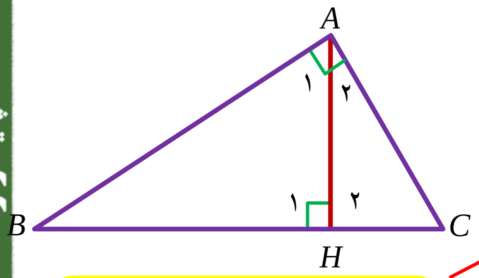
$$\xrightarrow{\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ} \hat{A}_۱+\hat{B}=\hat{A}_۱+\hat{A}_۲ \Rightarrow \hat{B}=\hat{A}_۲ \xrightarrow{\hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ} \overset{\Delta}{ABH}\approx\overset{\Delta}{ACH}$$

$$\overset{\Delta}{ABH}\approx\overset{\Delta}{ACH} \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\underbrace{\frac{BH}{AH}}_{\text{وسطین}}=\underbrace{\frac{AH}{CH}}_{\text{طرفین}} \Rightarrow AH^۲=BH.CH$$

وقتی AH واسطه هندسی BH و CH باشد داریم: $AH^۲=BH.CH$

تشابه دو مثلث $\overset{\Delta}{ABH}$ و $\overset{\Delta}{ACH}$، به روش های دیگر نیز قابل قبول است

مثال : در مثلث قائم الزاویه ABC $(A=۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده و با استفاده از تشابه مثلث ها رابطه فیثا غورس را در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ثابت کنید .



حل:

$$\underbrace{\hat{A}=۹۰^\circ \quad , \quad \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{BC^۲=AB^۲+AC^۲}_{\text{حکم}}$$

$$\left.\begin{matrix}\hat{A}=\hat{H}_۱=۹۰^\circ\\ \hat{B}=\hat{B}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{ABC}\approx\overset{\Delta}{ABH}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}\approx\overset{\Delta}{ABH} \Rightarrow \frac{AH}{AC}=\underbrace{\frac{AB}{BC}}_{\text{وسطین}}=\underbrace{\frac{BH}{AB}}_{\text{طرفین}} \Rightarrow AB^۲=BH.BC$$

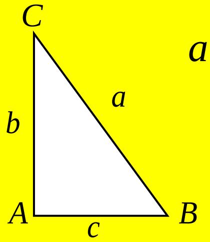
$$\left.\begin{matrix}\hat{A}=\hat{H}_۲=۹۰^\circ\\ \hat{C}=\hat{C}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{ABC}\approx\overset{\Delta}{ACH}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}\approx\overset{\Delta}{ACH} \Rightarrow \frac{AH}{AB}=\underbrace{\frac{AC}{BC}}_{\text{وسطین}}=\underbrace{\frac{CH}{AC}}_{\text{طرفین}} \Rightarrow AC^۲=CH.BC$$

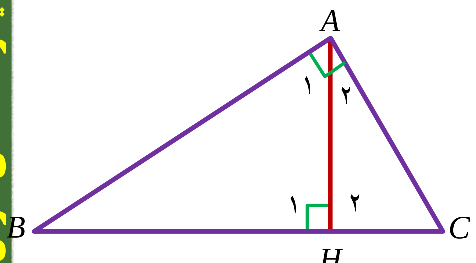
$$AB^۲+AC^۲=BH\times BC+CH\times BC=BC\underbrace{(BH+CH)}_{BC}=BC^۲$$

رابطه فیثا غورس بیان می کند در هر مثلث قائم الزاویه ، مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر یعنی در مثلث ABC که $\hat{A}=۹۰^\circ$ داریم :

$$a^۲=b^۲+c^۲$$



مثال : در مثلث قائم الزاویه ABC $(A=۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده و ثابت کنید $AH\times BC=AB\times AC$.



حل:

$$\underbrace{\hat{A}=۹۰^\circ \quad , \quad \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{AH\times BC=AB\times AC}_{\text{حکم}}$$

$$\left.\begin{matrix}\hat{A}=\hat{H}_۱=۹۰^\circ\\ \hat{B}=\hat{B}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{ABC}\approx\overset{\Delta}{ABH}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}\approx\overset{\Delta}{ABH} \Rightarrow \frac{BH}{AB}=\underbrace{\frac{AB}{BC}}_{\text{وسطین}}=\underbrace{\frac{AH}{AC}}_{\text{طرفین}} \Rightarrow AH\times BC=AB\times AC$$

می توانستیم از تشابه دو مثلث ABC و ACH نیز استفاده کنیم .

این مسئله را با استفاده از رابطه مساحت در مثلث نیز می توانستیم ثابت کنیم و لی در اینجا می خواستیم با استفاده از تشابه این حکم را ثابت کنیم

روابط طولی در مثلث قائم الزاویه :

اگر در مثلث قائم الزاویه ABC $(A=۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کنیم ، با استفاده از تشابه مثلث ها نتایج زیر به دست می آید .

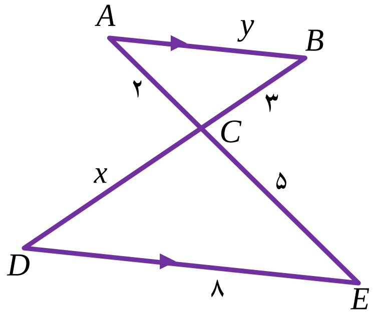
۱) $AB^۲=BC\times BH$ ۲) $AC^۲=BC\times CH$ ۳) $AH^۲=BH\times CH$

۴) $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$ ۵) $AH \times BC = AB \times AC$

تمرین صفحه ۱٤ فصل ۲

۱ – در هر یک از اشکال زیر تشابه مثلث ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x و y را مشخص کنید .

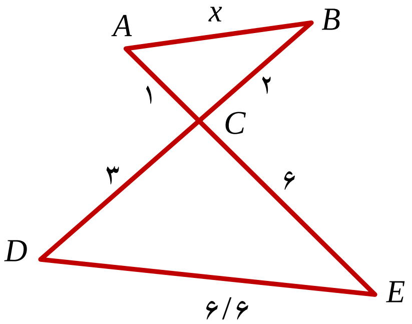
الف)



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DE \ , \ \text{مورب}\ AE \Rightarrow \hat{A} = \hat{E} \\ AB \parallel DE \ , \ \text{مورب}\ BD \Rightarrow \hat{B} = \hat{D} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{DCE}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{CDE} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{y}{۸} = \frac{۲}{۵} = \frac{۳}{x} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱۵}{۳} \\ y = \frac{۱۶}{۵} \end{cases}$$

ب)

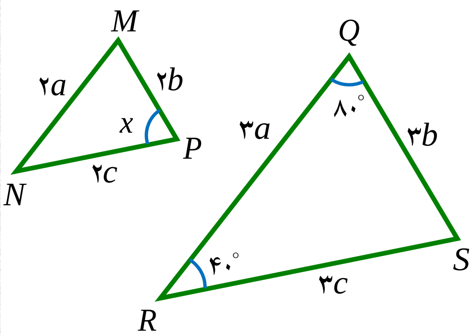


$$\left.\begin{array}{l} \frac{AC}{CD} = \frac{۱}{۳} \\ \frac{BC}{CE} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE} = \frac{۱}{۳} \\ \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{DCE}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{DCE} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۶} = \frac{x}{۶/۶} \Rightarrow x = ۲/۲$$

ج)

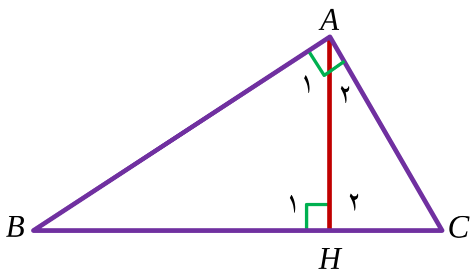


$$\left.\begin{array}{l} \frac{MN}{QR} = \frac{۲a}{۳a} = \frac{۲}{۳} \\ \frac{MP}{QS} = \frac{۲b}{۳b} = \frac{۲}{۳} \\ \frac{NP}{RS} = \frac{۲c}{۳c} = \frac{۲}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MN}{QR} = \frac{MP}{QS} = \frac{NP}{RS} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{MNP} \approx \overset{\Delta}{QRS}$$

$$\overset{\Delta}{QRS} : \ \hat{Q} + \hat{R} + \hat{S} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow[\hat{R}=۴۰^\circ]{\hat{Q}=۸۰^\circ} S = ۶۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{DCE} \Rightarrow \hat{M} = \hat{Q} = ۸۰^\circ \ , \ \hat{N} = \hat{R} = ۴۰^\circ \ , \ \hat{P} = \hat{S} = x = ۶۰^\circ$$

۲ – در مثلث قائم الزاویه ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم الزاویه، در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده مقادیر مجهول را محاسبه کنید.



۱) $BH = ۹ \ , \ CH = ۴ \ , \ AH = ? \ , \ AB = ? \ , \ AC = ?$

حل :

$$AH^2 = BH \times CH = 9\times 4 = 36 \quad\Rightarrow\quad AH = 6$$
$$AB^2 = BH \times BC = 9\times 13 \quad\Rightarrow\quad AB = 3\sqrt{13}$$
$$AC^2 = CH \times BC = 4\times 13 \quad\Rightarrow\quad AC = 2\sqrt{13}$$

۲) $AB = 10 \quad , \quad BC = 12 \quad , \quad AC = ? \quad , \quad AH = ?$

حل :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad\Rightarrow\quad 144 = 100 + AC^2 \quad\Rightarrow\quad AC^2 = 44 \quad\Rightarrow\quad AC = 2\sqrt{11}$$
$$AH \times BC = AB \times AC \quad\Rightarrow\quad AH \times 12 = 10\times 2\sqrt{11} \quad\Rightarrow\quad AH = \frac{5\sqrt{11}}{3}$$

۳) $AB = 8 \quad , \quad AC = 6 \quad , \quad BH = ? \quad , \quad CH = ?$

حل :

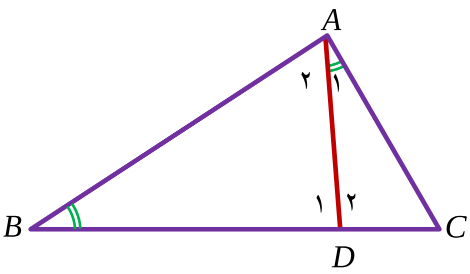
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 64 + 36 = 100 \quad\Rightarrow\quad BC = 10$$
$$AB^2 = BH \times BC \quad\Rightarrow\quad 64 = BH \times 10 \quad\Rightarrow\quad BH = \frac{32}{5}$$
$$AC^2 = CH \times BC \quad\Rightarrow\quad 36 = CH \times 10 \quad\Rightarrow\quad CH = \frac{18}{5}$$

٤) $AB = 8 \quad , \quad AH = 4 \quad , \quad BC = ? \quad , \quad AC = ?$

حل :

$$\overset{\Delta}{ABH} : \xrightarrow[\text{فیثاغورس}]{\hat{H}_1 = 90^\circ} AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad\Rightarrow\quad 64 = 16 + BH^2 \quad\Rightarrow\quad BH = 4\sqrt{3}$$
$$AB^2 = BH \times BC \quad\Rightarrow\quad 64 = 4\sqrt{3} \times BC \quad\Rightarrow\quad BC = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$
$$AH \times BC = AB \times AC \quad\Rightarrow\quad 4 \times \frac{16\sqrt{3}}{3} = 8 \times AC \quad\Rightarrow\quad AC = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

۳ – در شکل رو به رو $\hat{A}_1 = \hat{B}$ و $AC = 4$ و $BD = 6$ ، طول BC را به دست آورید.

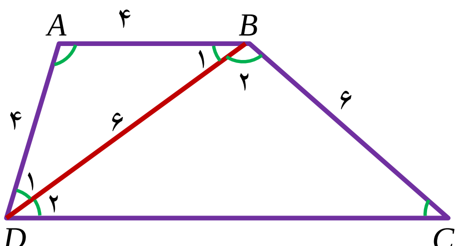


حل :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1 = \hat{B} \\ \hat{C} = \hat{C}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{ABD} \approx \overset{\Delta}{ADC}$$

$$\frac{AB}{AD} = \underbrace{\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}}_{\text{وسطین}\quad\text{طرفین}} \quad\Rightarrow\quad AC^2 = BC \times DC$$
$$\Rightarrow\quad 16 = (BD + DC)\times DC = (6 + DC)\times DC$$
$$DC^2 + 6DC - 16 = 0 \quad\Rightarrow\quad (DC - 2)(DC + 8) = 0$$
$$\Rightarrow\quad DC = 2 \ \text{جواب} \qquad , \quad DC = -8 \ \text{ق ق غ}$$

٤ – در شکل رو به رو $ABCD$ ذوزنقه است . طول قاعده CD را به دست آورید .



حل :

$$\overset{\Delta}{ABD}: \quad AB = AD \quad \Rightarrow \quad \hat{B}_1 = \hat{D}_1$$

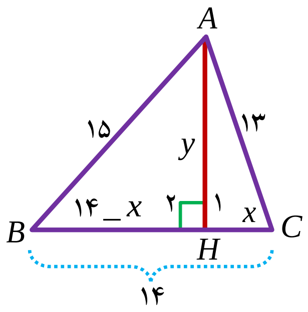
$$\overset{\Delta}{BCD}: \quad BD = BC \quad \Rightarrow \quad \hat{D}_2 = \hat{C}$$

$$AB \| DC \quad , \quad \text{مورب} \quad BD \quad \Rightarrow \quad \hat{B}_1 = \hat{D}_2$$

$$\begin{matrix} \hat{B}_1 = \hat{D}_2 \\ \hat{D}_1 = \hat{C} \end{matrix} \quad \xrightarrow{\text{زز}} \quad \overset{\Delta}{ABD} \approx \overset{\Delta}{BDC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{BD} = \frac{AD}{BC} = \frac{BD}{DC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{6}{DC} \quad \Rightarrow \quad DC = 9$$

۵ – در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث های ABH و ACH مقادیر x و y را به دست آورید. و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید .



حل :

$$\overset{\Delta}{ABH}: \xrightarrow[\text{فیثاغورس}]{\hat{H}_2 = 90^\circ} \quad AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad \Rightarrow \quad AH^2 = AB^2 - BH^2$$

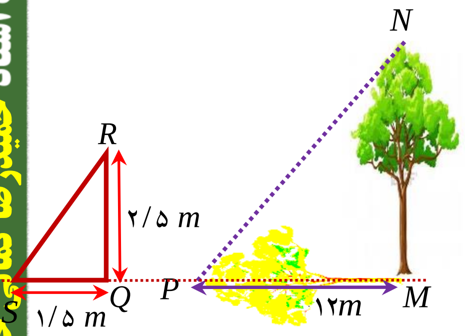
$$\overset{\Delta}{ACH}: \xrightarrow[\text{فیثاغورس}]{\hat{H}_1 = 90^\circ} \quad AC^2 = AH^2 + CH^2 \quad \Rightarrow \quad AH^2 = AC^2 - CH^2$$

$$AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2 \quad \Rightarrow \quad 225 - 196 - x^2 + 28x = 169 - x^2$$

$$\Rightarrow \quad 28x = 140 \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

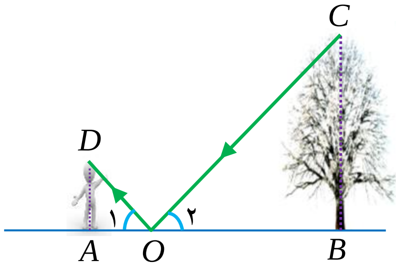
$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \quad \Rightarrow \quad 169 = 25 + y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad y = 12$$

٦ – در حیاط یک دبیرستان، دو درخت بلند وجود دارد. معلم هندسه از دانش آموزان خواست که برای تعیین ارتفاع این دو درخت روشی ارائه کنند. در اینجا روش های دو دانش آموز را می بینید . با توجه به اطلاعات داده شده ارتفاع هر درخت را تعیین کنید.



الف) روش ترانه: ترانه یک چوب ۲/۵ متری را به صورت عمودی روی زمین درجایی محکم کرد . طول سایهٔ چوب، در آن زمان ۱/۵ متر بود . همزمان طول سایهٔ درخت ۱۲ متر بود . از اینجا چگونه او توانست ارتفاع درخت را اندازه بگیرد؟ ارتفاع این درخت چند متر است؟

ب) روش شهرزاد: شهرزاد آینه ای کوچک را که در مقیاس بزرگ می توان یک نقطه در نظر گرفت، (نقطه O در شکل) روی زمین و در مسیر خط راستی که از پای درخت تا پای خودش کشیده است، قرار می دهد. سپس روی این خط آنقدر به جلو وعقب حرکت می کند تا بتواند تصویر نوک درخت را در آیینه ببیند . با توجه به آنچه که از خواص آینه ها و انعکاس نور می دانید بگویید چگونه می توان با داشتن طول های AO و BO روی زمین و اندازه قد شهر زاد (فاصله چشم او تا زمین) ارتفاع درخت را به دست آورد اگر قد شهرزاد ۱۶۰سانتی متر و فاصلهٔ پای او از



آینه ۲/۵ متر و فاصله ایینه از پای درخت ۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟

حل :

روش ترانه :

پرتو های نور خورشید به صورت موازی با هم به زمین بر خورد می کنند

$SR \| PN \quad , \quad$ مورب $\quad SM \Rightarrow \hat{S} = \hat{P}$

درخت و چوب ، هر دو بر سطح زمین عمود بوده

$\hat{M} = \hat{Q} = ۹۰^\circ \quad \xrightarrow{\text{زز}} \quad \overset{\Delta}{MNP} \approx \overset{\Delta}{QRS}$

در مثلث های متشابه اضلاع مقابل به زوایای برابر ، با یکدیگر متناسبند

$$\overset{\Delta}{MNP} \approx \overset{\Delta}{QRS} \Rightarrow \frac{PM}{SQ} = \frac{NM}{QR} \Rightarrow \frac{۱۲}{۱/۵} = \frac{NM}{۲/۵} \Rightarrow MN = ۲۰$$

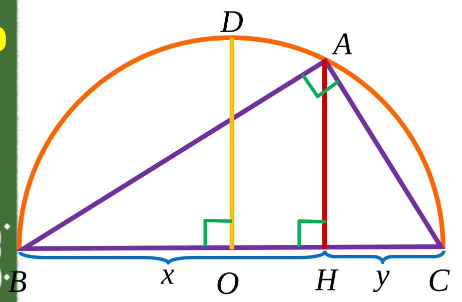
روش شهر زاد :

طبق خواص آیینه های تخت ، زاویه تابش و زاویه بازتابش با یکدیگر برابرند پس: $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$.

$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲,\quad \hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ \quad \xrightarrow{\text{زز}} \quad \overset{\Delta}{OAD} \approx \overset{\Delta}{OBC}$$

$$\overset{\Delta}{OAD} \approx \overset{\Delta}{OBC} \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{AO}{BO} \Rightarrow BC = \frac{AD \times BO}{AO} \Rightarrow MN = \frac{۱/۶ \times ۲۰}{۲/۵} = ۱۲/۸$$

۷ـ در شکل مقابل نیم دایره به قطر BC و مرکز O رسم شده است . و نقطه دلخواه A روی محیط نیم دایره می باشد.



الف) چرا زاویه A قائمه است؟

حل الف)

زیرا زاویه $\hat{A}$ یک زاویه محاطی مقابل به نیم دایره یعنی کمان ۱۸۰° است پس اندازه آن برابر نصف ۱۸۰° یعنی ۹۰° است .

ب) برای نقطه A که به دلخواه روی محیط دایره انتخاب شد و CD شعاع دایره است اندازه های AH و OD را به هم مقایسه کنید .

$OD [?] AH$

حل ب)

$OD \geq AH$

پ) هر کدام از مقادیر AH و OD را بر حسب x و y محاسبه کنید ودر قسمت (ب) جایگذاری نمایید .

حل پ)

$$OD = \frac{x+y}{۲} \quad , \quad AH^۲ = xy \Rightarrow AH = \sqrt{xy}$$

$$OD \geq AH \Rightarrow \frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$$

ت) آیا می توان برای هر دو عدد مثبت a و b گفت: $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$؟ چرا ؟

بله درست است

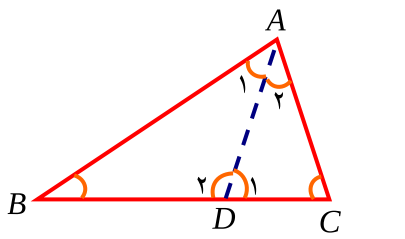
اثبات به روش بازگشتی :

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \iff a+b \geq ۲\sqrt{ab} \iff (a+b)^۲ \geq ۴ab \iff a^۲+b^۲-۲ab \geq ۰$$

$$(a-b)^۲ \geq ۰$$

کاربرد های از قضیه تالس و تشابه

۱ – قضایای نیمساز هلی داخلی

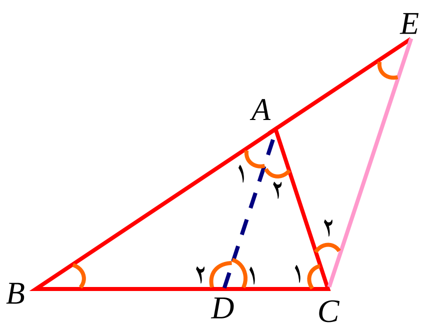


درهرمثلث نیمساز هر زاویهٔ داخلی ، ضلع رو به رو به آن زاویه را به نسبت اندازه های ضلع های آن زاویه تقسیم می کند .

اثبات :

فرض : $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$

حکم : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$



برهان : مطابق شکل ، از نقطهٔ C خط راستی موازی نیمساز AD رسم می کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند .

در این صورت می توان گفت :

$AD \parallel CE$ و مورب $AC \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{C}_۲$

$AD \parallel CE$ و مورب $BE \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{E}$

نیمساز $AD \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$

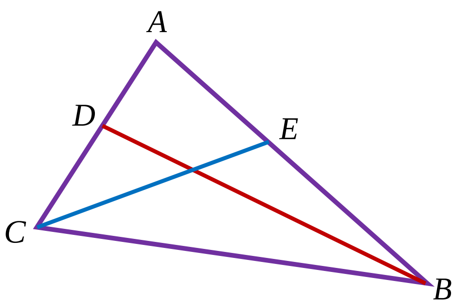
بنابراین از سه رابطه فوق نتیجه می شود $\hat{C}_۲ = \hat{E}$ درنتیجه مثلث ACE متساوی الساقین است پس داریم : $AC = AE$

همچنین داریم :

$$\overset{\Delta}{BCE} : \quad AD \parallel EC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} \xrightarrow{AE=AC} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

نتیجه : در هر مثلث می توان طول های قطعاتی که هر نیمساز ایجاد می کند ، با داشتن طول های اضلاع مثلث ، محاسبه کرد .

مثال : در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ $AB=۷$ و $AC=۵$ و $BC=۸$



الف)طول های دو قطعه ای که نیمساز Bرو ضلع مقابل ایجاد می کند را به دست آورید .

ب)طول های دو قطعه ای که نیمساز Cرو ضلع مقابل ایجاد می کند را به دست آورید .

حل الف :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}=\frac{۷}{۸} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD}=\frac{۷+۸}{۸} \Rightarrow \frac{AC}{CD}=\frac{۱۵}{۸}$$

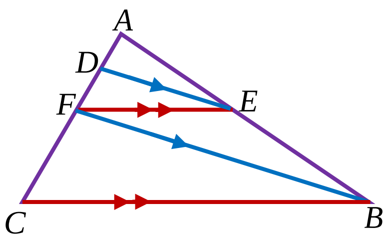
$$\xrightarrow{AC=۵} CD=\frac{۸\times ۵}{۱۵}=\frac{۸}{۳} \quad , \quad AD=AC-CD=۵-\frac{۸}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

حل ب :

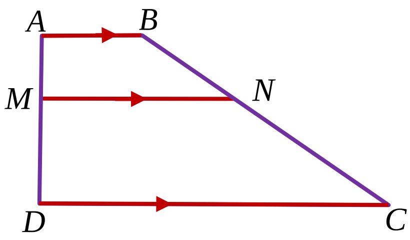
$$\frac{CA}{CB}=\frac{AE}{BE}=\frac{۵}{۸} \Rightarrow \frac{AE+BE}{BE}=\frac{۵+۸}{۸} \Rightarrow \frac{AB}{BE}=\frac{۱۳}{۸}$$

$$\xrightarrow{AB=۷} BE=\frac{۸\times ۷}{۱۳}=\frac{۵۶}{۱۳} \quad , \quad AE=AB-BE=۷-\frac{۵۶}{۱۳}=\frac{۳۵}{۱۳}$$

۲ – نسبت اجزای فرعی ، محیط ها ومساحت های دو مثلث متشابه



نکته : اگر درمثلث ABC مانندشکل زیر DE با FB موازی بوده و EF با BC موازی باشد آنگاه داریم : $\frac{AD}{DF}=\frac{AF}{FC}$



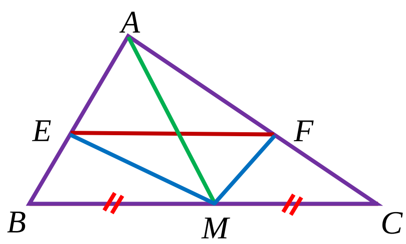
نکته : درذوزنقه $ABCD$ اگر خط MN موازی دو قاعده رسم شود بر روی دو ساق پاره خط های متناسب ایجاد می کند . یعنی داریم :

$$MN \| AB \Rightarrow \frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$$

عکس رابطه فوق نیز برقرار است یعنی اگر $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$ آنگاه نتیجه می گیریم MN موازی AB است .

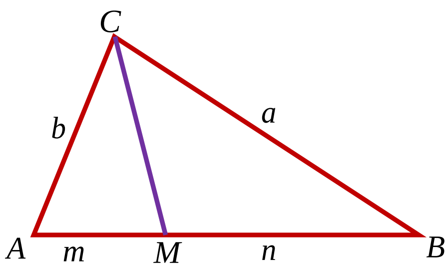
نکته : در یک ذوزنقه پاره خطی که وسط یک ساق را به وسط ساق دیگر متصل می کند اولاً با دو قاعده موازی است و ثانیاً طول این پاره خط برابر میانگین طول های دو قاعده ذوزنقه است

$$\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=۱ \Rightarrow MN\|AB \quad , \quad MN=\frac{AB+DC}{۲}$$



نکته : در مثلث ABC اگر از پای میانه AM نیمساز های ME و MF را رسم کنیم به طوری که نقاط E و F به ترتیب روی AB و AC باشند ، آنگاه EF موازی BC بوده ودر نتیجه داریم : $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$

تمرینات فصل ۲



۱ –*** اگر نقطه M ضلع AB از مثلث ABC را به نسبت $\frac{BM}{AM}=\frac{n}{m}$ تقسیم کند آنگاه ثابت کنید داریم : $CM=\frac{mb+na}{m+n}$

(برای سهولت کار این مسئله را در حالتی حل کنید که $a > n$ و $b > m$ باشد)

اثبات :

برای اثبات نکته فوق به صورت زیر عمل می کنیم :

$$\frac{BM}{AM} = \frac{n}{m} \Rightarrow m(BM) = n(AM) \Rightarrow nAM + mBM = 0$$

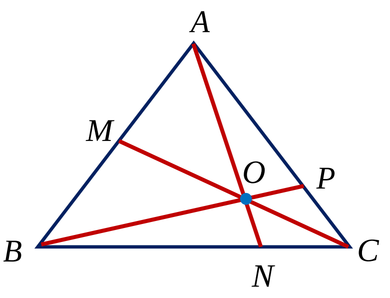
از طرفی طبق قضیه نا مساوی مثلثی می دانیم در هر مثلث طول هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر بوده و از قدر مطلق تفاضل دو ضلع دیگر ، بزرگتر است بنابراین می توان نوشت :

$$\begin{array}{lll} CM \le CB + BM \xrightarrow{\times m} mCM \le mCB + mBM \xrightarrow{CB=a} mCM \le mb + mBM \\ CM \le CA + AM \xrightarrow{\times n} nCM \le nCA + nAM \xrightarrow{CA=b} nCM \le na + nAM \end{array} \xrightarrow{\text{جمع}}$$

$$nCM + mCM \le na + mb + \underbrace{nAM + mBM}_{\text{صفر}} \Rightarrow CM(n+m) \le na + mb \Rightarrow CM \le \frac{na + mb}{n + m}$$

$$\begin{array}{lll} CM \ge CB - BM \xrightarrow{\times m} mCM \ge mCB - mBM \xrightarrow{CB=a} mCM \ge mb - mBM \\ CM \ge CA - AM \xrightarrow{\times n} nCM \ge nCA - nAM \xrightarrow{CA=b} nCM \ge na - nAM \end{array} \xrightarrow{\text{جمع}}$$

$$nCM + mCM \ge na + mb - \underbrace{nAM + mBM}_{\text{صفر}} \Rightarrow CM(n+m) \ge na + mb \Rightarrow CM \ge \frac{na + mb}{n + m}$$



قضیه هرون : در هر مثلث با طول اضلاع a و b و c اگر $p = \frac{a+b+c}{2}$

آنگاه مساحت مثلث برابر است با : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

قضیه سوا : در مثلث ABC اگر از سه رأس آن سه پاره به گونه ای رسم کنیم همرس باشند داریم : $\frac{AM}{MB} \times \frac{BN}{NC} \times \frac{CP}{PA} = 1$

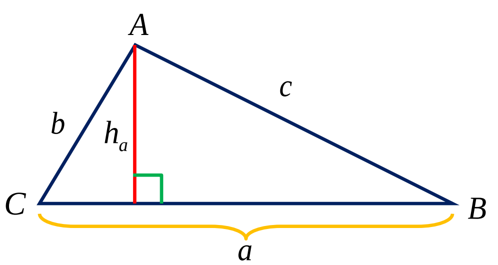
قضیه ژرگون : برای سه خط همرس در شکل مقابل داریم :

$$\frac{OA}{AN} + \frac{OB}{BP} + \frac{OC}{CM} = 2 \quad \text{و} \quad \frac{ON}{AN} + \frac{OP}{BP} + \frac{OM}{CM} = 1$$

هرون : در هر مثلث با طول اضلاع a و b و c اگر $p = \frac{a+b+c}{2}$

آنگاه مساحت مثلث برابر است با : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

اثبات قضیه هرون :



مثلث ABC را در نظر بگیرید . با توجه به شکل داریم :

$$\sin c = \frac{h_a}{b} \Rightarrow h_a = b \times \sin c$$

بنا براین مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}a\times h_a \xrightarrow{h_a=b\times \sin c} S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}a\times b\times \sin c$$

حال از طرفی دیگر بنا بر قضیه کسینوسها در مثلث ABC داریم:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\times \cos c \Rightarrow \cos c=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

بنابراین داریم :

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}a\times b\times \sin c \Rightarrow S^2_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{4}a^2b^2\sin^2 c=\frac{1}{4}a^2b^2\left(1-\cos^2 c\right)=\frac{1}{4}a^2b^2\left(1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{4}a^2b^2\left(1-\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{4a^2b^2}\right)=\frac{1}{4}a^2b^2\left(\frac{4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{4a^2b^2}\right)=\frac{1}{16}\left(4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2\right)$$

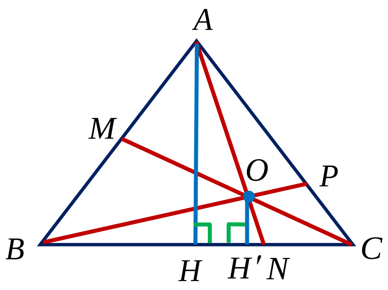
$$\frac{1}{16}\left(2ab-a^2-b^2+c^2\right)\left(2ab+a^2+b^2-c^2\right)=\frac{1}{16}\left[c^2-(a-b)^2\right]\left[(a+b)^2-c^2\right]=$$

$$=\frac{1}{16}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)=\frac{1}{2}(a+b+c-2a)\frac{1}{2}(a+b+c-2b)\frac{1}{2}(a+b+c-2c)\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)\left(\frac{a+b+c}{2}\right)=(p-a)(p-b)(p-c)(p)$$

قضیه سوا : در مثلث ABC اگر از سه رأس آن سه پاره به گونه ای رسم کنیم همرس باشند داریم :

$$\frac{AM}{MB}\times\frac{BN}{NC}\times\frac{CP}{PA}=1$$



اثبات قضیه سوا :

می دانیم اگر دو مثلث دارای ارتفاع برابر باشند ، نسبت مساحت های آنها برابر با نسبت قاعده های نظیرشان است بنا براین می توان نوشت:

$$\frac{BN}{NC}=\frac{\frac{1}{2}AH\times BN}{\frac{1}{2}AH\times NC}=\frac{S_{\overset{\Delta}{ABN}}}{S_{\overset{\Delta}{ANC}}}=$$

$$\frac{BN}{NC}=\frac{\frac{1}{2}AH\times BN}{\frac{1}{2}AH\times NC}=\frac{S_{\overset{\Delta}{ABN}}}{S_{\overset{\Delta}{ANC}}}$$

$$\frac{BN}{NC}=\frac{\frac{1}{2}OH'\times BN}{\frac{1}{2}OH'\times NC}=\frac{S_{\overset{\Delta}{OBN}}}{S_{\overset{\Delta}{ONC}}}$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{NC}=\frac{S_{\overset{\Delta}{ABN}}-S_{\overset{\Delta}{OBN}}}{S_{\overset{\Delta}{ANC}}-S_{\overset{\Delta}{ONC}}}=\frac{S_{\overset{\Delta}{AOB}}}{S_{\overset{\Delta}{AOC}}}$$

به همین ترتیب می توان ثابت کرد :

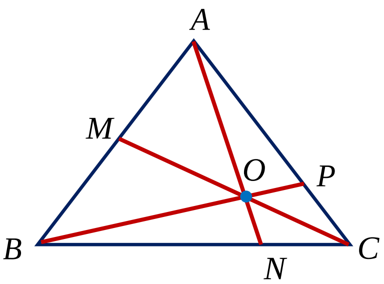
$$\frac{CP}{AP}=\frac{S_{\overset{\Delta}{BOC}}}{S_{\overset{\Delta}{AOB}}} \quad \text{و} \quad \frac{AM}{MB}=\frac{S_{\overset{\Delta}{AOC}}}{S_{\overset{\Delta}{BOC}}}$$

بنابراین داریم :

$$\frac{AM}{MB}\times\frac{BN}{NC}\times\frac{CP}{AP}=\frac{S_{\overset{\triangle}{AOC}}}{S_{\overset{\triangle}{BOC}}}\times\frac{S_{\overset{\triangle}{AOB}}}{S_{\overset{\triangle}{AOC}}}\times\frac{S_{\overset{\triangle}{BOC}}}{S_{\overset{\triangle}{AOB}}}=1$$

قضیه ژرگون : برای سه خط همرس در شکل مقابل داریم :

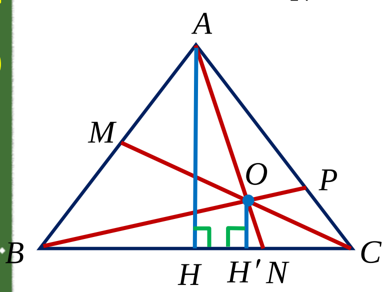
الف) $\frac{ON}{AN}+\frac{OP}{BP}+\frac{OM}{CM}=1$ و ب) $\frac{OA}{AN}+\frac{OB}{BP}+\frac{OC}{CM}=2$



اثبات قضیه ژرگون : الف) $\frac{ON}{AN}+\frac{OP}{BP}+\frac{OM}{CM}=1$

از A و O بر BC عمود می کنیم در این صورت می توان گفت :

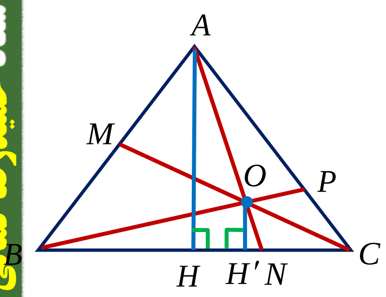
$$\left.\begin{array}{l}AH\perp BC\\ OH'\perp BC\end{array}\right\}\Rightarrow AH\parallel OH'\Rightarrow \overset{\triangle}{AHN}\approx\overset{\triangle}{OH'N}\Rightarrow\frac{ON}{AN}=\frac{OH'}{AH}$$



$$\frac{ON}{AN}=\frac{OH'}{AH}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\,OH'\times BC}{\cancel{\frac{1}{2}}\,AH\times BC}=\frac{S_{\overset{\triangle}{OBC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}$$

به همین ترتیب ثابت می شود :

$$\frac{OP}{BP}=\frac{S_{\overset{\triangle}{OAC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}\text{ و }\frac{OM}{CM}=\frac{S_{\overset{\triangle}{OAB}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}$$



درنتیجه می توان نوشت :

$$\frac{ON}{AN}+\frac{OP}{BP}+\frac{OM}{CM}=\frac{S_{\overset{\triangle}{OBC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}+\frac{S_{\overset{\triangle}{OAC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}+\frac{S_{\overset{\triangle}{OAB}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=1$$

اثبات قضیه ژرگون : ب) $\frac{OA}{AN}+\frac{OB}{BP}+\frac{OC}{CM}=2$

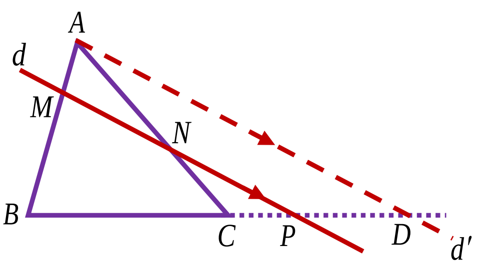
با توجه به قسمت (الف) می توان نوشت :

$$\frac{OA}{AN}+\frac{OB}{BP}+\frac{OC}{CM}=\frac{AN-ON}{AN}+\frac{BP-OP}{BP}+\frac{CM-OM}{CM}$$

$$=1-\frac{ON}{AN}+1-\frac{OP}{BP}+1-\frac{OM}{CM}=3-\underbrace{\left(\frac{ON}{AN}+\frac{OP}{BP}+\frac{OM}{CM}\right)}_{1}=2$$

قضیه منلائوس : اگر خط d اضلاع AB و AC و BC از مثلث ABC را به ترتیب در نقاط M و N و P قطع کند ، ثابت کنید : $\frac{AM}{MB}\times\frac{BP}{CP}\times\frac{CN}{NA}=1$

اثبات :خط d یا دو ضلع و امتداد ضلع سوم ر ا قطع می کند یا امتداد هر یک از اضلاع مثلث را قطع می کند .



در هر دو حالت از رأس A خط d' را موازی خط d رسم می کنیم تا خط BC یا امتداد آن را در نقطه D قطع کند در این صورت می توان نوشت :

در شکل اول داریم :

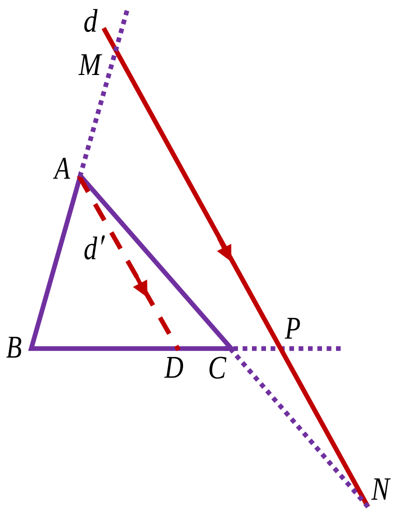
$$\overset{\Delta}{ABD}: \quad MP \parallel AD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BM}{MA}=\frac{BP}{PD} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{AM}{MB}=\frac{PD}{PB}$$

$$\overset{\Delta}{CAD}: \quad NP \parallel AD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CN}{NA}=\frac{CP}{PD}$$

بنا براین می توان نوشت :

$$\frac{AM}{MB}\times\frac{BP}{PC}\times\frac{CN}{NA}=\frac{PD}{PB}\times\frac{PB}{PC}\times\frac{CP}{PD}=1$$

در شکل دوم نیز داریم :



$$\overset{\Delta}{MBP}: \quad AD \parallel MP \xrightarrow{\text{نتیجه تالس}} \frac{AM}{BM}=\frac{DP}{BP}$$

$$\left.\begin{array}{l} AD \parallel MN \quad , \quad \text{مورب } AN \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{N}_1 \\ \hat{C}_1=\hat{C}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ADC} \approx \overset{\Delta}{CPN}$$

$$\Rightarrow \frac{CP}{CD}=\frac{CN}{AC} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}} \frac{CP}{CP+CD}=\frac{CN}{CN+AC}$$

$$\Rightarrow \frac{CP}{DP}=\frac{CN}{AN}$$

بنا براین می توان نوشت :

$$\frac{AM}{MB}\times\frac{BP}{PC}\times\frac{CN}{NA}=\frac{DP}{BP}\times\frac{BP}{PC}\times\frac{CP}{PD}=1$$

سوالات تشریحی فصل ۲

۱- از تناسب $\frac{۳}{۴}=\frac{۵-۲x}{x}$ مقدار x را به دست آورید.

$$\frac{5-2x}{x}=\frac{3}{4}$$

$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4(5-2x)=3x \to 20-8x=3x$

$20=8x+3x \to 20=11x \Rightarrow \boxed{x=\frac{20}{11}}$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

۲- مقدار x را از تساوی مقابل به دست آورید. $\frac{۲x-۱}{x^۲+x+۲}=\frac{۳}{۲x+۱}$

$$\frac{3}{2x+1}=\frac{2x-1}{x^2+x+2} \Rightarrow 3x^2+3x+6=4x^2-1 \Rightarrow \boxed{x^2-3x-7=0}$$

$ax^2+bx+c=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$a=1,\ b=-3,\ c=-7 \to \Delta=9-4(1)(-7)=9+28=37$

$x_1,x_2=\frac{3\pm\sqrt{37}}{2}$

۳- مقدار y,x راز رابطه های $\frac{۲}{۳}=\frac{y}{۷}=\frac{۵x}{۲-x}$ به دست آورید.

$\frac{5x}{2-x}=\frac{2}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 15x=4-2x \to 17x=4 \to \boxed{x=\frac{4}{17}}$

$\frac{y}{7}=\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{y=\frac{7\times 2}{3}=\frac{14}{3}}$

٤- اگر $\frac{۴}{۳}=\frac{x}{۲}$ و $\frac{۴}{۵}=\frac{۲y}{۳}$ باشدحاصل $\frac{۵y}{۶x}$ را به دست آورید .

$\frac{x}{2}=\frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{x=\frac{8}{3}}$

$\frac{\cancel{2}y}{3}=\frac{\cancel{4}^{2}}{5} \Rightarrow \frac{y}{3}=\frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{y=\frac{6}{5}}$

$\frac{5y}{6x}=\frac{\cancel{5}\times\frac{6}{\cancel{5}}}{\cancel{6}^{2}\times\frac{8}{\cancel{3}}}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

۵- از تناسب $y-۲=\frac{۲x+۵}{۳}=\frac{x-۴}{۵}$ مقادیر x و y رابه دست آورید.

$\frac{2x+5}{3}=\frac{x-4}{5} \Rightarrow 10x+25=3x-12$

$7x=-37 \to \boxed{x=-\frac{37}{7}}$

$y-2=\frac{x-4}{5} \Rightarrow y=\frac{x-4}{5}+\frac{2\times 5}{5}$

$y=\frac{x-4+10}{5}=\frac{x+6}{5}=\frac{-\frac{37}{7}+\frac{6\times 7}{7}}{5}$

$y=\frac{\frac{5}{7}}{5}=\frac{5}{5\times 7}=\frac{1}{7}$

۶ – b,a را از تناسب $\frac{a}{4}=\frac{25}{a}=\frac{1}{b}$ به دست آورید.

$$\frac{a}{4}=\frac{25}{a}\Rightarrow a^2=100\longrightarrow \boxed{a=\pm 10}$$

$$\frac{a}{4}=\frac{1}{b}\Rightarrow b=\frac{4}{a}\Rightarrow \begin{cases} b=\frac{4}{10}=\frac{2}{5} & a=10 \\ b=\frac{4}{-10}=-\frac{2}{5} & a=-10 \end{cases}$$

۷– $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$ باشد مقدار $\frac{x+1}{y+2}$ چقدراست.

روش اول :

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{x+1}{y+2}=\frac{1}{2}}$$

روش دوم

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{2x=y}$$

$$\frac{x+1}{y+2}=\frac{x+1}{2x+2}=\frac{\cancel{x+1}}{2(\cancel{x+1})}=\frac{1}{2}$$

۸ –اگر $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$ ثابت کنید : $\frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\dots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}$

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\dots=\frac{a_n}{b_n}=t\longrightarrow \begin{cases} a_1=b_1\times t \\ a_2=b_2\times t \\ a_3=b_3\times t \\ \vdots \\ a_n=b_n\times t \end{cases}$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\dots+b_n}=\frac{b_1t+b_2t+b_3t+\dots+b_nt}{b_1+b_2+b_3+\dots+b_n}$$

$$=\frac{t\,\cancel{(b_1+b_2+b_3+\dots+b_n)}}{\cancel{b_1+b_2+b_3+\dots+b_n}}=t=\frac{a_1}{b_1}$$

۹– ازرابطه های زیر y,x راپیابید.

الف) $\frac{x+y-1}{y}=\underbrace{\frac{2}{3}=\frac{2x-1}{x+1}}$

$$\frac{2}{3}=\frac{2x-1}{x+1}\Rightarrow 2x+2=6x-3$$

$$\boxed{-4x=-5\Rightarrow x=\frac{-5}{-4}=\frac{5}{4}}$$

$$\frac{x+y-1}{y}=\frac{2}{3}\Rightarrow 3x+3y-3=2y$$

$$\boxed{y=3-3x=3-3\times\frac{5}{4}=\frac{12}{4}-\frac{15}{4}=-\frac{3}{4}}$$

ب) $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{a+b+c}{x}=\frac{y}{3}$

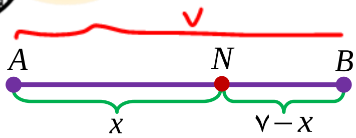
$$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}\Rightarrow \frac{a+b+c}{2+3+4}=\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$$

$$\frac{a+b+c}{9}=\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{a+b+c}{x}$$

$$x=9$$

$$\frac{b}{3}=\frac{y}{3}\Rightarrow y=b$$

۱۰ – پاره خط AB به طول ۷ سانتی متر را در اختیار داریم . نقطه N را بر روی این پاره خط طوری انتخاب می کنیم که $\frac{AN}{NB}=\frac{۳}{۵}$ طول های AN و NB را به دست آورید .



روش اول

$$\frac{AN}{NB}=\frac{3}{5}\Rightarrow\begin{cases}AN=3k\\NB=5k\end{cases}$$

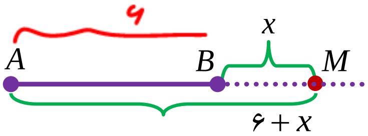
$$\underbrace{AN+NB}_{8k}=AB \quad 8k=7\rightarrow \boxed{k=\frac{7}{8}}$$

$$AN=3k=\frac{21}{8}$$
$$NB=5k=\frac{35}{8}$$

روش دوم

$$\frac{AN}{NB}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{x}{7-x}=\frac{3}{5}$$
$$5x=21-3x$$
$$8x=21\rightarrow x=\frac{21}{8}$$
$$\boxed{AN=\frac{21}{8}}$$
$$NB=7-x=7-\frac{21}{8}=\frac{35}{8}$$
$$\boxed{NB=\frac{35}{8}}$$

۱۱ – پاره خط AB به طول ٦ سانتی متر را در اختیار داریم . نقطه M را بر روی امتداد این پاره خط طوری انتخاب می کنیم که $\frac{AM}{MB}=\frac{۷}{۵}$ طول های AM و MB را به دست آورید .



$$\frac{AM}{MB}=\frac{7}{5}$$

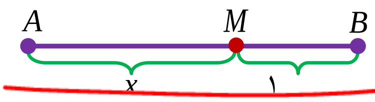
$$\frac{AM}{MB}=\frac{7}{5}$$
$$\frac{6+x}{x}=\frac{7}{5}$$
$$30+5x=7x$$
$$30=2x$$
$$\boxed{x=15}$$

$$BM=15$$
$$AM=6+x=21$$

۱ – پاره خط AB را در اختیار داریم ، نقطه M را روی این پاره طوری در نظر می گیریم که این پاره خط را به دو بخش نا مساوی تقسیم کند اگر نسبت قسمت بزرگتر به قسمت کوچکتر برابر نسبت کل به قست بزرگتر باشد و طول بخش کوچکتر را یک واحد در نظر بگیریم ، طول قسمت بزرگتر را به دست آورید .

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AB}{AM}$$

$$\frac{x}{1}=\frac{x+1}{x}\Rightarrow x^2=x+1\rightarrow \boxed{x^2-x-1=0}$$



$$ax^2+bx+c=0$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

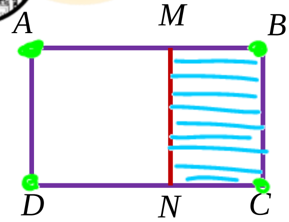
$$\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=-1\end{cases}\rightarrow \Delta=1-4(1)(-1)=5$$
$$x_1,x_2=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

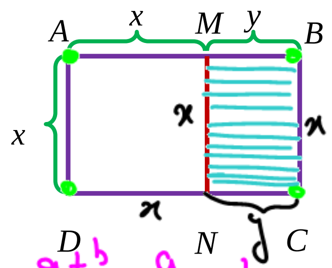
$$\boxed{x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

پایه و رشته دهم ریاضی

جناب استاد حمیدرضا کمالی خوش خلق

۱۳ – در مستطیل $ABCD$ پاره خط MN را رسم کرده ایم تا مربع $AMND$ و مستطیل $MBCN$ به وجود آید . اگر مستطیل [redacted] MBCN با مستطیل $ABCD$ متشابه باشد یعنی نسبت طول به عرض یکی با نسبت طول به عرض دیگری برابر باشد ، این نسبت را به دست آورید .(نسبت طلایی)





$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c+d} + \frac{b}{c+d}$

مستطیل $ABCD \sim$ مستطیل $MBCN \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{MN}{MB}$

طول مستطیل ABCD — عرض

طول مستطیل MBCN — عرض

$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \xrightarrow{\frac{x}{y}=t} 1 + \frac{1}{t} = t \xrightarrow{\times t}$

$\frac{y}{x} = \frac{1}{t}$

$t+1=t^2 \to t^2-t-1=0 \qquad a=1 \qquad b=-1 \qquad c=-1$

$\Delta = b^2-4ac = 1-4(1)(-1)=5$

$t_1,t_2 = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{t>0} t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

۱۴– میانگین هندسی بین b,a را تعریف کرده و سپس میانگین هندسی بین اعداد ۲۵و۴رابه دست آورید.

اگر عدد x میانگین هندسی دو عدد a و b باشد داریم:

$\frac{x}{a} = \frac{b}{x} \Rightarrow x^2 = ab \Rightarrow x = \pm\sqrt{ab}$

اگر x، میانگین هندسی بین دو عدد ۴ و ۲۵ باشد داریم:

$\frac{x}{4} = \frac{25}{x} \Rightarrow x^2 = 4\times 25 \to x = \pm\sqrt{4\times 25} = \pm\sqrt{100} = \pm 10$

۱۵– واسطه هندسی بین $2x^2$ و x^3 چه عبارتی است؟

۱۶- میانگین هندسی بین هریک ازجفت عددهای زیرراپیدا کنید.

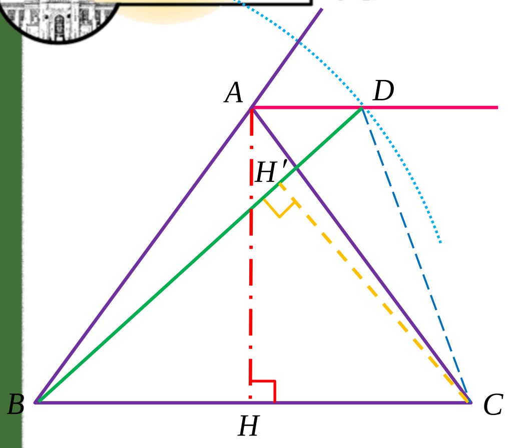
الف)٤و۹ ب) $۲\sqrt{۲},۷\sqrt{۲}$

۱۷- الف)میانگین هندسی دوعدد $\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۱۲}$ را بدست آورید.

ب)مقدار xوy را ازتناسب $\frac{۶}{y}=\frac{x}{۴}=\frac{۳}{۲}$به دست آورید.

ج)جاهای خالی را پر کنید. $۱)\ \frac{a}{b}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=.........$

$۲)\ \frac{a}{۳}=\frac{b}{۴}=\frac{c}{۵}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{a+b+c}{.........}=.........$



۱۸- در مثلث ABC داریم: $AB=AC=17$ و $BC=16$. دایره ای به مرکز B و به شعاع ۲۵ واحد، خطی که از رأس A موازی BC رسم شود را در D قطع می کند. فاصلهٔ C از BD را حساب کنید؟(ریاضی خارج ۹۸)

حل:

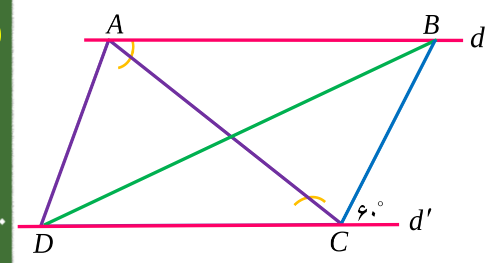
در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع و میانه وارد بر قاعده بر هم منطبق اند پس داریم:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 17^2 - 8^2 = 225 \Rightarrow AH = 15$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 16 \times 15 = 120$$

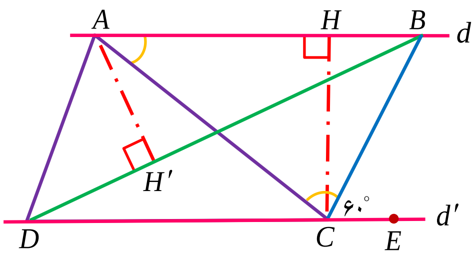
دو مثلث ABC و DBC در قاعده BC مشترک بوده و رأس هر دو بر روی خط AD که موازی BC است قرار دارد، بنابراین مساحت این دو مثلث با هم برابر است و داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{DBC}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} = 120 \Rightarrow \frac{1}{2} \times CH \times BD = 120 \Rightarrow \frac{1}{2} \times CH \times 25 = 120 \Rightarrow CH = 9/6$$



۱۹- در شکل زیر خط های d و d' موازی هستند اگر $B\hat{C}A = B\hat{A}C$ و $BC = \frac{1}{2}$ و $DB = 2AB$ باشد، آنگاه ارتفاع وارد بر ضلع DB در مثلث ABD چند سانتی متر است؟

حل:



$d \parallel d'$, مورب $BC \Rightarrow A\hat{B}C = B\hat{C}E = 60^\circ$

در مثلث ABC اولاً $B\hat{C}A = B\hat{A}C$ و ثانیاً $A\hat{B}C = 60^\circ$ بنابراین مثلث ABC متساوی الاضلاع است.(مثلث متساوی الساقینی که یک زاویه 60° دارد، متساوی الاضلاع است)

از طرفی می دانیم در مثلث متساوی الاضلاع، ارتفاع وارد بر هر ضلع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر آن ضلع است. یعنی داریم:

$$CH = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

دو مثلث ABC و ABD دارای مساحت برابر هستند قاعده AB در هر دو مشترک بوده و ارتفاع وارد بر این قاعده در هر دو مثلث برابر فاصله بین دو خط موازی d و d' است و این ارتفاع برابر $CH = \frac{\sqrt{3}}{4}$ است. بنابراین می توان نوشت:

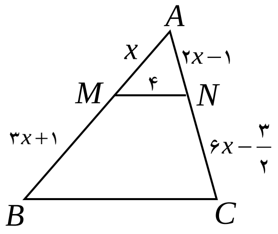
پایه و رشته دهم ریاضی

جناب استاد حمیدرضا کمالی خوش خلق

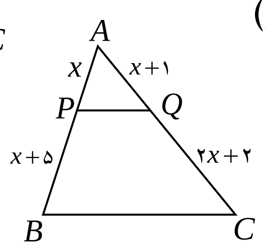
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{ABD}} \Rightarrow \frac{1}{2}AB \times CH = \frac{1}{2}AH' \times BD \xrightarrow{BD=2AB} AB \times \frac{\sqrt{3}}{4} = AH' \times 2AB$$

$$\Rightarrow AH' = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

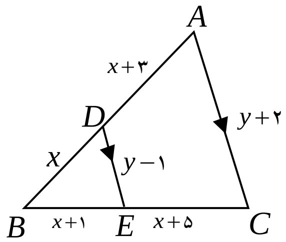
۲۰- در شکل زیر MN با BC موازی است به کمک قضیه ی تالس طول x را حساب کنید .سپس محیط مثلث ABC رابیابید.



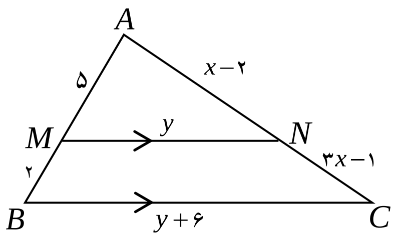
۲۱- در شکل زیر PQ موازی BC است.مقدار x رامحاسبه کنید.(باراه حل)



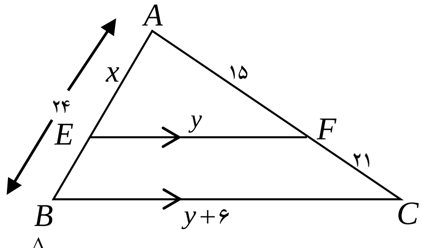
۲۲- باتوجه به شکل مقابل مقادیر y,x رابیابید.



۲۳- مقدار y,x رابه دست آورید.



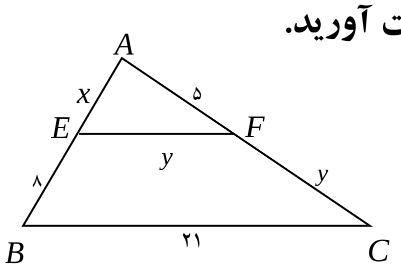
۲۴- درشکل زیر x راپیداکنید.



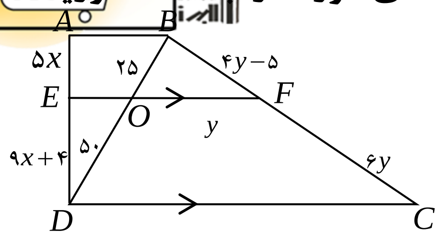
حل :

$$\overset{\Delta}{ABC} \quad : \quad EF \parallel BC \xrightarrow{\text{جز به کل}} \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{x}{24} = \frac{15}{36} = \frac{y}{y+6} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = \frac{30}{7} \end{cases}$$

۲۵- درمثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ پاره خط EF باموازی است .مقادیر y,x رابه دست آورید.



۲۶- باتوجه به مقدارهای داده شده درذوزنقه $ABCD$ اندازه y,x وساق های ذوزنقه را به دست آورید.

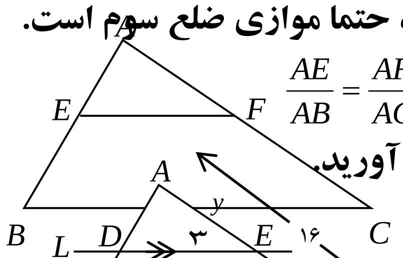


۲۷- ثابت کنید اگر خطی به موازات یک ضلع مثلثی رسم شود روی دوضلع دیگر پاره خط های متناسب بوجود می آید.

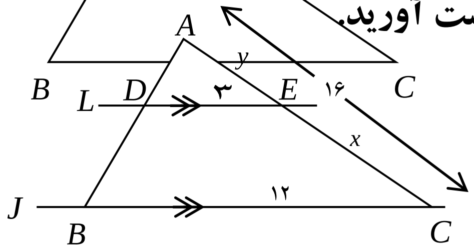
۲۸- بااستفاده ازقضیه تالس ثابت کنیدخطی که وسط های دو ضلع یک مثلث را به هم وصل می کند باضلع سوم موازی است واز نظراندازه نصف ضلع سوم است.

۲۹- ثابت کنید هرگاه خطی دوضلع مثلث را به یک نسبت قطع کند حتما موازی ضلع سوم است.

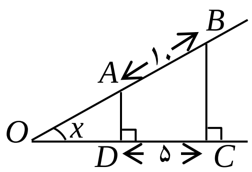
۳۰- درمثلث ABC پاره خط EF موازی BC است ثابت کنید: $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$



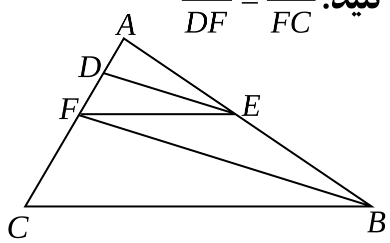
۳۱- درشکل مقابل خط L موازی با خط J است .طول y,x رابه دست آورید.



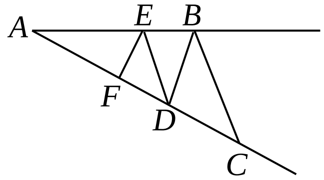
۳۲- درشکل مقابل اندازه ی زاویه x را محاسبه کنید.



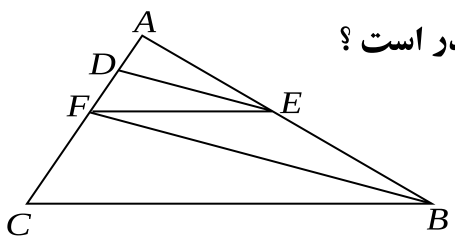
۳۳- درمثلث ABC درشکل زیر DE با FB موازی است و EF با BC. ثابت کنید: $\frac{AD}{DF}=\frac{AF}{FC}$



۳۴- در شکل مقابل ثابت کنید: $\frac{AF}{AD}=\frac{AD}{AC}$



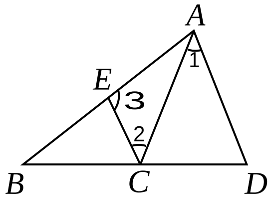
۳۵- در شکل داده شده ب $\begin{cases}AD=۲\\FD=۴\end{cases}$ بطوریکه $\begin{cases}DE\|FB\\EF\|BC\end{cases}$ طول FC چقدر است ؟



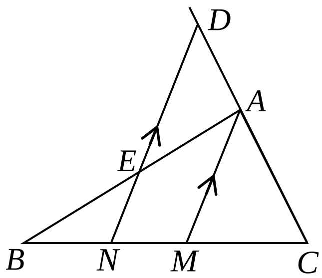
۳۶- بر ضلع $x\hat{o}y$ دو نقطه A و B رااختیار کرده وازاین نقاط دو خط موازی هم رسم می کنیم تا ضلع oy را به ترتیب درنقاط C و D قطع کنند وازنقطه ی D خطی موازی BC رسم می کنیم تا ضلع ox رادر نقطه E قطع کند ثابت کنید: $OB^۲ = OA.OE$

۳۷- اگر درمثلث ABC ، $DE \| BC , \frac{AD}{DB} = \frac{۲}{۷}$ و $DE = x + ۱ ,$ و $BC = ۳x + ۵$ باشد اندازه ی ضلع BC را بیابید.

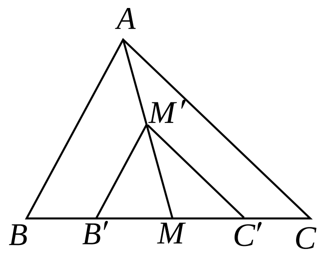
۳۸- در شکل $\hat{۳} = \hat{۲} = \hat{۱}$ می باشد اگر $AC = ۶ , AB = ۱۵$ باشد نسبت $\frac{BD}{DC}$ چقدر است؟



۳۹- در مثلث ABC ، AM میانه وارد بر ضلع BC می باشد از نقطه ی دلخواه N روی ضلع BC خطی موازی میانه AM رسم می کنیم تادوضلع دیگر را در نقاط E و D قطع کند با دوبار استفاده از قضیه تالس ثابت کنید: $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$

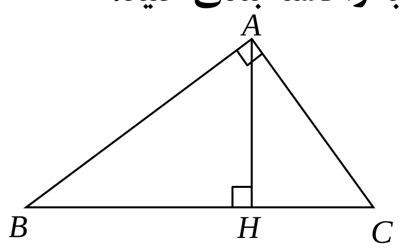


۴۰- در شکل روبه رو AM میانه وارد بر ضلع BC است از نقطه اختیاری M' روی AM دو خط به موازات AB و AC رسم کرده ایم ثابت کنید که $MB' = MC'$.



۴۱- دو مثلث متشابه را تعریف کنید وچرا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابه هستند.

۴۲- در شکل مقابل چند مثلث متشابه وجود دارد ؟مثلث های متشابه را دسته بندی کنید؟



۴۳- ابتدا حالات تشابه دو مثلث را نام ببرید ، سپس به دلخواه یک حالت را اثبات کنید؟

۴۴- ثابت کنید اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند آن دو مثلث متشابه اند .

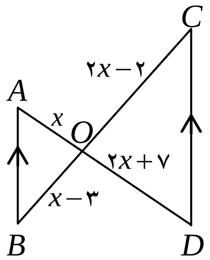
پایه و رشته دهم ریاضی

جناب استاد حمیدرضا کمالی خوش خلق

۴۵- ثابت کنید هر گاه دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب وزاویه ی بین آنها برابر باشد آن دو مثلث متشابهند.

۴۶- ثابت کنید اگر سه ضلع از مثلث با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند ان دو مثلث متشابهند.

۴۷- در شکل مقابل مطلوب است :



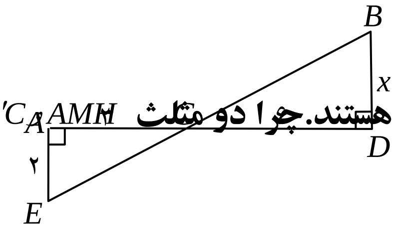
الف)مقدار x

ب)از کدام قضیه استفاده کرده اید؟

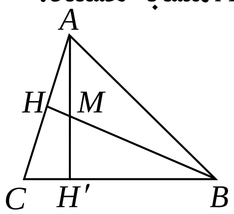
ج)آیا دو مثلث متشابهند؟

د)نسبت تشابه دو مثلث ؟

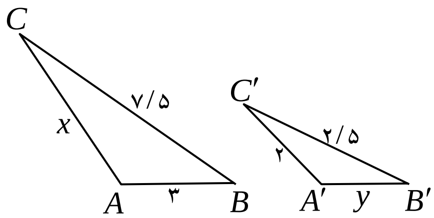
۴۸- در شکل مقابل مقدار x را به دست آورید؟



۴۹- در شکل زیر AH' و BH ارتفاع های مثلث ABC هستند.چرا دو مثلث AMH و $AH'C$ متشابه هستند؟

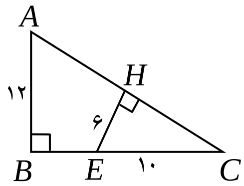


۵۰- دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه اند مقدار x و y را بدست آورید؟



۵۱- در شکل مقابل :الف)ثابت کنید $A\overset{\triangle}{B}C \sim C\overset{\triangle}{E}H$

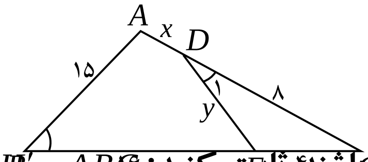
ب)اندازه BC و CH را به دست آورید؟



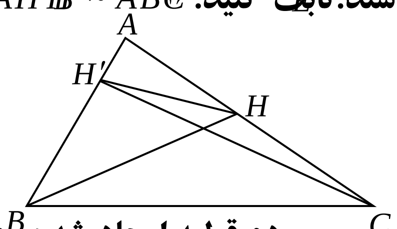
۵۲- در شکل مقابل:

اولا:ثابت کنید $A\overset{\triangle}{B}C$ و $D\overset{\triangle}{E}C$ متشابهند.

ثانیا: x و y را بیابید.

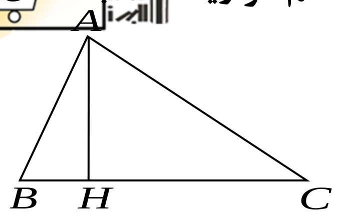


۵۳- در مثلث ABC, BH و CH' ارتفاع های نظیر دو ضلع AC و AB می باشند.ثابت کنید: $A\overset{\triangle}{H}H' \sim ABC$



۵۴- نشان دهید درهر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بروتر میانگین هندسی بین دو قطعه ایجاد شده روی وتر است.

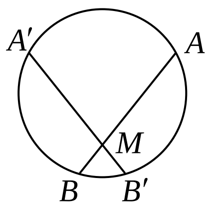
۵۵- به کمک تشابه مثلث ها ثابت کنید اگر AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه ABC باشد آن گاه: $AB^{۲} = BH \times BC$



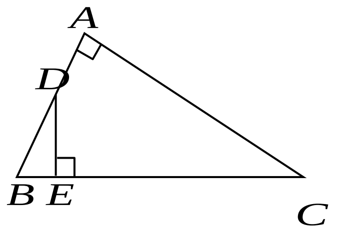
۵۶- ثابت کنید هر گاه دو مثلث متشابه باشند نسبت نیمسازهای متناظر برابراست بانسبت اضلاع.

۵۷- اگر دو مثلث متشابه باشند ثابت کنید نسبت میانه های نظیر در آن ها برابراست با نسبت تشابه دومثلث .

۵۸- در شکل مقابل AB و $A'B'$ دو وتر ازدایره هستند که در نقطه M یکدیگررا قطع کرده اند ثابت کنید: $MA \times MB = MA' \times MB'$



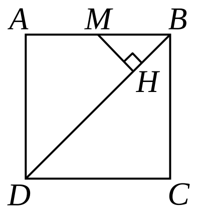
۵۹- در مثلث قائم الزاویه ABC نقطه D وسط ضلع AB است و DE بر BC عمود است ثابت کنید: $EC^2 - EB^2 = AC^2$



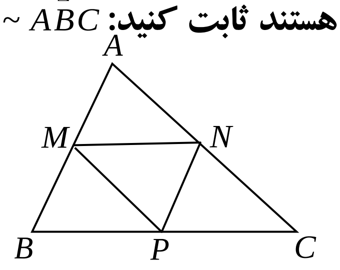
۶۰- در مربع $ABCD$ از نقطه ی M وسط ضلع AB عمود MH را بر قطر BD فرود می آوریم.ثابت کنید:

الف) $M\overset{\Delta}{H}B \sim B\overset{\Delta}{C}D$

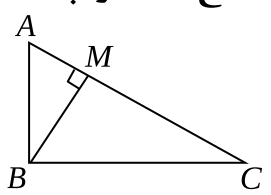
ب) $MH = \frac{۱}{۴} BD$



۶۱- در شکل روبه رو نقاط M و N و P به ترتیب نقاط وسط ضلع های AB و AC و BC هستند ثابت کنید: $M\overset{\Delta}{N}P \sim A\overset{\Delta}{B}C$



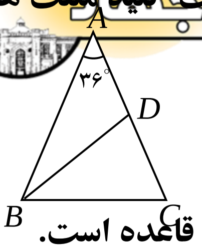
۶۲- در مثلث قائم الزاویه ABC ؛ارتفاع وارد بر وتر ٤می باشد .اگر $AM = 2$ ؛اندازه اضلاع مثلث را به دست آورید؟



پایه و رشته دهم ریاضی

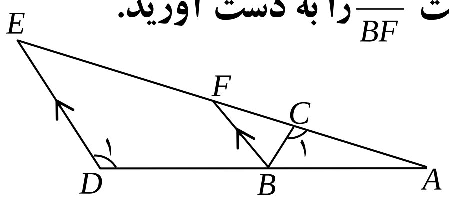
جناب استاد حمیدرضا کمالی خوش خلق

۶۳- در مثلث متساوی الساقین ABC زاویه راس ۳۶ درجه می باشد و BD نیمساز زاویه B است.ثابت کنید مثلث های ABC و BDC متشابهند.



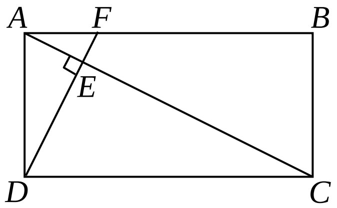
۶۴- ثابت کنید درذوزنقه قائم الزاویه ای که دو قطر برهم عمودند ارتفاع واسطه هندسی بین دو قاعده است.

۶۵- در شکل مقابل داریم: $\hat{D}_1=\hat{C}_1 , BD=AC=2 , AB=3 , DE \| FB$ نسبت $\frac{BC}{BF}$ را به دست آورید.

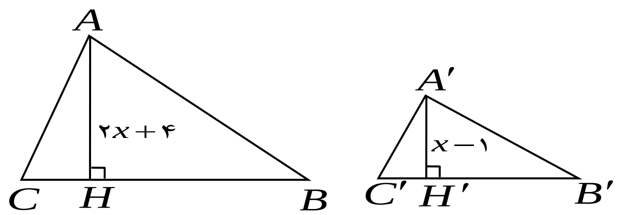


۶۶- در شکل مقابل $ABCD$ مستطیل است که درآن $AB=2BC$ است. ازراس D عمود DE رابرقطر AC وارد کرده امتداد می دهیم تاضلع AB رادرنقطه F قطع کند ثابت کنید:اولا: $DE=2AE$

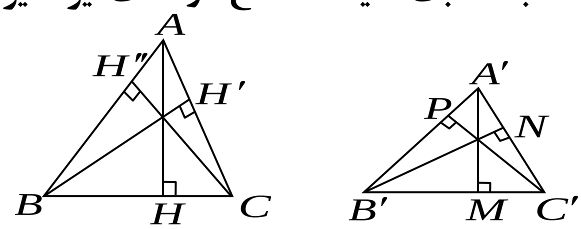
ثانیا: $DE=4EF$



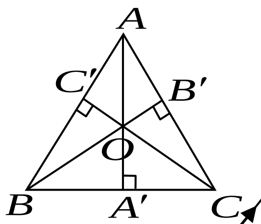
۶۷- پاره خط های AH و AH' دو ارتفاع متناظر از دو مثلث متشابه $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ می باشند که $\frac{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{4}{25}$ است مقدار x را بیابید.



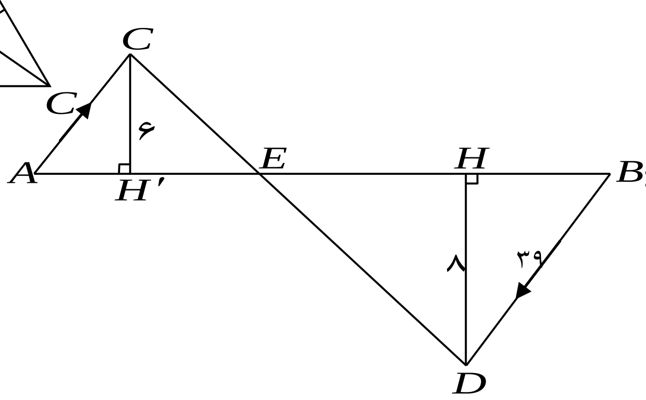
۶۸- در شکل مقابل سه ارتفاع دو مثلث نظیر به نظیر متناسبند .ثابت کنید سه ضلع دو مثلث نیز نظیر به نظیر متناسب می گردند.



۶۹- در شکل مقابل BB' و CC' و AA' سه ارتفاع مثلث ABC می باشند ثابت کنید: $OA.OA'=OB.OB'=OC.OC'$



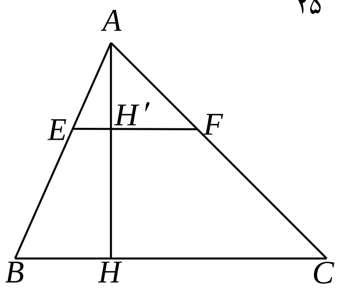
۷۰- با توجه به اندازه های روی شکل و $AB=35$:



الف)نسبت مساحت های مثلث های ACE و BDE را بیابید.

ب)مساحت مثلث BDE را به دست آورید .

۷۱- در شکل مقابل اگر $EF \| BC$ ونسبت مساحت های دو مثلث AEF و ABC برابر $\frac{۴}{۲۵}$ باشدو $AH' = ۶$ اندازه ارتفاع AH را بدست آورید.



۷۲- طول ضلع های مثلث ABC ، ۷و۹و۱۴سانتی متراست .مثلث PQR با ABC متشابه است و طول بزرگترین ضلع آن ۲۱ سانتی متر است .

الف)محیط مثلث PQR را به دست آورید.

ب)نسبت مساحت مثلث ABC به مثلث PQR چیست؟

۷۳- طول اضلاع مثلثی ٦و۸و۱۰سانتی متراست .اگر این مثلث با مثلثی به محیط ٤۸ سانتی متر متشابه باشد اندازه بزرگترین ضلع آن مثلث چند سانتی متراست ؟

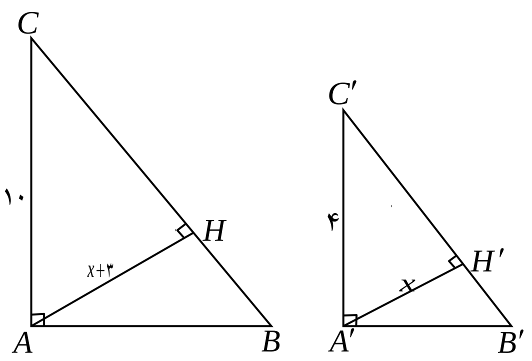
نسبت نیمسازهای نظیر درآنها چقدر است؟

۷٤- دو مثلث ABC و DEF متشابهند ،اگر طول اضلاع مثلث ABC ۷و۹و۱۱سانتی متر باشندومحیط مثلث DEF ٥٤سانتی متر باشد ابتدا طول اضلاع مثلث DEF را محاسبه نموده وسپس نسبت مساحت ها ی این دو مثلث را مشخص کنید.

۷٥-اگر $\hat{B} = \hat{B'}$ آن گاه:

الف)مقدار x را حساب کنید.

ب)نسبت محیط های دو مثلث را بدست آورید.



پایه و رشته دهم ریاضی

جناب استاد حمیدرضا کمالی خوش خلق

۷٦- دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند .اگر اضلاع مثلث ABC به ترتیب ٤و٥و٦باشد ونسبت ارتفاع مثلث ABC به ارتفاع $A'B'C'$ برابر $\frac{۳}{۲}$:

اولا:اضلاع مثلث $A'B'C'$ راییابید.ثانیا:نسبت مساحت های دو مثلث را بیابید.

۷۷- محیط های دو مثلث متشابه ۱٥و۲٥سانتی مترمی باشند .اگر مساحت مثلث کوچکتر برابر ۳۰ سانتی متر مربع باشد مساحت مثلث بزرگترا بیابید.

۷۸- دردو مثلث متشابه مساحت یکی ۹برابر دییگری است .اگر طول یک ضلع از مثلث کوچکتر ۷سسانتی مترباشدطول ضلع متناظر درمثلث بزرگترراییابیدمحیط مثلث بزرگتر چند برابر محیط مثلث کوچکتراست؟

۷۹- نسبت مساحت های دو مثلث متشابه $\frac{۲۵}{۱۴۴}$است. نسبت محیط هارا پیدا کنید.

۸۰- مساحت دو مثلث متشابه ٢٤و٢١٦سانتی متر مربع است .اگر محیط مثلث بزرگ تر ۷۲سانتی متر باشد محیط مثلث کوچکتر چند سانتی متر است؟

۸۱- مثلث ABC که $\hat{A}=۳۰^\circ$ و $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $S_\Delta=۲۰\sqrt{۳}$ با مثلث $A'B'C'$ که در آن $a'=\sqrt{۱۰}$ (ضلع بزرگتر)متشابه است .نسبت تشابه دو مثلث را بدست آورید؟

۸۲-در شکل زیر $AC=۸$, $AB=۶$, $\hat{A}=۹۰^\circ$ و $MNPQ$ مربع است ، مساحت مربع را به دست آورید .