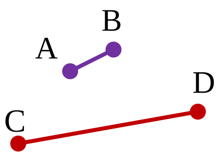
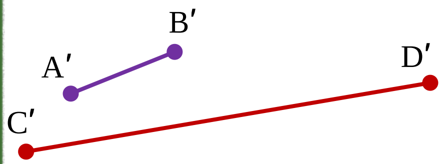
نسبت وتناسب در هندسه

خواص نسبت وتناسب :

طرفین وسطین	$b\neq ۰ \quad , \quad d\neq ۰$	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰} \Leftrightarrow ۳\times۱۰=۶\times۵$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$
معکوس کردن طرفین تناسب	a و b و c و $d\neq ۰$	$\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰} \Leftrightarrow \frac{۵}{۲}=\frac{۱۰}{۴}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$
تعویض جای طرفین با وسطین	a و b و c و $d\neq ۰$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{۹} \Leftrightarrow \frac{۹}{۳}=\frac{۶}{۲}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$
ترکیب نسبت در صورت	$b\neq ۰ \quad , \quad d\neq ۰$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶} \Leftrightarrow \frac{۵}{۳}=\frac{۱۰}{۶}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$
ترکیب نسبت در مخرج	$b\neq ۰ \quad , \quad d\neq ۰$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶} \Leftrightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$
تفضیل نسبت در صورت	$b\neq ۰ \quad , \quad d\neq ۰$	$\frac{۳۰}{۲۱}=\frac{۲۰}{۱۴} \Leftrightarrow \frac{۹}{۲۱}=\frac{۶}{۱۴}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$
تفضیل نسبت در مخرج	$b\neq ۰ \quad , \quad d\neq ۰$	$\frac{۳۰}{۲۱}=\frac{۲۰}{۱۴} \Leftrightarrow \frac{۳۰}{۹}=\frac{۲۰}{۶}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$
	$b\neq ۰ \quad , \quad d\neq ۰$	$\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۱۲} \Leftrightarrow \frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۱۲}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
	$b_۱$ و $b_۲$ و... و $b_n\neq ۰$	$\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=.....=\frac{a_n}{b_n} \Leftrightarrow \frac{a_۱+a_۲+....+a_n}{b_۱+b_۲+....+b_n}=\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=....=\frac{a_n}{b_n}$	
		$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲} \Leftrightarrow \frac{۲+۴+۶+۸}{۳+۶+۹+۱۲}=\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲}$	



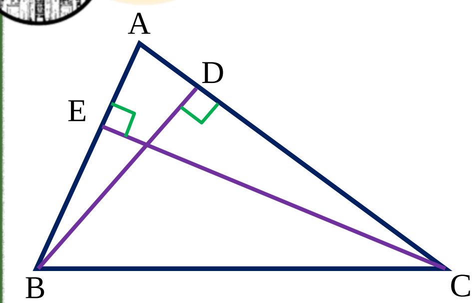
فرض کنیم پاره خط AB به طول ۲cm و پاره خط CD به طول ۵ CM باشنددر این صورت نسبت طول های این دو پاره خط برابر است با $\frac{AB}{CD}=\frac{۲}{۵}$.



حال برای پاره خط های $A'B'=۴$ و $C'D'=۱۰$ نیز داریم $\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$ و

در نتیجه می توان نوشت : $\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$

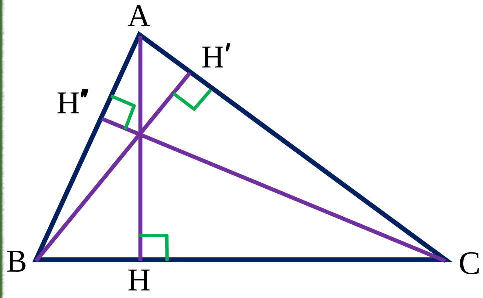
مثال : در مثلث ABC رابطه محاسبه مساحت را با استفاده از یک ضلع و ارتفاع وارد بر آن نوشته و سپس با استفاده از یک ضلع دیگر و ارتفاع نظیر آن نیز بنویسید و با استفاده از این دو رابطه یک تناسب هندسی به دست آورید.



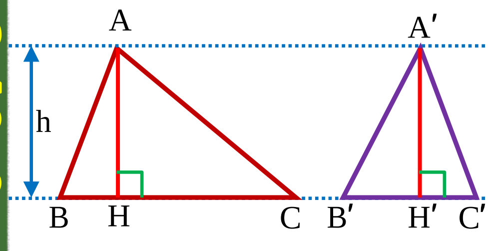
حل :

نکته : در هر مثلث نسبت اندازه های هر دو ضلع با نسبت ارتفاع وارد بر آنها رابطه معکوس دارد به عبارتی می توان نوشت :

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BH'}{CH''} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{BC}=\frac{AH}{CH''} \quad \text{و} \quad \frac{AC}{BC}=\frac{AH}{BH'}$$



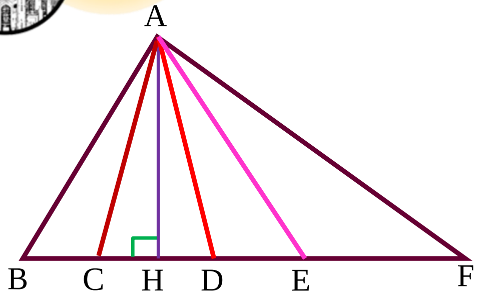
مثال : اگر اندازه های ارتفاع های دو مثلث برابر باشند ، ثابت کنید نسبت مساحت های این دو مثلث برابر نسبت اندازه های قاعده هایی است که این ارتفاع ها برآنها وارد می شود .



مثال : در شکل مقابل مثلث های ABC و ACD و ADE و AEF را که در رأس A مشترکند ، در نظر بگیرید .

الف)چرا ارتفاع رأس A همه این مثلث ها یکی است ؟

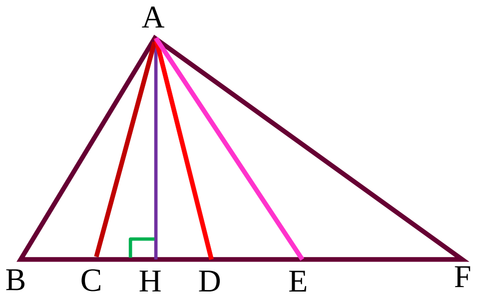
ب) نسبت $\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}$ و نسبت $\frac{S_{ACD}}{S_{AEF}}$ را به دست آورید .



نکته : اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده وقاعده های مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد ، نسبت مساحت های آنها برابر با نسبت اندازه های قاعده های آنهاست. مثلاً در شکل زیر داریم :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}=\frac{BC}{CD}$$

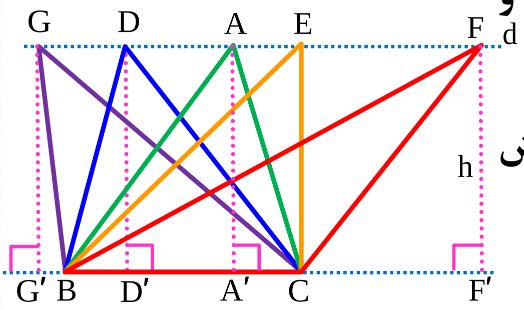
مثال : درشکل مقابل حاصل $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}$ و $\frac{S_{ACD}}{S_{ACE}}$ و $\frac{S_{ACE}}{S_{ABF}}$ را بنویسید.



مثال : در شکل مقابل خط d با BC موازی است .

الف)چرا ارتفاع های وارد بر قاعده BC در مثلث های GBC و DBC و ABC و EBC و FBC همگی با هم برا براست ؟

ب) اگر طول همه این ارتفاع ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم ، مساحت همه این مثلث ها چقدر است ؟



تعریف واسطه (میانگین) هندسی : اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد ، یعنی داشته باشیم : $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ با طرفین وسطین کردن تناسب نتیجه می شود : $b^2 = ac$ در این صورت b را واسطه هندسی a و c می نامیم .مثلاًگر دو پاره خط به طول های ٤ و ٩ واحد داشته باشیم ، پاره خطی که ٦ واحد طول دارد واسطه هندسی بین آنهاست زیرا داریم : $۶^۲ = ۴ \times ۹$

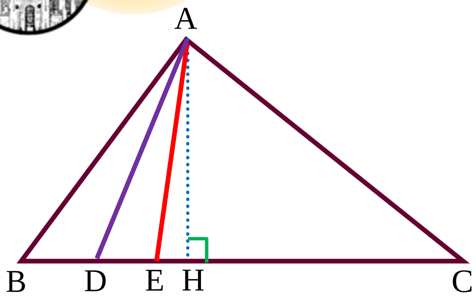
حل تمرین های صفحه ۳۳ کتاب درسی فصل ۲

۱ – اگر $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۵}=\frac{۳}{۵}$ حاصل $x+y+z$ و $x^۲+y^۲+z$ را به دست آورید .

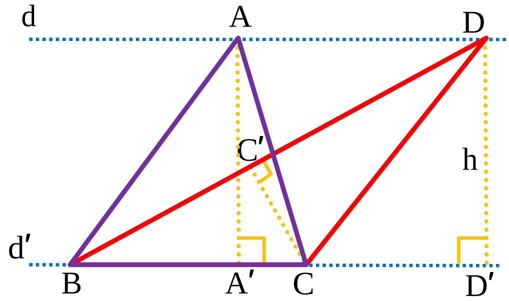
۲ – طول پاره خط L را به دست آورید که واسطه هندسی بین دو پاره خط به طول های ۸ و ۱۰ سانتی متر باشد .

۳ – طول اضلاع مثلثی ٤ و٦ و ۸ سانتی متر هستند و بلند ترین ارتفاع آن ۱۰ سانتی متر است . طول دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید .

٤ – در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE است و دو برابر مساحت مثلث ABD است . نسبت های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{CE}{BE}$ را به دست آورید .

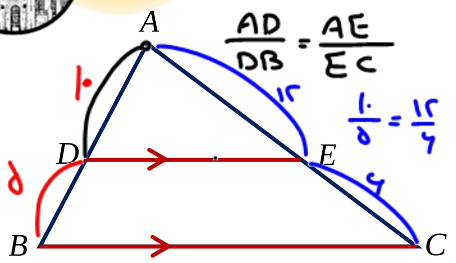


٥ – در شکل مقابل $d \| d'$ و مساحت مثلث ABC ، $8cm^2$ است . اگر $BD = 6cm$ باشد ، فاصله نقطه C از BD را به دست آورید .



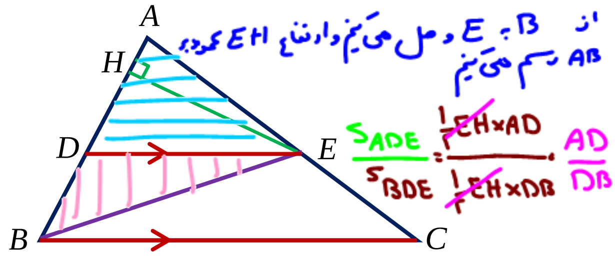
قضیه تالس

قضیه تالس : هرگاه در یک مثلث ، خط راستی موازی یکی از اضلاع ، دوضلع دیگر را در دو نقطه قطع کند ، روی آن دو ضلع چهار پاره خط جدا می کند که اندازه های آنها تشکیل یک تناسب می دهند . مثلاً در شکل مقابل داریم : $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$



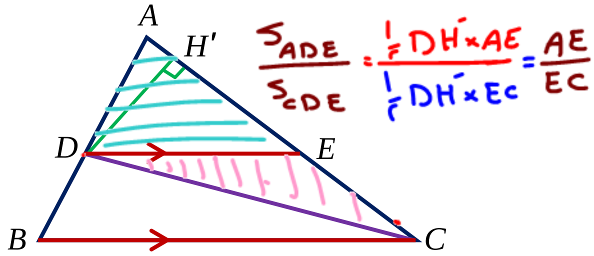
$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, $\frac{10}{5} = \frac{12}{6}$

اثبات

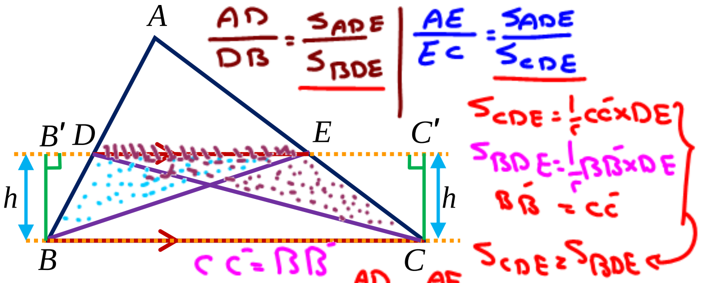


از B به E وصل می‌کنیم و ارتفاع EH را بر AB رسم می‌کنیم

$\frac{S_{ADE}}{S_{BDE}} = \frac{\frac{1}{2}EH \times AD}{\frac{1}{2}EH \times DB} = \frac{AD}{DB}$



$\frac{S_{ADE}}{S_{CDE}} = \frac{\frac{1}{2}DH' \times AE}{\frac{1}{2}DH' \times EC} = \frac{AE}{EC}$



$\frac{AD}{DB} = \frac{S_{ADE}}{S_{BDE}}$ | $\frac{AE}{EC} = \frac{S_{ADE}}{S_{CDE}}$

$S_{CDE} = \frac{1}{2} CC' \times DE$

$S_{BDE} = \frac{1}{2} BB' \times DE$

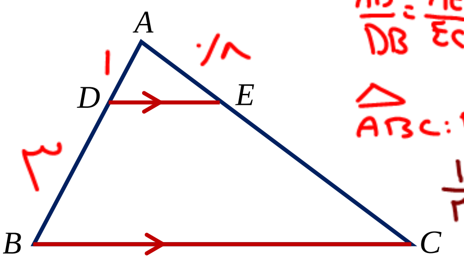
$BB' = CC'$

$S_{CDE} = S_{BDE}$

$CC' = BB'$

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

مثال : در شکل مقابل $DE \parallel BC$ و $AD = ۱$ و $DB = ۳$ و $AE = ۰/۸$ به کمک قضیه تالس طول AC را به دست آورید .



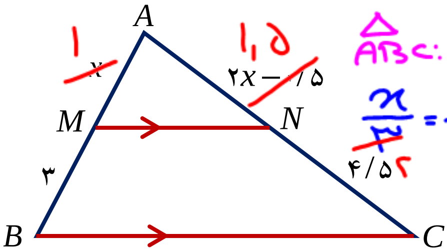
$\triangle ABC: DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

$\frac{1}{3} = \frac{0/8}{EC} \Rightarrow EC = \frac{3 \times 0/8}{1}$

$EC = 2/4$

$AC = AE + EC = 0/8 + 2/4 = \boxed{3/2}$

مثال : در شکل مقابل $MN \parallel BC$ به کمک قضیه تالس و با تشکیل یک معادله مقدار x را به دست آورید .



$\triangle ABC: MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

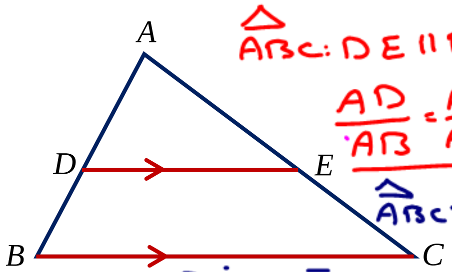
$\frac{x}{\cancel{3}} = \frac{2x - 0/5}{\cancel{4/5}}$ ⇒ $3x = 4x - 1$

$\boxed{1 = x}$

تعمیم قضیه تالس (قضیه تالس جز به کل)

اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند ، و با ضلع سوم آن موازی باشد ، مثلثی به وجود می آید که اندازه ضلع های آن با اندازه های ضلع های مثلث اصلی متناسبند . مثلاً در شکل مقابل داریم :

$$DE \parallel BC \quad \Rightarrow \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

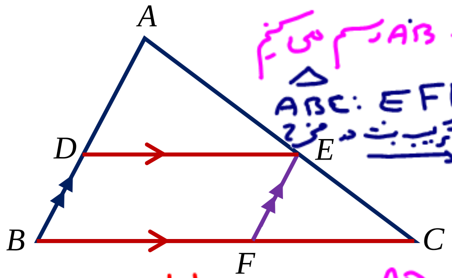


فرض $\triangle ABC: DE \parallel BC$

حکم $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

$\triangle ABC: DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

ترکیب نسبت در مخرج $\longrightarrow \frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$



برهان : EF را به موازات AB رسم می کنیم

$\triangle ABC: EF \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{EC} = \frac{BF}{FC}$

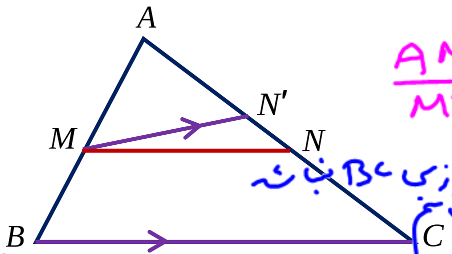
ترکیب نسبت در مخرج $\longrightarrow \frac{AE}{AE+EC} = \frac{BF}{BF+FC} \to \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$

نتیجه قسمت اول $\to \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ، $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{\cancel{BF}\ DE}{BC}$

$DE \parallel BF$ ، $EF \parallel DB$ } متوازی الاضلاع $DEFB \to BF = DE$

عکس قضیه تالس :

اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها چهار پاره خط با اندازه های متناظراً متناسب جدا کند ، آنگاه آن خط با ضلع سوم مثلث موازی است .



فرض : $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

حکم $MN \parallel BC$

اثبات به روش برهان خلف : فرض کنیم MN موازی BC نباشد (فرض خلف) . MN' را به موازات BC رسم کنیم .

$\triangle ABC: MN' \parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{AM}{AB} = \frac{AN'}{AC}$

طبق فرض $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

$\frac{AN'}{AC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AN = AN'$

پس N بر N' منطبق است در نتیجه MN بر MN' منطبق است

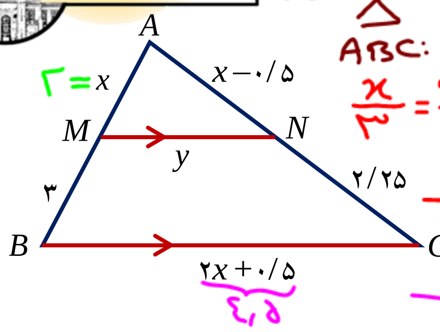
پس MN موازی BC است

جناب استاد حمیدرضا کمالی خوش خلق

پایه و رشته دهم ریاضی

مثال : در شکل مقابل $MN \parallel BC$ مقادیر x و y را به دست آورید.

حل :



$\overset{\triangle}{ABC}: MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$

$\frac{x}{3}=\frac{x-0.5}{2.25} \Rightarrow 2.25x=3x-1.5$

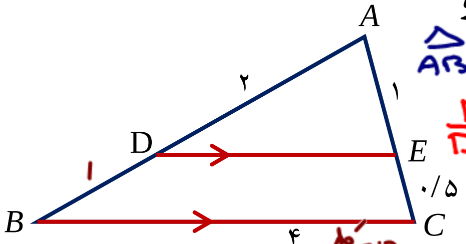
$1.5=0.75x \Rightarrow x=\frac{1.5}{0.75}=2$

$\overset{\triangle}{ABC}: MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$

$\frac{2}{5}=\frac{y}{4.5} \Rightarrow y=\frac{9}{5}=1.8$

حل تمرینات صفحه۳۶ فصل ۲

۱ – در شکل مقابل $DE \parallel BC$ با توجه به اندازه پاره خط ها طول DE و AB را به دست آورید .



$\overset{\triangle}{ABC}: DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

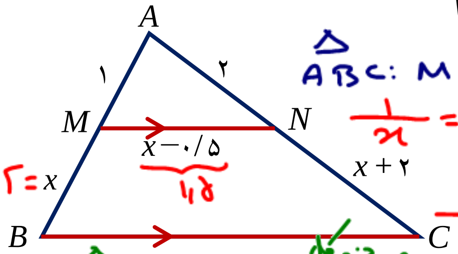
$\frac{2}{DB}=\frac{1}{0.5} \Rightarrow \boxed{DB=\frac{2\times 0.5}{1}=1}$

$AB=AD+DB$

$2+1=3$

$\overset{\triangle}{ABC}: DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{DE}{4} \Rightarrow \boxed{DE=\frac{8}{3}}$

۲ – در شکل مقابل اگر MN‖BC ، مقدار x را به دست آورده و سپس BC را نیز بیابید .

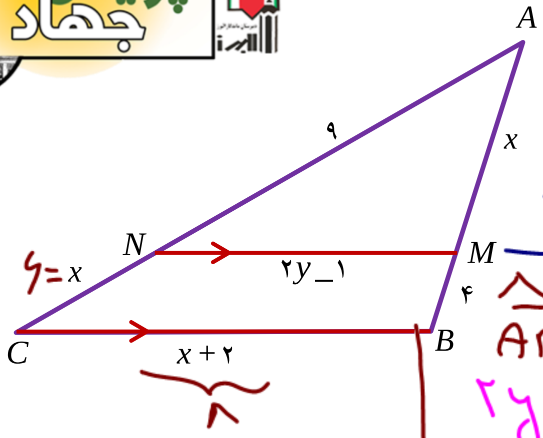


$\overset{\triangle}{ABC}: MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$

$\frac{1}{x}=\frac{2}{x+2} \Rightarrow x+2=2x \Rightarrow \boxed{2=x}$

$\overset{\triangle}{ABC}: MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{1.5}{BC} \Rightarrow BC=4.5$

۳ – در شکل مقابل $MN \parallel BC$ مقادیر x و y را به دست آورید.



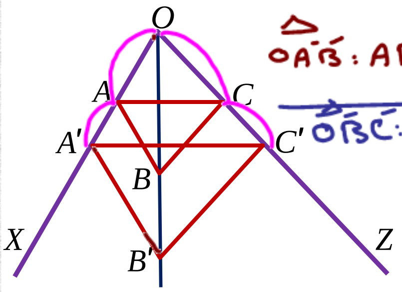
$\overset{\triangle}{ABC}: MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB}$

$\frac{9}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow 36 = x^2 \rightarrow \boxed{x = 6}$

$\overset{\triangle}{ABC}: MN \parallel BC \rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{\cancel{9}\,3}{\cancel{15}\,5} = \frac{2y-1}{8}$

$2y - 1 = \frac{24}{5} \Rightarrow 2y = \frac{24}{5} + \frac{5}{5} = \frac{29}{5} \Rightarrow \boxed{y = 2/9}$

۴ – در شکل مقابل می دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیه تالس و عکس آن ثابت کنید : $AC \parallel A'C'$

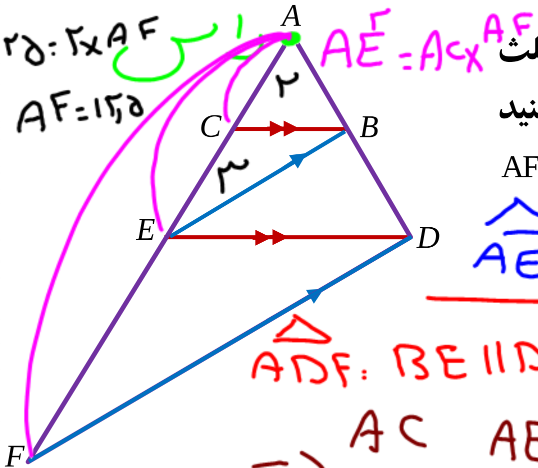


$\overset{\triangle}{OA'B'}: AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$

$\overset{\triangle}{OB'C'}: BC \parallel B'C' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OC}{CC'} = \frac{OB}{BB'}$

$\Rightarrow \frac{OA}{AA'} = \frac{OC}{CC'} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} AC \parallel A'C'$

۵ – در شکل مقابل اگر $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$ به کمک قضیه تالس در مثلث های ADE و ADF ومقایسه تناسب ها با یکدیگر ثابت کنید $AE^2 = AC \times AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است) .



$AE^2 = AC \times AF$

$25 = 2 \times AF$

$AF = 12/5$

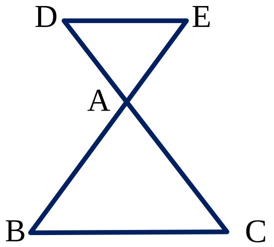
$\overset{\triangle}{AED}: BC \parallel DE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$

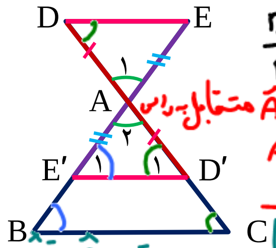
$\overset{\triangle}{ADF}: BE \parallel DF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AD}$

$\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^2 = AC \times AF$

۶ – در شکل مقابل می دانیم $DE \parallel BC$ ثابت کنید $\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}$

(راهنمایی هم اندازه AE و AD را به ترتیب بر رو ی AB و AC جداکنید .)





$\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}$

متقابل به رأس $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ ، فرض $AD=AD'$ ، $AE=AE'$ $\rightarrow A\hat{D}E \cong A\hat{D'}E' \rightarrow DE=D'E'$

$\hat{D}=\hat{D}_1$ ، $\hat{D}_1=\hat{C}$

$DE \parallel BC$; مورب $DC \rightarrow \hat{D}=\hat{C}$

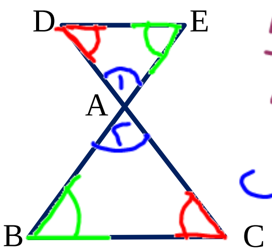
$\hat{E}_1=\hat{B}$ به همین ترتیب

عکس قضیه تالس $\rightarrow E'D' \parallel BC \rightarrow$ نتیجه : $\frac{AE'}{AB}=\frac{AD'}{AC}=\frac{E'D'}{BC}$

$AE'=AE$ ، $AD'=AD$ $\rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{BC}$

۷ – تعریف شکل های متشابه را از کتاب نهم به یاد آورید . آیا می توانید در مسئله ٦ ثابت کنید ، مثلث های ADE و ABC متشابهند.

حل : در مسئله قبل ثابت کردیم :



$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{DE}{BC}$

متقابل به رأس $\hat{A}_1=\hat{A}_2$

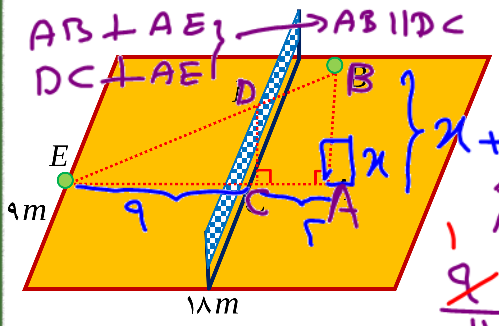
$DE \parallel BC$ ، مورب $DC \rightarrow \hat{D}=\hat{C}$

$DE \parallel BC$ و مورب $BE \rightarrow \hat{E}=\hat{B}$

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

$DC = ۲,۴۳$

$AB \perp AE, \; DC \perp AE \Rightarrow AB \parallel DC$



$x + ۱۸۰ + ۳۰$

۱۰- ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع ۹×۹ تفکیک می شود و طور والیبال مردان با ارتفاع ۴۳ /۲ متر روی خط وسط نسب شده است . در یک لحظه یک بازیکن با قد ۱۸۰ سانتی متر و در فاصله دو متری طور به هوا پریده و توپی را که در ارتفاع ۳۰ سانتی متری بالای سرش است با ضربه ابشار مماس بر طور وسط روانه زمین حریف می کند و توپ رو خط انتهای زمین حریف می نشیند . این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده است.

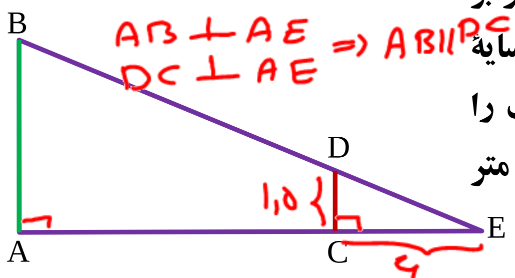
حل :

$\overset{\triangle}{ABE} : AB \parallel DC \overset{\text{تالس}}{\Rightarrow} \frac{EC}{EA} = \frac{DC}{AB}$

$\frac{\cancel{9}}{11} = \frac{\cancel{۲,۴۳}}{۲,۱۰ + x} \Rightarrow ۲,۱ + x = ۱۱ \times ۰,۲۷$

$x = \frac{۲,۹۷}{۲,۱}$

۸ – یکی از کاربرد های قضیه تالس از زمان های دور تا کنون ، محاسبه فاصله های غیر قابل دسترس بوده است . به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند ، در زمانی معین ، طول سایهٔ درخت را روی زمین اندازه می گیریم ، سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می گویند ، طوری به صورت عمودی جا به جا می کنیم که سایهٔ آن روی امتداد سایهٔ درخت قرار گیرد و نوک سایهٔ شاخص نیز بر نوک سایهٔ درخت منطبق شود . نشان دهید که چگونه با داشتن طول سایهٔ درخت و طول سایهٔ شاخص و ارتفاع شاخص می توان ارتفاع درخت را به دست آورد . اگر طول سایهٔ درخت ۱۲۰ متر ، طول سایهٔ شاخص ٦ متر و طول شاخص ۱/۵ متر باشد بلندی درخت چند متر است ؟



$AB \perp AE$, $DC \perp AE \Rightarrow AB \parallel DC$

۱٫۵

۶

۱۲۰

$AB = \dfrac{\cancel{120} \times 1.5}{\cancel{6}} = 30$

حل :

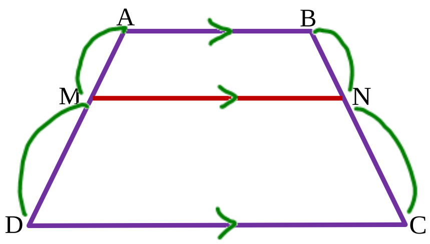
$\triangle ABE: DC \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{EC}{EA} = \dfrac{DC}{AB}$

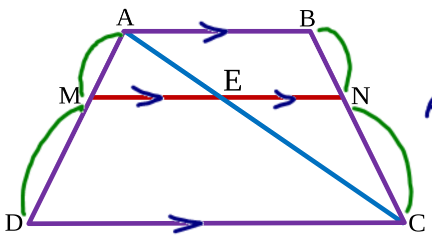
$\Rightarrow AB = \dfrac{AE \times DC}{EC}$

۹ – در ذوزنقه مقابل $MN \parallel AB \parallel CD$ ثابت کنید :

$\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{BN}{NC}$ (قضیه تالس در ذوزنقه)

راهنمایی : یکی از قطرهای ذوزنقه رارسم کنید .





برهان : قطر AC را رسم می کنیم

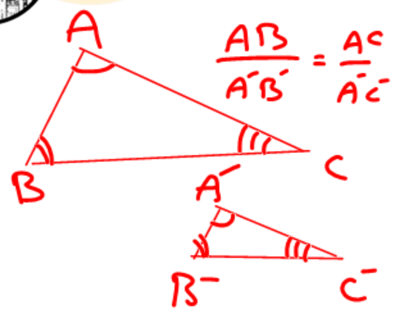
$\triangle ADC: ME \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{AM}{MD} = \dfrac{AE}{EC}$

$\triangle ABC: EN \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{AE}{EC}$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{MD} = \dfrac{BN}{NC}$

تشابه مثلث ها

در چند ضلعی های متشابه زوایای نظیر به نظیر برابر بوده و اضلاع نظیر به نظیر متناسبند.



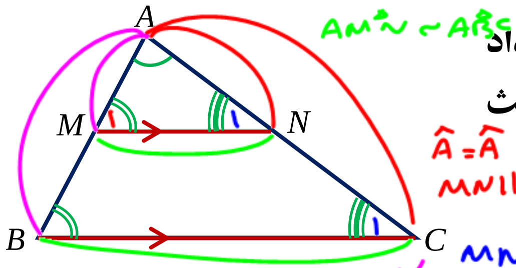
$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$

مثلاً دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند اگر و فقط اگر زوایای نظیر به نظیر برابر بوده و اضلاع نظیر به نظیر متناسب باشند یعنی داشته باشیم :

$$\overset{\triangle}{ABC} \approx \overset{\triangle}{A'B'C'} \Rightarrow \quad \hat{A}=\hat{A}' \quad , \quad \hat{B}=\hat{B}' \quad , \quad \hat{C}=\hat{C}' \quad , \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

قضیه اساسی تشابه مثلث ها :

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی ، دو ضلع دیگر (و یا امتداد آنها)را در دو نقطه قطع کند ، مثلثی با آنها تشکیل می دهد که با مثلث اصلی متشابه است.



$\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

$\hat{A}=\hat{A}$

$MN \parallel BC$, AB مورب $\rightarrow \hat{M}_1=\hat{B}$

$MN \parallel BC$, AC مورب $\rightarrow \hat{N}_1=\hat{C}$

$\overset{\triangle}{ABC}: MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

در حالت کلی ، در سه حالت ، دو مثلث متشابهند .

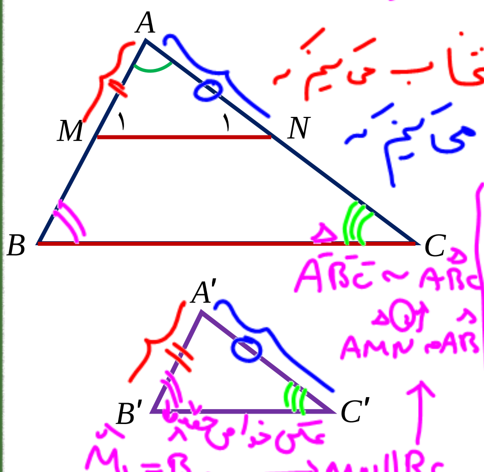
قضیه اول : هر گاه دو زاویه از مثلثی ، با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند ، دو مثلث متشابه اند .

فرض $\hat{B}=\hat{B'}$ و $\hat{C}=\hat{C'}$

نقطه M را برروی ضلع AB طوری انتخاب می‌کنیم که $AM=A'B'$.

نقطه N را برروی ضلع AC طوری انتخاب می‌کنیم که $AN=A'C'$.

از M به N وصل می‌کنیم.



$\overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

$\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

$\hat{M}_1=\hat{B} \xrightarrow{\text{عکس خواص خطوط موازی و مورب}} MN \parallel BC$

$\overset{\triangle}{ABC}: \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$

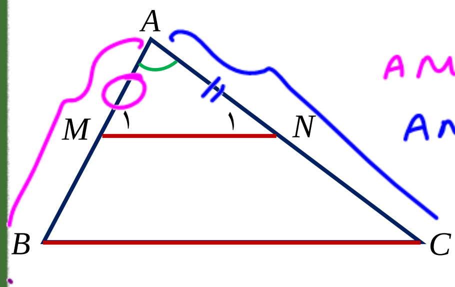
$\overset{\triangle}{A'B'C'}: \hat{A'}+\hat{B'}+\hat{C'}=180°$

$\Rightarrow \hat{A}+\cancel{\hat{B}}+\cancel{\hat{C}}=\hat{A'}+\cancel{\hat{B'}}+\cancel{\hat{C'}}$

$\hat{A}=\hat{A'}$

$\hat{A}=\hat{A'}$, $AM=A'B'$, $AN=A'C'$ $\xrightarrow{\text{ض ز ض}}$ $\boxed{\overset{\triangle}{AMN} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'}}$ (1) $\Rightarrow \hat{M}_1=\hat{B'}=\hat{B}$, $\hat{N}_1=\hat{C'}=\hat{C}$ (بنابر فرض)

قضیه دوم : هر گاه اندازه های دو ضلع از مثلثی با اندازه های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها هم اندازه باشند ، دو مثلث متشابهند .



برهان : نقطه M را بر روی ضلع AB طوری انتخاب می‌کنیم که $AM = A'B'$

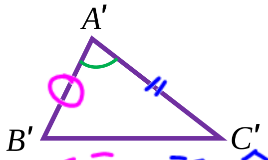
نقطه N را بر روی ضلع AC طوری انتخاب می‌کنیم که $AN = A'C'$

$AM = A'B'$, $AN = A'C'$, $\hat{A} = \hat{A'} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle AMN \cong \triangle A'B'C'$ (2)

$\frac{AM}{AB} = \frac{A'B'}{AB} \overset{\text{طبق فرض}}{=} \frac{A'C'}{AC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

طبق عکس قضیه تالس $\longrightarrow MN \parallel BC \xrightarrow{\text{طبق قضیه اساسی تشابه}} \triangle AMN \sim \triangle ABC$ (1)

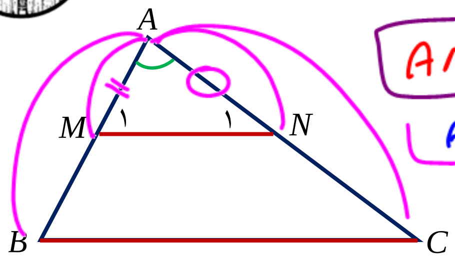
$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$



فرض: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$, $\hat{A} = \hat{A'}$

حکم: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

قضیه سوم : هر گاه اندازه سه ضلع از مثلثی ، با اندازه های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند ، دو مثلث متشابهند .



برهان : نقطه M را بر روی ضلع AB طوری انتخاب می‌کنیم که $AM=A'B'$

نقطه N را بر روی ضلع AC طوری انتخاب می‌کنیم $AN=A'C'$

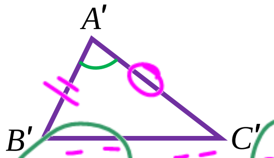
$$\frac{AM}{AB}=\frac{A'B'}{AB}\xrightarrow{\text{مبنی فرض ۱}}\frac{A'C'}{AC}=\frac{AN}{AC}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\xrightarrow{\text{عکس تالس}}MN\parallel BC$$

$$MN\parallel BC\xrightarrow{\text{طبق قضیه اساسی}}\overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}\ (1)$$

$$MN\parallel BC\xrightarrow{\text{جزء به کل}}\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\longrightarrow\frac{A'B'}{AB}=\frac{MN}{BC}$$

$$\xrightarrow{\text{فرض}}\frac{B'C'}{BC}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow MN=B'C'\xrightarrow[AN=A'C']{AM=A'B'}\overset{\Delta}{AMN}\cong\overset{\Delta}{A'B'C'}\ (2)$$

$$(1),(2)\longrightarrow\overset{\Delta}{A'B'C'}\sim\overset{\Delta}{ABC}$$

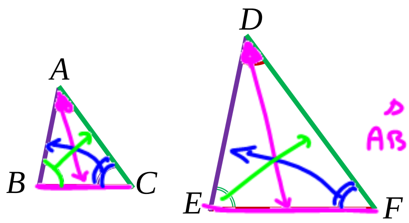


فرض $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$

$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$

نکته بسیار مهم : در دو مثلث متشابه ، اضلاع مقابل به زوایای برابر ، متناسبند.

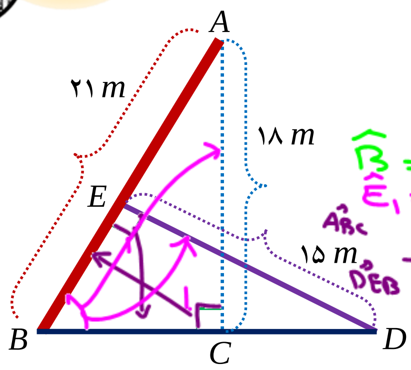
این عبارت به این معنی است که اگر دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{DEF}$ با یکدیگر متشابه بوده و زوایای $\hat{A}$ و $\hat{D}$ با یکدیگر برابر باشند ، آنگاه اضلاع مقابل به این زوایا متناسبند و در صورت و مخرج یک کسر قرار می گیرند . در این صورت داریم :



$\overset{\Delta}{ABC}$ ، $\overset{\Delta}{DEF}$: $\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$

$$\hat{A}=\hat{D}\quad,\quad\hat{B}=\hat{E}\quad,\quad\hat{C}=\hat{F}\quad\Rightarrow\quad\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=\frac{AB}{DE}$$

مثال : مطابق شکل رو به رو ، یک تیر (دکل) انتقال برق به ارتفاع ۲۱ متر ، در اثر وزش باد خم شده و در موقعیت جدید ، نوک آن از زمین ۱۸ متر فاصله دارد . می خواهیم با قرار دادن یک تیرفلزی به طول ۱۵ متر ، عمود برآن آن را به طورموقت سر پا نگه داریم . پای این تیر فلزی را باید در چه فاصله ای از پای تیر انتقال برق محکم کنیم ؟

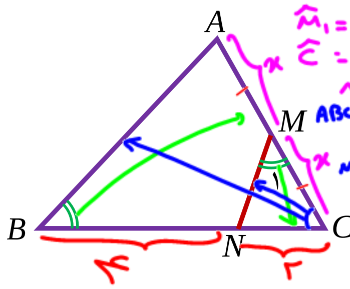


$\hat{B}=\hat{B}$ ، $\hat{E}_1=\hat{C}_1=90^\circ$ $\xrightarrow{\text{زز}}$ $\triangle ABC \sim \triangle DEB$

$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DE}=\frac{BC}{BE}$

$\frac{21}{BD}=\frac{18}{15} \Rightarrow BD=\frac{21\times15}{18}=\frac{35}{2}=17.5$

مثال : در مثلث ABC از نقطه M وسط AC زاویه $N\hat{M}C$ را مساوی زاویه $\hat{B}$ جدا کرده ایم . اگر $NC=2$ و $NB=4$ طول AC را به دست آورید .



$\hat{M}_1=\hat{B}$ ، $\hat{C}=\hat{C}$ $\xrightarrow{\text{زز}}$ $\triangle MNC \sim \triangle ABC$

$\frac{AC}{NC}=\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{MC}$

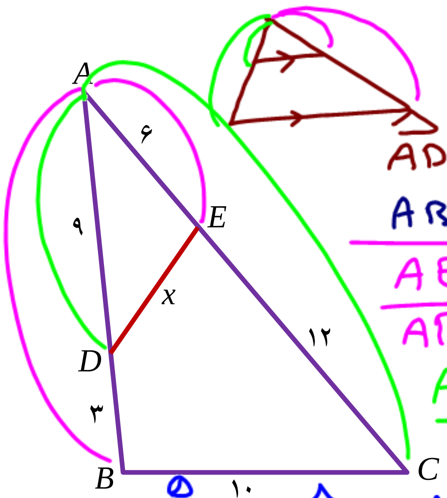
$\frac{2x}{2}=\frac{6}{x} \Rightarrow x^2=6 \Rightarrow x=\sqrt{6}$

$AC=2x=2\sqrt{6}$

مثال : در شکل مقابل اندازه هر پاره خط روی آن نوشته شده است .

اندازه x را به دست آورید .

حل :



$ADE: AE=6 , AD=9 \quad DE=x$

$ABC: AB=12 \quad AC=18 \quad BC=10$

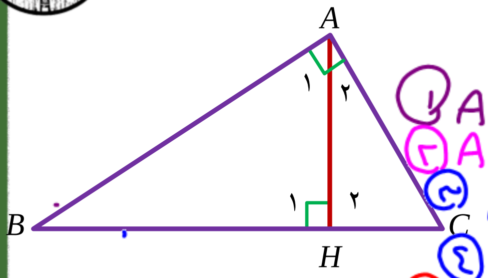
$\frac{AE}{AB}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ ، $\frac{AD}{AC}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$ ⟵ $\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}=\frac{1}{2}$ ، $\hat{A}=\hat{A}$ $\xrightarrow{\text{ض ز ض}}$ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\triangle ADE \sim \triangle ABC: \frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{DE}{10} \Rightarrow \boxed{DE=\frac{10}{2}=5}$

اثبات قضیه فیثا غورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزاویه

مثال : ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ، ارتفاع وارد بر وتر ، آن را به دو مثلث قائم الزاویه تفکیک می کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه اند .

حل :



(1) $AB^2 = BH \times BC$

(2) $AC^2 = CH \times BC$

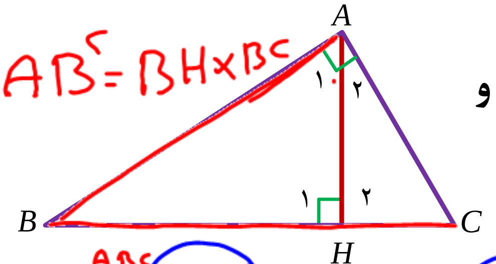
(3) $AH^2 = BH \times CH$

(4) $AH \times BC = AB \times AC$

(5) $BC^2 = AB^2 + AC^2$

نتیجه : در هر مثلث قائم الزاویه ، ارتفاع وارد بر وتر ، آن را به دو مثلث قائم الزاویه تفکیک می کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه اند .

مثال : در مثلث قائم الزاویه ABC $(A = ۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده و ثابت کنید AB واسطه هندسی BH و BC است .



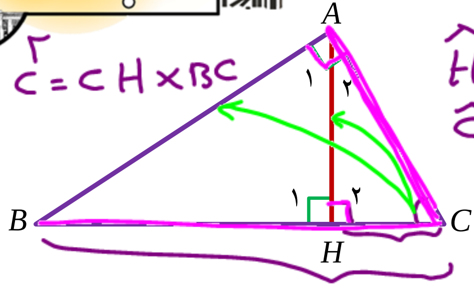
$AB^2 = BH \times BC$

$\left.\begin{array}{l} \hat{H}_1 = \hat{A} = 90^\circ \\ \hat{B} = \hat{B} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \triangle ABH \sim \triangle ABC$

$\xrightarrow{}$ $\dfrac{ABC}{ABH}$: $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{AC}{AH} = \dfrac{AB}{BH} \Rightarrow AB^2 = BH \times BC$

مثال : در مثلث قائم الزاویه ABC $(A = ۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده و ثابت کنید AC واسطه هندسی CH و BC است .

$AC^2 = CH \times BC$



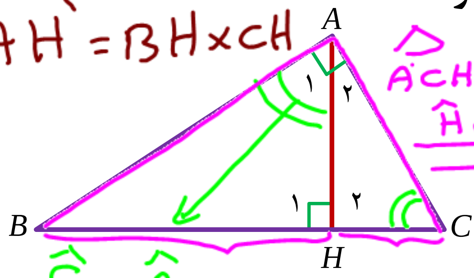
$\hat{H}_2 = \hat{A} = 90^\circ$, $\hat{C} = \hat{C}$ $\xrightarrow{\text{زز}}$ $\triangle ABC \sim \triangle ACH$

$\xrightarrow[\triangle ABC]{\triangle ACH} \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AC}$

$AC^2 = CH \times BC$

مثال : در مثلث قائم الزاویه ABC $(A = ۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده و ثابت کنید AH واسطه هندسی BH و CH است .

$AH^2 = BH \times CH$



$\triangle ACH: \hat{A}_2 + \hat{H}_2 + \hat{C} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{H}_2 = 90^\circ} \hat{A}_2 + \hat{C} = 90^\circ$

$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$

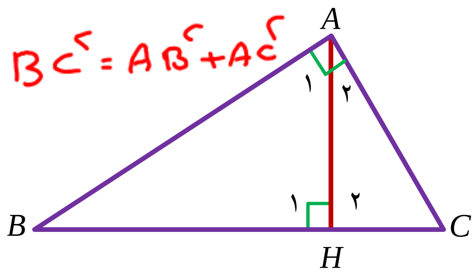
$\Rightarrow \cancel{\hat{A}_2} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \cancel{\hat{A}_2} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_1$

$\hat{C} = \hat{A}_1$, $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ $\xrightarrow{\text{زز}}$ $ABH \sim ACH \xrightarrow[\triangle ACH]{\triangle ABH} \frac{AB}{AC} = \boxed{\frac{BH}{AH} = \frac{AH}{CH}} \Rightarrow$

$AH^2 = BH \times CH$

مثال : در مثلث قائم الزاویه ABC $(A = ۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده و با استفاده از تشابه مثلث ها رابطه فیثا غورس را در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ثابت کنید .

$BC^2 = AB^2 + AC^2$



ثابت کردیم : $AB^2 = BH \times BC$

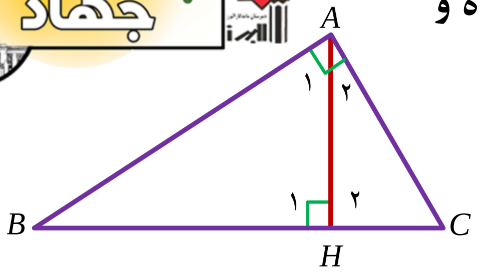
ثابت کردیم : $AC^2 = CH \times BC$

جمع

$AB^2 + AC^2 = BH \times BC + CH \times BC$

$AB^2 + AC^2 = BC(\underbrace{BH + CH}_{BC}) \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

مثال : در مثلث قائم الزاویه ABC $(A = 90^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده و ثابت کنید $AH \times BC = AB \times AC$.



$$\begin{cases} S_{A\hat{B}C} = \frac{1}{2} AH \times BC \\ S_{A\hat{B}C} = \frac{1}{2} AB \times AC \end{cases}$$

$$S_{A\hat{B}C} = S_{A\hat{B}C} \Rightarrow \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} AB \times AC$$

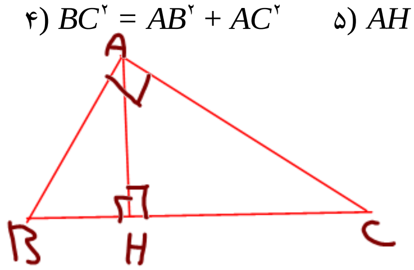
$$\xrightarrow{\times 2} \quad AH \times BC = AB \times AC$$

روابط طولی در مثلث قائم الزاویه :

اگر در مثلث قائم الزاویه ABC $(A = 90^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کنیم ، با استفاده از تشابه مثلث ها نتایج زیر به دست می آید .

۱) $AB^2 = BC \times BH$ ۲) $AC^2 = BC \times CH$ ۳) $AH^2 = BH \times CH$

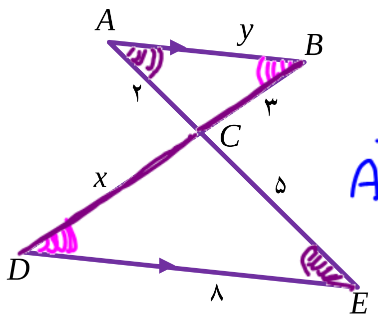
۴) $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ۵) $AH \times BC = AB \times AC$



تمرین فصل ۲

۱ – در هر یک از اشکال زیر تشابه مثلث ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x و y را مشخص کنید.

الف)



$AB \parallel DE$, $\underbrace{AE}_{\text{مورب}} \rightarrow \hat{A} = \hat{E}$

$AB \parallel DE$, $\underbrace{BD}_{\text{مورب}} \rightarrow \hat{B} = \hat{D}$ } زز $\rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEC$

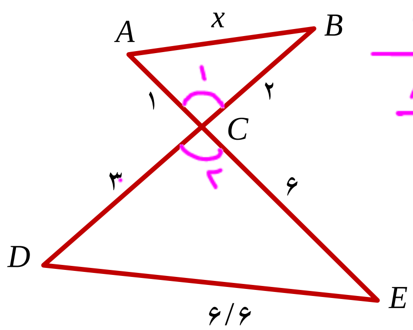
$\triangle ABC \sim \triangle DEC \rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{CE} = \frac{AB}{DE}$

$\frac{3}{x} = \frac{2}{5} = \frac{y}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{2} \\ y = \frac{16}{5} \end{cases}$

ب)

$\triangle ABC: AC = 1 \quad BC = 2 \quad AB = x$

$\triangle DEC: DC = 3 \quad CE = 6 \quad DE = 6.6$

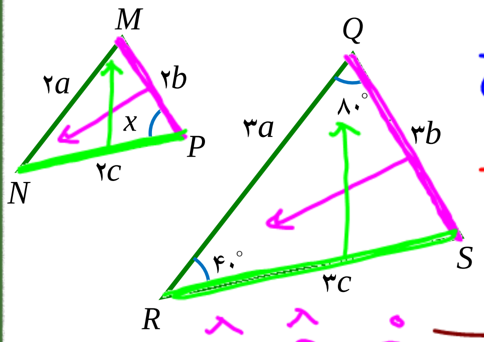


$\frac{AC}{DC} = \frac{1}{3}$, $\frac{BC}{CE} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ } $\Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{CE}$, $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ } ض ز ض $\rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DCE$

$\triangle ABC \sim \triangle DCE \rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{CE} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow$

$\frac{1}{3} = \frac{x}{6.6} \Rightarrow \boxed{x = \frac{6.6}{3} = 2.2}$

ج)



$\frac{MN}{QR} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}$

$\frac{MP}{QS} = \frac{2b}{3b} = \frac{2}{3}$

$\frac{NP}{RS} = \frac{2c}{3c} = \frac{2}{3}$

} $\frac{MN}{QR} = \frac{MP}{QS} = \frac{NP}{RS} = \frac{2}{3}$ ض ض ض $\Downarrow$ $\triangle MNP \sim \triangle QRS$

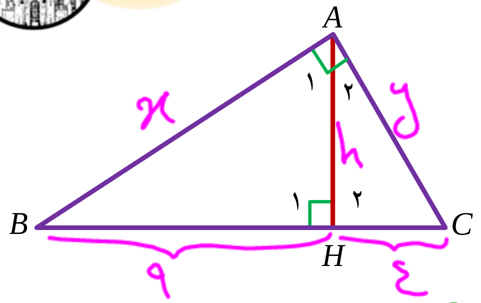
$\hat{N} = \hat{R} = 40^\circ$

$\hat{M} = \hat{Q} = 80^\circ$

$\triangle MNP: \hat{M} + \hat{N} + \hat{P} = 180$

} $\Rightarrow \hat{P} = 60^\circ \longrightarrow \boxed{x = 60^\circ}$

۲ – در مثلث قائم الزاویه ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم الزاویه، در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

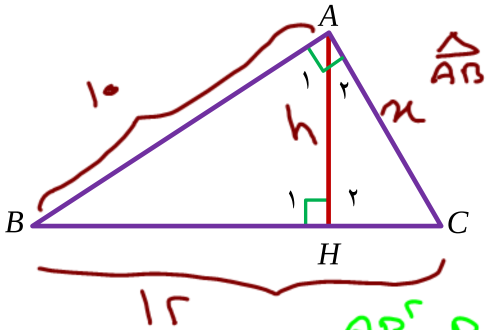


۱) $BH=۹$, $CH=۴$, $AH=?$, $AB=?$, $AC=?$

$AB^2 = BH \times BC = ۹ \times ۱۳ \to \boxed{AB = ۳\sqrt{۱۳}}$

$AC^2 = CH \times BC = ۴ \times ۱۳ \to \boxed{AC = ۲\sqrt{۱۳}}$

$AH^2 = BH \times CH = ۹ \times ٤ \to \boxed{AH = ۶}$



۲) $AB=۱۰$, $BC=۱۲$, $AC=?$, $AH=?$

$\overset{\triangle}{ABC}: AC^2 = BC^2 - AB^2$

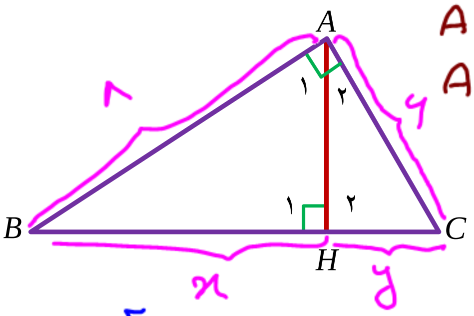
$AC^2 = ۱٤٤ - ۱۰۰ = ٤٤ \to AC = ۲\sqrt{۱۱}$

$AH \times BC = AB \times AC \to$

$AH \times ۱۲ = ۱۰ \times ۲\sqrt{۱۱} \Rightarrow AH = \frac{۲۰\sqrt{۱۱}}{۱۲} = \frac{۵\sqrt{۱۱}}{۳}$

$AB^2 = BH \times BC \to ۱۰۰ = BH \times ۱۲ \to BH = \frac{۱۰۰}{۱۲} = \boxed{\frac{۲۵}{۳}}$

$CH = BC - BH = ۱۲ - \frac{۲۵}{۳} = \frac{۳۶-۲۵}{۳} = \frac{۱۱}{۳}$



۳) $AB=۸$, $AC=۶$, $BH=?$, $CH=?$

$AH^2 = BH \times BC$

$AH \times BC = AB \times AC \to AH \times ۱۰ = ۸ \times ۶$

$\boxed{AH = ٤/۸}$

$\overset{\triangle}{ABC}: BC^2 = AB^2 + AC^2 = \underbrace{۶٤ + ۳۶}_{۱۰۰}$

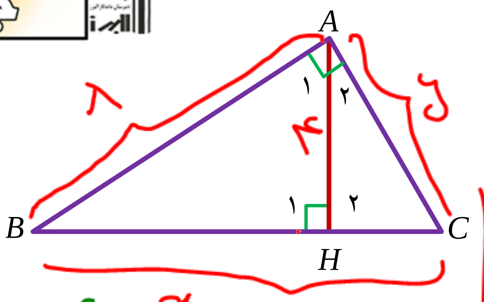
$\Rightarrow \boxed{BC = ۱۰}$

$AB^2 = BH \times BC \to ۶٤ = BH \times ۱۰ \to BH = \frac{۶٤}{۱۰} = \boxed{۶/٤}$

$CH = BC - BH = ۱۰ - ۶/٤ = ۳/۶$

٤) $AB = ۸$, $AH = ۴$, $BC = ?$, $AC = ?$

$\sqrt{48}=\sqrt{16\times 3}=4\sqrt{3}$



$\triangle ABH : AB^2=AH^2+BH^2$

$\to 64=16+BH^2 \to BH^2=48$

$\to \boxed{BH=4\sqrt{3}}$

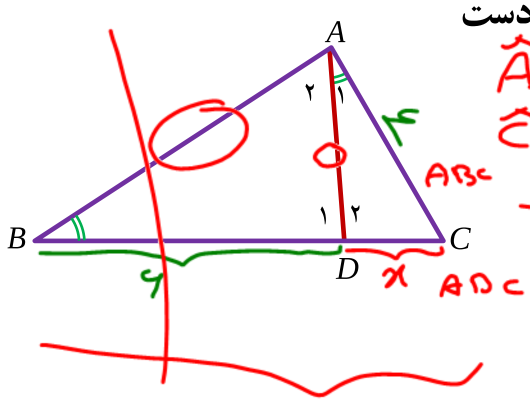
$AB^2=BH\times BC \to 64=4\sqrt{3}\times BC$

$BC=\frac{64}{4\sqrt{3}}=\frac{16}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{16\sqrt{3}}{3}}$

$AB^2+AC^2=BC^2 \to 64+AC^2=\frac{256}{3}$

$AC^2=\frac{256}{3}-64=\frac{256-192}{3}=\frac{64}{3} \to AC=\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

۳ – در شکل رو به رو $\hat{A}_1=\hat{B}$ و $AC = ۴$ و $BD = ۶$ ، طول BC را به دست آورید.



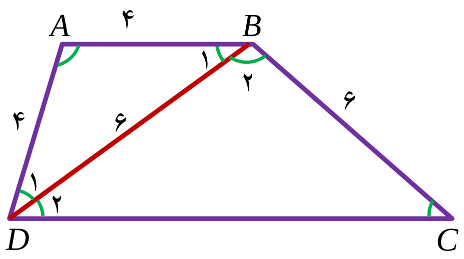
$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{B}\\ \hat{C}=\hat{C}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} A\hat{B}C\sim A\hat{D}C$

$\frac{AC}{DC}=\cancel{\frac{AB}{AD}}=\frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{4}{x}=\frac{6+x}{4}$

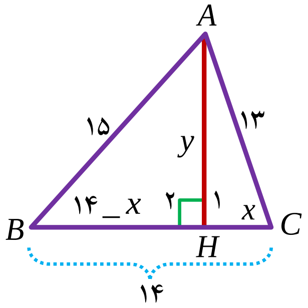
$16=x(x+6) \to \boxed{x=2}$

$\boxed{BC=BD+DC=6+2=8}$

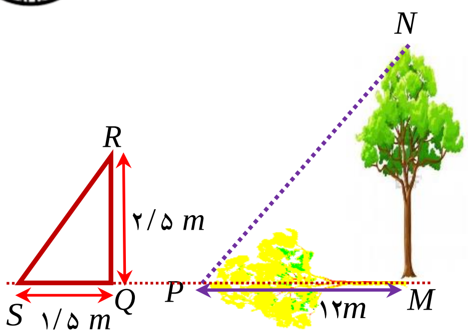
٤ – در شکل رو به رو $ABCD$ ذوزنقه است . طول قاعده CD را به دست آورید .



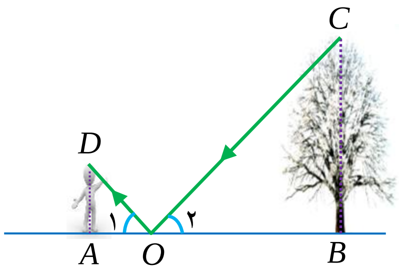
۵ – در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱٤ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث های ABH و ACH مقادیر x و y را به دست آورید. و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید .



٦ – در حیاط یک دبیرستان، دو درخت بلند وجود دارد. معلم هندسه از دانش آموزان خواست که برای تعیین ارتفاع این دو درخت روشی ارائه کنند. در اینجا روش های دو دانش آموز را می بینید . با توجه به اطلاعات داده شده ارتفاع هر درخت را تعیین کنید.



الف) روش ترانه: ترانه یک چوب ۲/۵ متری را به صورت عمودی روی زمین درجایی محکم کرد . طول سایهٔ چوب، در آن زمان ۱/۵ متر بود . همزمان طول سایهٔ درخت ۱۲ متر بود . از اینجا چگونه او توانست ارتفاع درخت را اندازه بگیرد؟ ارتفاع این درخت چند متر است؟



ب) روش شهرزاد: شهرزاد آینه ای کوچک را که در مقیاس بزرگ می توان یک نقطه در نظر گرفت، (نقطه O در شکل) روی زمین و در مسیر خط راستی که از پای درخت تا پای خودش کشیده است، قرار می دهد. سپس روی این خط آنقدر به جلو وعقب حرکت می کند تا بتواند تصویر نوک درخت را در آیینه ببیند . با توجه به آنچه که از خواص آینه ها و انعکاس نور می دانید بگویید چگونه می توان با داشتن طول های AO و BO روی زمین و اندازه قد شهر زاد (فاصله چشم او تا زمین) ارتفاع درخت را به دست آورد اگر قد شهرزاد ۱۶۰سانتی متر و فاصلهٔ پای او از آینه ۲/۵ متر و فاصله ایینه از پای درخت ۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟

حل :

روش ترانه :

$$SR \parallel PN \quad , \quad \text{مورب} \quad SM \;\Rightarrow\; \hat{S}=\hat{P} \qquad \xrightarrow{\text{زز}} \quad \overset{\Delta}{MNP} \approx \overset{\Delta}{QRS}$$
$$\hat{M}=\hat{Q}=۹۰^\circ$$

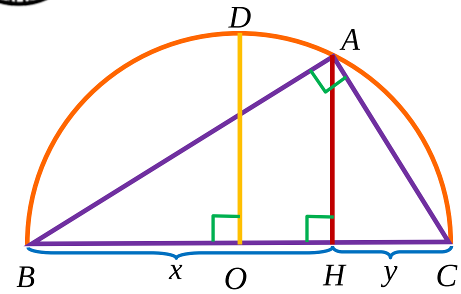
$$\overset{\Delta}{MNP} \approx \overset{\Delta}{QRS} \;\Rightarrow\; \frac{PM}{SQ}=\frac{NM}{QR} \;\Rightarrow\; \frac{۱۲}{۱/۵}=\frac{NM}{۲/۵} \;\Rightarrow\; MN=۲۰$$

روش شهر زاد :

طبق خواص آینه های تخت ، زاویه تابش و زاویه بازتابش با یکدیگر برابرند پس: $\hat{O}_۱=\hat{O}_۲$.

$$\hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \qquad \xrightarrow{\text{زز}} \quad \overset{\Delta}{OAD} \approx \overset{\Delta}{OBC}$$
$$\hat{A}=\hat{B}=۹۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{OAD} \approx \overset{\Delta}{OBC} \Rightarrow \frac{AD}{BC}=\frac{AO}{BO} \Rightarrow BC=\frac{AD\times BO}{AO} \Rightarrow \quad MN=\frac{۱/۶\times ۲۰}{۲/۵}=۱۲/۸$$



۷ــ در شکل مقابل نیم دایره به قطر BC و مرکز O رسم شده است . و نقطه دلخواه A روی محیط نیم دایره می باشد.

الف) چرا زاویه A قائمه است؟

حل الف)

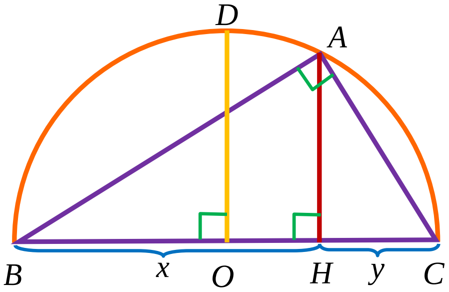
زیرا زاویه $\hat{A}$ یک زاویه محاطی مقابل به نیم دایره یعنی کمان ۱۸۰° است پس اندازه آن برابر نصف ۱۸۰° یعنی ۹۰° است .

ب) برای نقطه A که به دلخواه روی محیط دایره انتخاب شد و CD شعاع دایره است اندازه های AH و OD را به هم مقایسه کنید .

$OD[?]AH$

حل ب)

$OD \geq AH$



پ) هر کدام از مقادیر AH و OD را بر حسب x و y محاسبه کنید ودر قسمت (ب) جایگذاری نمایید .

حل پ)

$$OD = \frac{x+y}{۲} \qquad , \qquad AH^۲ = xy \Rightarrow AH = \sqrt{xy}$$

$$OD \geq AH \Rightarrow \frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$$

ت) آیا می توان برای هر دو عدد مثبت a و b گفت : $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$ ؟ چرا ؟

بله درست است

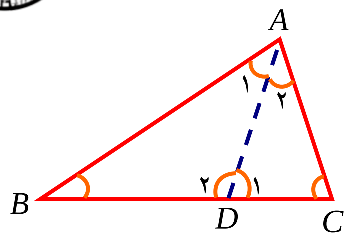
اثبات به روش بازگشتی :

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq ۲\sqrt{ab} \Leftrightarrow (a+b)^۲ \geq ۴ab \Leftrightarrow a^۲+b^۲-۲ab \geq ۰$$

$$(a-b)^۲ \geq ۰$$

کاربرد های از قضیه تالس و تشابه

۱ – قضایای نیمساز هلی داخلی

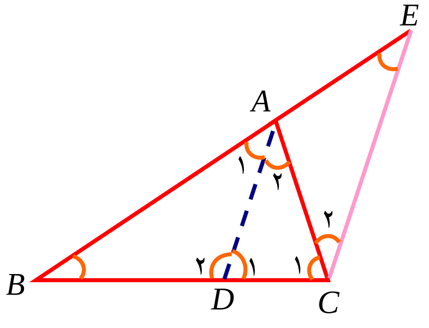


درهرمثلث نیمساز هر زاویهٔ داخلی ، ضلع رو به رو به آن زاویه را به نسبت اندازه های ضلع های آن زاویه تقسیم می کند .

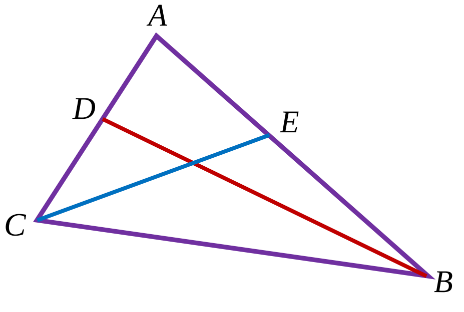
اثبات :

فرض : $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

حکم : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$



نتیجه : در هر مثلث می توان طول های قطعاتی که هر نیمساز ایجاد می کند ، با داشتن طول های اضلاع مثلث ، محاسبه کرد .

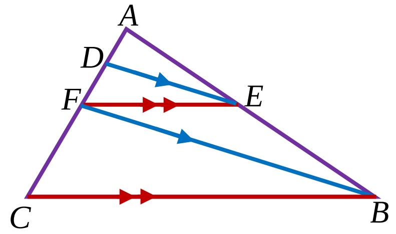


مثال : در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ $AB = ۷$ و $AC = ۵$ و $BC = ۸$

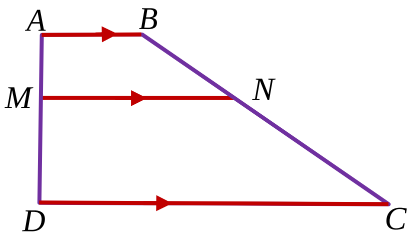
الف)طول های دو قطعه ای که نیمساز B رو ضلع مقابل ایجاد می کند را به دست آورید .

ب)طول های دو قطعه ای که نیمساز C رو ضلع مقابل ایجاد می کند را به دست آورید .

۲ – نسبت اجزای فرعی ، محیط ها ومساحت های دو مثلث متشابه



نکته : اگر درمثلث ABC مانندشکل زیر DE با FB موازی بوده و EF با BC موازی باشد آنگاه داریم : $\frac{AD}{DF}=\frac{AF}{FC}$



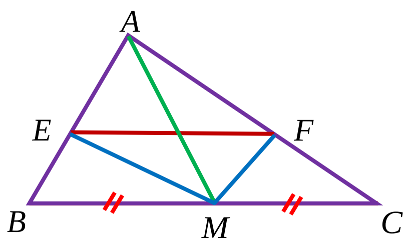
نکته : درذوزنقه $ABCD$ اگر خط MN موازی دو قاعده رسم شود بر روی دو ساق پاره خط های متناسب ایجاد می کند . یعنی داریم :

$$MN \parallel AB \Rightarrow \frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$$

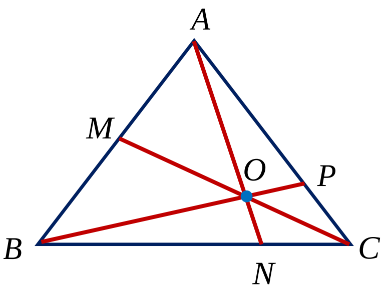
عکس رابطه فوق نیز برقرار است یعنی اگر $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$ آنگاه نتیجه می گیریم MN موازی AB است .

نکته : در یک ذوزنقه پاره خطی که وسط یک ساق را به وسط ساق دیگر متصل می کند اولاً با دو قاعده موازی است و ثانیاً طول این پاره خط برابر میانگین طول های دو قاعده ذوزنقه است

$$\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=۱ \Rightarrow MN \parallel AB \quad , \quad MN=\frac{AB+DC}{۲}$$



نکته : در مثلث ABC اگر از پای میانه AM نیمساز های ME و MF را رسم کنیم به طوری که نقاط E و F به ترتیب روی AB و AC باشند ، آنگاه EF موازی BC بوده ودر نتیجه داریم : $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$



قضیه هرون : در هر مثلث با طول اضلاع a و b و c اگر $p=\frac{a+b+c}{۲}$

آنگاه مساحت مثلث برابر است با : $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

قضیه سوا : در مثلث ABC اگر از سه رأس آن سه پاره به گونه ای رسم کنیم همرس باشند داریم : $\frac{AM}{MB}\times\frac{BN}{NC}\times\frac{CP}{PA}=۱$

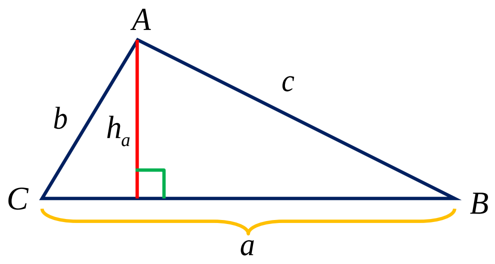
قضیه ژرگون : برای سه خط همرس در شکل مقابل داریم :

$$\frac{OA}{AN}+\frac{OB}{BP}+\frac{OC}{CM}=۲ \quad \text{و} \quad \frac{ON}{AN}+\frac{OP}{BP}+\frac{OM}{CM}=۱$$

هرون : در هر مثلث با طول اضلاع a و b و c اگر $p=\frac{a+b+c}{۲}$

آنگاه مساحت مثلث برابر است با : $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

اثبات قضیه هرون :



مثلث ABC را در نظر بگیرید . با توجه به شکل داریم :

$$\sin c=\frac{h_a}{b}\quad\Rightarrow\quad h_a=b\times\sin c$$

بنا براین مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}a\times h_a\xrightarrow{h_a=b\times\sin c}S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}a\times b\times\sin c$$

حال از طرفی دیگر بنا بر قضیه کسینوسها در مثلث ABC داریم:

$$c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\times\cos c\quad\Rightarrow\quad\cos c=\frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲ab}$$

بنابراین داریم :

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}a\times b\times\sin c\quad\Rightarrow\quad S^۲_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۴}a^۲b^۲\sin^۲ c=\frac{۱}{۴}a^۲b^۲\left(۱-\cos^۲ c\right)=\frac{۱}{۴}a^۲b^۲\left(۱-\left(\frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲ab}\right)^۲\right)$$

$$=\frac{۱}{۴}a^۲b^۲\left(۱-\frac{\left(a^۲+b^۲-c^۲\right)^۲}{۴a^۲b^۲}\right)=\frac{۱}{۴}a^۲b^۲\left(\frac{۴a^۲b^۲-\left(a^۲+b^۲-c^۲\right)^۲}{۴a^۲b^۲}\right)=\frac{۱}{۱۶}\left(۴a^۲b^۲-\left(a^۲+b^۲-c^۲\right)^۲\right)$$

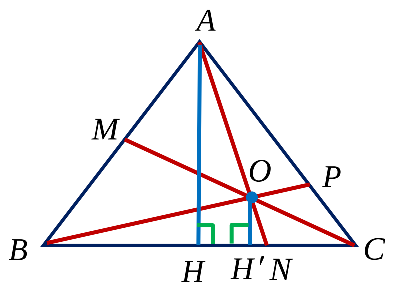
$$\frac{۱}{۱۶}\left(۲ab-a^۲-b^۲+c^۲\right)\left(۲ab+a^۲+b^۲-c^۲\right)=\frac{۱}{۱۶}\left[c^۲-(a-b)^۲\right]\left[(a+b)^۲-c^۲\right]=$$

$$=\frac{۱}{۱۶}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)=\frac{۱}{۲}(a+b+c-۲a)\frac{۱}{۲}(a+b+c-۲b)\frac{۱}{۲}(a+b+c-۲c)\frac{۱}{۲}(a+b+c)$$

$$\left(\frac{a+b+c}{۲}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{۲}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{۲}-c\right)\left(\frac{a+b+c}{۲}\right)=(p-a)(p-b)(p-c)(p)$$

قضیه سوا : در مثلث ABC اگر از سه رأس آن سه پاره به گونـه ای رسم کنیم همرس باشند داریم :

$$\frac{AM}{MB}\times\frac{BN}{NC}\times\frac{CP}{PA}=۱$$



اثبات قضیه سوا :

می دانیم اگر دو مثلث دارای ارتفاع برابر باشند ، نسبـت مسـاحت های آنها برابر با نسبت قاعده های نظیرشان است بنا براین می توان نوشت:

$$\frac{BN}{NC}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times BN}{\frac{۱}{۲}AH\times NC}=\frac{S_{\overset{\Delta}{ABN}}}{S_{\overset{\Delta}{ANC}}}=$$

$$\frac{BN}{NC}=\frac{\frac{1}{2}AH\times BN}{\frac{1}{2}AH\times NC}=\frac{S_{\triangle ABN}}{S_{\triangle ANC}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{BN}{NC}=\frac{S_{\triangle ABN}-S_{\triangle OBN}}{S_{\triangle ANC}-S_{\triangle ONC}}=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOC}}$$

$$\frac{BN}{NC}=\frac{\frac{1}{2}OH'\times BN}{\frac{1}{2}OH'\times NC}=\frac{S_{\triangle OBN}}{S_{\triangle ONC}}$$

به همین ترتیب می توان ثابت کرد :

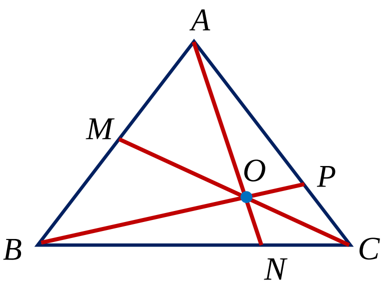
$$\frac{CP}{AP}=\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOB}}\quad \text{و} \quad \frac{AM}{MB}=\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}}$$

بنابراین داریم :

$$\frac{AM}{MB}\times\frac{BN}{NC}\times\frac{CP}{AP}=\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}}\times\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOC}}\times\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOB}}=1$$

قضیه ژرگون : برای سه خط همرس در شکل مقابل داریم :

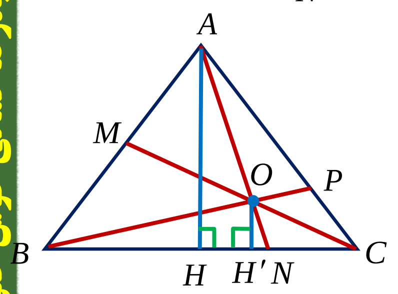
الف) $\frac{ON}{AN}+\frac{OP}{BP}+\frac{OM}{CM}=1$ و ب) $\frac{OA}{AN}+\frac{OB}{BP}+\frac{OC}{CM}=2$



اثبات قضیه ژرگون : الف) $\frac{ON}{AN}+\frac{OP}{BP}+\frac{OM}{CM}=1$

از A و O بر BC عمود می کنیم در این صورت می توان گفت :

$$\left.\begin{matrix}AH\perp BC\\ OH'\perp BC\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ AH\parallel OH'\ \Rightarrow\ \overset{\Delta}{AHN}\approx\overset{\Delta}{OH'N}\ \Rightarrow\ \frac{ON}{AN}=\frac{OH'}{AH}$$



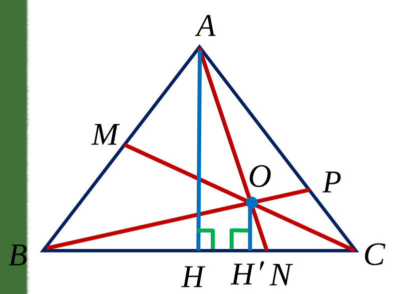
$$\frac{ON}{AN}=\frac{OH'}{AH}=\frac{\frac{1}{2}OH'\times BC}{\frac{1}{2}AH\times BC}=\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle ABC}}$$

به همین ترتیب ثابت می شود :

$$\frac{OP}{BP}=\frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle ABC}}\quad \text{و}\quad \frac{OM}{CM}=\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}}$$

درنتیجه می توان نوشت :

$$\frac{ON}{AN}+\frac{OP}{BP}+\frac{OM}{CM}=\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}=1$$



اثبات قضیه ژرگون : ب) $\frac{OA}{AN}+\frac{OB}{BP}+\frac{OC}{CM}=2$

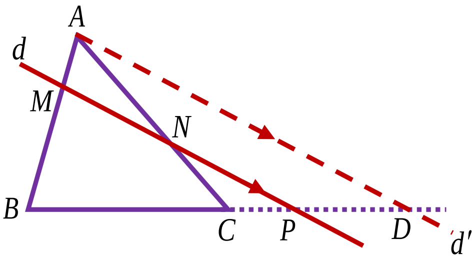
با توجه به قسمت (الف) می توان نوشت :

$$\frac{OA}{AN}+\frac{OB}{BP}+\frac{OC}{CM}=\frac{AN-ON}{AN}+\frac{BP-OP}{BP}+\frac{CM-OM}{CM}$$

$$=۱-\frac{ON}{AN}+۱-\frac{OP}{BP}+۱-\frac{OM}{CM}=۳-\underbrace{\left(\frac{ON}{AN}+\frac{OP}{BP}+\frac{OM}{CM}\right)}_{۱}=۲$$

قضیه منلائوس : اگر خط d اضلاع AB و AC و BC از مثلث ABC را به ترتیب در نقاط M و N و P قطع کند ، ثابت کنید : $\frac{AM}{MB}\times\frac{BP}{CP}\times\frac{CN}{NA}=۱$

اثبات :خط d یا دو ضلع و امتداد ضلع سوم ر ا قطع می کند یا امتـداد هر یک از اضلاع مثلث را قطع می کند .



در هر دو حالت از رأس A خط d' را موازی خط d رسم می کنیم تـا خط BC یا امتداد آن را در نقطه D قطع کند در این صورت می توان نوشت :

در شکل اول داریم :

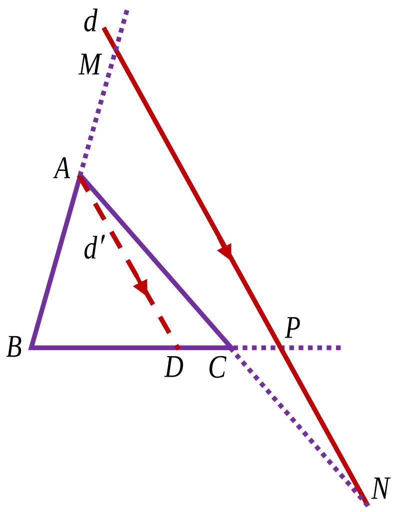
$$\overset{\Delta}{ABD}:\quad MP\| AD\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{BM}{MA}=\frac{BP}{PD}\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{AM}{MB}=\frac{PD}{PB}$$

$$\overset{\Delta}{CAD}:\quad NP\| AD\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{CN}{NA}=\frac{CP}{PD}$$

بنا براین می توان نوشت :

$$\frac{AM}{MB}\times\frac{BP}{PC}\times\frac{CN}{NA}=\frac{PD}{PB}\times\frac{PB}{PC}\times\frac{CP}{PD}=۱$$

در شکل دوم نیز داریم :



$$\overset{\Delta}{MBP}:\quad AD\| MP\xrightarrow{\text{نتیجه تالس}}\frac{AM}{BM}=\frac{DP}{BP}$$

$$\left.\begin{array}{l}AD\| MN\ ,\ \text{مورب}\quad AN\Rightarrow\hat{A}_۱=\hat{N}_۱\\ \hat{C}_۱=\hat{C}_۲\end{array}\right\}\Rightarrow\overset{\Delta}{ADC}\approx\overset{\Delta}{CPN}$$

$$\Rightarrow\frac{CP}{CD}=\frac{CN}{AC}\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}}\frac{CP}{CP+CD}=\frac{CN}{CN+AC}$$

$$\Rightarrow\frac{CP}{DP}=\frac{CN}{AN}$$

بنا براین می توان نوشت :

$$\frac{AM}{MB}\times\frac{BP}{PC}\times\frac{CN}{NA}=\frac{DP}{BP}\times\frac{BP}{PC}\times\frac{CP}{PD}=۱$$

سوالات تشریحی فصل ۲

۱- از تناسب $\frac{3}{4}=\frac{5-2x}{x}$ مقدار x را به دست آورید.

۲- مقدار x را از تساوی مقابل به دست آورید. $\frac{2x-1}{x^2+x+2}=\frac{3}{2x+1}$

۳- مقدار y,x را از رابطه های $\frac{2}{3}=\frac{y}{7}=\frac{5x}{2-x}$ به دست آورید.

٤- اگر $\frac{4}{3}=\frac{x}{2}$ و $\frac{4}{5}=\frac{2y}{3}$ باشد حاصل $\frac{5y}{6x}$ را به دست آورید .

۵- از تناسب $\frac{x-4}{5}=\frac{2x+5}{3}=y-2$ مقادیر x و y را به دست آورید.

٦ – b, a رااز تناسب $\frac{1}{b}=\frac{25}{a}=\frac{a}{4}$ به دست آورید.

۷- $\frac{1}{2}=\frac{x}{y}$ باشد مقدار $\frac{x+1}{y+2}$ چقدراست.

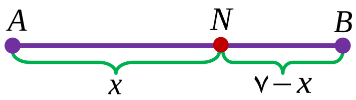
۸ –اگر $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=.....$ ثابت کنید : $\frac{a_1+a_2+a_3+.....}{b_1+b_2+b_3+.....}=\frac{a_1}{b_1}$

۹- ازرابطه های زیر y, x رابیابید.

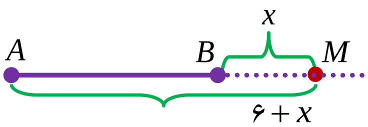
الف) $\frac{x+y-1}{y}=\frac{2}{3}=\frac{2x-1}{x+1}$

ب) $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{a+b+c}{x}=\frac{y}{3}$

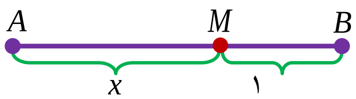
۱۰ – پاره خط AB به طول ۷ سانتی متر را در اختیار داریم . نقطه N را بر روی این پاره خط طوری انتخاب می کنیم که $\frac{AN}{NB}=\frac{۳}{۵}$ طول های AN و NB را به دست آورید .



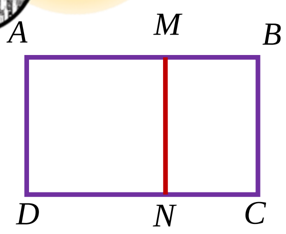
۱۱ – پاره خط AB به طول ٦ سانتی متر را در اختیار داریم . نقطه M را بر روی امتداد این پاره خط طوری انتخاب می کنیم که $\frac{AM}{MB}=\frac{۷}{۵}$ طول های AM و MB را به دست آورید .

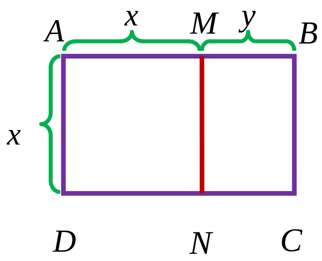


۱ – پاره خط AB را در اختیار داریم ، نقطه M را روی این پاره خط طوری در نظر می گیریم که این پاره خط را به دو بخش نا مساوی تقسیم کند اگر نسبت قسمت بزرگتر به قسمت کوچکتر برابر نسبت کل به قست بزرگتر باشد و طول بخش کوچکتر را یک واحد در نظر بگیریم ، طول قسمت بزرگتر را به دست آورید .



۱۳ – در مستطیل $ABCD$ پاره خط MN را رسم کرده ایم تا مربع $AMND$ و مستطیل $MBCN$ به وجود آید . اگر مستطیل $AMND$ با مستطیل $ABCD$ متشابه باشد یعنی نسبت طول به عرض یکی با نسبت طول به عرض دیگری برابر باشد ، این نسبت را به دست آورید .(نسبت طلایی)





۱٤– میانگین هندسی بین b,a را تعریف کرده و سپس میانگین هندسی بین اعداد ۲۵و٤رابه دست آورید.

۱۵– $2x^2$واسطه هندسی بین x^3 وچه عبارتی است؟

۱۶- میانگین هندسی بین هریک ازجفت عددهای زیرراپیدا کنید.

الف)٤و٩ ب) $۲\sqrt{۲},۷\sqrt{۲}$

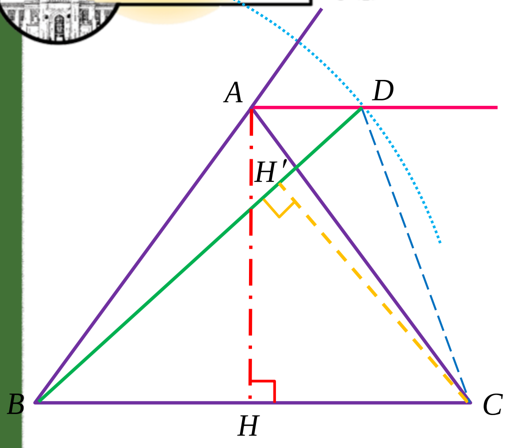
۱۷- الف)میانگین هندسی دوعدد $\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۱۲}$ را بدست آورید.

ب)مقدار xوy را ازتناسب $\frac{۶}{y}=\frac{x}{۴}=\frac{۳}{۲}$به دست آورید.

ج)جاهای خالی را پر کنید.

۱) $\frac{a}{b}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=..........$

۲) $\frac{a}{۳}=\frac{b}{۴}=\frac{c}{۵}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{a+b+c}{..........}=..............$



۱۸- در مثلث ABC داریم: $AB = AC = ۱۷$ و $BC = ۱۶$. دایره ای به مرکز B و به شعاع ۲۵ واحد، خطی که از رأس A موازی BC رسم شود را در D قطع می کند. فاصلهٔ C از BD را حساب کنید؟(ریاضی خارج ۹۸)

حل:

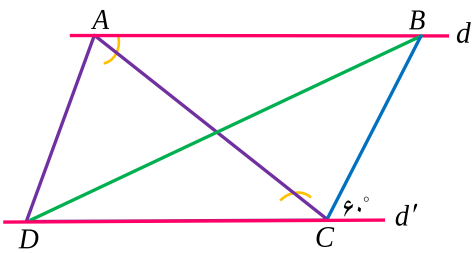
در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع و میانه وارد بر قاعده بر هم منطبق اند پس داریم:

$$AH^۲ = AB^۲ - BH^۲ = ۱۷^۲ - ۸^۲ = ۲۲۵ \Rightarrow AH = ۱۵$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times BC \times AH = \frac{۱}{۲} \times ۱۶ \times ۱۵ = ۱۲۰$$

دو مثلث ABC و DBC در قاعده BC مشترک بوده و رأس هر دو بر روی خط AD که موازی BC است قرار دارد، بنابراین مساحت این دو مثلث با هم برابر است و داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{DBC}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۱۲۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times CH \times BD = ۱۲۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times CH \times ۲۵ = ۱۲۰ \Rightarrow CH = ۹/۶$$

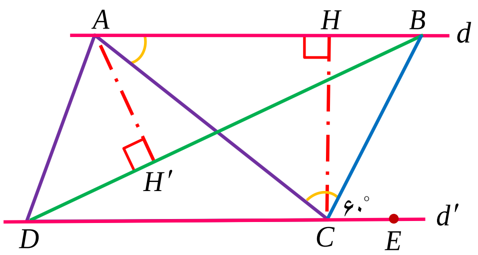


۱۹- در شکل زیر خط های d و d' موازی هستند اگر $B\hat{C}A = B\hat{A}C$ و $BC = \frac{۱}{۲}$ و $DB = ۲AB$ باشد، آنگاه ارتفاع وارد بر ضلع DB در مثلث ABD چند سانتی متر است؟

حل:

$d \parallel d'$, مورب $BC \Rightarrow A\hat{B}C = B\hat{C}E = ۶۰^\circ$

در مثلث ABC اولاً $B\hat{C}A = B\hat{A}C$ و ثانیاً $A\hat{B}C = ۶۰^\circ$ بنابراین مثلث ABC متساوی الاضلاع است.(مثلث متساوی الساقینی که یک زاویه ۶۰° دارد، متساوی الاضلاع است)



از طرفی می دانیم در مثلث متساوی الاضلاع، ارتفاع وارد بر هر ضلع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر آن ضلع است. یعنی داریم:

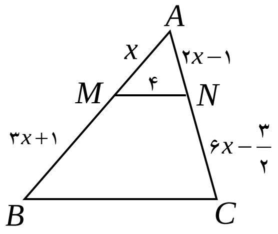
$$CH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} BC = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

دو مثلث ABC و ABD دارای مساحت برابر هستند قاعده AB در هر دو مشترک بوده و ارتفاع وارد بر این قاعده در هر دو مثلث برابر فاصله بین دو خط موازی d و d' است و این ارتفاع برابر $CH = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$ است. بنابراین می توان نوشت:

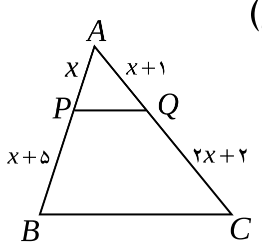
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{ABD}} \Rightarrow \frac{۱}{۲} AB \times CH = \frac{۱}{۲} AH' \times BD \xrightarrow{BD=۲AB} AB \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} = AH' \times ۲AB$$

$$\Rightarrow AH' = \frac{\sqrt{۳}}{۸}$$

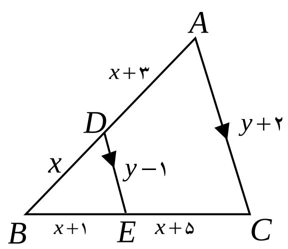
۲۰- در شکل زیر MN با BC موازی است به کمک قضیه ی تالس طول x را حساب کنید .سپس محیط مثلث ABC رابیابید.



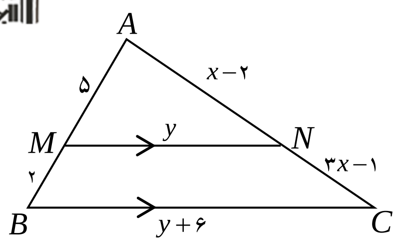
۲۱- در شکل زیر PQ موازی BC است.مقدار x رامحاسبه کنید.(باراه حل)



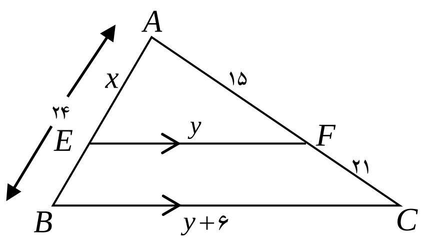
۲۲- باتوجه به شکل مقابل مقادیر y, x رابیابید.



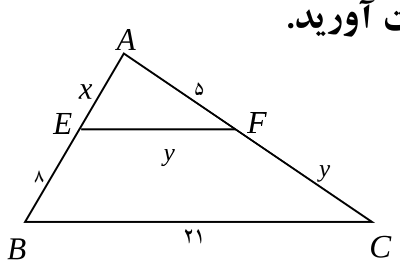
۲۳- مقدار y,x را به دست آورید.



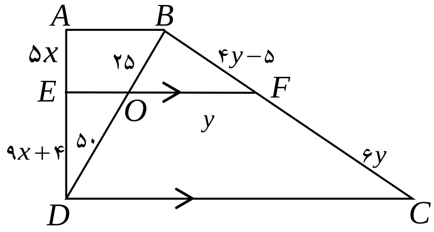
۲۴- درشکل زیر x راپیداکنید.



۲۵- درمثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ پاره خط EF باموازی است .مقادیر y,x رابه دست آورید.



۲۶- باتوجه به مقدارهای داده شده درذوزنقه $ABCD$ اندازه y,x وساق های ذوزنقه را به دست آورید.

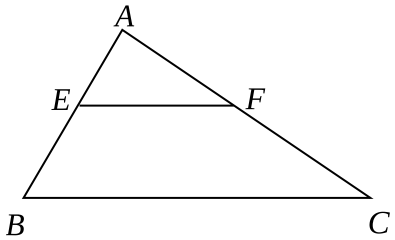


۲۷- ثابت کنید اگر خطی به موازات یک ضلع مثلثی رسم شود روی دوضلع دیگر پاره خط های متناسب بوجود می آید.

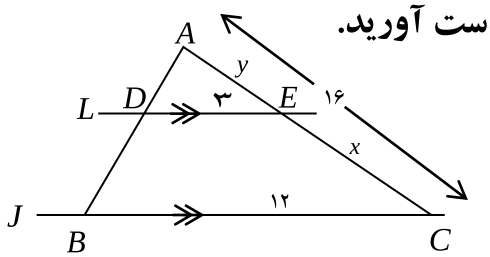
۲۸- بااستفاده ازقضیه تالس ثابت کنیدخطی که وسط های دو ضلع یک مثلث را به هم وصل می کند باضلع سوم موازی است واز نظراندازه نصف ضلع سوم است.

۲۹- ثابت کنید هرگاه خطی دوضلع مثلث را به یک نسبت قطع کند حتما موازی ضلع سوم است.

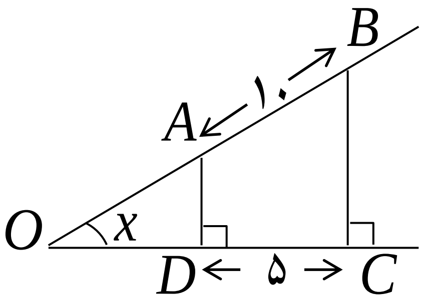
۳۰- درمثلث ABC پاره خط EF موازی BC است ثابت کنید: $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$



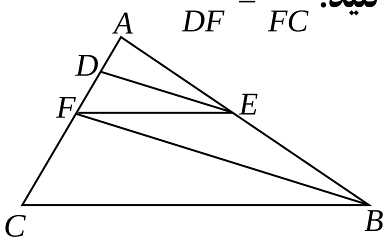
۳۱- درشکل مقابل خط L موازی با خط J است .طول y,x رابه دست آورید.



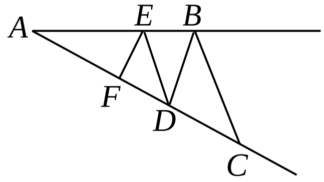
۳۲- درشکل مقابل اندازه ی زاویه x را محاسبه کنید.



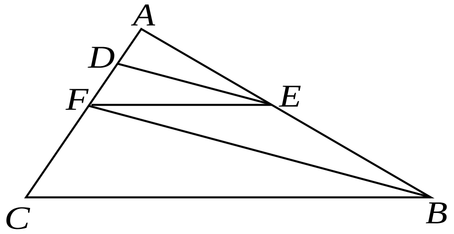
۳۳- درمثلث ABC درشکل زیر DE با FB موازی است و EF با BC. ثابت کنید: $\frac{AD}{DF}=\frac{AF}{FC}$



۳۴- در شکل مقابل ثابت کنید: $\frac{AF}{AD}=\frac{AD}{AC}$



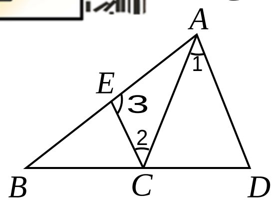
۳۵- در شکل داده شده ب $\begin{cases} AD = ۲ \\ FD = ۴ \end{cases}$ بطوریکه $\begin{cases} DE \parallel FB \\ EF \parallel BC \end{cases}$ طول FC چقدر است ؟



۳۶- بر ضلع $x\hat{o}y$ دو نقطه A و B رااختیار کرده وازاین نقاط دو خط موازی هم رسم می کنیم تا ضلع oy را به ترتیب درنقاط C و D قطع کنند وازنقطه ی D خطی موازی BC رسم می کنیم تا ضلع ox رادر نقطه E قطع کند ثابت کنید: $OB^۲ = OA.OE$

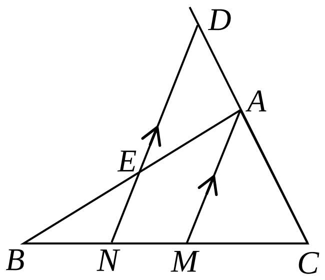
۳۷- اگر درمثلث ABC, $DE \parallel BC$, $\frac{AD}{DB} = \frac{۲}{۷}$, $DE = x + ۱$ و $BC = ۳x + ۵$ باشد اندازه ی ضلع BC را بیابید.

۳۸- در شکل $\hat{3}=\hat{2}=\hat{1}$ می باشد اگر $AC=6, AB=15$ باشد نسبت $\frac{BD}{DC}$ چقدر است؟

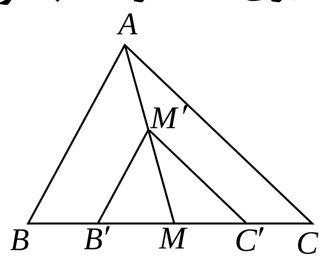


۳۹- در مثلث ABC , AM میانه وارد بر ضلع BC می باشد از نقطه ی دلخواه N روی ضلع BC خطی موازی میانه AM رسم می کنیم تادوضلع دیگر را در

نقاط E و D قطع کند با دوبار استفاده از قضیه تالس ثابت کنید: $\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AE}$

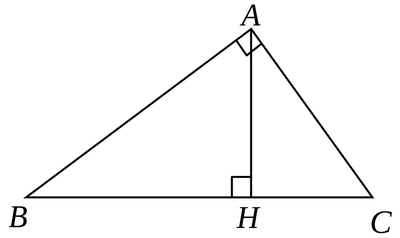


۴۰- در شکل روبه رو AM میانه وارد بر ضلع BC است از نقطه اختیاری M' روی AM دو خط به موازات AB و AC رسم کرده ایم ثابت کنید که $MB'=MC'$.



۴۱- دو مثلث متشابه را تعریف کنید وچرا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابه هستند.

۴۲- در شکل مقابل چند مثلث متشابه وجود دارد ؟مثلث های متشابه را دسته بندی کنید؟



۴۳- ابتدا حالات تشابه دو مثلث را نام ببرید ، سپس به دلخواه یک حالت را اثبات کنید؟

٤٤- ثابت کنید اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند آن دو مثلث متشابه اند.

٤٥- ثابت کنید هر گاه دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب وزاویه ی بین آنها برابر باشد آن دو مثلث متشابهند.

٤٦- ثابت کنید اگر سه ضلع از مثلث با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند ان دو مثلث متشابهند.

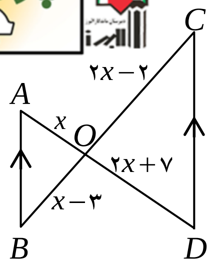
۴۷- در شکل مقابل مطلوب است :

الف)مقدار x

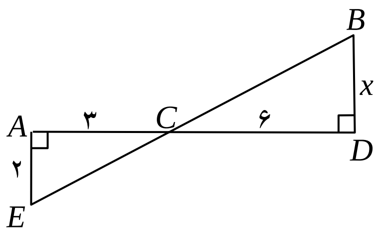
ب)از کدام قضیه استفاده کرده اید؟

ج)آیا دو مثلث متشابهند؟

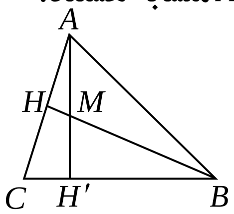
د)نسبت تشابه دو مثلث ؟



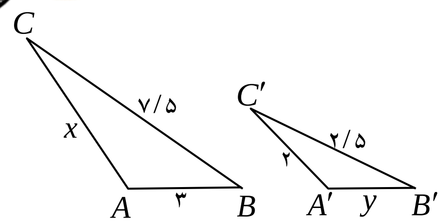
۴۸- در شکل مقابل مقدار x را به دست آورید؟



۴۹- در شکل زیر AH' و BH ارتفاع های مثلث ABC هستند.چرا دو مثلث AMH و $AH'C$ متشابه هستند؟

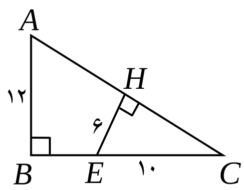


۵۰- دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه اند مقدار x و y را بدست آورید؟



۵۱- در شکل مقابل :الف)ثابت کنید $C\overset{\Delta}{E}H \sim A\overset{\Delta}{B}C$

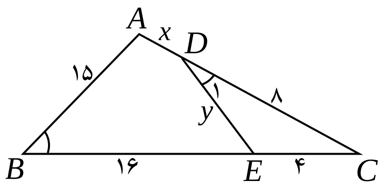
ب)اندازه BC و CH را به دست آورید؟



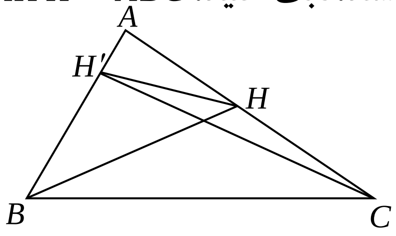
۵۲- در شکل مقابل:

اولا:ثابت کنید $A\overset{\Delta}{B}C$ و $D\overset{\Delta}{E}C$ متشابهند.

ثانیا: x و y را بیابید.

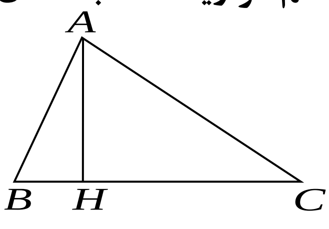


۵۳- در مثلث ABC ، BH و CH' ارتفاع های نظیر دو ضلع AC و AB می باشند. ثابت کنید: $\overset{\Delta}{AHH'} \sim \overset{\Delta}{ABC}$



۵۴- نشان دهید درهر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بروتر میانگین هندسی بین دو قطعه ایجاد شده روی وتر است.

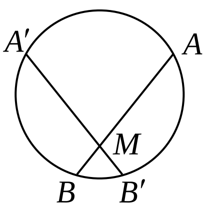
۵۵- به کمک تشابه مثلث ها ثابت کنید اگر AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه ABC باشد آن گاه : $AB^2 = BH \times BC$



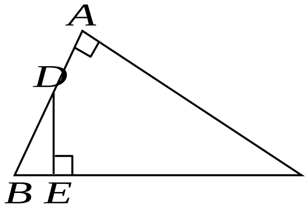
۵۶- ثابت کنید هر گاه دو مثلث متشابه باشند نسبت نیمسازهای متناظر برابراست بانسبت اضلاع.

۵۷- اگر دو مثلث متشابه باشند ثابت کنید نسبت میانه های نظیر در آن ها برابراست با نسبت تشابه دومثلث .

۵۸- در شکل مقابل AB و $A'B'$ دو وتر ازدایره هستند که در نقطه M یکدیگررا قطع کرده اند ثابت کنید: $MA \times MB = MA' \times MB'$



۵۹- در مثلث قائم الزاویه ABC نقطه D وسط ضلع AB است و DE بر BC عمود است
ثابت کنید: $EC^2 - EB^2 = AC^2$

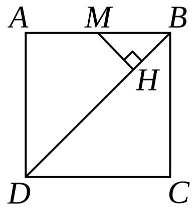


C

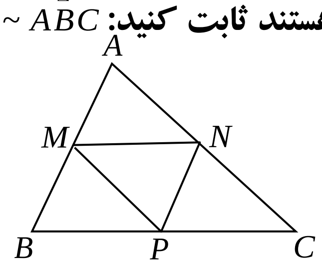
۶۰- در مربع $ABCD$ از نقطه ی M وسط ضلع AB عمود MH را بر قطر BD فرود می آوریم.ثابت کنید:

الف) $M\overset{\Delta}{H}B \sim B\overset{\Delta}{C}D$

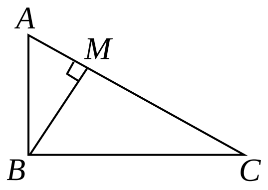
ب) $MH = \frac{۱}{۴}BD$



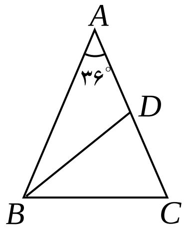
۶۱- در شکل روبه رو نقاط M و N و P به ترتیب نقاط وسط ضلع های AB و AC و BC هستند ثابت کنید: $M\overset{\Delta}{N}P \sim A\overset{\Delta}{B}C$



۶۲- در مثلث قائم الزاویه ABC ؛ارتفاع وارد بر وتر ٤می باشد .
اگر $AM = 2$ ؛اندازه اضلاع مثلث را به دست آورید؟

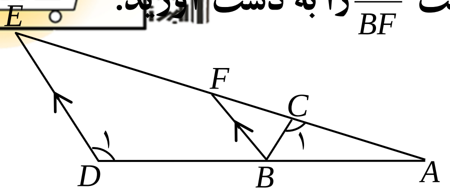


۶۳- در مثلث متساوی الساقین ABC زاویه راس ۳۶ در جه می باشد و BD نیمساز زاویه B است.
ثابت کنید مثلث های ABC و BDC متشابهند.



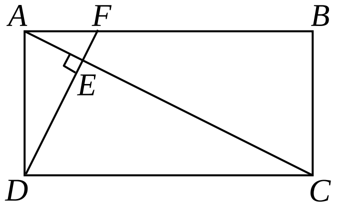
۶٤- ثابت کنید درذوزنقه قائم الزاویه ای که دو قطر برهم عمودند ارتفاع واسطه هندسی بین دو قاعده است.

۶۵- در شکل مقابل داریم: $\hat{D}_۱ = \hat{C}_۱ , BD = AC = ۲ , AB = ۳ , DE \| FB$ نسبت $\frac{BC}{BF}$ را به دست آورید.

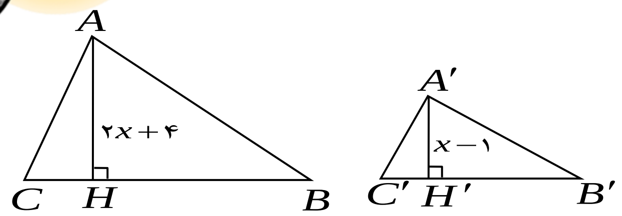


۶۶- در شکل مقابل $ABCD$ مستطیل است که درآن $AB = ۲BC$ است. ازراس D عمود DE رابرقطر AC وارد کرده امتداد می دهیم تاضلع AB رادرنقطه F قطع کند ثابت کنید:اولا: $DE = ۲AE$

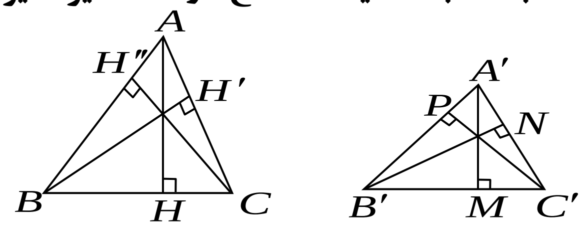
ثانیا: $DE = 4EF$



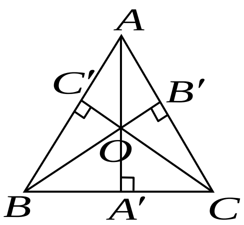
٦٧- پاره خط های AH و AH' دو ارتفاع متناظر از دو مثلث متشابه $\overset{\Delta}{ABC}$ و $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ می باشند که $\frac{S\ A'\overset{\Delta}{B'}C'}{S\ \overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۴}{۲۵}$ است مقدار x را بیابید.



٦٨- در شکل مقابل سه ارتفاع دو مثلث نظیر به نظیر متناسبند. ثابت کنید سه ضلع دو مثلث نیز نظیر به نظیر متناسب می گردند.



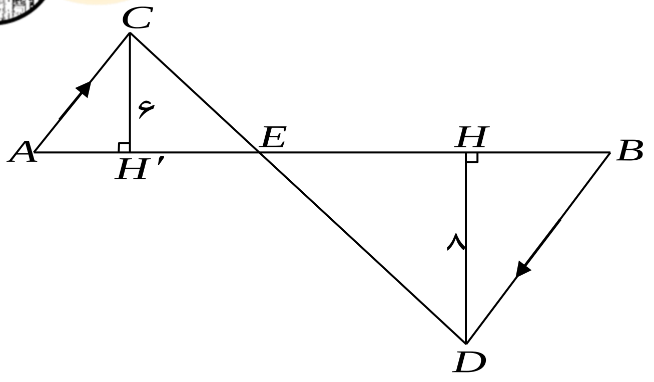
٦٩- در شکل مقابل BB' و CC' و AA' سه ارتفاع مثلث ABC می باشند ثابت کنید: $OA.OA'=OB.OB'=OC.OC'$



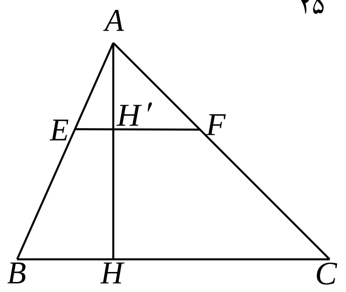
۷۰- با توجه به اندازه های روی شکل و $AB = ۳۵$:

الف)نسبت مساحت های مثلث های ACE و BDE را بیابید.

ب)مساحت مثلث BDE را به دست آورید .



۷۱- در شکل مقابل اگر $EF \parallel BC$ ونسبت مساحت های دو مثلث AEF و ABC برابر $\frac{۴}{۲۵}$ باشدو $AH' = ۶$ اندازه ارتفاع AH را بدست آورید.



۷۲- طول ضلع های مثلث ABC، ۷و۹و۱۴سانتی متراست .مثلث PQR با ABC متشابه است و طول بزرگترین ضلع آن ۲۱ سانتی متر است .

الف)محیط مثلث PQR را به دست آورید.

ب)نسبت مساحت مثلث ABC به مثلث PQR چیست؟

۷۳- طول اضلاع مثلثی ٦و٨و١٠سانتی متراست .اگر این مثلث با مثلثی به محیط ٤٨ سانتی متر متشابه باشد اندازه بزرگترین ضلع آن مثلث چند سانتی متراست ؟

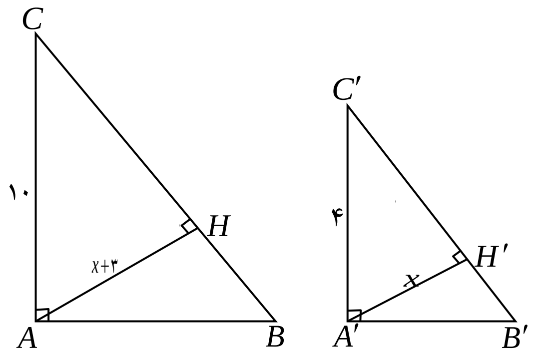
نسبت نیمسازهای نظیر درآنها چقدر است؟

۷٤- دو مثلث ABC و DEF متشابهند ،اگر طول اضلاع مثلث ABC ۷و۹و۱۱سانتی متر باشندومحیط مثلث DEF ٥٤سانتی متر باشد ابتدا طول اضلاع مثلث DEF را محاسبه نموده وسپس نسبت مساحت ها ی این دو مثلث را مشخص کنید.

۷۵-اگر $\hat{B}=\hat{B'}$ آن گاه:

الف)مقدار x را حساب کنید.

ب)نسبت محیط های دو مثلث را بدست آورید.



۷۶- دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند .اگر اضلاع مثلث ABC به ترتیب ٤و٥و٦باشد ونسبت ارتفاع مثلث ABC به ارتفاع $A'B'C'$ برابر $\frac{۳}{۲}$:

اولا:اضلاع مثلث $A'B'C'$ رابیابید.ثانیا:نسبت مساحت های دو مثلث را بیابید.

۷۷- محیط های دو مثلث متشابه ۱۵و۲۵سانتی مترمی باشند .اگر مساحت مثلث کوچکتر برابر ۳۰ سانتی متر مربع باشد مساحت مثلث بزرگترا بیابید.

۷۸- دردو مثلث متشابه مساحت یکی ۹برابر دییگری است .اگر طول یک ضلع از مثلث کوچکتر ۷سانتی مترباشدطول ضلع متناظر درمثلث بزرگتررابیابیدمحیط مثلث بزرگتر چند برابر محیط مثلث کوچکتراست؟

۷۹- نسبت مساحت های دو مثلث متشابه $\frac{۲۵}{۱۴۴}$ است. نسبت محیط هارا پیدا کنید.

۸۰- مساحت دو مثلث متشابه ۲۴و۲۱۶سانتی متر مربع است .اگر محیط مثلث بزرگ تر ۷۲سانتی متر باشد محیط مثلث کوچکتر چند سانتی متر است؟

۸۱- مثلث ABC که $\hat{A}=۳۰^\circ$ و $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $S_\Delta=۲۰\sqrt{۳}$ با مثلث $A'B'C'$ که در آن $a'=\sqrt{۱۰}$ (ضلع بزرگتر)متشابه است .نسبت تشابه دو مثلث را بدست آورید؟

۸۲–در شکل زیر $AC = ۸$ ، $AB = ۶$ ، $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $MNPQ$ مربع است ، مساحت مربع را به دست آورید .