چند ضلعی ها و ویژگی هایی از آنها

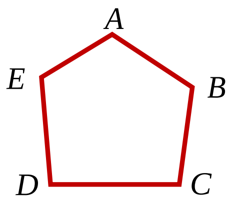
تعریف : چند ضلعی شکل است شامل $n\ (n \geq ۳)$ پاره خط متوالی که :

۱ – هر پاره خط دقیقاً دو پاره خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند .

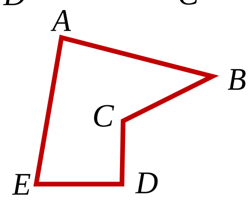
۲ – هر دو پاره خط که در یک انتها مشترکند ، روی یک خط نباشند .

با توجه به شکل های مقابل می توان گفت :

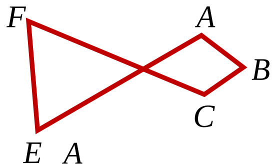
اشکال (۱) و (۲) و (۷) چند ضلعی هستند .



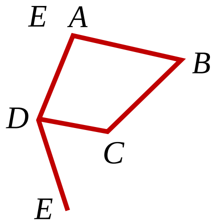
(۱)



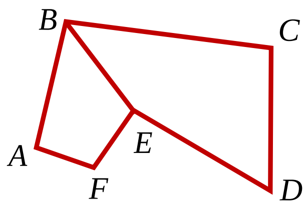
(۲)



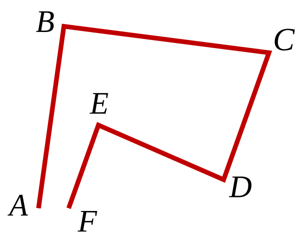
(۳)



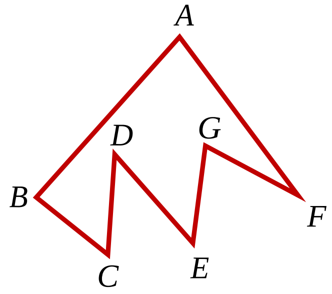
(۴)



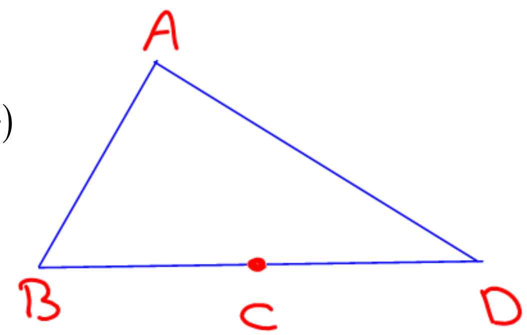
(۵)



(۶)

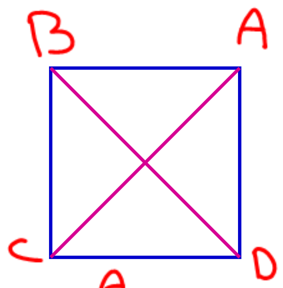


(۷)



قطر در چند ضلعی ها

درهر n ضلعی ، هر پاره خط راکه دو انتهای آن ، دو رأس غیر مجاور باشند ، قطر می نامند.

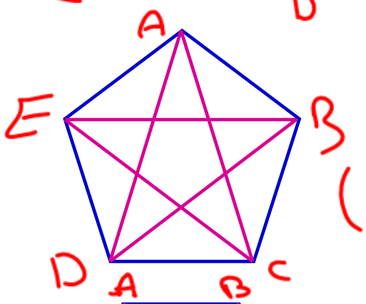


در چهار ضلعی : اولاً از هر رأس تعداد یک قطر خارج شده است ؛

$۴-۳=۱$

$\frac{۴(۱)}{۲}=۲$

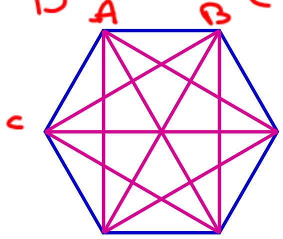
وثانیاً تعداد قطر ها برابر $\frac{۴\times۱}{۲}=۲$ است.



در پنج ضلعی : اولاً از هر رأس تعداد دو قطر خارج شده است ؛

$(۵-۳)=۲$ $\frac{۵\times۲}{۲}=۵$

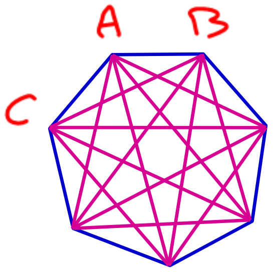
و ثانیاً تعداد قطر ها برابر $\frac{۵\times۲}{۲}=۵$ است .



در شش ضلعی : اولاً از هر رأس تعداد سه قطر خارج شده است ؛

$۶-۳=۳$ $\frac{۶\times۳}{۲}=۹$

و ثانیاً تعداد قطر ها برابر $\frac{۶\times۳}{۲}=۹$ است.



در هفت ضلعی : اولاً از هر رأس تعداد چهار قطر خارج شده است؛

$(n-۳)$ $\frac{۷\times۴}{۲}=۱۴$

$۷-۳=۴$

و ثانیاً تعداد قطر ها برابر $\frac{۷\times۴}{۲}=۱۴$ است.

به همین ترتیب می توان گفت :

$۱۲-۳=۹$

$\frac{۱۲\times۹}{۲}=۵۴$

در دوازده ضلعی ، از هر رأس تعداد $۱۲-۳=۹$ قطر خارج شده و تعداد قطر ها برابر $\frac{۱۲\times۹}{۲}=۵۴$ می باشد .

$n-۳$

$\frac{n(n-۳)}{۲}$

در چند ضلعی ها، اگر از یک رأس به خود آن رأس و یا به دو رأس مجاور آن وصل کنیم ، قطر به وجود نمی آید ولی با وصل کردن به بقیه رأس ها قطر ساخته می شود بنابراین از هر رأس $n-۳$ قطر می گذرد از آنجاییکه هر قطر بین دو رأس واقع شده است برای به دست آوردن تعداد قطر ها باید مجموع تعداد قطر های گذرنده از همه رأس ها (یعنی $n(n-۳)$) ، را بر ۲ تقسیم کرد .

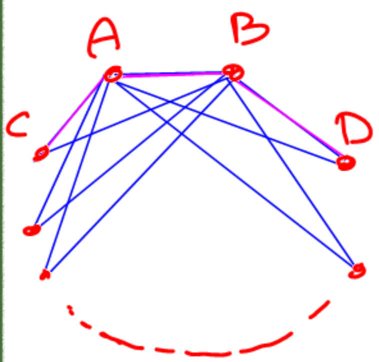
پایه و رشته دهم ریاضی

جناب استاد حمیدرضا کمالی خوش خلق

به این ترتیب می توان گفت :

در هر n ضلعی ، از هر رأس تعداد $n-3$ قطر خارج شده بنابراین تعداد قطر ها برابر $\frac{n(n-3)}{2}$ می باشد .

مثال : n نقطه که هیچ سه تای آنها روی یک خط واقع نیستند ، مفروض اند . با توجه به استدلالی که در محاسبه تعداد قطر های n ضلعی به کار برده اید ، نشان دهید از هر نقطه به نقطه دیگر $n-1$ پاره خط رسم می شود . بنابراین این n نقطه را با $\frac{n(n-1)}{2}$ پاره خط می توان به هم متصل کرد . چه رابطه ای بین این تعداد پاره خط و مجموع تعداد قطر ها و ضلع ها در n ضلعی وجود دارد ؟



قطرها $n-1$ اضلاع

$$n+\frac{n(n-3)}{2}=\frac{2n+n(n-3)}{2}=\frac{n(2+n-3)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

نکته: در هر n ضلعی محدب، مجموع قطرهای دو رأس مجاور برابر است با $2n-6$.

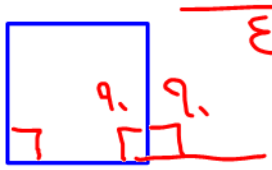
نکته: در هر n ضلعی محدب، مجموع قطرهای دو رأس غیر مجاور برابر است با $2n-7$.

نکته: با تبدیل هر n ضلعی به $n+1$ ضلعی به تعداد قطرها مقدار $n-1$ قطر اضافه می شود.

نکته: مجموع زوایای داخلی nضلعی برابر $(n-2)\times180^\circ$ بوده و مجموع زوایای خارجی برابر 360° است.

نکته: هر زاویه خارجی n ضلعی منتظم برابر $\frac{360^\circ}{n}$ بوده و هر زاویه داخلی nضلعی منتظم برابر $180^\circ-\frac{360^\circ}{n}$ است.

$\frac{360}{4}$



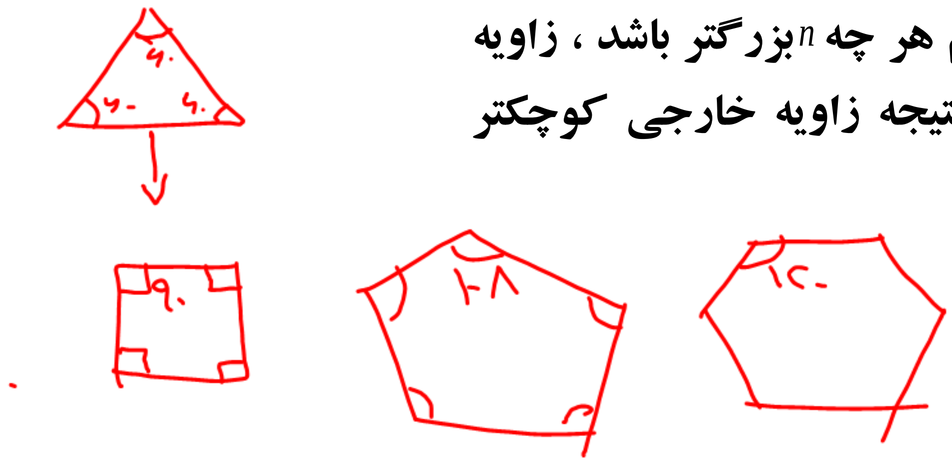
نکته: همچنین می‌توان گفت، هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم برابر $\frac{(n-2)\times180^\circ}{n}$ است.

نکته: در هر nضلعی منتظم، اگر از یک رأس تمام قطرهای گذرنده از آن رأس را رسم کنیم، آنگاه آن زاویه به $n-2$ بخش مساوی تقسیم می شود و زاویه هر بخش برابر $\frac{180^\circ}{n}$ است.

نکته : با تبدیل n ضلعی منتظم به $n+1$ ضلعی منتظم به هر زاویه داخلی، $\frac{360^\circ}{n(n+1)}$چند درجه اضافه می شود.

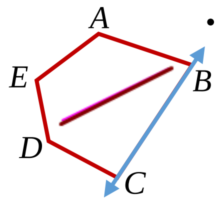
نکته : هر n ضلعی محدب حداکثر سه زاویه حاده داخلی دارد.

نکته: در n ضلعی های منتظم هر چه nبزرگتر باشد ، زاویه داخلی بزرگتر بوده و در نتیجه زاویه خارجی کوچکتر می شود.

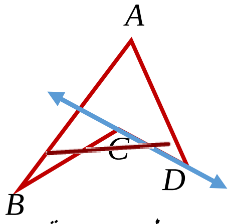


تعریف : nضلعی را محدب گوییم هرگاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن ، بقیهٔ نقاط چند ضلعی در یک طرف آن خط واقع شوند.

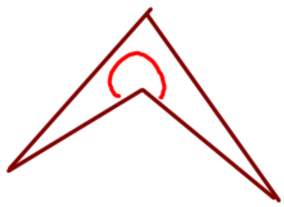
هر ((چند ضلعی)) را که محدب نباشد مقعر می نامند.



چند ضلعي محدب



چند ضلعي مقعر



$\hat A+\hat B+\hat C+\hat D=360° \Rightarrow \frac{\hat A}{2}+\frac{\hat B}{2}+\frac{\hat C}{2}+\frac{\hat D}{2}=180°$

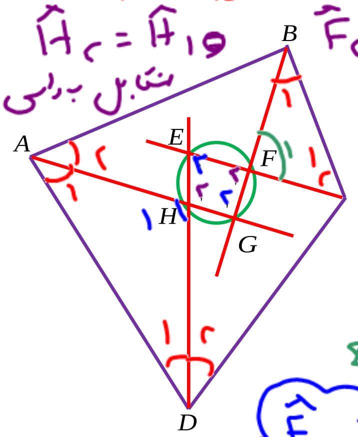
$\hat H_2=\hat H_1$ متقابل به رأس

$\hat F_2=\hat F_1$

نکته: با رسم نیمساز های داخلی هر چهار ضلعی محدب یک چهارضلعی به وجود می آید که زوایای مقابل آن مکمل هم هستند.

$\hat A_1+\hat B_1+\hat C_1+\hat D_1=180°$

یعنی در چهار ضلعی مقابل داریم:



$AHD: \hat A_1+\hat D_1+\hat H_1=180°$

$BFC: \hat B_1+\hat C_1+\hat F_1=180°$

$$\hat G_1+\hat E_1=\hat F_1+\hat H_1=180°$$

$\underbrace{\hat A_1+\hat B_1+\hat C_1+\hat D_1}_{180}+\hat H_1+\hat F_1=360° \rightarrow \hat H_1+\hat F_1=180$

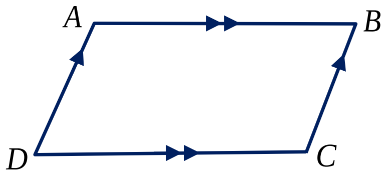
$\hat F_2+\hat H_2=180$

پایه و رشته دهم ریاضی

جناب استاد حمیدرضا کمالی خوش خلق

چهار ضلعی های مهم و ویژگی های آنها:

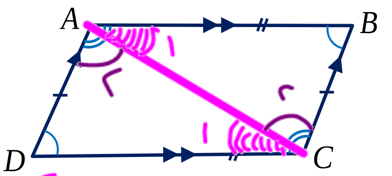
متوازی الاضلاع:



متوازی الاضلاع، چهار ضلعی است که اضلاع آن دو به دو موازیند.

$$AB \| DC \quad , \quad AD \| BC$$

نکات مربوط به متوازی الاضلاع



نکته: اضلاع مقابل متوازی الاضلاع با هم برابرند.

(و بلعکس، هر چهار ضلعی که اضلاع مقابل آن برابر باشند، متوازی الاضلاع است)

$$ABCD \text{ متوازی الاضلاع است } \Leftrightarrow \underbrace{AB = DC \quad , \quad AD = BC}_{\text{حکم}}$$

فرض

برهان: قطر AC را رسم می کنیم

$AB \| DC$ و AC مورب $\rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1$

$AC = AC$

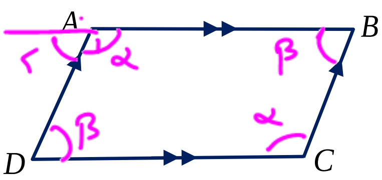
$AD \| BC$ و AC مورب $\rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2$

$\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle ABC \cong \triangle ADC \rightarrow \begin{cases} AD = BC \\ AB = DC \end{cases}$

فرض: $AB = CD$ و $AD = BC$

حکم: ABCD متوازی الاضلاع است

$\left.\begin{array}{l} AB = DC \\ BC = AD \\ AC = AC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ABC \cong \triangle ADC \rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \xrightarrow{\text{عکس خواص خطوط موازی و مورب}} AB \| DC \\ \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \longrightarrow AD \| BC \end{cases}$



نکته: زوایای مقابل متوازی الاضلاع با هم برابرند.

(و بلعکس، هر چهار ضلعی که زوایای مقابل آن برابر باشند، متوازی الاضلاع است)

$$\boxed{ABCD \text{ متوازی الاضلاع است}} \Leftrightarrow \boxed{\hat{A} = \hat{C} \quad , \quad \hat{B} = \hat{D}}$$

حکم   فرض

طبق فرض $\left\{\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C} = \alpha \\ \hat{B} = \hat{D} = \beta \\ \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \\ \ \ \alpha \quad\ \ \beta \quad\ \ \alpha \quad\ \ \beta \end{array}\right\}$ $2\alpha + 2\beta = 360^\circ \longrightarrow \boxed{\alpha + \beta = 180^\circ}$

$AB \| DC$

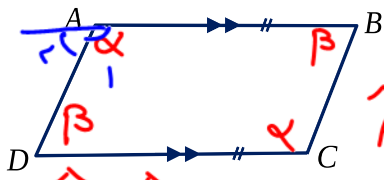
عکس خواص خطوط موازی و مورب

$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \rightarrow \alpha + \hat{A}_2 = 180^\circ \\ \alpha + \beta = 180^\circ \end{array}\right\} \alpha + \hat{A}_2 = \alpha + \beta \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{\beta} = \hat{D}$

$\hat{A}_2 = \beta = B$

نکته: زوایای مجاور متوازی الاضلاع مکمل هستند.

(و بلعکس، هر چهار ضلعی که زوایای مجاورآن مکمل باشند، متوازی الاضلاع است) ابتدا استنتاجات های قبل با رسم قطر $AC=1$



$ABCD$ **متوازی الاضلاع است** ثابت می کنیم $\hat A=\hat C=\alpha$ و $\hat B=\hat D=\beta$

$$\hat A+\hat B=\hat B+\hat C=\hat C+\hat D=\hat D+\hat A=180^\circ \quad \Leftrightarrow$$

$$\hat A+\hat B+\hat C+\hat D=360^\circ \longrightarrow 2\alpha+2\beta=360^\circ \longrightarrow \alpha+\beta=180^\circ$$

$\hat A \to \alpha$, $\hat B \to \beta$, $\hat C \to \alpha$, $\hat D \to \beta$

$$\hat A+\hat B=\hat B+\hat C=\hat C+\hat D=\hat D+\hat A=\alpha+\beta=180^\circ$$

فرض: $\hat A_1+\hat B=\hat B+\hat C=\hat C+\hat D=\hat D+\hat A=180^\circ$

حکم: $ABCD$ متوازی الاضلاع

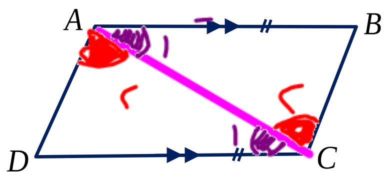
$$\left.\begin{array}{l}\hat A_1+\hat A_2=180^\circ\\ \hat A_1+\beta=180^\circ\end{array}\right\} \hat A_1+\hat A_2=\hat A_1+\beta \to \hat A_2=\beta$$

$\hat A_2=\hat B=\hat B \xrightarrow{\text{عکس خواص خطوط موازی و مورب}} AD \parallel BC$

$\hat A_2=\beta=\hat D \longrightarrow AB \parallel DC$

$\}$ $ABCD$ متوازی الاضلاع است

نکته: هر چهار ضلعی که دو ضلع موازی و مساوی داشته باشد، متوازی الاضلاع است.



فرض: $\boxed{AB \parallel DC}$, $\boxed{AB=DC}$ $\Rightarrow$ $\boxed{ABCD \text{ متوازی الاضلاع است}}$:حکم

برهان: قطر AC را رسم می کنیم

$AB \parallel DC$

$$\left.\begin{array}{l}\text{و مورب } AC \longrightarrow \hat A_1=\hat C_1\\ AC=AC\\ \text{طبق فرض } AB=DC\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle ABC \cong \triangle ADC$$

$\Downarrow$

$\hat A_2=\hat C_2$ طبق عکس خواص خطوط موازی و مورب

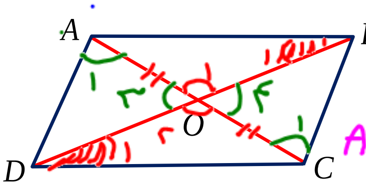
$\downarrow$

$AD \parallel BC$

$$\left.\begin{array}{l}AD \parallel BC\\ AB \parallel DC\end{array}\right\} \Rightarrow ABCD \text{ متوازی الاضلاع است}$$

نکته: قطرهای متوازی الاضلاع منصف یکدیگرند.

(و بلعکس، هر چهارضلعی که قطرهای آن منصف یکدیگر باشند، متوازی الاضلاع است)



فرض $\boxed{ABCD \text{ متوازی الاضلاع است}} \Leftrightarrow \boxed{AO=OC \quad , \quad BO=OD}$ حکم

$AD=BC$, $AB=DC$ با شرط حالت های قبل ثابت می کنیم

$AB=DC$

$AB \parallel DC$, مورب $AC \rightarrow \hat{A}_1=\hat{C}_1$

$AB \parallel DC$, مورب $BD \rightarrow \hat{B}_1=\hat{D}_1$

ز ض ز $\rightarrow A\overset{\triangle}{O}B \cong D\overset{\triangle}{O}C \rightarrow AO=OC , BO=OD$

فرض $OA=OC$, $OB=OD$ حکم $ABCD$ متوازی الاضلاع

$AO=OC$

$BO=OD$

$\hat{O}_1=\hat{O}_2$ متقابل به راس

ض ز ض $\rightarrow A\overset{\triangle}{O}B \cong D\overset{\triangle}{O}C \rightarrow \hat{B}_1=\hat{D}_1$ اجزای متناظر، و از تساوی زوایای متبادل خطها موازی اند $\rightarrow AB \parallel DC$ (۱)

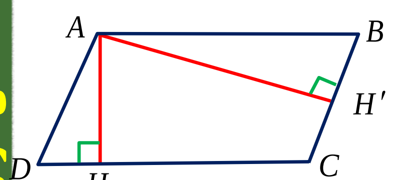
$AO=OC$

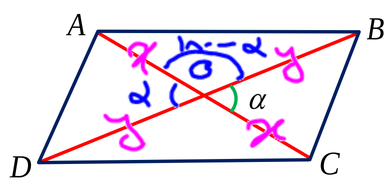
$\hat{O}_3=\hat{O}_4$ متقابل به راس

$DO=OB$

ض ز ض $\rightarrow A\overset{\triangle}{O}D \cong B\overset{\triangle}{O}C \rightarrow \hat{A}_1=\hat{C}_1$ طبق عکس حالت خطوط موازی $\rightarrow AD \parallel BC$ (۱) حکم

نکته: مساحت یک متوازی الاضلاع رامی‌توان به یکی از سه حالت زیر تعیین کرد:





الف) $S_{ABCD}=AH\times DC=AH'\times BC$

ب) $S_{ABCD}=AB\times AD\times \sin A=AD\times DC\times \sin D$

ج) $S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AC\times BD\times \sin\alpha$

$S_{AOD}=\frac{1}{2}AO\times OD\times \sin\alpha$

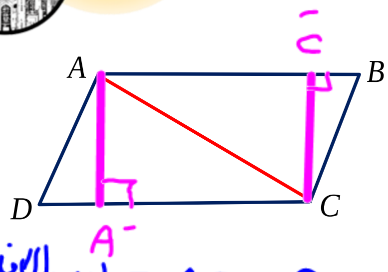
$S_{BOC}=\frac{1}{2}BO\times OC\times \sin\alpha$

$S_{AOB}=\frac{1}{2}AO\times OB\times \sin(180-\alpha)$

$S_{DOC}=\frac{1}{2}DO\times CO\times \sin(180-\alpha)$

$S=4\times\frac{1}{2}xy\sin\alpha \Rightarrow S=2xy\sin\alpha=\frac{2x\times 2y}{2}\sin\alpha=\frac{1}{2}AC\times BD\times\sin\alpha$

نکته: هر قطر متوازی الاضلاع، آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند که مساحت هر یک از آنها نصف مساحت متوازی الاضلاع است.



$$S_{\overset{\Delta}{ADC}}=S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$

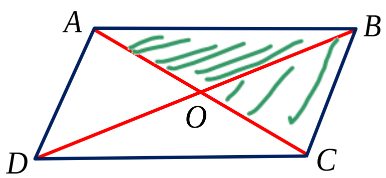
متوازی الاضلاع $ABCD \longrightarrow AB=DC$ (1)

$AB \parallel DC \longrightarrow AA'=CC'$ (2)

$\Rightarrow \begin{cases} S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times CC' \\ S_{ADC}=\frac{1}{2}DC\times AA' \end{cases} \xrightarrow{(1),(2)} S_{ABC}=S_{ADC}$ (3)

$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ADC} \xrightarrow{(3)} S_{ABCD}=2S_{ABC} \Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$

نکته: با رسم دو قطر متوازی الاضلاع، چهار مثلث هم مساحت به وجود می‌آید که مساحت هر یک از آنها $\frac{۱}{۴}$ مساحت متوازی الاضلاع است.



$$S_{\overset{\Delta}{AOD}}=S_{\overset{\Delta}{DOC}}=S_{\overset{\Delta}{BOC}}=S_{\overset{\Delta}{AOB}}=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$

با توجه به مسئله قبل ثابت کردیم با رسم هر قطر متوازی الاضلاع دو مثلث همنهشت به وجود می‌آید که مساحت هر یک نصف متوازی الاضلاع است یعنی با رسم قطر AC داریم $S_{ABC}=S_{ADC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$

می‌دانیم در هر مثلث با رسم هر میانه، دو مثلث هم مساحت به وجود می‌آید و همچنین می‌دانیم در متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند یعنی O وسط AC است

در مثلث ABC، BO میانه وارد بر AC است که $S_{ABO}=S_{BOC}=\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $S_{ADO}=S_{DOC}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$

در هر متوازی الاضلاع

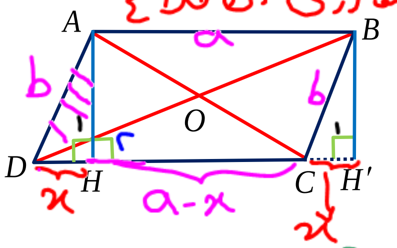
$\overset{\triangle}{ADH}: AH^2 = AD^2 - DH^2 = b^2 - x^2 \quad (1)$

نکته: مجموع مربعات قطرها برابر است با مجموع مربعات اضلاع:

$AB \parallel DC \rightarrow AH = BH'$

متوازی الاضلاع $ABCD \rightarrow AD = BC,\ \hat{H}_1 = \hat{H'}_1 = 90^\circ \rightarrow \overset{\triangle}{ADH} \cong \overset{\triangle}{BCH'}$

$DH = CH' = x$



$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$$

$\overset{\triangle}{AHC}: \hat{H} = 90^\circ \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AC^2 = AH^2 + CH^2 \overset{(1)}{=} AH^2 + (a-x)^2$

$AC^2 = b^2 - \cancel{x^2} + a^2 + \cancel{x^2} - 2ax$

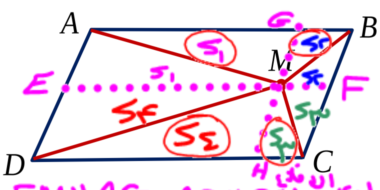
$\boxed{AC^2 = b^2 + a^2 - 2ax}$

$\overset{\triangle}{BDH'}: BD^2 = BH'^2 + DH'^2 \xrightarrow{BH' = AH}$

$\rightarrow BD^2 = b^2 - x^2 + (a+x)^2 = b^2 - \cancel{x^2} + a^2 + \cancel{x^2} + 2ax = \boxed{b^2 + a^2 + 2ax}$

$AC^2 + BD^2 = 2a^2 + 2b^2$

نکته: اگر از نقطه دلخواه M درون متوازی الاضلاع به چهار رأس آن وصل کنیم آنگاه چهار مثلث به وجود می‌آید که مجموع مساحت‌های دو مثلث مقابل با مجموع مساحت‌های دو مثلث مقابل دیگر با یکدیگر برابرند.



$$S_{\overset{\triangle}{AMD}} + S_{\overset{\triangle}{BMC}} = S_{\overset{\triangle}{AMB}} + S_{\overset{\triangle}{DMC}}$$

$EM \parallel AG,\ AE \parallel GM \rightarrow$ متوازی الاضلاع $AGME \rightarrow S_{AGM} = S_{AEM} = S_1$

$GB \parallel MF,\ GM \parallel BF \rightarrow$ متوازی الاضلاع $MGBF \rightarrow S_{GBM} = S_{BFM} = S_2$

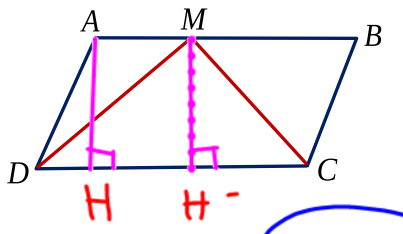
$MF \parallel CH,\ MH \parallel FC \rightarrow$ متوازی الاضلاع $MFCH \rightarrow S_{MFC} = S_{MHC} = S_3$

$EM \parallel DH,\ MH \parallel ED \rightarrow$ متوازی الاضلاع $EMHD \rightarrow S_{EMD} = S_{HMD} = S_4$

$S_{\overset{\triangle}{AMB}} + S_{\overset{\triangle}{DMC}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_{\overset{\triangle}{AMD}} + S_{\overset{\triangle}{BMC}}$

نکته: اگر از یک نقطه دلخواه روی یک ضلع متوازی الاضلاع به دو رأس مقابل وصل کنیم، مثلثی به وجود می‌آید که مساحت آن نصف مساحت متوازی الاضلاع است.

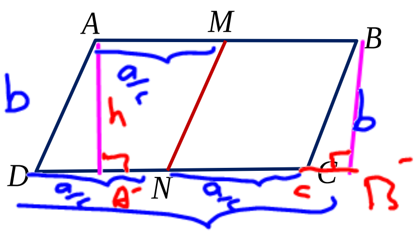
$AB \parallel DC \rightarrow AH = MH'$



$$S_{\overset{\Delta}{MDC}} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABCD} = AH \times DC \\ S_{\overset{\Delta}{MDC}} = \frac{1}{2} MH' \times DC \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{MDC}} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

نکته: پاره خطی که وسط یک ضلع متوازی الاضلاع را به وسط ضلع مقابل به آن وصل می‌کند، متوازی الاضلاع را به دو متوازی الاضلاع یکسان تبدیل می‌کند که مساحت هر قسمت، نصف مساحت متوازی الاضلاع است.



$\overset{a}{AB} \parallel DC \rightarrow AA' = BB' = h$

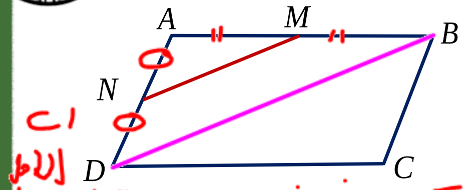
$$S_{AMND} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{MBCN}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{AMND} = AA' \times DN = h \times \frac{a}{2} \\ S_{MBCN} = BB' \times NC = h \times \frac{a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{AMND} = S_{MBCN}$$

پایه و رشته دهم ریاضی

جناب استاد حمیدرضا کمالی خوش خلق

نکته: پاره خطی که وسط یک ضلع متوازی الاضلاع را به وسط ضلع مجاور به آن وصل می‌کند، مثلثی با مساحت $\frac{۱}{۸}$ مساحت متوازی الاضلاع به وجود می‌آورد.



$S_{AMN}=\frac{۱}{۸}S_{ABCD}$

پس داریم با رسم هر قطر متوازی الاضلاع دو مثلث هم مساحت ساخته می‌شود که مساحت هر کدام نصف مساحت متوازی الاضلاع

$S_{ABD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$ یعنی با رسم قطر BD

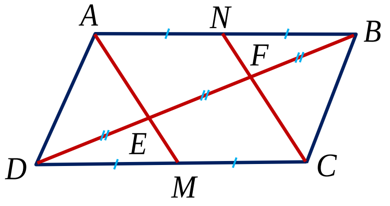
$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{ND}=1$ عکس تالس

$MN \parallel BD$ ، $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{2}$ نسبت تشابه

$AMN \sim ABD$ و $\frac{S_{AMN}}{S_{ABD}}=\frac{1}{4}$

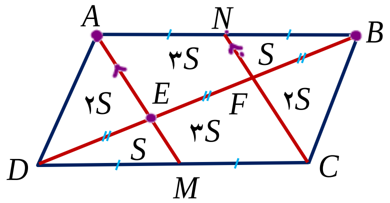
$S_{AMN}=\frac{1}{4}S_{ABD}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{8}S_{ABCD}$

نکته: در هر متوازی الاضلاع، پاره خط‌هایی که از دو رأس مقابل به و سط اضلاع مقابلشان وصل می‌شود، قطر مقابل راه به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. یعنی در شکل مقابل داریم:

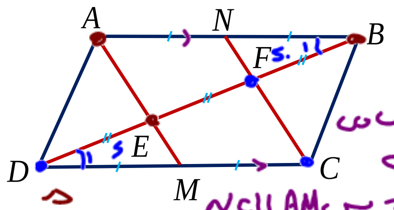


$$\left.\begin{array}{l} AN = BN \\ DM = CM \end{array}\right\} \Rightarrow \quad DE = EF = BF$$

مساحت هر بخش مانند شکل مقابل است.



$$S_{\overset{\Delta}{BMF}} = S_{\overset{\Delta}{DME}} = s \quad \Rightarrow \quad S_{\overset{\Delta}{ADE}} = S_{\overset{\Delta}{BCF}} = ۲s \quad , \quad S_{AEFN} = S_{CFEM} = ۳s$$



$AB \parallel DC \longrightarrow AN \parallel MC$

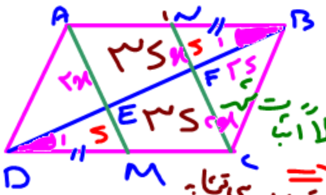
$AB = DC \rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{DC}{2} \rightarrow AN = MC$

می دانیم چهارضلعی که دو ضلع موازی و برابر داشته باشد، متوازی الاضلاع است پس ANCM متوازی الاضلاع است پس $NC \parallel AM$

$\overset{\Delta}{ABE}: NF \parallel AE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BF}{FE} = \frac{BN}{NA} = 1 \Rightarrow BF = FE$

$\overset{\Delta}{DFC}: EM \parallel FC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{DE}{EF} = \frac{DM}{MC} = 1 \rightarrow DE = EF$

$BF = FE = DE$



$AB = DC \rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{DC}{2} \rightarrow BN = DM$

$AB \parallel DC$, مورب $BD \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$

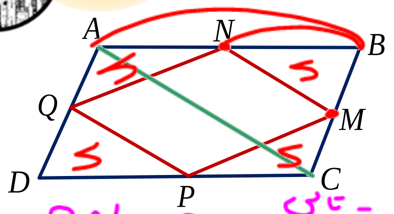
قبلاً اثبات: $BF = DE$

$\Rightarrow \overset{\Delta}{BNF} \cong \overset{\Delta}{DEM} \rightarrow S_{\overset{\Delta}{BNF}} = S_{\overset{\Delta}{DEM}} = S$

$\overset{\Delta}{ABE}, NF \parallel AE \longrightarrow \overset{\Delta}{BNF} \sim \overset{\Delta}{ABE} \rightarrow \frac{BN}{BA} = \frac{1}{2}$

$\longrightarrow \frac{S_{BNF}}{S_{ABE}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \rightarrow S_{ABE} = 4S_{BNF} \rightarrow S_{ANFE} = 3S$

نکته : از به هم وصل کردن وسط‌های اضلاع یک متوازی الاضلاع، یک متوازی الاضلاع به وجود می آید که مساحت آن نصف مساحت متوازی الاضلاع اولیه است.

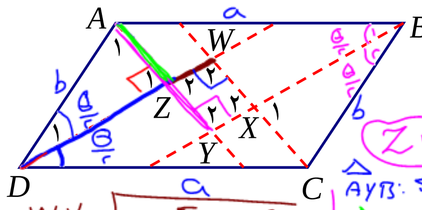


$$\frac{BN}{NA}=\frac{BM}{MC}=1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} NM \parallel AC$$

$$\frac{DQ}{QA}=\frac{DP}{PC}=1 \xrightarrow{\text{= =}} QP \parallel AC$$

$\Rightarrow MN \parallel QP$ ، $QN \parallel MP$ $\rightarrow$ NMPQ متوازی الاضلاع است

نکته: با رسم نیمساز های داخلی هر متوازی الاضلاع یک مستطیل بوجود می آید .



$\triangle DWC: \cos\frac{\theta}{2} = \frac{DW}{DC} \Rightarrow DW = a\cos\frac{\theta}{2}$

$\triangle ADZ: \cos\hat{D}_1 = \cos\frac{\theta}{2} = \frac{DZ}{AD} \Rightarrow DZ = b\cos\frac{\theta}{2}$

$ZW = DW - DZ = (a-b)\cos\frac{\theta}{2}$

$\triangle AYB: \sin\hat{B}_1 = \sin\frac{\theta}{2} = \frac{AY}{AB} \Rightarrow AY = a\sin\frac{\theta}{2}$

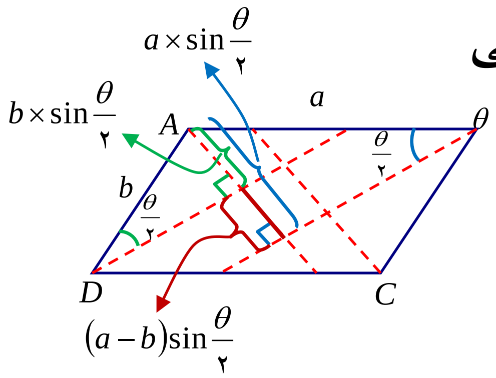
$\triangle ADZ: \sin\hat{D}_1 = \sin\frac{\theta}{2} = \frac{AZ}{AD} \Rightarrow AZ = b\sin\frac{\theta}{2}$

$ZY = AY - AZ = (a-b)\sin\frac{\theta}{2}$

$WY = \sqrt{ZW^2 + ZY^2} = \sqrt{(a-b)^2\cos^2\frac{\theta}{2} + (a-b)^2\sin^2\frac{\theta}{2}} = |a-b|\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}} = |a-b|$

نکته : شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک متوازی‌الاضلاع به اضلاع b,a وزاویه‌ی حاده‌ی θ مستطیلی است به اضلاع ،

$(a-b)\cos\frac{\theta}{2},(a-b)\sin\frac{\theta}{2}$،



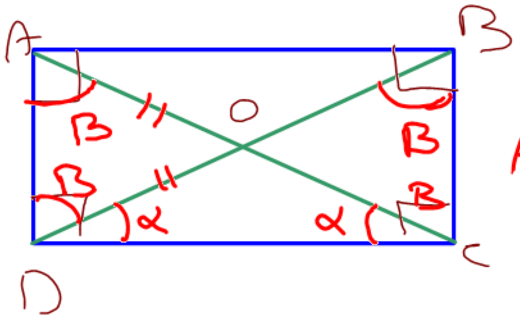
پس قطر این مستطیل برابر است با : $|a-b|$

$$\sqrt{(a-b)^2\cos^2\frac{\theta}{2}+(a-b)^2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{(a-b)^2\left(\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}\right)} = |a-b|$$

قطر مستطیل حاصل ازبرخورد نیمساز ها

بنابراین طول قطر مستطیل حاصل، به زوایای داخلی متوازی الاضلاع ارتباطی ندارد.

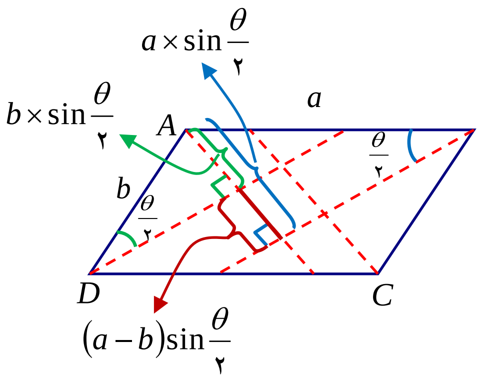
ثابت کنید قطر های مستطیل با یکدیگر برابرند



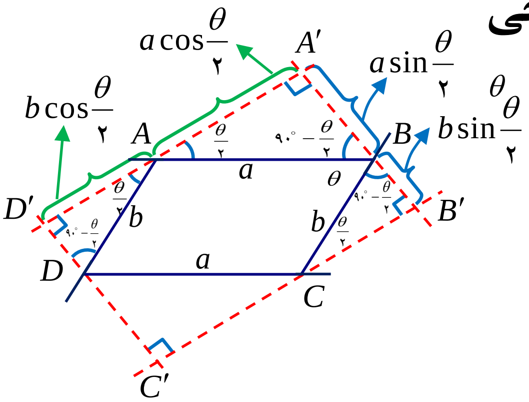
$AD = BC$
$\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$
$DC = DC$

$\Rightarrow \triangle ADC \cong \triangle BCD \Rightarrow AC = BD$

نسبت مساحت مستطیل حاصل به مساحت متوازی الاضلاع، به زوایای داخلی متوازی الاضلاع ارتباطی ندارد زیر اگر مساحت مستطیل را s و مساحت متوازی الاضلاع را s' بنامیم داریم:



$$\frac{s}{s'}=\frac{(a-b)\sin\frac{\theta}{2}\times(a-b)\cos\frac{\theta}{2}}{ab\sin\theta}=\frac{(a-b)^{2}\times\sin\theta}{2ab\sin\theta}=\frac{(a-b)^{2}}{2ab}$$



نکته : شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زوایای خارجی یک متوازی‌الاضلاع به اضلاع b,a وزاویه‌ی حاده‌ی θ مستطیلی است به اضلاع ، $(a+b)\cos\frac{\theta}{2}, (a+b)\sin\frac{\theta}{2}$،

پس قطر این مستطیل برابر است با : $|a+b|$

$$\sqrt{(a+b)^{2}\cos^{2}\frac{\theta}{2}+(a+b)^{2}\sin^{2}\frac{\theta}{2}}=\sqrt{(a+b)^{2}\left(\cos^{2}\frac{\theta}{2}+\sin^{2}\frac{\theta}{2}\right)}=|a+b|$$

قطر مستطیل حاصل از برخورد نیمساز ها

بنابراین طول قطر مستطیل حاصل، به زوایای داخلی متوازی الاضلاع ارتباطی ندارد.

نسبت مساحت مستطیل حاصل به مساحت متوازی الاضلاع،

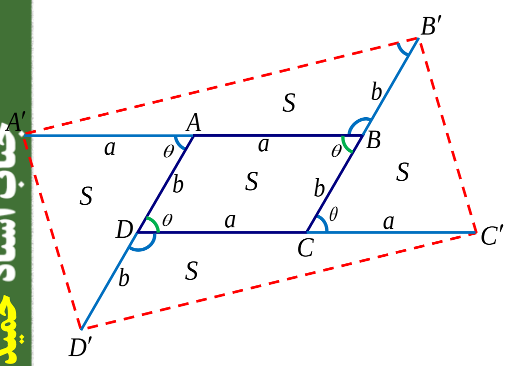
به زوایای داخلی متوازی الاضلاع ارتباطی ندارد زیر اگر

مساحت مستطیل را s و مساحت متوازی الاضلاع را s' بنامیم

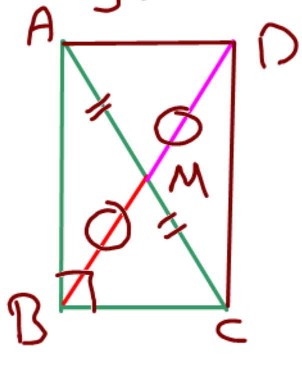
داریم:

$$\frac{s}{s'}=\frac{(a+b)\sin\frac{\theta}{2}\times(a+b)\cos\frac{\theta}{2}}{ab\sin\theta}=\frac{(a+b)^2\times\sin\theta}{2ab\sin\theta}=\frac{(a+b)^2}{2ab}$$

نکته: اگر اضلاع متوازی الاضلاع را به اندازه خودشان و در راستای همان ضلع امتداد دهیم متوازی الاضلاعی به وجود می آید که مساحت آن ۵ برابر مساحت مثلث اولیه است.



ثابت کنید در یک مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است.



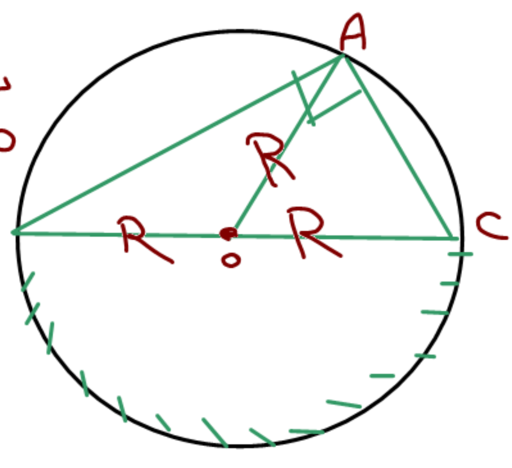
$BM = MD$ } متوازی الاضلاع
$MA = MC$ } $\to ABCD$

$\hat{B} = 90^\circ$

مستطیل است $ABCD$

$BD = AC$

$2BM = AC \to BM = \frac{AC}{2}$



نکته: در لوزی قطرها عمود منصف هم بوده و نیمساز زاویه نیز هستند.

تعریف: مربع چهار ضلعی ای است که هر چهار ضلع آن هم اندازه و حد اقل یک زاویه آن قائمه باشد .

نکته: مربع تمام خواص لوزی را دارد.

نکته: قطرهای مربع با یکدیگر برابرند و مربع به ضلع a قطری به طول $a\sqrt{۲}$ دارد.

مستطیل

مستطیل متوازی الاضلاعی است که یک زاویه 90° دارد.

نکات مربوط به مستطیل

نکته: از آنجاییکه مستطیل یک متوازی الاضلاع است، تمام خواص متوازی الاضلاع را دارد.

نکته: مستطیل ٤ زاویه 90° دارد.

نکته: قطرهای مستطیل با یکدیگر برابرند.

نکته: متوازی الاضلاعی که قطرهای برابر داشته باشد، مستطیل است.

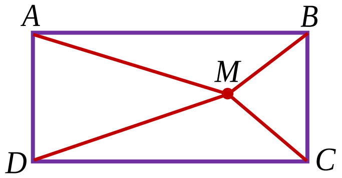
جناب استاد حمیدرضا کمالی خوش خلق

نکته: فقط یک مستطیل به طول a و عرض b وجود دارد.

نکته: بی شمار مستطیل به قطر c وجود دارد.

نکته: فقط یک مستطیل وجود دارد که اندازه یک ضلع آن برابر a بوده و اندازه قطر آن برابر c باشد.

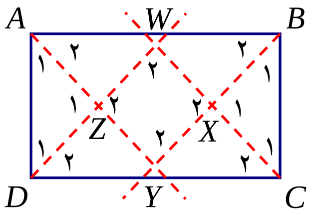
نکته: اگر از نقطه دلخواه M درون مستطیل به چهار رأس آن وصل کنیم آنگاه داریم:



$$AM^{۲} + MC^{۲} = BM^{۲} + DM^{۲}$$

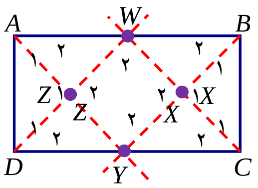
از آنجاییکه مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است تمام نکات متوازی الاضلاع در مورد مستطیل نیر صدق می‌کند.

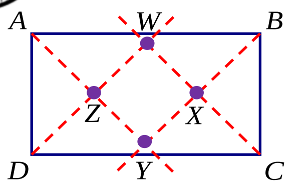
نکته: با رسم نیمساز های داخلی هر مستطیل یک مربع بوجود می آید . در صورتی که طول و عرض مستطیل به ترتیب a و b باشند مساحت مربع از رابطه مقابل به دست می آید:



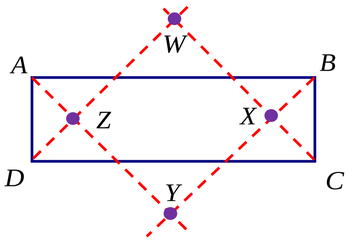
$$S = \frac{۱}{۲}(a-b)^{۲}$$

نکته : اگر طول مستطیل دقیقاً دو برابر عرض آن باشد ، آنگاه دو رأس از چهار رأس مربع حاصل از برخورد نیمساز ها ی مستطیل ، در وسط طول مستطیل قرار دارند .

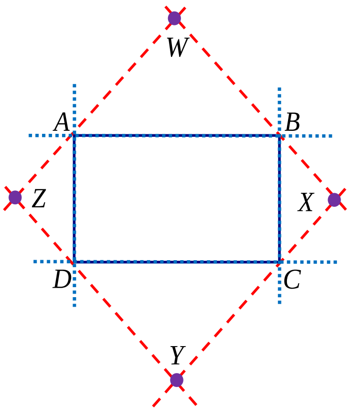




اگر طول مستطیل ازدو برابر عرض آن کمترباشد ، آنگاه هر چهار رأس مربع حاصل از برخورد نیمساز ها ی مستطیل ، در داخل مستطیل قرار دارند .



اگر طول مستطیل ازدو برابر عرض آن بیشتر باشد ، آنگاه دو رأس از چهار رأس مربع حاصل از برخورد نیمساز ها ی مستطیل ، در خارج از مستطیل قرار دارند .

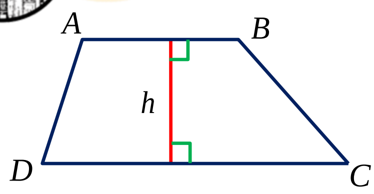


با رسم نیمساز های خارجی هر مستطیل یک مربع بوجود می آید . در صورتی که طول و عرض مستطیل به ترتیب a و b باشند مساحت مربع از رابطه مقابل به دست می آید:

$$S = \frac{۱}{۲}(a+b)^{۲}$$

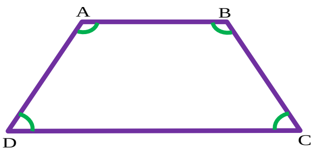
نکات مربوط به ذوزنقه

مساحت یک ذوزنقه به صورت زیر تعیین می‌شود:



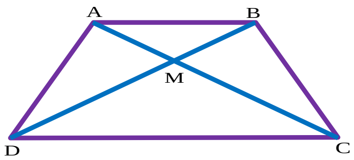
$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} h(AB + DC)$$

نکته: در ذوزنقه متساوی الساقین زوایای مجاور به هر قاعده با یکدیگر برابرند و بلعکس.



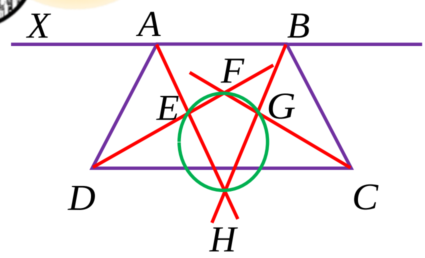
$AD = BC \Leftrightarrow \hat{D} = \hat{C}$ **یا** $AD = BC \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B}$

نکته: در ذوزنقه متساوی الساقین قطرها با یکدیگر برابرند و بلعکس.

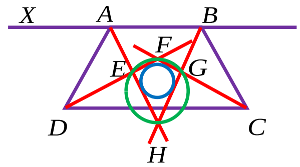


$AD = BC \Leftrightarrow AC = BD$

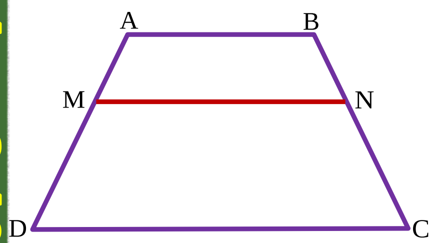
نکته : با رسم نیمساز های داخلی هر ذوزنقه یک چهارضلعی محاطی بوجود می آید زیرا دو زاویه قائمه مقابل هم دارد.



در شکل مقابل ذوزنقه متساوی الساقین بوده و زوایای $\hat{E}$ و G قائمه هستند و چهار ضلعی $EFGH$ یک کایت است و در نتیجه FH عمود منصف EG و همچنین نیمساز زوایای $\hat{F}$ و $\hat{H}$ است.



نکته : با رسم نیمساز های داخلی هر ذوزنقه متساوی الساقین یک چهارضلعی محاطی و محیطی بوجود می آید که دو زاویه قائمه دارد.در شکل مقابل ذوزنقه متساوی الساقین بوده و زوایای $\hat{E}$ و Gقائمه هستند و چهار ضلعی $EFGH$ یک کایت است و در نتیجه FH عمود منصف EG و همچنین نیمساز زوایای $\hat{F}$ و $\hat{H}$ است.

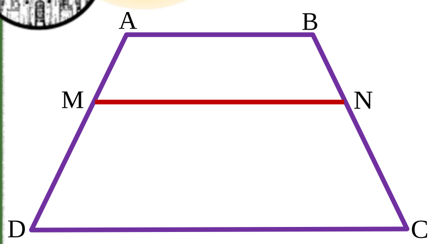


نکته: در ذوزنقه مقابل $MN \| AB \| CD$ داریم :

نکته: در ذوزنقه مقابل $MN \| AB \| CD$ داریم :

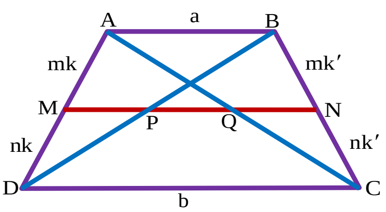
$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ (قضیه تالس در ذوزنقه)

عکس رابطه فوق نیز برقرار است یعنی اگر $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ آنگاه نتیجه می گیریم MN موازی AB است.



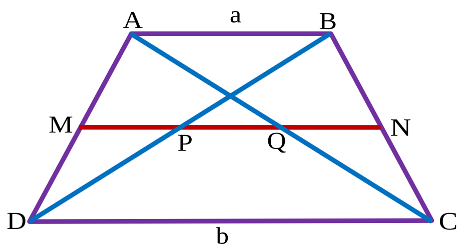
نکته :اگر $AB = a$ و $DC = b$ و $MN \| AB \| CD$ و $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = \frac{m}{n}$ در این صورت داریم:

$$MN = \frac{na + mb}{m+n} \quad \text{و} \quad PQ = \frac{mb - na}{m+n}$$



نکته : در شکل مقابل M وسط AD و N وسط BC است. در این حالت داریم:

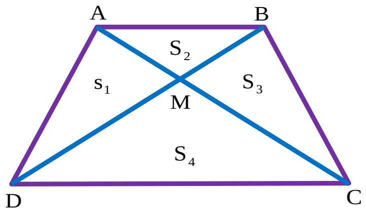
$$MN \| AB \| DC \Rightarrow MN = \frac{a+b}{۲} \quad , \quad PQ = \frac{|b-a|}{۲}$$



نکته: در ذوزنقه مقابل داریم:

الف) $S_۱ = S_۳$

ب) $S_۱ \times S_۳ = S_۲ \times S_۴$ **یا** $S_۱^۲ = S_۳^۲ = S_۲ \times S_۴$



نکته: در یک شش ضلعی منتظم به ضلع a:

۱) هرزاویه داخلی 120° است.

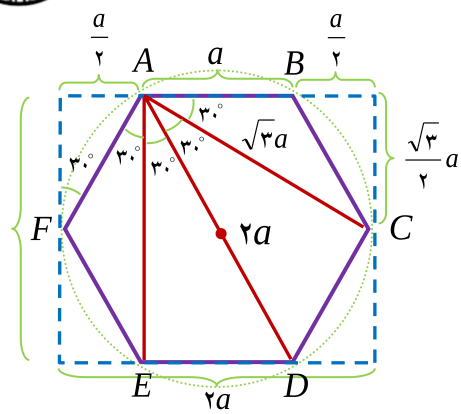
۲) با رسم تمام قطرها از یک رأس (دو قطر کوچک و یک قطر بزرگ) تعداد ٤ زاویه 30° به وجود می‌آید.

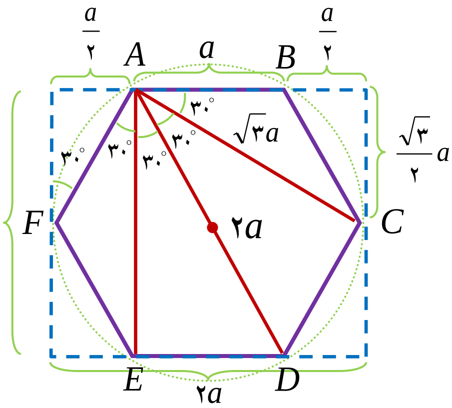
۳) طول قطر کوچک برابر $\sqrt{3}a$ و طول قطر بزرگ (نیمساز زاویه) برابر $2a$ است.

٤) مساحت این شش ضلعی برابر است با: $S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ است.

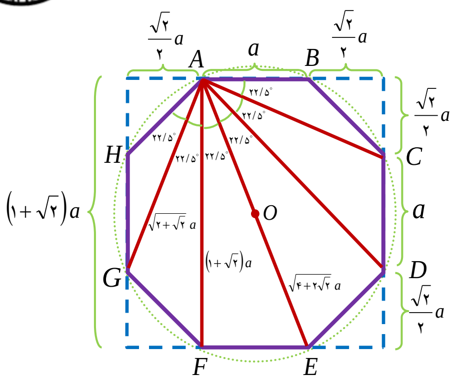
٥) شعاع دایره محیطی برابر a است.

٦) این شش ضلعی منتظم دارای مستطیل محیطی به طول $2a$ و به عرض $\sqrt{3}a$ است.





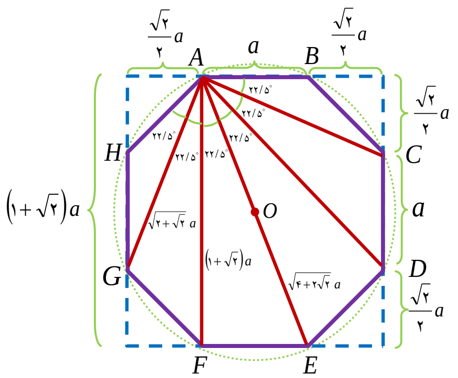
نکته: در یک هشت ضلعی منتظم به ضلع a:



۱) هرزاویه داخلی ۱۳۵° است.

۲) با رسم تمام قطرها از یک رأس (دو قطر کوچک دو قطر متوسط و یک قطر بزرگ) تعداد ٦ زاویه $۲۲/۵^\circ$ به وجود می‌آید.

۳) طول قطر کوچک برابر $\sqrt{۲+\sqrt{۲}}a$ و طول قطر متوسط برابر $(۱+\sqrt{۲})a$ طول قطربزرگ (نیمساز زاویه) برابر $\sqrt{۴+۲\sqrt{۲}}a$ است.



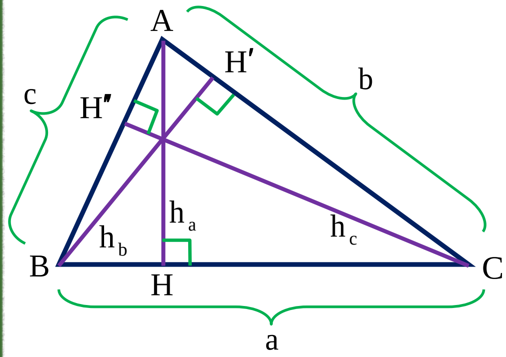
٤) مساحت این هشت ضلعی برابر است با: $S=(۱+۲\sqrt{۲})a^۲$ است.

٥) شعاع دایره محیطی برابر $\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۲\sqrt{۲}}\ a$ است.

٦) این هشت ضلعی منتظم دارای مربع محیطی به ضلع $(۱+\sqrt{۲})a$ است.

مساحت در چند ضلعی ها:

نکته : در مثلث ABC داریم:

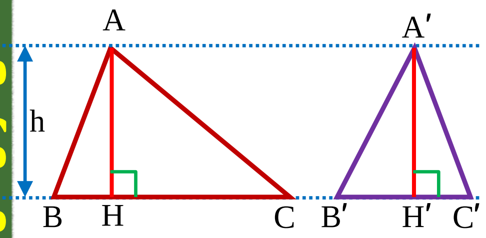


$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}a\times h_a \quad , \quad S_{ABC}=\frac{۱}{۲}b\times h_b \quad , \quad S_{ABC}=\frac{۱}{۲}c\times h_c$$

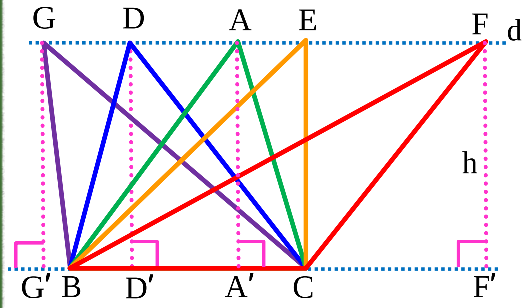
نکته : در هر مثلث نسبت اندازه های هر دو ضلع با نسبت ارتفاع وارد بر آنها رابطه معکوس دارد به عبارتی می توان نوشت :

$$\frac{b}{a}=\frac{h_a}{h_b} \quad \text{و} \quad \frac{c}{a}=\frac{h_a}{h_c} \quad \text{و} \quad \frac{c}{b}=\frac{h_b}{h_c}$$

نکته:اگر اندازه‌های ارتفاع های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت های این دو مثلث برابر نسبت اندازه های قاعده هایی است که این ارتفاع ها برآنها وارد می شود .



$$AH=A'H'=h \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times BC}{\frac{۱}{۲}A'H'\times B'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$



مثال : در شکل مقابل خط d **با** BC **موازی است .**

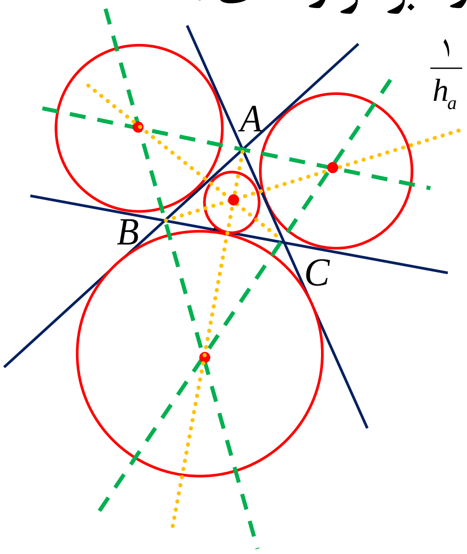
$$S_{GBC} = S_{DBC} = S_{ABC} = S_{EBC} = S_{FBC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} ha$$

نکته : مساحت هر مثلث را به یکی از سه حالت زیر می توان به دست آورد :

الف) $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} a \times h_a \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۲S}{h_a} \\ h_a = \frac{۲S}{a} \end{cases}$ یا $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} b \times h_b \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{۲S}{h_b} \\ h_b = \frac{۲S}{b} \end{cases}$ یا $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} c \times h_c \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{۲S}{h_c} \\ h_c = \frac{۲S}{c} \end{cases}$

ب) $S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin A = \frac{۱}{۲} AB \times BC \times \sin B = \frac{۱}{۲} AC \times BC \times \sin C$

تذکر : با توجه به نکات فوق می توان گفت رابطه زیر همواره بر قرار است .



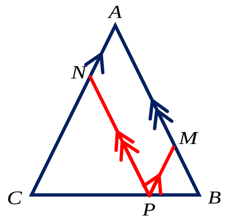
$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{\frac{2S}{a}}+\frac{1}{\frac{2S}{b}}+\frac{1}{\frac{2S}{c}}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{P}{2S}$$

نکته: اگر r_a، r_b و r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، داریم:

$$r_c=\frac{S}{P-c} \quad \text{و} \quad r_b=\frac{S}{P-b} \quad \text{و} \quad r_a=\frac{S}{P-a}$$

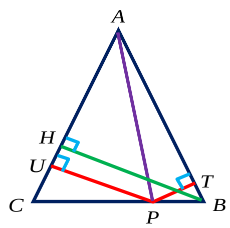
و از این رابطه نتیجه می شود:

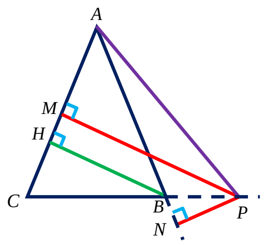
$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$



نکته: اگر از یک نقطه دلخواه روی قاعده یک مثلث متساوی الساقین به موازات دو ساق مثلث خطوطی رسم کنیم، مطابق شکل مجموع طول دوپاره خط ایجاد شده، برابر طول ساق مثلث می باشد .

$$PM+PN=AB$$



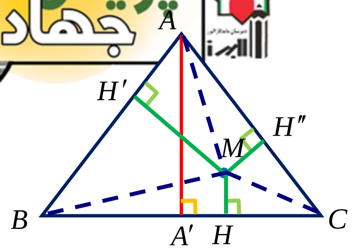


نکته: اگر از یک نقطه دلخواه روی قاعده یک مثلث متساوی الساقین، به دو ساق مثلث عمودهایی رسم کنیم، مجموع طول دوپاره خط برابر طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث می باشد .

$$PT+PU=BH$$

نکته: اگر از یک نقطه دلخواه روی امتداد قاعده یک مثلث متساوی الساقین، به دو ساق مثلث عمودهایی رسم کنیم، قدرمطلق تفاضل طول دوپاره خط برابر طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث می باشد.

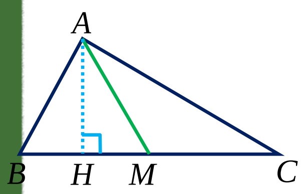
$$|PM-PN|=BH$$



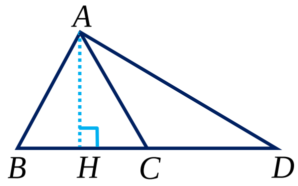
نکته: مجموع فواصل نقطه دلخواه M داخل مثلث متساوی الاضلاع ABC، از اضلاع آن برابر طول ارتفاع این مثلث است .

$$MH + MH' + MH'' = AA'$$

نکته : میانه هر مثلث آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کند.

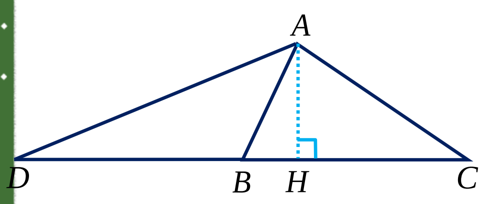


$$S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{۱}{۲} S_{ABC}$$



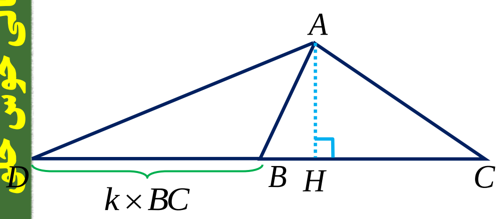
اگر در مثلث ABC ضلع BC را از طرف رأس C به اندازه خودش تا نقطهٔ D امتداد دهیم، مساحت مثلث ACD برابر مساحت مثلث ABC بوده و مساحت مثلث ABD دو برابر مساحت مثلث ABC است.

$$S_{ACD} = S_{ABC} \quad , \quad S_{ABD} = ۲S_{ABC}$$



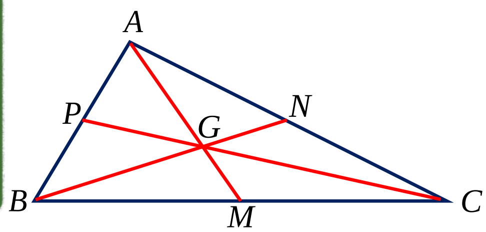
اگر در مثلث ABC ضلع BC را از طرف رأس B به اندازه خودش تا نقطهٔ D امتداد دهیم، مساحت مثلث ABD برابر مساحت مثلث ABC بوده و مساحت مثلث ADC دو برابر مساحت مثلث ABC است.

$$S_{ABD} = S_{ABC} \quad , \quad S_{ADC} = ۲S_{ABC}$$



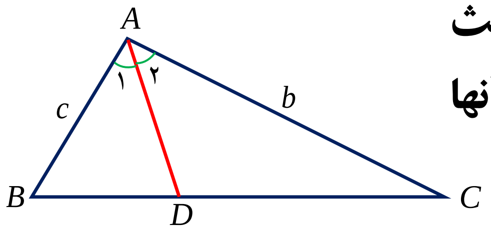
اگر در مثلث ABC ضلع BC را از طرف رأس B به اندازه k برابرخودش تا نقطهٔ D امتداد دهیم، مساحت مثلث ABD، kبرابر مساحت مثلث ABC بوده و مساحت مثلث ADC، $(k+۱)$برابر مساحت مثلث ABCاست.

$$S_{ABD} = k \times S_{ABC} \quad , \quad S_{ADC} = (k+۱) \times S_{ABC}$$



نکته: با رسم سه میانه یک مثلث، تعداد ٦ مثلث هم مساحت به وجود می‌آید که مساحت هر کدام از آنها $\frac{۱}{۶}$ مثلث اولیه است.

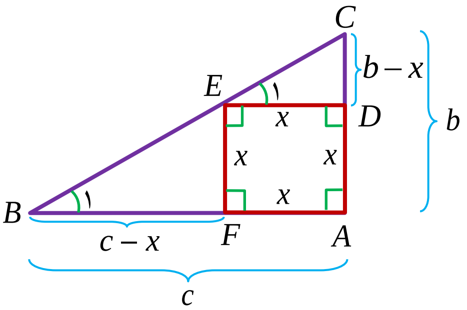
$$S_{\overset{\triangle}{AGP}} = S_{\overset{\triangle}{BGP}} = S_{\overset{\triangle}{BGM}} = S_{\overset{\triangle}{CMG}} = S_{\overset{\triangle}{CNG}} = S_{\overset{\triangle}{ANG}} = \frac{۱}{۶} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$



نکته: در مثلث ABC، نیمساز یک زاویه، مثلث را به دو مثلث تقسیم می‌کند به طوری که نسبت مساحت‌های آنها متناسب با دو ضلع آن زاویه است.

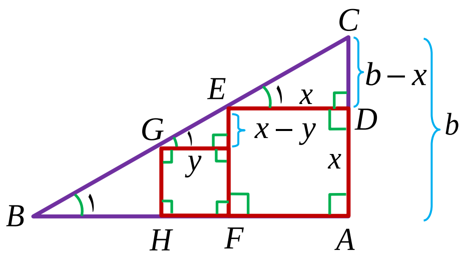
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}{S_{\overset{\triangle}{ACD}}} = \frac{\frac{۱}{۲} AB \times AD \times \sin \hat{A}_۱}{\frac{۱}{۲} AC \times AD \times \sin \hat{A}_۲} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

نکات مربوط به مربع محاط در مثلث قائم الزاویه



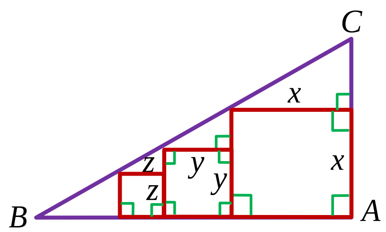
نکته: اگر در مثلث قائم الزاویه ABC، $\hat{A} = ۹۰^\circ$ مربعی به ضلع x را طوری محاط کنیم که یک زاویه مربع، همان زاویه قائمه مثلث باشد، در این صورت داریم: $x = \frac{bc}{b+c}$.

(AE نیمساز زاویه A است و تمام روابط طولی نیمساز برقرار است.)



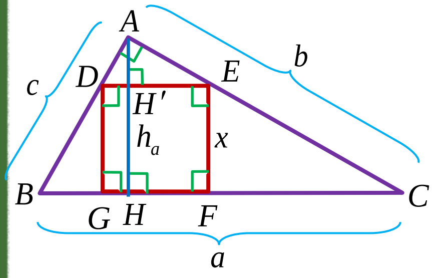
نکته: اگر در مثلث قائم الزاویه ABC، $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ دو مربع به اضلاع x و y مطابق شکل رسم کنیم در این صورت داریم:

$x^۲ = by$.

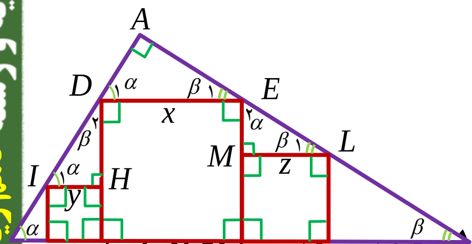


نکته: اگر در مثلث قائم الزاویه ABC، $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ سه مربع به اضلاع x و y و z مطابق شکل رسم کنیم در این صورت داریم: $y^۲ = xz$.

نکته: اگر در مثلث قائم الزاویه ABC، $\hat{A}=90^\circ$ مربعی به ضلع x را طوری محاط کنیم که یک ضلع مربع، موازی وتر مثلث باشد، در این صورت داریم: $x=\dfrac{abc}{a^2+bc}$.



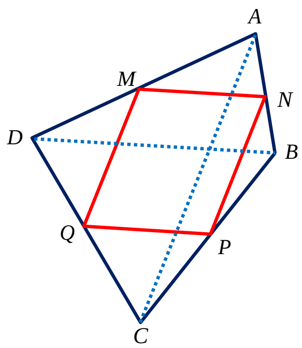
نکته: اگر در مثلث ABC سه مربع به اضلاع x و y و z را مانند شکل مقابل رسم کنیم داریم: $x=y+z$



نکته: مساحت هرچهارضلعی برابراست بانصف حاصلضرب دوقطر درسینوس زاویه بین دوقطر.

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\times BD\times\sin\alpha$$

نکته :از به هم وصل کردن وسط های اضلاع هر چهار ضلعی محدب، یک متوازی الاضلاع بوجود می آید که محیط آن برابر با جمع طول قطر های چهار ضلعی اولیه می باشد و زاویه بین اضلاع آن با زاویه بین قطر های چهار ضلعی اولیه برابر است.



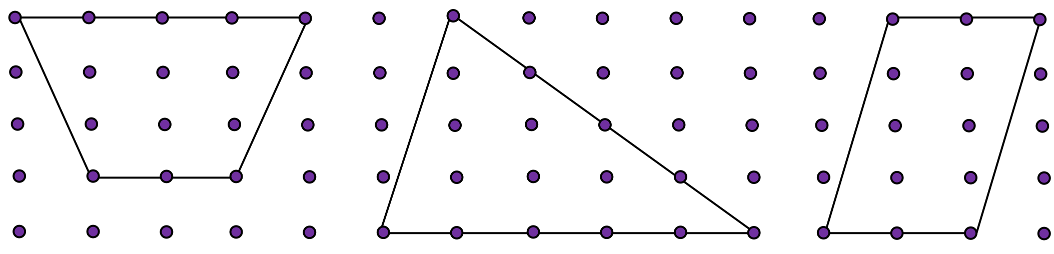
تذکر: از به هم وصل کردن وسط های اضلاع یک چهار ضلعی یک چهار ضلعی به وجود می آید که محیط آن برابر مجموع طول قطر های چهار ضلعی اولیه می باشد .

تذکر: شرط آنکه از به هم وصل کردن وسط های اضلاع یک چهار ضلعی یک مستطیل به وجود می آیدآن است که قطر های چهار ضلعی اولیه بر هم عمود باشند .

تذکر: شرط آنکه از به هم وصل کردن وسط های اضلاع یک چهار ضلعی یک لوزی به وجود می آیدآن است که قطر های چهار ضلعی اولیه با هم برابر باشند .

نکته: مساحت یک چند ضلعی شبکه‌ای دارای b نقطه مرزی و i نقطه درونی برابر است با : $S=\frac{b}{۲}-۱+i$

مساحت هر یک از چند ضلعی های مشبکه ای زیر را به دست آورید.



۱ ۲ ۳

نکته: یک n ضلعی مشبکه ای حداقل دارای n نقطه مرزی و حداقل دارای صفر نقطه مرزی است.

سوالات تشریحی فصل ۳

۱ – در یک میهمانی ۱۵ نفر شرکت کرده اند. اگر هر یک از میهمان‌ها با بقیه دست بدهد در این مهمانی چند بار عمل دست دادن انجام شده است.

حل:

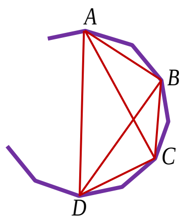
اگر این ۱۵ نفر را مانند رأس یک ۱۵ضلعی درنظربگیریم آنگاه هر بار دست دادن، مانند رسم کردن یک پاره خط بین دورأس است.

در این صورت تعداد دست دادن ها برابر تعداد این پاره خط هاست. تعداد این پاره خط ها برابر مجموع تعداد اضلاع و تعداد قطرهای این ۱۵ ضلعی است که برابر است با:

$$۱۵+\frac{۱۵+(۱۵-۳)}{۲}=۱۰۵$$

۲ – در یک هجده ضلعی مجموع تعداد قطرهای ٤ رأس دو به دو غیر مجاور چند تا است؟

حل:



از هر رأس یک هجده ضلعی تعداد $۱۸-۳=۱۵$ قطر می گذرد. بنابراین از ٤ رأس تعداد $۴\times۱۵=۶۰$ قطر عبور می کند اما با توجه به شکل مقابل ٦ قطر از این ٦٠ قطر هر کدام دو بار محاسبه شده اند بنابراین تعداد $۶۰-۶=۵۴$ قطر متمایز از این ٤ رأس می گذرد.

۳- اگر در یک nضلعی حداکثر ۵ زاویه منفرجه(باز) وجود داشته باشد، آنگاه حداکثر مقدار، مجموع تعداد قطر ها و اضلاع آن را به دست آورید.

حل:

می دانیم هر n حداکثر ۳ زاویه حاده داخلی دارد(زیرا مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی برابر ۳۶۰° است و اگر تعداد چهار زاویه حاده داخلی یا بیشتر داشته باشد آنگاه مجموع زوایای خارجی بیشتر از ۳۶۰° می شود). از طرفی چون n ضلعی داده شده حداکثر ۵ زاویه منفرجه داخلی دارد، پس حداکثر $n=۸$ است. و در نتیجه حداکثر ۸ ضلع و $۲۰=\frac{۸(۸-۳)}{۲}$ قطر دارد که مجموع آنها برابر $۸+۲۰=۲۸$ است.

٤ – ثابت کنید در هر n ضلعی حداکثر سه زاویه حاده (تند) داخلی وجود دارد.

حل:

اثبات به روش برهان خلف:

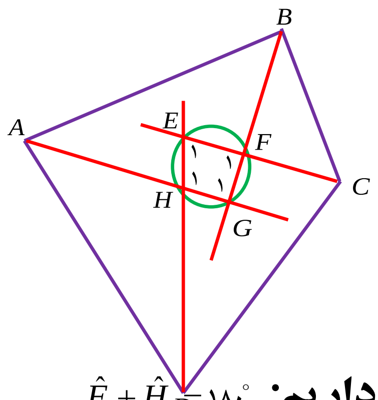
فرض خلف: فرض کنیم در یک n ضلعی، تعداد چهار زاویه حاده داخلی وجود داشته باشد.

در این صورت چهار زاویه منفرجه(باز) خارجی داریم که مجموع آنها از ۳۶۰° بیشتر می شود. و این غیر ممکن است زیرا مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی ۳۶۰° است.

پس فرض خلف باطل بوده و حکم برقرار است.

۵ – ثابت کنید با رسم نیمسازهای داخلی هر چهار ضلعی محدب یک چهارضلعی به وجود می آید که زوایای مقابل آن مکمل هم هستند.

اثبات:



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}+\frac{\hat{D}}{2}=180^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ABG}: \frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\hat{G}_1=180^\circ \Rightarrow \hat{G}_1=180^\circ-\frac{\hat{A}}{2}-\frac{\hat{B}}{2}$$

$$\overset{\Delta}{DEC}: \frac{\hat{D}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}+\hat{E}_1=180^\circ \Rightarrow \hat{E}_1=180^\circ-\frac{\hat{D}}{2}-\frac{\hat{C}}{2}$$

$$\hat{G}_1+\hat{E}_1=360^\circ-\left(\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}+\frac{\hat{D}}{2}\right)=360^\circ-180^\circ=180^\circ$$

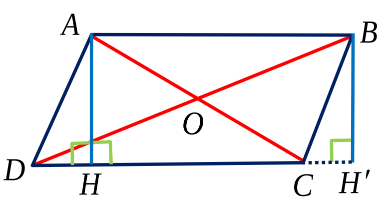
و چون مجموع زوایای داخلی هر چهار ضلعی برابر 360° است، داریم: $\hat{F}_1+\hat{H}_1=180^\circ$

٦ – ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع، مجموع مربعات قطرها برابر است با مجموع مربعات اضلاع است.

حل:

باید ثابت کنیم:

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$$



$$\left.\begin{array}{l} AD=BC \\ AH=BH' \\ \hat{H}_1=\hat{H}'_1=90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زو}} \overset{\Delta}{ADH}\cong\overset{\Delta}{BCH'} \Rightarrow DH=CH'$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ADH}: \quad AH^2=AD^2-DH^2 \\ \overset{\Delta}{AHC}: \quad AH^2=AC^2-(DC-DH)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow AD^2-DH^2=AC^2-(DC-DH)^2$$

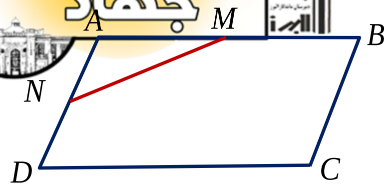
$$\Rightarrow AD^2+DC^2=AC^2+2DC\times DH \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{BCH'}: \quad BH'^2=BC^2-CH'^2 \\ \overset{\Delta}{BDH'}: \quad BH'^2=BD^2-(DC+CH')^2 \end{array}\right\} \xrightarrow[DC=AB]{CH'=DH} BC^2-CH'^2=BD^2-(AB+DH)^2$$

$$\Rightarrow BC^2+AB^2=BD^2-2AB\times DH \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow AD^2+DC^2+BC^2+AB^2=AC^2+BD^2$$

۷– ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع پاره خطی که وسط یک ضلع متوازی الاضلاع را به وسط ضلع مجاور به آن وصل می‌کند، مثلثی با مساحت $\frac{1}{8}$ مساحت متواری الاضلاع به وجود می‌آورد.

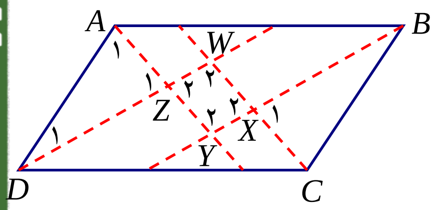


حل:

$$\overset{\Delta}{ABC}: \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{ND}=۱ \Rightarrow MN\|BD \Rightarrow \overset{\Delta}{AMN}\approx \overset{\Delta}{ABD} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABD}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^{۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{S_{ABD}=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}} \frac{S_{AMN}}{S_{ABCD}}=\frac{۱}{۸}$$

۸ – ثابت کنید شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک متوازی‌الاضلاع به اضلاع b,a وزاویه‌ی حاده‌ی θ مستطیلی است به اضلاع ، $(a-b)\sin\frac{\theta}{۲},(a-b)\cos\frac{\theta}{۲}$، و قطر $|a-b|$.

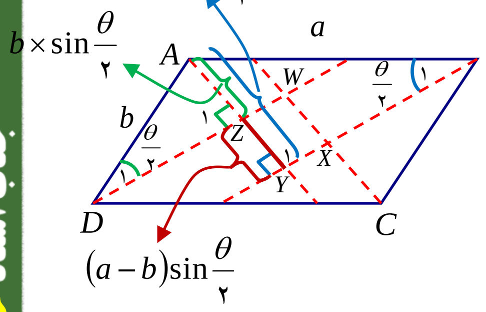


حل:

$$\hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\div ۲} \frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{D}}{۲}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{D}_۱=۹۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ADZ}: \xrightarrow[A_۱+D_۱=۹۰^\circ]{A_۱+D_۱+Z_۱=۱۸۰^\circ} Z_۱=۹۰ \xrightarrow{Z_۱=Z_۲} Z_۲=۹۰^\circ$$

به همین ترتیب داریم : $Z_۲=Y_۲=X_۲=W_۲=۹۰^\circ$ و در نتیجه چهار ضلعی $ZYXW$ یک مستطیل است.



$$\overset{\Delta}{AYB}: \xrightarrow{\hat{Y}_۱=۹۰^\circ} \sin\hat{B}_۱=\sin\frac{\theta}{۲}=\frac{AY}{AB} \xrightarrow{AB=a} AY=a\times\sin\frac{\theta}{۲}$$

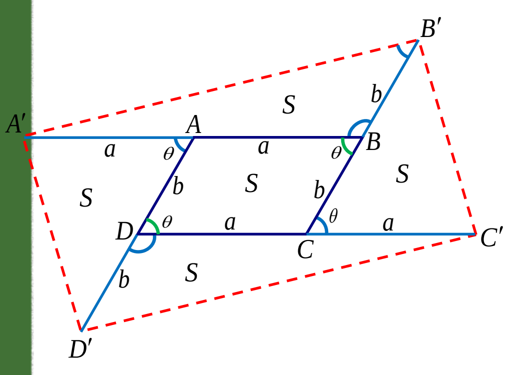
$$\overset{\Delta}{ADZ}: \xrightarrow{\hat{Z}_۱=۹۰^\circ} \sin\hat{D}_۱=\sin\frac{\theta}{۲}=\frac{AZ}{AD} \xrightarrow{AD=b} AZ=b\times\sin\frac{\theta}{۲}$$

$$\Rightarrow ZY=AY-AZ=a\times\sin\frac{\theta}{۲}-b\times\sin\frac{\theta}{۲}=(a-b)\sin\frac{\theta}{۲}$$

و به همین ترتیب ثابت می شود: $\Rightarrow ZW=(a-b)\cos\frac{\theta}{۲}$

همچنین می توان نوشت:

قطر مستطیل حاصل از برخورد نیمساز ها $=\sqrt{(a-b)^{۲}\cos^{۲}\frac{\theta}{۲}+(a-b)^{۲}\sin^{۲}\frac{\theta}{۲}}=\sqrt{(a-b)^{۲}\left(\sin^{۲}\frac{\theta}{۲}+\cos^{۲}\frac{\theta}{۲}\right)}=|a-b|$



۹– مطابق شکل، اضلاع متوازی الاضلاع $ABCD$ را به اندازه خودشان امتداد می‌دهیم تا چهار ضلعی $A'B'C'D'$ به وجود آید. ثابت کنید، $A'B'C'D'$ متوازی الاضلاعی است که مساحت آن، ۵ برابر مساحت $ABCD$ است.

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} BB' = DD' = b \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 = 180 - \theta \\ BA' = DC' = 2a \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{A'BB'} = \overset{\Delta}{C'DD'} \Rightarrow A'B' = D'C'$$

به همین ترتیب داریم: $A'D' = B'C'$

و در نتیجه چهار ضلعی $A'B'C'D'$ متوازی الاضلاع است.

می‌دانیم اگر مساحت متوازی الاضلاع $ABCD$ را S فرض کنیم، با رسم هر قطر این متوازی الاضلاع دو مثلث هم مساحت به وجود می آید که مساحت هر کدام از آنها $\frac{1}{2}S$ است.

از طرفی می دانیم اگر در یک مثلث یک ضلع k برابر شده و یک ضلع k' برابر گردد و زاویه بین همین دو ضلع یا ثابت بماند و یا مکمل شود آنگاه مساحت مثلث جدید $k \times k'$ می گردد. بنابراین می توان گفت:

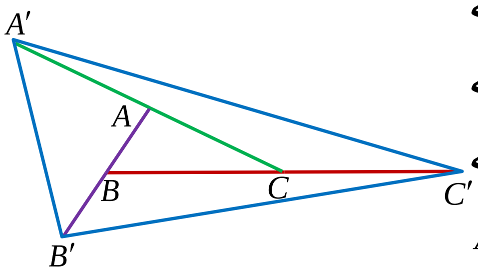
در مقایسه دو مثلث ABD با مساحت $\frac{S}{2}$ و مثلث $A'BB'$ داریم:

$BB' = BC$ و $BA' = 2AB$ و $A'\hat{B}B' = 180^\circ - A\hat{B}C$

یعنی یک ضلع ثابت مانده و یک ضلع دو برابر شده و زاویه مکمل شده پس مساحت $A'BB'$ دو برابر مساحت مثلث ABC است پس $S_{A'BB'} = 2\frac{S}{2} = S$

به همین ترتیب: $S_{\overset{\Delta}{B'CC'}} = S_{\overset{\Delta}{C'DD'}} = S_{\overset{\Delta}{D'AA'}} = S$ و در نتیجه

$S_{A'B'C'D'} = 5S_{ABCD}$



۱۰- اگر در مثلث ABC ضلع BC را از طرف رأس C به اندازه خودش تا نقطهٔ C' و ضلع AC را از طرف رأس A به اندازه خودش تا نقطهٔ A' و ضلع AB را از طرف رأس B به اندازه خودش تا نقطهٔ B' امتداد دهیم، مساحت مثلث $A'B'C'$ چند برابر مساحت مثلث ABC است.

حل : مساحت مثلث ABC را برابر S در نظر می گیریم. در مثلث $A'CC'$ ، داریم $A'C=2AC$ و $CC'=BC$ و زاویه $A'\hat{C}C'$ مکمل زاویه $A\hat{C}B$ است، پس داریم :

$$S_{A'CC'}=2S_{ABC}=2S$$

و به همین ترتیب داریم:

$$S_{B'BC'}=2S_{ABC}=2S \quad \text{و} \quad S_{A'AB'}=2S_{ABC}=2S$$

درنتیجه می توان نوشت:

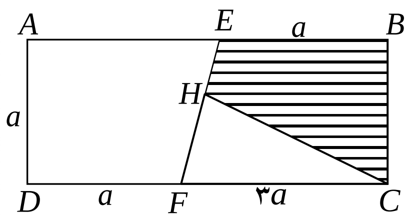
$$S_{A'B'C'}=S_{ACC'}+S_{B'BC'}+S_{A'AB'}+S_{ABC}=2S+2S+2S+S=7S$$

۱۱- در شکل مقابل چهار ضلعی ها مربع می باشند. ابتدا مقدار x رابدست آورده وسپس مساحت قسمت هاشور خورده را حساب کنید.(توضیح اینکه مساحت ... می باشد)

پاسخ سؤال۸:

$$\text{مساحت ناحیه سفید}=\frac{x(x+4+3)}{2}=30 \Rightarrow x^2+7x-60=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 & \text{ق ق} \\ x=-12 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۱۲- چهار ضلعی $ABCD$ یک مستطیل است . باتوجه به شکل مساحت قسمت هاشور خورده را بیابید.(در مثلث FHC ارتفاع نظیر ضلع FC برابراست با: $\frac{2}{3}a$)



حل:

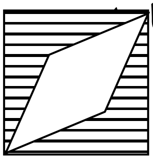
$$AB=DC=4a \xrightarrow{BE=a} AE=3a$$

$$S_{AEFD}=\frac{AE+DF}{2}\times AD=\frac{3a+a}{2}\times a=2a^2$$

$$S_{CFH}=\frac{1}{2}h\times FC=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}a\times 3a=a^2$$

$$\Rightarrow S_{EBCH}=S_{ABCD}-S_{AEFD}-S_{CFH}=4a^2-2a^2-a^2=a^2$$

۱۳- مساحت مربع مقابل $9cm^2$ می باشدوطول قطر کوچک لوزی $\frac{1}{3}$ قطر مربع می باشد. مساحت لوزی را بدست آورده ومساحت قسمت های هاشورخورده را بیا...



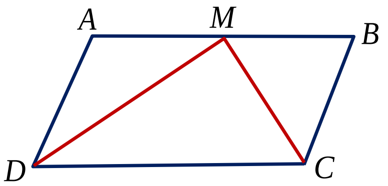
حل:

مساحت مربع برابر $9\,cm^2$ است، پس طول هر ضلع مربع برابر $3\,cm$ است.

مساحت لوزی - مساحت مربع = مساحت قسمت هاشور خورده

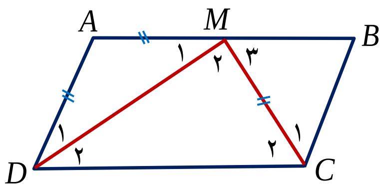
و چون مساحت لوزی برابر نصف حاصل ضرب دو قطر آن است داریم:

$$S = 9 - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}(3)(3\sqrt{2}) = 9 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



۱۴ – در چهار ضلعی $ABCD$ قطرها منصف یکدیگرند اگر نقطهٔ M بر رو ضلع AB بوده و $AD = AM = MC$ باشد، زاویه $D\hat{M}C$ را بر حسب زوایای $\hat{A}$ بنویسید.

حل:



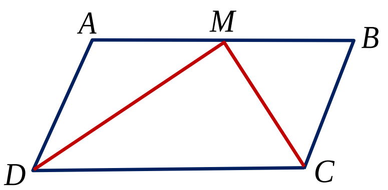
قطرهای چهار ضلعی $ABCD$ منصف یکدیگرند، پس این چهار ضلعی یک متوازی الاضلاع است. در این صورت می توان نوشت:

$$\overset{\Delta}{AMD}: \quad AM = AD \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{M}_1$$

$$\overset{\Delta}{AMD}: \quad \hat{A} + \hat{M}_1 + \hat{D}_1 = 180^\circ \xrightarrow{\hat{M}_1=\hat{D}_1} \hat{M}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

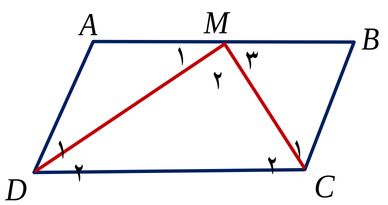
$$MC = AD \xrightarrow{AD=BC} MC = BC \Rightarrow \hat{M}_3 = \hat{B} = 180^\circ - \hat{A}$$

$$\hat{M}_2 = 180^\circ - \hat{M}_1 - \hat{M}_3 = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}\right) - \left(180^\circ - \hat{A}\right) = \frac{3}{2}\hat{A} - 90^\circ$$



۱۵ – در چهار ضلعی $ABCD$، $AB = CD$ و $AB \| CD$ است. اگر نقطهٔ M بر رو ضلع AB بوده و $A\hat{M}D = 2A\hat{D}M$ و $B\hat{M}C = 2B\hat{C}M$ باشد، زاویه $D\hat{M}C$ چند درجه است؟

حل:



فرض: $AB = CD$ و $AB \| CD$ **حکم:** $\hat{M}_2 = ?$

در چهار ضلعی $ABCD$، $AB = CD$ و $AB \| CD$ است، پس این چهار ضلعی متوازی الاضلاع است و داریم:

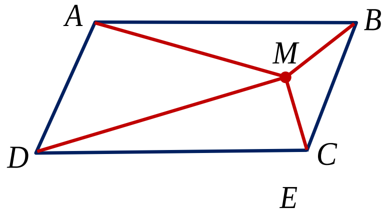
$AB \| DC$ **و مورب** $DM \Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{M}_1 = 2\hat{D}_1$

$AB \parallel DC$ و مورب $CM \Rightarrow \hat{C}_۲ = \hat{M}_۳ = ۲\hat{C}_۱$

$$\hat{D} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ + \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow[\hat{C}_۲ = ۲\hat{D}_۱]{\hat{D}_۲ = ۲\hat{D}_۱} ۳\hat{D}_۱ + ۳C_۱ = ۱۸۰^\circ$$

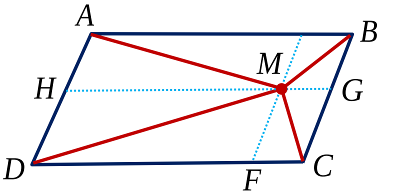
$$\hat{D}_۱ + \hat{C}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{D}_۲ + \hat{C}_۲ = ۲\hat{D}_۱ + ۲\hat{C}_۱ = ۱۲۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{DMC}: \quad \hat{C}_۲ + \hat{D}_۲ + \hat{M}_۲ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{D}_۲ + \hat{C}_۲ = ۱۲۰} \hat{M}_۲ = ۶۰^\circ$$



۱۶- ثابت کنید اگر از نقطه دلخواه M درون متوازی الاضلاع به چهار رأس آن وصل کنیم آنگاه چهار مثلث به وجود می‌آید که مجموع مساحت‌های دو مثلث مقابل با مجموع مساحت‌های دو مثلث مقابل دیگر با یکدیگر برابرند.

حل:



فرض: $ABCD$ **متوازی الاضلاع است** **حکم:**

$$S_{\overset{\Delta}{AMD}} + S_{\overset{\Delta}{BMC}} = S_{\overset{\Delta}{AMB}} + S_{\overset{\Delta}{DMC}}$$

از نقطه M پاره خط‌های EF و GH را موازی اضلاع مثلث رسم می‌کنیم.

می دانیم قطر متوازی الاضلاع آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:

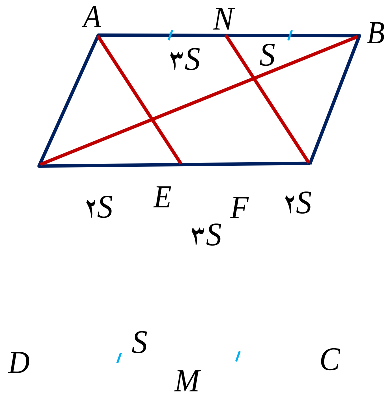
$S_{\overset{\Delta}{DMF}} = S_{\overset{\Delta}{DMH}}$ و $S_{\overset{\Delta}{CMG}} = S_{\overset{\Delta}{CMF}}$ و $S_{\overset{\Delta}{BME}} = S_{\overset{\Delta}{BMG}}$ و $S_{\overset{\Delta}{AME}} = S_{\overset{\Delta}{AMH}}$

و در نتیجه داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{AMD}} + S_{\overset{\Delta}{BMC}} = S_{\overset{\Delta}{AMH}} + S_{\overset{\Delta}{DMH}} + S_{\overset{\Delta}{BMG}} + S_{\overset{\Delta}{CMG}} = S_{\overset{\Delta}{AME}} + S_{\overset{\Delta}{DMF}} + S_{\overset{\Delta}{BME}} + S_{\overset{\Delta}{CMF}}$$
$$= S_{\overset{\Delta}{AMB}} + S_{\overset{\Delta}{DMC}}$$

۱۷- ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع، پاره خطهایی که از دو رأس مقابل به وسط اضلاع مقابلشان وصل می‌شود،

اولاً قطر مقابل راه به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.



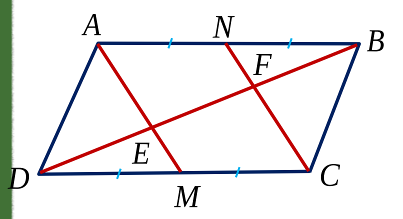
یعنی در شکل مقابل داریم:

$$\left.\begin{aligned} AN &= BN \\ DM &= CM \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad DE = EF = BF$$

و ثانیاً مساحت هر بخش مانند شکل مقابل است.

$$S_{\overset{\Delta}{BMF}} = S_{\overset{\Delta}{DME}} = s \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ADE}} = S_{\overset{\Delta}{BCF}} = ۲s \quad , \quad S_{AEFN} = S_{CFEM} = ۳s$$

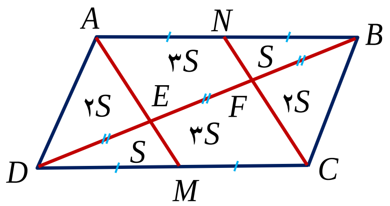
حل:



$ANCM$ متوازی الاضلاع

$$\left.\begin{array}{l} AN = BN = \dfrac{AB}{۲} \\ CM = DM = \dfrac{BC}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{AB=DC} AN = MC \xrightarrow{AN \parallel MC}$$ است

$ANCM$ متوازی الاضلاع است $\Rightarrow AM \parallel CN$



$$\overset{\Delta}{ABE}: \quad NF \parallel AE \Rightarrow \frac{BF}{FE} = \frac{BN}{NA} = ۱ \Rightarrow BF = FE$$

$$\overset{\Delta}{DFC}: \quad EM \parallel FC \Rightarrow \frac{DE}{EF} = \frac{DM}{MC} = ۱ \Rightarrow DE = EF$$

$$\Rightarrow DE = EF = FB$$

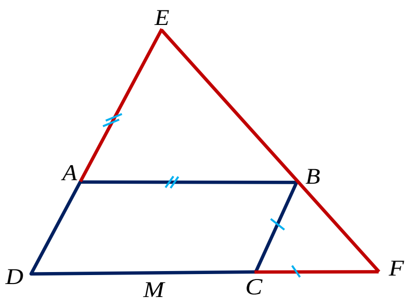
$$\overset{\Delta}{ABE}: \quad NF \parallel AE \Rightarrow \overset{\Delta}{BNF} = \overset{\Delta}{ABE} \xrightarrow{\frac{BN}{BA}=\frac{۱}{۲}} \frac{S_{BFN}}{S_{ABE}} = \frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{S_{BFN}=S} S_{BFN} = S \quad , \quad S_{ABE} = ۴S \quad \Rightarrow S_{ANFE} = S_{ABE} - S_{BNF} = ۴S - S = ۳S$$

$$\left.\begin{array}{r} AB \parallel DC \ , \text{ مورب } \ DB \Rightarrow E\hat{D}M = N\hat{B}F \\ DE = BF \\ DM = BN \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{DEM} \cong \overset{\Delta}{BNF} \Rightarrow NF = ME$$

$$\overset{\Delta}{ABE}: \quad NF \parallel AE \Rightarrow \frac{NF}{AE} = \frac{BN}{BA} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow NF = \frac{۱}{۲}AE \xrightarrow{NF=ME} ME = \frac{۱}{۲}AE$$

$$AE = ۲EM \Rightarrow S_{ADE} = ۲S_{DEM} \xrightarrow{S_{DEM}=S} S_{ADE} = ۲S$$

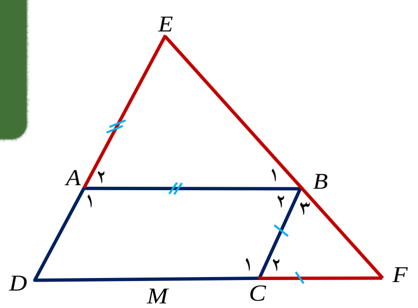


۱۸ – در متوازی الاضلاع $ABCD$ ضلع AD را از سمت رأس A به اندازه AB و ضلع DC را از طرف رأس به اندازه BC امتداد می دهیم و از رأس B به E و F وصل می کنیم ثابت کنید :

الف) $A\hat{B}E = C\hat{B}F$

ب) E و B و F **در یک راستا هستند.**

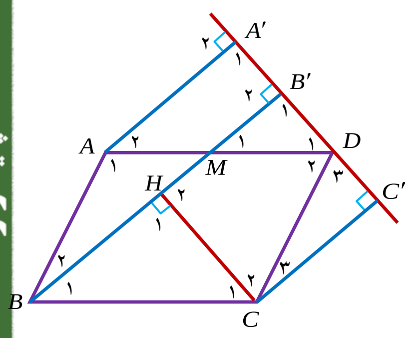
حل:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AEB}:\quad AB=AE\Rightarrow \hat{B}_{۱}=\hat{E}\xrightarrow{\hat{B}_{۱}+\hat{E}=\hat{A}_{۱}}۲\hat{B}_{۱}=\hat{A}_{۱}\Rightarrow \hat{B}_{۱}=\dfrac{\hat{A}_{۱}}{۲} \\ \overset{\Delta}{BCF}:\quad BC=CF\Rightarrow \hat{B}_{۳}=\hat{F}\xrightarrow{\hat{B}_{۳}+\hat{F}=\hat{C}_{۱}}۲\hat{B}_{۳}=\hat{C}_{۱}\Rightarrow \hat{B}_{۳}=\dfrac{\hat{C}_{۱}}{۲} \end{array}\right\}\xrightarrow{\hat{A}_{۱}=\hat{C}_{۱}}\hat{B}_{۳}=\hat{B}_{۱}=\dfrac{\hat{A}_{۱}}{۲}$$

E و B و F در یک راستا هستند

$$\hat{B}_{۱}+\hat{B}_{۲}+\hat{B}_{۳}=\frac{\hat{A}_{۱}}{۲}+\hat{B}_{۲}+\frac{\hat{A}_{۱}}{۲}=\hat{A}_{۱}+\hat{B}_{۲}=۱۸۰^\circ\Rightarrow$$



۱۹ – در متوازی الاضلاع $ABCD$ اگر از رأس D خط دلخواه L را رسم کنیم، و AA' و BB' و CC' را عمود بر L رسم کنیم آنگاه ثابت کنید: $BB'=AA'+CC'$

حل:

برهان:

CH عمود بر BB' رسم می کنیم. در این صورت می توان نوشت:

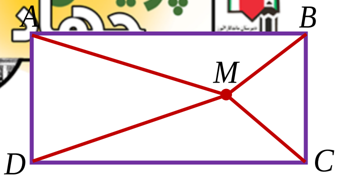
$$\left.\begin{array}{l} CH\perp BB' \\ C'B'\perp BB' \end{array}\right\}\Rightarrow CH\parallel C'B'$$

و به همین ترتیب $CC'\parallel BB'$ و در نتیجه $CC'B'H$ متوازی الاضلاع است پس $CC'=B'H$.

از طرفی می توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{c} \left.\begin{array}{l} AD\parallel BC \quad \text{مورب} \quad BB'\Rightarrow \hat{B}_{۱}=\hat{M}_{۱} \\ AA'\parallel BB' \quad \text{مورب} \quad AD\Rightarrow \hat{A}_{۲}=\hat{M}_{۱} \end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_{۲}=\hat{B}_{۱} \\ A'=\hat{H}_{۱}=۹۰^\circ \\ AD=DC \end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{AA'D}\cong\overset{\Delta}{BHC}\Rightarrow AA'=BH$$

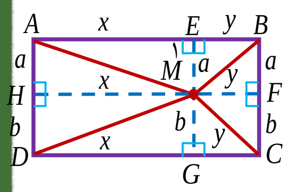
$$\Rightarrow AA'+CC'=BH+B'H=BB'$$



۲۰- اگر از نقطهٔ دلخواه M درون مستطیل $ABCD$ به چهار رأس آن وصل کنیم، ثابت کنید:

$$AM^2 + MC^2 = BM^2 + DM^2$$

حل:



از نقطهٔ M پاره خط های EF و GH را به موازات اضلاع مستطیل رسم می کنیم در این صورت می توان نوشت:

$AE \| HM \, , AH \| EM \xrightarrow{\hat{E}_1 = 90^\circ}$ مستطیل است $AEMH \Rightarrow AM^2 = AE^2 + ME^2 = x^2 + a^2$

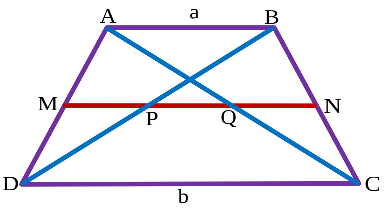
و به همین ترتیب می توان ثابت کرد:

$$AE = MH = DG = x \, , BE = MF = CG = y \, , AH = ME = BF = a \, , DH = MG = FC = b$$

و

$$DM^2 = MH^2 + HD^2 = x^2 + b^2 \, , BM^2 = MF^2 + BF^2 = y^2 + a^2 \, , CM^2 = MF^2 + CF^2 = y^2 + b^2$$

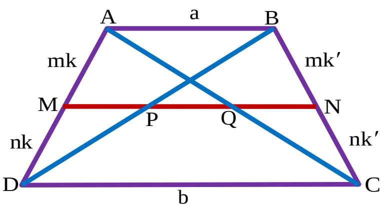
$$\left.\begin{array}{l} MA^2 + MC^2 = x^2 + a^2 + y^2 + b^2 \\ BM^2 + DM^2 = y^2 + a^2 + x^2 + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow AM^2 + MC^2 = BM^2 + DM^2$$



۲۱ – در ذوزنقه $ABCD$ اگر $AB = a$ و $DC = b$ و $MN \| AB \| CD$ و $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = \frac{m}{n}$ در این صورت ثابت کنید:

$$MN = \frac{na + mb}{m + n} \quad \text{و} \quad PQ = \frac{mb - na}{m + n}$$

اثبات:



$$\overset{\Delta}{ABD} : \quad MP \| AB \quad \Rightarrow \quad \frac{DM}{DA} = \frac{MP}{AB} \quad \Rightarrow \quad MP = \frac{AB \times DM}{DA} = \frac{a \times n}{m + n}$$

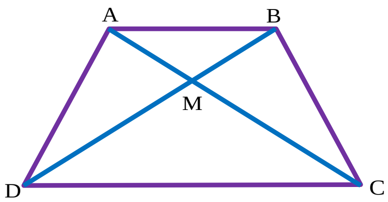
$$\overset{\Delta}{BDC} : \quad PN \| DC \quad \Rightarrow \quad \frac{BN}{BC} = \frac{PN}{DC} \quad \Rightarrow \quad PN = \frac{DC \times BN}{BC} = \frac{b \times m}{m + n}$$

$$\Rightarrow \quad MN = MP + PN = \frac{an}{m + n} + \frac{bm}{m + n} = \frac{an + bm}{m + n}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : \quad QN \| AB \quad \Rightarrow \quad \frac{CN}{CB} = \frac{QN}{AB} \quad \Rightarrow \quad QN = \frac{CN \times AB}{BC} = \frac{a \times n}{m + n}$$

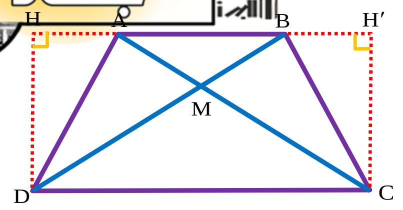
$$PQ = MN - MP - QN = \frac{na + mb}{m + n} - \frac{na}{m + n} - \frac{na}{m + n} = \frac{mb - na}{m + n}$$

۲۲ – در ذوزنقه $ABCD$ اگر نقطه تلاقی قطرها را M بنامیم در این صورت داریم:



الف) $S_{\overset{\Delta}{AMD}} = S_{\overset{\Delta}{BMC}}$

ب) $S_{\overset{\Delta}{AMB}} \times S_{\overset{\Delta}{DMC}} = S_{\overset{\Delta}{AMD}} \times S_{\overset{\Delta}{BMC}}$ یا $\left(S_{\overset{\Delta}{AMD}}\right)^2 = S_{\overset{\Delta}{AMB}} \times S_{\overset{\Delta}{DMC}}$

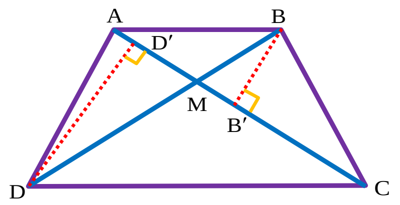


اثبات الف:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\Delta}{DAB}}=\frac{۱}{۲}DH\times AB \\ S_{\overset{\Delta}{CAB}}=\frac{۱}{۲}CH'\times AB \end{array}\right\} \xrightarrow{DH=CH'} S_{\overset{\Delta}{DAB}}=S_{\overset{\Delta}{CAB}}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{DAB}}-S_{\overset{\Delta}{MAB}}=S_{\overset{\Delta}{CAB}}-S_{\overset{\Delta}{MAB}} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{AMD}}=S_{\overset{\Delta}{BMC}}$$

اثبات ب:



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{MAB}}}{S_{\overset{\Delta}{MBC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}BB'\times AM}{\frac{۱}{۲}BB'\times MC}=\frac{AM}{MC}$$

و به طور مشابه داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{MAD}}}{S_{\overset{\Delta}{MDC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}DD'\times AM}{\frac{۱}{۲}DD'\times MC}=\frac{AM}{MC}$$

ودر نتیجه می توان نوشت:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{MAB}}}{S_{\overset{\Delta}{MBC}}}=\frac{S_{\overset{\Delta}{MAD}}}{S_{\overset{\Delta}{MDC}}} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{MAB}}\times S_{\overset{\Delta}{MDC}}=S_{\overset{\Delta}{MAD}}\times S_{\overset{\Delta}{MBC}}$$

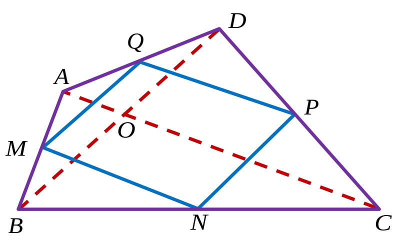
۲۳- ثابت کنید از به هم وصل کردن وسط های اضلاع یک چهار ضلعی، متوازی الاضلاعی به وجود می آید که مساحت آن نصف مساحت چهار ضلعی اولیه است.

حل:

$$\overset{\Delta}{ABD}: \frac{AQ}{QD}=\frac{AM}{MB}=۱ \longrightarrow MQ\parallel BD \Rightarrow \frac{MQ}{BD}=\frac{AM}{AB}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow MQ=\frac{۱}{۲}BD$$

به همین ترتیب ثابت می شود:

$$NP\parallel BD \quad , \quad NP=\frac{۱}{۲}BD$$



در نتیجه چهار ضلعی $MNPQ$ متوازی الاضلاع است زیرا دو ضلع موازی و مساوی دارد.

از طرفی می توان نوشت:

$$\overset{\Delta}{ABD}: \xrightarrow{MQ\parallel BD} \overset{\Delta}{AMQ}\cong\overset{\Delta}{ABD} \Rightarrow \frac{S_{AMQ}}{S_{ABD}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^{۲}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{AMQ}=\frac{۱}{۴}S_{ABD}$$

و به همین ترتیب ثابت می شود: $S_{CPN}=\frac{۱}{۴}S_{CBD}$

در نتیجه می توان نوشت:

$$S_{AMQ}+S_{CPN}=\frac{۱}{۴}S_{ABD}+\frac{۱}{۴}S_{CBD}=\frac{۱}{۴}(S_{ABD}+S_{CBD})=\frac{۱}{۴}S_{ABCD}$$

به همین ترتیب می توان نوشت:

$$S_{BMN}+S_{DPQ}=\frac{۱}{۴}S_{ABCD}$$

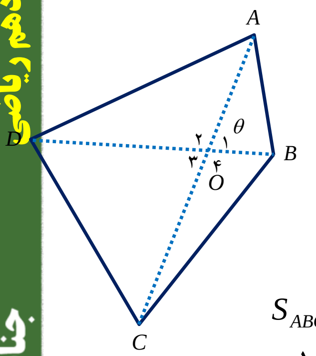
و در نتیجه داریم:

$$S_{AMQ}+S_{CPN}+S_{BMN}+S_{DPQ}=\frac{۱}{۴}(S_{ABCD}+S_{ABCD})=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ}=S_{ABCD}-(S_{AMQ}+S_{CPN}+S_{BMN}+S_{DPQ})=S_{ABCD}-\frac{۱}{۲}S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$

۲۴– ثابت کنید مساحت هر چهار ضلعی برابر نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه بین آن دو قطر است.

حل:

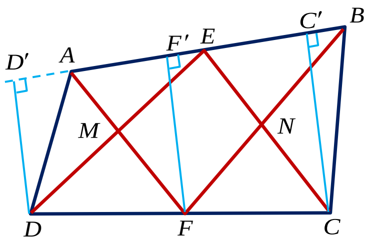


می دانیم مساحت هر مثلث برابر با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آن دو ضلع است. بنابراین می توان نوشت:

$$S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{AOD}+S_{BOC}+S_{DOC}=$$

$$=\frac{۱}{۲}OA\times OB\times\sin\hat{O}_۱+\frac{۱}{۲}OA\times OD\times\sin\hat{O}_۲+\frac{۱}{۲}OC\times OB\times\sin\hat{O}_۴+\frac{۱}{۲}OC\times OD\times\sin\hat{O}_۳$$

$$=\frac{۱}{۲}OA\times\sin\theta\left(\underbrace{OB+OD}_{BD}\right)+\frac{۱}{۲}OC\times\sin\theta\left(\underbrace{OB+OD}_{BD}\right)=\frac{۱}{۲}BD\times\sin\theta(OA+OC)=\frac{۱}{۲}AC\times BD\times\sin\theta$$



۲۵– در چهار ضلعی $ABCD$ مطابق شکل نقاط E و F را به ترتیب وسط اضلاع AB و CD انتخاب می کنیم. ثابت کنید: $S_{EMFN}=S_{AMD}+S_{BCN}$

حل:

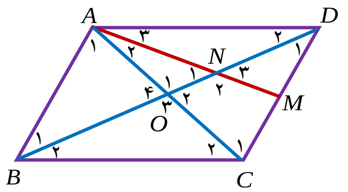
عمود های CC'، FF' و DD' را بر AB رسم می کنیم. در این صورت $CC'D'D$ یک ذوزنقه است و چون F وسط DC است و FF' موازی دو قاعدهٔ ذوزنقه است پس طبق قضیه میان خط در ذوزنقه $FF'=\frac{CC'+DD'}{۲}\Rightarrow CC'+DD'==۲FF'$

در نتیجه می توان نوشت:

$$S_{ADE}+S_{BCE}=\frac{۱}{۲}DD'\times AE+\frac{۱}{۲}CC'\times BE\xrightarrow{AE=EB}S_{ADE}+S_{BCE}=\frac{۱}{۲}AE(DD'+CC')$$
$$=\frac{۱}{۲}AE(۲FF')=\frac{۱}{۲}\times ۲AE\times FF'=\frac{۱}{۲}AB\times FF'=S_{AFB}$$

۲۶ – در متوازی الاضلاع $ABCD$، قطر های AC و BD یکدیگر را در نقطهٔ O قطع می کنند. اگر از رأس A به نقطهٔ N وسط ضلع BC وصل کنیم و MN قطر BD را در نقطهٔ M قطع کند، مساحت AON چه کسری از مساحت $ABCD$ است؟

حل:

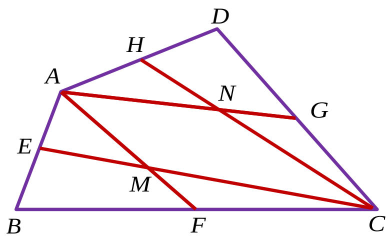


$S_{ABCD}=S$ ، **قطر متوازی الاضلاع است** $AC\Rightarrow S_{ACD}=\frac{۱}{۲}S$

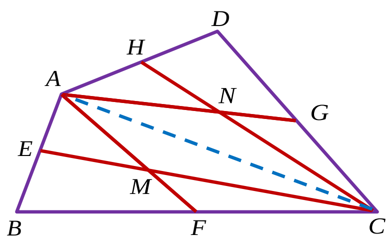
می دانیم در هر مثلث با رسم سه میانه، تعداد ٦ مثلث هم مساحت به وجود می آید که مساحت هر کدام از آنها برابر $\frac{۱}{۶}$ مساحت مثلث اولیه است. بنابراین می توان نوشت:

$$S_{AON}=\frac{۱}{۶}S_{ACD}=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۲}S=\frac{۱}{۱۲}S\Rightarrow\frac{S_{AON}}{S_{ABCD}}=\frac{۱}{۱۲}$$

۲۷– مطابق شکل، نقاط E، F، G و H به ترتیب وسط‌های اضلاع چهار ضلعی $ABCD$ هستند. نسبت مساحت $ABCD$ به مساحت $AMCN$ را به دست آورید.



حل:



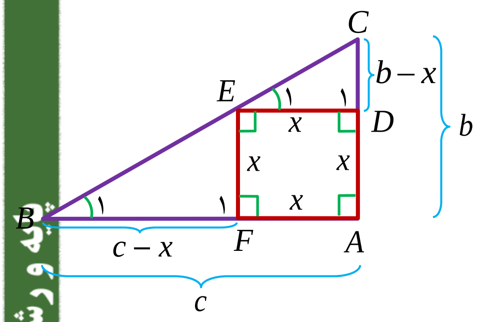
قطر AC را رسم می کنیم. در این صورت در مثلث ABC، نقطهٔ M محل برخورد میانه های AF و CE است ودر نتیجه $S_{AMC}=\frac{۱}{۳}S_{ABC}$.

با استدلال مشابه می توان نتیجه گرفت، $S_{ANC}=\frac{۱}{۳}S_{ADC}$

$$\Rightarrow S_{AMCN}=S_{AMC}+S_{ANC}=\frac{۱}{۳}S_{ABC}+\frac{۱}{۳}S_{ADC}=\frac{۱}{۳}(S_{ABC}+S_{ADC})=\frac{۱}{۳}S_{ABCD}$$

۲۸ – اگر در مثلث قائم الزاویه ABC، $\hat{A}=۹۰^\circ$ به اضلاع $AB=۶$ و $AC=۲$، مربعی به ضلع x را طوری محاط کنیم که یک زاویه مربع، همان زاویه قائمه مثلث باشد، مساحت مربع چه کسر ی از مساحت مثلث است؟

حل:

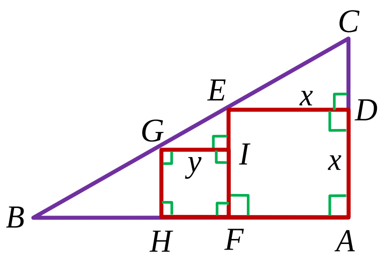


$$ED \parallel AB \quad \text{مورب} \quad BC \Rightarrow \hat{E}_۱=\hat{B}_۱ \xrightarrow{\hat{D}_۱=\hat{B}_۱=۹۰^\circ} \overset{\Delta}{ADE} \cong \overset{\Delta}{BEF}$$

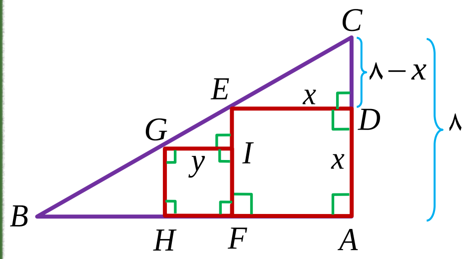
$$\Rightarrow \frac{AD}{EF}=\frac{ED}{BF} \Rightarrow \frac{b-x}{x}=\frac{x}{c-x} \Rightarrow bc-bx-cx+x^۲=x^۲ \Rightarrow x=\frac{bc}{b+c}=\frac{۲\times ۶}{۲+۶}=\frac{۳}{۴}$$

$$\frac{x^۲}{\frac{۱}{۲}AB\times AC}=\frac{\left(\frac{AB\times AC}{AB+AC}\right)^۲}{\frac{۱}{۲}AB\times AC}=\frac{\left(\frac{۶\times ۲}{۶+۲}\right)^۲}{\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۲}=\frac{\frac{۹}{۴}}{۶}=\frac{۳}{۸}$$

۲۹– اگر در مثلث قائم الزاویه ABC، $\left(\hat{A}=۹۰^\circ\right)$ به اضلاع قائم $AB=۱۰$ و $AC=۸$ دو مربع به اضلاع x و y مطابق شکل رسم کنیم. نسبت $\frac{S_{ADEF}}{S_{GIFH}}$ را به دست آورید.



اثبات:



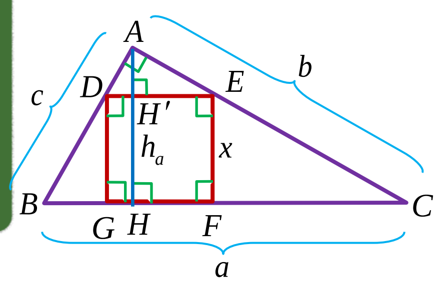
$$\overset{\Delta}{ABC}: \quad \frac{AC}{EF}=\frac{AB}{BF} \Rightarrow \frac{۸}{x}=\frac{۱۰}{۱۰-x} \Rightarrow ۸۰=۱۸x \Rightarrow x=\frac{۴۰}{۹}$$

$$\overset{\Delta}{BFE}: \quad \frac{EF}{GH}=\frac{BF}{BH} \Rightarrow \frac{\frac{۴۰}{۹}}{y}=\frac{۱۰-\frac{۴۰}{۹}}{۱۰-\frac{۴۰}{۹}-y} \Rightarrow \frac{۴۰}{۹y}=\frac{۵۰}{۵۰-y} \Rightarrow ۲۰۰=۴۹۰y \Rightarrow y=\frac{۴۹}{۲۰}$$

$$\frac{S_{ADEF}}{S_{GIFH}}=\frac{x^۲}{y^۲}=\frac{\left(\frac{۴۰}{۹}\right)^۲}{\left(\frac{۴۹}{۲۰}\right)^۲}=\frac{۶۴۰۰۰۰}{۱۹۴۴۸۱}$$

۳۰– در مثلث ABC، یک ضلع مربع $DEFG$، موازی وتر مثلث است باشد، در این صورت نسبت $\frac{S_{DEFG}}{S_{ABC}}$ را به دست آورید.

حل:



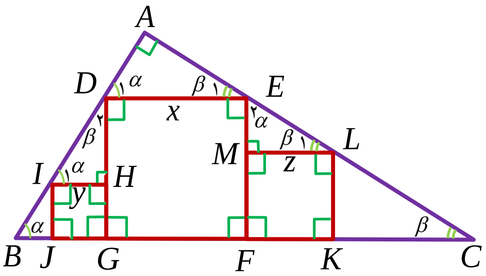
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\overset{\Delta}{ABC}} \Rightarrow \frac{۱}{۲}a\times h_a=\frac{۱}{۲}bc \Rightarrow h_a=\frac{bc}{a}$$

$$ED\|AB \Rightarrow \overset{\Delta}{ADE}=\overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{AH'}{AH}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{h_a-x}{h_a}=\frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{bc}{a}-x}{\frac{bc}{a}}=\frac{x}{a} \Rightarrow bc-ax=\frac{bcx}{a} \Rightarrow abc-a^{۲}x=bcx \Rightarrow x=\frac{abc}{a^{۲}+bc}$$

$$\frac{S_{DEFG}}{S_{ABC}}=\frac{x^{۲}}{\frac{۱}{۲}bc}=\frac{۲\left(\frac{abc}{a^{۲}+bc}\right)^{۲}}{bc}=\frac{۲a^{۲}bc}{a^{۲}+bc}=\frac{۲(۱۰۰)(۸)(۶)}{۱۰۰+۴۸}=\frac{۹۶۰۰}{۱۴۸}=\frac{۲۴۰۰}{۳۷}$$

۳۱- اگر در مثلث ABC سه مربع به اضلاع x و y و z را مانند شکل مقابل رسم کنیم ثابت کنید محیط مربع بزرگ تر : $x=y+z$



اگر $\hat{B}=\alpha$ و $\hat{C}=\beta$ با استفاده از خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود:

$DE\|IH\|BC$ **و مورب** $AB \Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{I}_۱=\alpha$

$DE\|ML\|BC$ **و مورب** $AC \Rightarrow \hat{E}_۱=\hat{L}_۱=\beta$

و از آنجاییکه مجموع زوایای داخلی مثلث برابر ۱۸۰° است نتیجه می‌شود: $\hat{E}_۲=\alpha$ ، $\hat{D}_۲=\beta$ و در نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{I}_۱=\hat{E}_۲=\alpha\\ \hat{D}_۲=\hat{L}_۱=\beta\end{array}\right\}\xrightarrow{زز}\overset{\Delta}{DIH}\approx\overset{\Delta}{EML} \Rightarrow \frac{IH}{EM}=\frac{DH}{ML} \Rightarrow \frac{y}{x-z}=\frac{x-y}{z}$$

$$\Rightarrow yz=x^{۲}-xy-xz+yz \Rightarrow x(x-y-z)=۰ \xrightarrow{\div x} x=y+z$$

۳۲- ثابت کنید در یک شش ضلعی منتظم به ضلع a:

الف) هرزاویه داخلی ۱۲۰° است.

ب) اگر از یک رأس تمام قطر ها را رسم کنیم، در آن رأس چهار زاویه ۳۰°به وجود می آید.

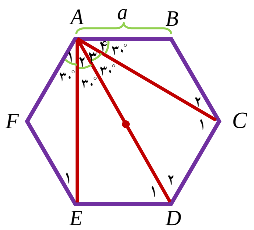
پ) طول قطر کوچک برابر $\sqrt{۳}a$ و طول قطر بزرگ (نیمساز زاویه) برابر $۲a$ است.

ت) مساحت این شش ضلعی برابر است با: $S=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}$ است.

حل:

الف) هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم برابر است با $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n}$ پس هر زاویهٔ داخلی ۶ ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{۴\times ۱۸۰^\circ}{۶}=۱۲۰^\circ$

ب)

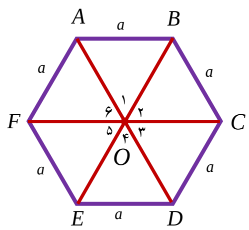


$$\overset{\Delta}{AFE}:\quad \hat{A}_{۱}+\hat{F}+\hat{E}_{۱}=۱۸۰^\circ \xrightarrow[AF=FE]{\hat{F}=۱۲۰^\circ} \hat{A}_{۱}=\hat{E}_{۱}=۳۰^\circ$$

و به همین ترتیب ، زاویهٔ بین هر قطر کوچک و هر ضلع شش ضلعی منتظم برابر ۳۰° است.

$$\left.\begin{array}{l} AF=AB \\ \hat{F}=\hat{B}=۱۲۰^\circ \\ FE=BC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{AFE}\cong\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow AE=AC$$

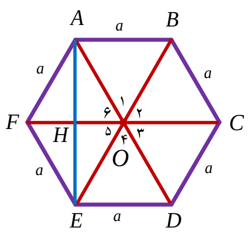
$$\left.\begin{array}{l} AE=AC \\ ED=DC \\ AD=AD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{AED}\cong\overset{\Delta}{ACD}\Rightarrow \hat{A}_{۲}=\hat{A}_{۳} \xrightarrow[\hat{A}_{۱}=\hat{A}_{۳}=۳۰^\circ]{\hat{A}=۱۲۰^\circ} \hat{A}_{۲}=\hat{A}_{۳}=۳۰^\circ$$



پ) با رسم سه قطر بزرگ شش ضلعی منتظم به ضلع a، تعداد ٦ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a به وجود می آید. زیرا تمام این مثلث ها متساوی الساقین بوده و یک زاویه ۶۰° دارند.

پس $\hat{A}_{۱}+\hat{A}_{۲}+\hat{A}_{۳}=۶۰^\circ+۶۰^\circ+۶۰^\circ=۱۸۰^\circ$ و $AD=AO+OD=a+a=۲a$

و به همین ترتیب $BE=CF=۲a$

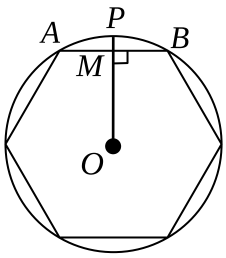


چهار ضلعی $AOEF$ یک لوزی است زیرا $AO=OE=EF=FA=a$ و AE و OE قطر های این لوزی هستند، و در نتیجه AH عمود بر FO است.

در مثلث AFO اندازه ارتفاع AH برابر است با: $AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}FO=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$.

و به همین ترتیب $EH=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ودر نتیجه $AE=AH+EH=\sqrt{3}a$

و به همین ترتیب طول هر قطر کوچک، برابر $\sqrt{3}a$ است.



۳۳- شش ضلعی منتظمی دردایره ای به شعاع یک محاط است .

الف)فاصله مرکز دایره تاوسط ضلع شش ضلعی یعنی MO را بیابید.

ب)طول MP را محاسبه کنید.

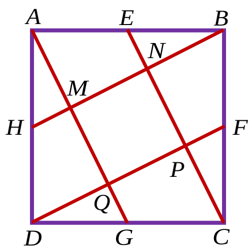
حل :

مثلث AOB یک مثلث متساوی الاضلاع است زیرا $OA=OB=R$ و زاویه $A\hat{O}B=60^\circ$ (زیرا این زاویه مقابل به وتری برابر $\frac{1}{6}$ دایره است)

در هر مثلث متساوی الاضلاع ، میانه و ارتفاع یک ضلع بر هم منطبقند پس داریم :

$$\overset{\Delta}{OAM}:\quad OA^2=OM^2+AM^2 \Rightarrow OM^2=OA^2-AM^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow OM=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$MP=OP-OM=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$



۳٤ – اگر نقاط E، F، G و H وسط های اضلاع مربع $ABCD$ باشند، ثابت کنید:

$$S_{MNPQ}=\frac{1}{5}S_{ABCD}$$

حل:

$$\left.\begin{array}{r} AB=AD=a \\ AH=DG=\frac{a}{2} \\ \hat{A}=\hat{D}=90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABH}\cong\overset{\Delta}{ADG} \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{B}_1 \xrightarrow{\hat{A}_1+\hat{A}_2=90^\circ} \hat{B}_1+\hat{A}_2=90^\circ$$

$$\overset{\Delta}{AMB}:\quad \hat{B}_1+\hat{A}_2+\hat{M}_1=180^\circ \xrightarrow{\hat{B}_1+\hat{A}_2=90^\circ} \hat{M}_1=90^\circ \xrightarrow{\hat{M}_1+\hat{M}_2=180^\circ} \hat{M}_2=90^\circ$$

و به همین ترتیب ثابت می شود $\hat{N}_2=\hat{P}_2=\hat{Q}_2=90^\circ$

ازآنجاییکه AE و CG موازی و مساوی هستند، پس $AECG$ متوازی الاضلاع است و در نتیجه می توان نوشت:

$$\overset{\Delta}{AMB}:\ EN\|AM \Rightarrow \frac{BN}{NM}=\frac{BE}{EA}=1 \Rightarrow BN=NM$$

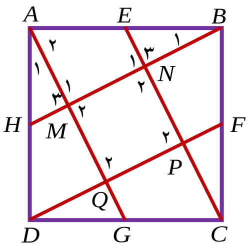
به همین ترتیب $AM=MQ$

$$\overset{\Delta}{AMB}:\ EN\|AM \Rightarrow \frac{EN}{AM}=\frac{BE}{AB}=\frac{1}{2} \Rightarrow EN=\frac{1}{2}AM$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}_3=\hat{N}_3=90^\circ\\ AH=BE=\dfrac{a}{2}\\ \hat{A}_1=\hat{B}_1\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{AMH}=\overset{\Delta}{BNE}\Rightarrow MH=EN \quad , \quad AM=BN$$

$$AM=BN\xrightarrow{BN=NM}AM=MN\xrightarrow{EN=\frac{1}{2}AM}EN=\frac{1}{2}MN$$

و به همین ترتیب $HM=\frac{1}{2}MQ$ و چون $HM=EB$ پس $MN=MQ$ و در نتیجه $MNPQ$ یک مربع است.



$$\overset{\Delta}{AMB}:\ EN\parallel AM\Rightarrow \overset{\Delta}{BNE}\cong\overset{\Delta}{ABM}\Rightarrow\frac{S_{BEN}}{S_{ABM}}=\left(\frac{BE}{AB}\right)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow S_{ABM}=4S_{BNE}$$

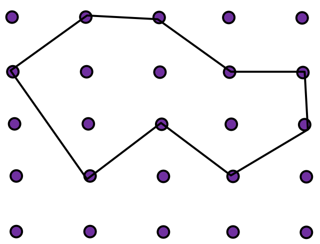
$$S_{BNE}=S\xrightarrow[S_{AENM}=S_{ABM}-S_{BNE}]{A_{ABM}=4S_{BNE}}S_{ABM}=4S \quad , \quad S_{AENM}=3S$$

$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{BMN}}=\frac{MN^2}{\frac{1}{2}BN\times EN}=\frac{MN^2}{\frac{1}{2}MN\times\frac{1}{2}MN}=4\xrightarrow{S_{BEN}=S}S_{MNPQ}=4S$$

$$S_{ABCD}=4S_{BMN}+4S_{AENM}+S_{MNPQ}=4S+12S+4S=20S$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{MNPQ}}=\frac{20S}{4S}=5\Rightarrow S_{ABCD}=5S_{MNPQ}$$

۳۵ – مساحت یک چند ضلعی شبکه‌ای زیر را به دست آورید.



حل:

$b=9$ نقطه مرزی و $i=4$ نقطه درونی برابر است با: $S=\frac{b}{2}-1+i=\frac{9}{2}-1+4=\frac{15}{2}$

سوالات تستی فصل ٤

۱ – با تبدیل n ضلعی منتظم به $n+1$ ضلعی منتظم به هر زاویه داخلی چند درجه اضافه می شود؟

$$\left(180 - \frac{360}{n+1}\right) - \left(180 - \frac{360}{n}\right) = \frac{360}{n} - \frac{360}{n+1}$$

۱) $\frac{180^\circ}{n+3}$ ۲) $\frac{360^\circ}{5n-3}$ ۳) $\frac{360^\circ}{n(n+1)}$ ٤) $\frac{180^\circ}{n^2-3}$

۳۰

$60 \rightarrow 90$

$3 \rightarrow 4$

$\frac{360}{3 \times 4} = 30$

$$= \frac{360(n+1) - 360n}{n(n+1)} = \frac{360}{n(n+1)}$$

حل : گزینه ۳

هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم برابر $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n}$ است .

هر زاویه داخلی $n+۱$ ضلعی منتظم برابر است با : $\frac{(n-۱)\times ۱۸۰^\circ}{n+۱}$

بنا براین داریم :

$$\frac{(n-۱)\times ۱۸۰^\circ}{n+۱}-\frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n}=\frac{n(n-۱)\times ۱۸۰^\circ-(n+۱)(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n(n+۱)}=\frac{۳۶۰^\circ}{n(n+۱)}$$

۲ – اگر هر زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم فقط ۲ درجه کمتر از هر زاویه داخلی یک $n+۲$ ضلعی منتظم باشد، n کدام است ؟

۱)۱۷ ۲)۱۸ ۳)۱۹ ٤)۲۰

حل : گزینه ۲

هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم برابر $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n}$ است .یا

$$۱۸۰^\circ-\frac{۳۶۰^\circ}{n}$$

هر زاویه داخلی $n+۲$ ضلعی منتظم برابر است با : $\frac{n\times ۱۸۰^\circ}{n+۲}$ بنا براین داریم :

$$\frac{n\times ۱۸۰^\circ}{n+۲}-\frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n}=\frac{n^۲\times ۱۸۰^\circ-(n^۲-۴)\times ۱۸۰^\circ}{n(n+۲)}=\frac{۷۲۰^\circ}{n(n+۲)}$$

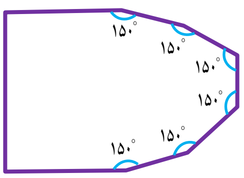
$$\frac{۷۲۰^\circ}{n(n+۲)}=۲^\circ \quad\Rightarrow\quad n(n+۲)=۳۶۰ \quad\Rightarrow\quad n=۱۸$$

۳ – یک n ضلعی محدب فقط ٦ زاویه منفرجه داخلی دارد که اندازهٔ هر کدام از آنها برابر ۱۵۰° است، این n ضلعی حداکثر چند زاویه حاده دارد؟

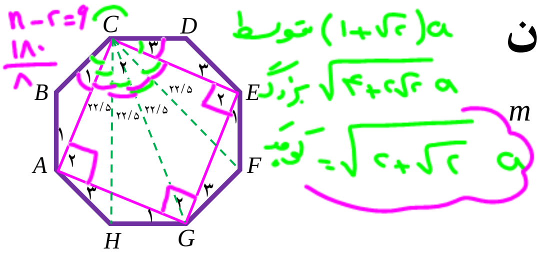
۱)صفر ۲)۱ ۳)۲ ٤)۳

حل: گزینه ۱

می‌دانیم مجموع زاویه‌های خارجی هر n ضلعی برابر ۳۶۰° است. وچون ٦ زاویهٔ داخلی ۱۵۰°داریم، در نتیجه ٦ زاویه خارجی ۳۰° نیز وجود دارد که مجموع آنها برابر ۱۸۰° است، در نتیجه مجموع بقیهٔ زوایای خارجی ۱۸۰° است، و چون



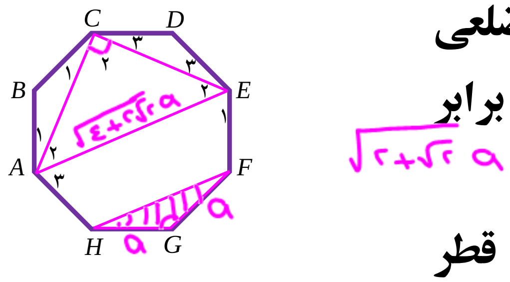
زاویه های داخلی دیگر منفرجه نیستند، درنتیجه زاویه های خارجی دیگر یا قائمه و یا منفرجه هستند. جمع هر دو یا چند زاویه منفرجه برابر ۱۸۰° نیست پس دو زاویه خارجی دیگر فقط می توانند دو زاویه قائمه باشند پس دو زاویه داخلی دیگر هر کدام برابر ۹۰° بوده و این n ضلعی هیچ زاویه حاده ای ندارد.



۴ – در یک هشت ضلعی منتظم از به هم وصل کردن رئوس، تعداد n مثلث متساوی الساقین غیر همنهشت و m مربع غیر همنهشت تشکیل می شود $n+m$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

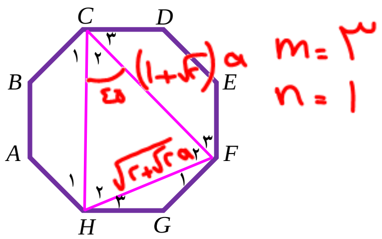
حل: گزینه ۳



مطابق شکل از به هم وصل کردن چهار رأس هشت ضلعی منتظم یک مربع به وجود می آید که اندازه اضلاع آن برابر طول قطر کوچک هشت ضلعی منتظم است. $n=$۱

درهشت ضلعی منتظم سه نوع قطر وجود دارد، قطر کوچک، قطر بزرگ و قطر متوسط.

از هر رأس هشت ضلعی منتظم،دو قطر کوچک، یک قطر بزرگ و دو قطر متوسط می گذرد.



با دو قطرکوچک که از یک رأ می‌گذرند، یک مثلث متساوی الساقین تشکیل می‌شود.

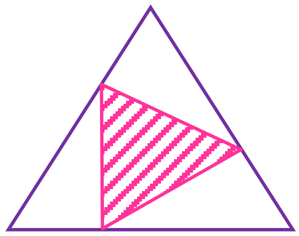
با دو قطرمتوسط که از یک رأ می‌گذرند، یک مثلث متساوی الساقین تشکیل می‌شود.

هیچ مثلث متساوی‌الساقینی با دو قطر بزرگ به وجود نمی‌آید.

با دو ضلع مجاور هشت ضلعی منتظم و یک قطر کوچک نیز مثلث متساوی الساقین به وجود می‌آید. پس $m=۳$ و در

نتیجه: $n+m=۳+۱=۴$

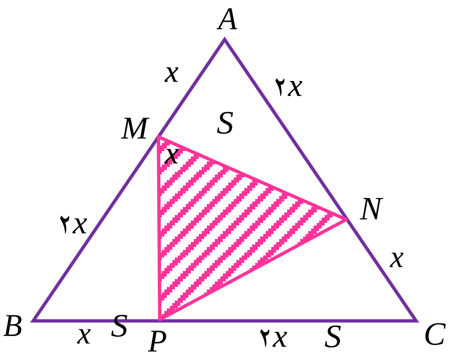
۵- هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱و۲ تقسیم شده‌است. مساحت مثلث سایه‌زده چند برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۴}{۹}$ ٤) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ:گزینه ۲



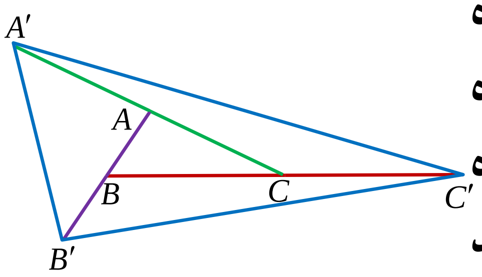
مثلث‌های AMN, BMP, CNP به حالت دو ضلع وزاویه‌ی بین هم‌نهشت هستند. مساحت هر کدام از این ۳ مثلث برابراست با:

$$S=\frac{۱}{۲}(۲x)(x)(\sin ۶۰^\circ)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x^۲$$

از آن‌جا که مساحت مثلث ABC برابر $S_{ABC}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۳x)^۲$ است پس مساحت مثلث سایه‌زده برابراست با:

$$S_{MNP}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۳x)^۲-۳\frac{\sqrt{۳}}{۲}x^۲=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}x^۲$$

$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}x^۲}{\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}x^۲}=\frac{۱}{۳}$$



٦ - اگر در مثلث ABC ضلع BC را از طرف رأس C به اندازه خودش تا نقطهٔ C' و ضلع AC را از طرف رأس A به اندازه خودش تا نقطهٔ A' و ضلع AB را از طرف رأس B به اندازه خودش تا نقطهٔ B' امتداد دهیم، مساحت مثلث $A'B'C'$ چند برابر مساحت مثلث ABC است.

پایه و رشته دهم ریاضی

جناب استاد حمیدرضا کمالی خوش خلق

۱) ٤ برابر ۲) ۵برابر ۳) ٦برابر ٤) ۷برابر

حل: گزینه ٤

مساحت مثلث ABC را برابر S در نظر می گیریم. در مثلث $A'CC'$ ، داریم $A'C=۲AC$ و $CC'=BC$ و زاویه $A'\hat{C}C'$ مکمل زاویه $A\hat{C}B$ است، پس داریم :

$$S_{A'CC'}=۲S_{ABC}=۲S$$

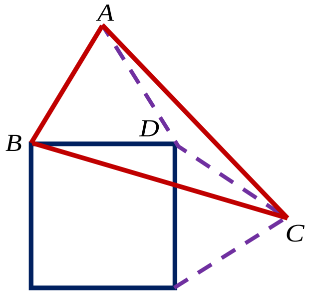
و به همین ترتیب داریم:

$$S_{B'BC'}=۲S_{ABC}=۲S \quad \text{و} \quad S_{A'AB'}=۲S_{ABC}=۲S$$

درنتیجه می توان نوشت:

$$S_{A'B'C'}=S_{ACC'}+S_{B'BC'}+S_{A'AB'}+S_{ABC}=۲S+۲S+۲S+S=۷S$$

۷- در خارج یک مربع به ضلع ۲ واحد بر روی دو ضلع مجاور آن مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته‌شده است. مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) $۱+\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$

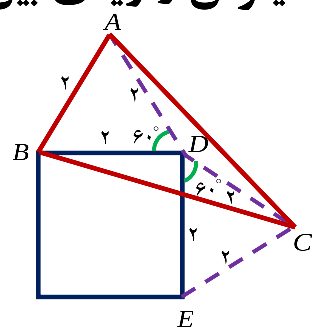
۳) $۲+\sqrt{۳}$ ٤) ۴

پاسخ: گزینه۳

مثلث‌های CED, ABD متساوی‌الاضلاع هستند. پس داریم:

$$A\hat{D}C=۳۶۰^\circ-(۶۰^\circ+۹۰^\circ+۶۰^\circ)=۱۵۰^\circ \qquad B\hat{D}C=۹۰^\circ+۶۰^\circ=۱۵۰^\circ$$

مساحت هر مثلث برابراست با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع پس داریم:



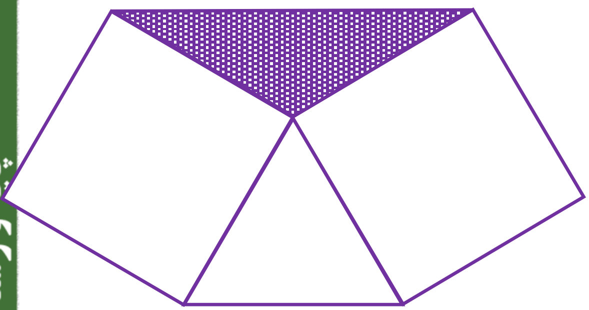
$$S_{\overset{\Delta}{ACD}}=\frac{۱}{۲}AD.CD.\sin(A\hat{D}C)=\frac{۱}{۲}\times۲\times۲\times\frac{۱}{۲}=۱$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABD}}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times۲^۲=\sqrt{۳}$$

$$S_{\overset{\Delta}{BCD}}=\frac{۱}{۲}BD.DC.\sin(B\hat{D}C)=\frac{۱}{۲}\times۲\times۲\times\frac{۱}{۲}=۱$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\overset{\Delta}{ACD}}+S_{\overset{\Delta}{ABD}}+S_{\overset{\Delta}{BCD}}=۲+\sqrt{۳}$$

۸- در یک مثلث متساوی‌الاضلاع برروی دو ضلع آن دو مربع ساخته‌شده است. مساحت مثلث سایه‌زده چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟



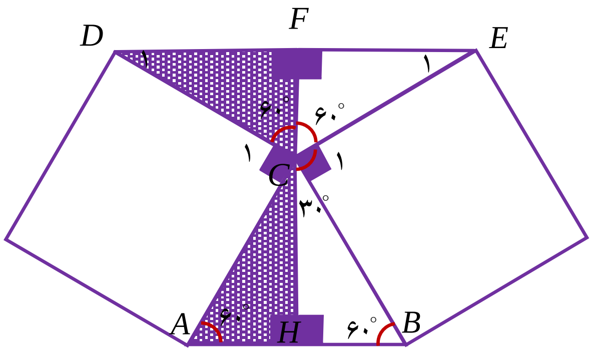
۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۳) ۱

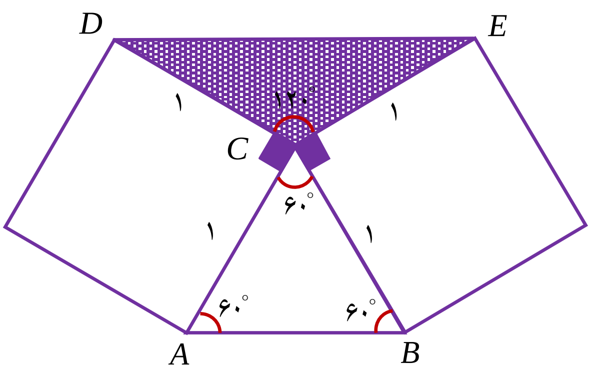
٤) $\sqrt{3}$

پاسخ:گزینه۳



روش اول : با توجه به شکل واضح است که مثلث‌های CDF, ACH هم‌نهشت هستند(دو مثلث قائم الزاویه با زوایای ۳۰ و ٦۰ درجه و با وتر به طو ل یک) بنابراین مساحت مثلث ABC دو برابر مساحت $\overset{\Delta}{DCF}$ ومساوی با مساحت $\overset{\Delta}{DCE}$ است.

روش دوم :



با توجه به شکل داریم $D\hat{C}E = 120^\circ$ بنابراین می توان نوشت :

$$S_{\overset{\Delta}{CDE}} = \frac{1}{2} DC \times CD \times \sin\left(D\hat{C}E\right) = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

از طرفی می دانیم مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر است با : $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

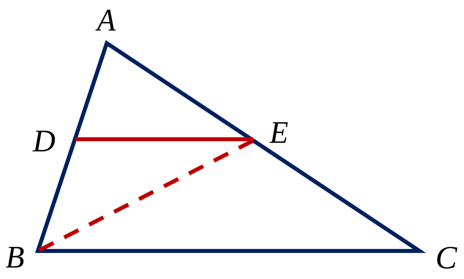
پس مساحت مثلث ABC برابر است با :

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{4}(1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

ودر نتیجه می توان نوشت :

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{CDE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}}=۱$$

۹– در مثلث ABC پاره‌خط DE موازی ضلع BC است و $AD=\frac{۴}{۵}DB$. مساحت مثلث EBC چند برابر مساحت مثلث EBD است؟



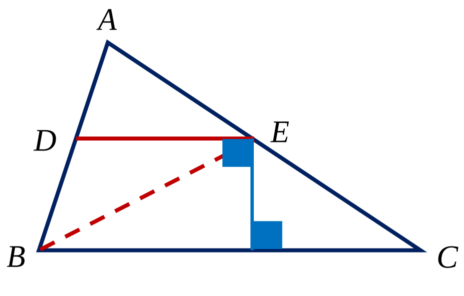
۱) ۲

۲) ۲/۲۵

۳) ۲/۵

۴) $\frac{۲۵}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲



$$AD=\frac{۴}{۵}DB \Rightarrow \frac{۵}{۴}=\frac{DB}{AD}\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}}\frac{۹}{۴}=\frac{AB}{AD}$$

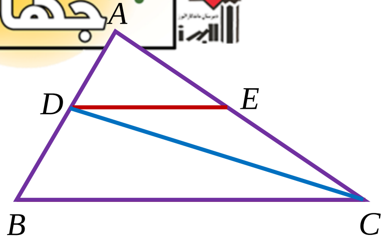
چون دو مثلث ارتفاع یکسان دارند برای محاسبه‌ی نسبت مساحت‌ها کافیست نسبت قاعده‌ها رابه دست‌آوریم.

$$\frac{S_{EBC}}{S_{EBD}}=\frac{BC}{DE}\xrightarrow{\text{قضیه تالس } DE\parallel BC}\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

۱۰– در شکل مقابل مساحت مثلث DEC شصت درصد مساحت مثلث ADE است. مساحت ذوزنقه چند برابر مساحت مثلث ADE است ؟

پایه و رشته دهم ریاضی

جناب استاد حمیدرضا کمالی خوش خلق



۱) ۱/۳۶

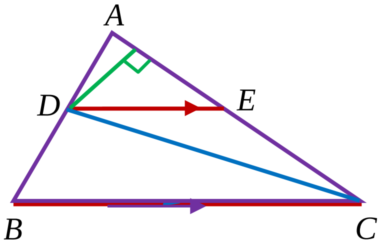
۲) ۱/۴۴

۳) ۱/۵۶

۴) ۱/۶۴

پاسخ: گزینه ۳

دو مثلث DEC, ADE درارتفاع وارد از رأس D مشترکند پس نسبت مساحت آن‌ها با نسبت قاعده‌ها یکسان است.



پس داریم: $\frac{S_{DEC}}{S_{ADE}}=\frac{EC}{AE}=\frac{6}{10}\Rightarrow\frac{AC}{AE}=\frac{6+10}{10}=\frac{16}{10}\Rightarrow\frac{AE}{AC}=\frac{5}{8}$

پس دو مثلث ABC, ADE با نسبت $K=\frac{5}{8}$ متشابه هستند

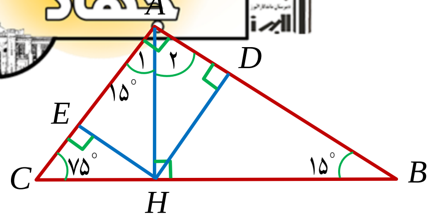
وداریم: $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=k^2=\frac{25}{64}\Rightarrow\frac{S_{ADE}}{S_{BCED}}=\frac{25}{64-25}=\frac{25}{39}\Rightarrow\frac{S_{BCED}}{S_{ADE}}=\frac{39}{25}=1/56$

۱۱ – در مثلث قائم الزاویه $ABC\left(\hat{C}=5\hat{B}\,,\,\hat{A}=90^\circ\right)$، از نقطهٔ H پای ارتفاع وارد بر وتر دو عمود HD و HE به ترتیب بر اضلاع AB و AC رسم شده است. نسبت مساحت چهار ضلعی $ADHE$ به مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{16}$

حل: گزینه ۲

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\xrightarrow[\hat{B}=5\hat{C}]{\hat{A}=90^\circ}5\hat{C}+\hat{C}=90^\circ\Rightarrow\hat{C}=15^\circ\quad,\quad\hat{B}=75^\circ$$



می دانیم در مثلث قائم الزاویه اگر یکی از زوایای حاده برابر ۱۵° باشد، آنگاه طول ارتفاع وارد بر وتر برابر $\frac{۱}{۴}$ وتر است. بنابراین داریم:

$$\overset{\Delta}{AHB}: \hat{B}=۱۵^\circ \Rightarrow HD=\frac{۱}{۴}AB$$

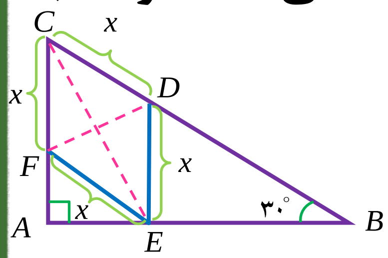
$$\overset{\Delta}{AHC}: \hat{A}_۱=۱۵^\circ \Rightarrow HE=\frac{۱}{۴}AC$$

چهار ضلعی $ADHE$ مستطیل است. در نتیجه داریم:

$$\frac{S_{ADHE}}{S_{ABC}}=\frac{HD\times HE}{\frac{۱}{۲}AB\times AC}=۲\frac{HD}{AB}\times\frac{HE}{AC}=۲\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۸}$$

۱۲ – در مثلث قائم الزاویه ABC که $A=۹۰^\circ$ و $B=۳۰^\circ$ و $AC=۶$ است. اگر نقاط D و E و F به ترتیب بر روی اضلاع BC، AB و AC طوری انتخاب شوند که چهار ضلعی $CDEF$ لوزی باشد. طول قطر کو چکتر این لوزی کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ٤) $\sqrt{۳}$



حل: گزینه ۱

می دانیم در مثلث قائم الزاویه، طول ضلع روبه رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است پس $BC=۱۲$ می باشد.

اگر طول هر ضلع لوزی $CDEF$ را برابر x در نظر بگیریم آنگاه داریم:

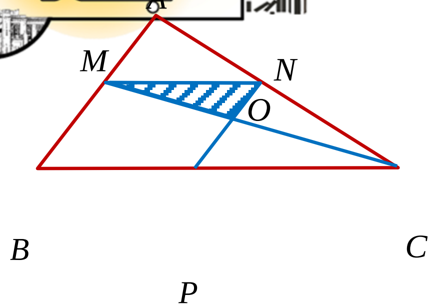
$$DB=BC-DC=۱۲-x$$

از طرفی $DE\parallel AC$ است، پس $D\hat{E}B=۹۰^\circ$ و در نتیجه مثلث DEB قائم الزاویه است. در مثلث قائم الزاویه طول ضلع مقابل به زاویه ۳۰° نصف وتر است پس داریم:

$$\frac{DE}{DB}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{x}{۱۲-x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۴$$

در مثلث CDF، $CD=CF=۴$ و $\hat{C}=۶۰^\circ$ است. پس این مثلث متساوی الاضلاع بوده و $DF=۴$ است، بنابراین طول کوچکترین قطر لوزی برابر ٤ می باشد.

۱۳- در شکل زیر اگر $\frac{MA}{MB}=\frac{۲}{۳}$ باشد، آنگاه مساحت قسمت سایه زده چند درصد مساحت متوازی الاضلاع $MNPB$ است؟



۱) ۲۰ ۲) ۲٤

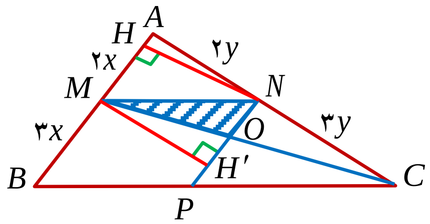
۳) ۲۵ ٤) ۳۰

حل: گزینه ۱

چهار ضلعی $MNPB$ متوازی الاضلاع است، بنابراین:

$MN \| BC$ و $NP=AB$

$$\overset{\Delta}{AMC}: ON \| AM \longrightarrow \frac{NC}{AC}=\frac{ON}{AM} \quad (۱)$$



طبق فرض $\frac{MA}{MB}=\frac{۲}{۳}$ و از اینکه $MN\|BC$ نتیجه می شود که $\frac{AN}{NC}=\frac{MA}{MB}=\frac{۲}{۳}$ پس فرض کنیم $AN=۲y$ و $NC=۳y$ و $MA=۲x$ و $MB=۳x$ باشد. داریم:

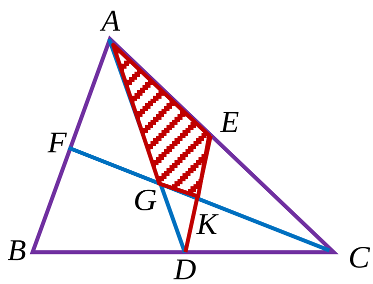
$$(۱) \Rightarrow \frac{۳y}{۵y}=\frac{ON}{۲x} \Rightarrow ON=\frac{۶}{۵}x$$

از آنجاییکه $NP\|AB$ است بنابراین فاصلهٔ بین دو خط ثابت است یعنی $NH=MH'$.

پس ارتفاع های مثلث OMN و متوازی الاضلاع $EMNP$ با هم برابرند. در نتیجه نسبت مساحت های آنها برابر است با:

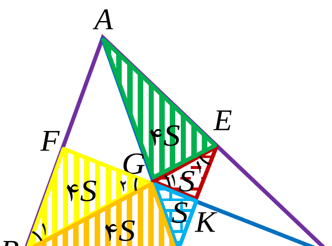
$$\frac{S_{OMN}}{S_{BMNP}}=\frac{\frac{۱}{۲}ON\times MH'}{BM\times MH'}=\frac{۱}{۲}\frac{ON}{BM}=\frac{۱}{۲}\times\frac{\frac{۶}{۵}y}{۳y}=\frac{۱}{۵}=\%۲۰$$

۱٤- در شکل زیر، G محل همرسی میانه های مثلث ABC و $DE\|AB$ است. اگر مساحت چهار ضلعی $AGKE$ برابر ۲۵ باشد مساحت چهار ضلعی $BFGD$ کدام است؟



۱) ۵۵ ۲) ۵۰

۳) ٤۵ ٤) ٤۰



حل: گزینه ٤

$$DE \| AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CE}{AE}=\frac{CD}{BD}=1 \Rightarrow CE=AE \Rightarrow BE=\text{میانه}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB \| DE\ ,\ \text{مورب}\ \ BE \Rightarrow \hat{B}_1=\hat{E}_1 \\ \hat{G}_1=\hat{G}_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{BFG} \approx \overset{\Delta}{EKG}$$

می دانیم میانه های مثلث به نسبت ۱ به ۲ یکدیگر را قطع می کنند، پس داریم:

$$\frac{BG}{GE}=\frac{2}{1} \xrightarrow{\overset{\Delta}{BFG}\approx\overset{\Delta}{EKG}} \frac{S_{BFG}}{S_{EKG}}=\left(\frac{BG}{GE}\right)^2=4 \xrightarrow{S_{EKG}=S} S_{BFG}=4S$$

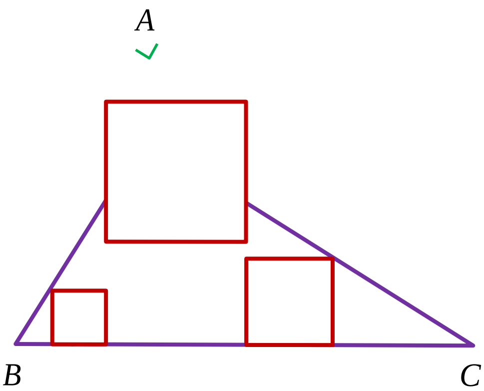
می‌دانیم با رسم میانه‌های مثلث، ٦ مثلث هم مساحت به وجود می‌آید، پس می توان نوشت:

$$S_{AGE}=S_{BGD}=S_{BFG}=4S$$

$$S_{AGKE}=5S=25 \Rightarrow S=5$$

$$S_{BFGD}=4S+4S=8S=40$$

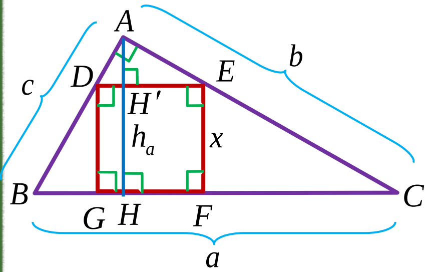
۱۵ – در مثلث قائم الزاویه مقابل به اضلاع زاویه قائمه ٦ و ۸ ، سه مربع مطابق شکل قرار دارد مجموع محیط های دومربع کوچک و متوسط کدام است؟



۱) $\frac{270}{29}$ ۲) $\frac{480}{29}$ ۳) $\frac{270}{37}$ ۴) $\frac{480}{37}$

$$BC^2=AB^2+AC^2=36+64=100 \Rightarrow BC=10$$

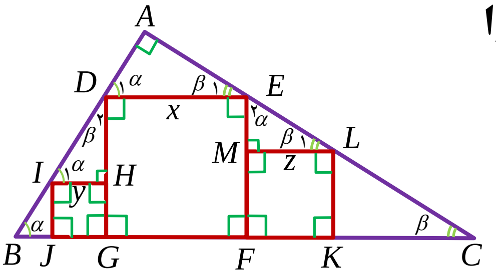
نکته: اگر در مثلث قائم الزاویه ABC، $\hat{A}=90^\circ$ مربعی به ضلع x را طوری محاط کنیم که یک ضلع مربع، موازی وتر مثلث باشد، در این صورت داریم: $x=\frac{abc}{a^2+bc}$.



بنابراین می توان نوشت:

$$x=\frac{6\times 8\times 10}{100+6\times 8}=\frac{120}{37}$$

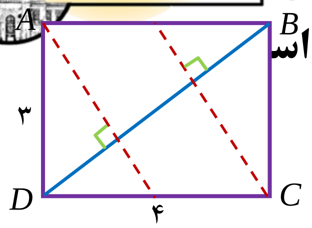
نکته: اگر در مثلث ABC سه مربع به اضلاع x و y و z را مانند شکل مقابل رسم کنیم داریم: $x=y+z$



بنابراین می توان نوشت:

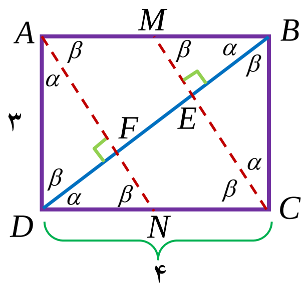
$$y+z=x=\frac{120}{37} \xrightarrow{\times 4} 4y+4z=\frac{480}{37}$$

۱۶ – در مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ٤ واحد، از هر دو رأس مقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. مساحت متوازی الاضلاع حاصل کدام است؟



۱) ۵/۲۵ ۲) ۵/۷۵ ۳) ٦ ٤) ۷/۵

حل: گزینه ۱



$$\overset{\Delta}{ABD}: \quad \tan\alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{۳}{۴}$$

$$\overset{\Delta}{ADN}: \quad \tan\alpha = \frac{DN}{AD} \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{DN}{۳} \Rightarrow DN = \frac{۹}{۴}$$

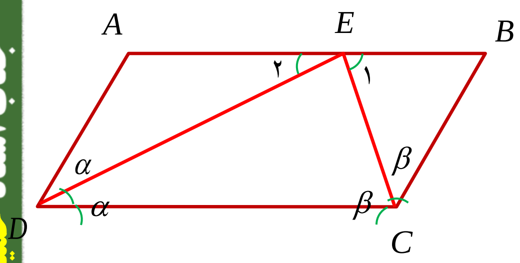
$$NC = DC - DN = ۴ - \frac{۹}{۴} = \frac{۷}{۴}$$

$$S_{AMCN} = AD \times NC = ۳ \times \frac{۷}{۴} = \frac{۲۱}{۴} = ۵/۲۵$$

۱۷ – در متوازی الاضلاع $ABCD$ مفروض است. نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور C و D در نقطهٔ E روی ضلع AB متقاطع اند. اگر $CE=۵$ و $DE=۱۲$ باشد، محیط متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۹ ۳) ۲۷ ٤) ٤۱

حل: گزینه ۲



$$\hat{D} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha + ۲\beta = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۹۰^\circ$$

$$D\hat{E}C = ۱۸۰^\circ - (\alpha + \beta) = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ = ۹۰^\circ$$

$$AB = DC = \sqrt{CE^۲ + DE^۲} = \sqrt{۲۵ + ۱۴۴} = ۱۳$$

$$AB \| DC, \text{ مورب } CE \Rightarrow \hat{E}_۱ = \hat{C}_۱ = \beta \xrightarrow{\hat{C}_۲ = \hat{E}_۱ = \beta} BE = CE$$

$$AB \| DC, \text{ مورب } DE \Rightarrow \hat{E}_۲ = \hat{D}_۱ = \alpha \xrightarrow{\hat{D}_۲ = \hat{E}_۲ = \alpha} AD = AE$$

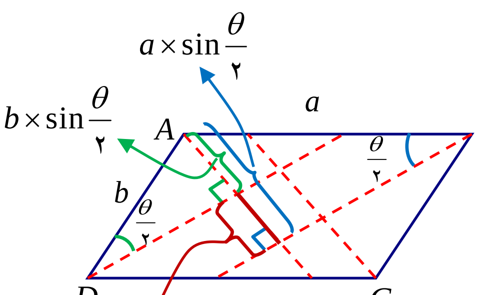
$$CD = AB = AE + EB = AD + BC = ۲AD \Rightarrow ۱۳ = ۲AD \Rightarrow AD = BC = \frac{۱۳}{۲}$$

$$P_{ABCD} = ۲(AD + CD) = ۲\left(\frac{۱۳}{۲} + ۱۳\right) = ۳۹$$

۱۸–دریک متوازی‌الاضلاع بازاویه‌ی ٦۰ درجه واندازه‌ی اضلاع $a, ۲a$ محل تلاقی نیمسازهای داخلی راس‌های یک چهارضلعی است. مساحت این چهارضلعی حاصل چند برابر $a^۲\sqrt{۳}$ است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ٤) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ:گزینه۲



می‌دانیم شکل حاصل از برخورد نیمسازهای یک متوازی‌الاضلاع به طول b,a وزاویه‌ی حاده‌ی θ مستطیلی است به اضلاع $(a-b)\cos\frac{\theta}{۲},(a-b)\sin\frac{\theta}{۲}$، پس داریم:

$x=(a-b)\cos\frac{\theta}{۲}=(۲a-a)\cos ۳۰^\circ=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ طول مستطیل

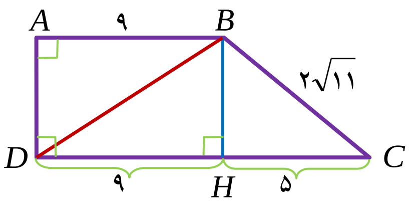
$y=(a-b)\sin\frac{\theta}{۲}=(۲a-a)\sin ۳۰^\circ=\frac{a}{۲}$ عرض مستطیل

$S=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{a}{۲}=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ مستطیل

یعنی مساحت مستطیل پدیدآمده $\frac{۱}{۴}\times a^۲\sqrt{۳}$

۱۹ – در یک ذوزنقه قائم‌الزاویه، طول قاعده‌ها ۱۴ و ۹ واحد است و طول ساق مایل $۲\sqrt{۱۱}$ واحد است. اندازه قطر کوچک‌تر ذوزنقه کدام است؟

۱) ۸ ۲) $۷\sqrt{۲}$ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱



حل: گزینه ۳

$$\overset{\Delta}{BCH}:\xrightarrow{\hat{H}=۹۰^\circ}BH=\sqrt{\left(۲\sqrt{۱۱}\right)^۲-۵^۲}=\sqrt{۴۴-۲۵}=\sqrt{۱۹}$$

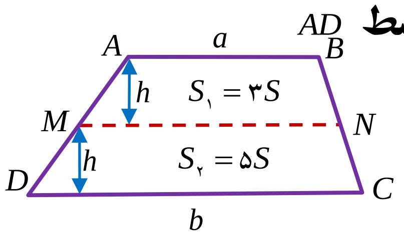
$$\overset{\Delta}{ABD}:BD=\sqrt{\left(\sqrt{۱۹}\right)^۲+۹^۲}=۱۰$$

۲۰ – در یک ذوزنقه، خطی که وسط ساق ها را به هم وصل می کند، مساحت آن را به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می کند. نسبت قاعده های ذوزنقه کدام است ؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

حل:

حل گزینه۲



AD وسط M و BC وسط $N\Rightarrow MN=\frac{AB+DC}{۲}=\frac{a+b}{۲}$

$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{\frac{AB+MN}{۲}\times h}{\frac{MN+BC}{۲}\times h}=\frac{a+\frac{a+b}{۲}}{\frac{a+b}{۲}+b}=\frac{۳a+b}{a+۳b}=\frac{۳}{۵}$$

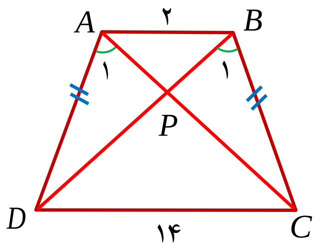
$$\Rightarrow ۱۵a+۵b=۳a+۹b\Rightarrow ۱۲a=۴b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

۲۱ – در یک ذوزنقهٔ متساوی الساقین، دو قطر بر هم عمودند. اگر طول قاعده های این ذوزنقه ۱۴ و ۲ باشد، اندازه ساق کدام است؟

۱) ۲ ۲) ٤ ۳) ٥ ٤) ۱۰

حل: گزینه ٤

در ذوزنقهٔ متساوی الساقین ، قطرها با یکدیگر برابرند.
پس دو مثلث ADC و BDC به حالت تساوی سه ضلع با یکدیگر برابرند و در نتیجه $\hat{A}_1=\hat{B}_1$.
همچنین دو مثلث APD و BPC به حالت وتر و یک زاویه با هم برابرند و در نتیجه $AP=BP$ و $DP=CP$.
و چون در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین قائم الزاویه بنا بر قضیه فیثاغورس، طول هر ضلع زاویه قائمه، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برابر طول وتر است، داریم:



$$AP=\frac{\sqrt{۲}}{۲}AB=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times ۲=\sqrt{۲}$$

$$PD=\frac{\sqrt{۲}}{۲}CD=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times ۱۴=۷\sqrt{۲}$$

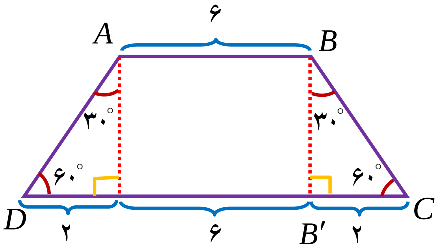
$$\overset{\triangle}{PAD}: AD^{۲}=AP^{۲}+PD^{۲}=\left(\sqrt{۲}\right)^{۲}+\left(۷\sqrt{۲}\right)^{۲}=۲+۹۸=۱۰۰\Rightarrow AD=۱۰$$

۲۲- در یک ذوزنقه متساوی الساقین یکی از زاویه‌ها ٦۰ درجه واندازه قاعده ها ٦ و ۱۰ واحد است. مساحت چهار ضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی این ذوزنقه چند برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱٤ ٤) ۱٦

پاسخ:گزینه٤

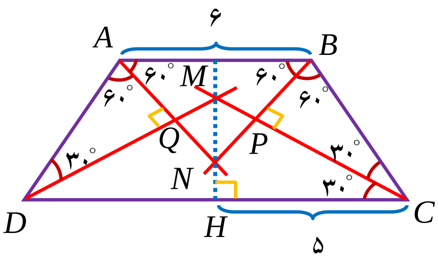
با توجه به شکل مقابل وبا توجه به اینکه در مثلث قائم الزاویه ، ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر وضلع مقابل به زاویه ۶۰° برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است، داریم:



$$BB'=\frac{\sqrt{۳}}{۲}BC=۲\sqrt{۳} \quad \text{و} \quad BC=۴$$

مثلث ABN متساوی الاضلاع است بنابراین:

$\overset{\Delta}{ABN}: \hat{A}=\hat{B}=60^\circ \Rightarrow \hat{N}=60^\circ \Rightarrow \begin{cases} BN = AB = 6 \\ BP = \frac{1}{2}BC = 2 \end{cases} \Rightarrow PN = BN - BP = 6 - 2 = 4$



$CH = 5 = \frac{\sqrt{3}}{2}CM \Rightarrow CM = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

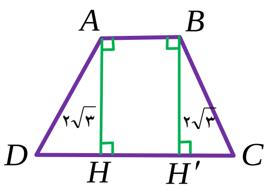
$CP = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = 2\sqrt{3} \Rightarrow PM = CM - CP = \frac{10\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$S_{MNPQ} = 2S_{\overset{\Delta}{MNP}} = MP \times NP = \frac{4\sqrt{3}}{3} \times 4 = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

۲۳– در ذوزنقه متساوی‌الساقین با ارتفاع $2\sqrt{3}$، مجموع دو قاعده برابر مجموع دو ساق است. اگر نسبت قاعده های این ذوزنقه $\frac{1}{3}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $4\sqrt{3}$ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) $8\sqrt{3}$

حل: گزینه ٤



$AH = BH' = 2\sqrt{3}$

$AB = HH' = x \quad , \quad DC = 3x \Rightarrow DH + \underbrace{HH'}_{x} + \underbrace{CH'}_{DH} = 3x \Rightarrow DH = x$

$AD + BC = AB + DC = x + 3x = 4x \xrightarrow{AD=BC} AD = BC = 2x$

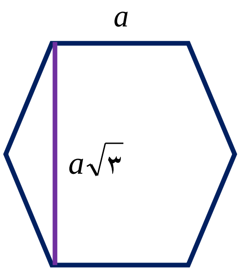
$\overset{\Delta}{ADH}: AD^2 = DH^2 + AH^2 \xrightarrow[AH=2\sqrt{3}]{AH=x,\ AD=2x} 4x^2 = x^2 + 12 \Rightarrow x = 2$

$AB = 2, DC = 6, AH = 2\sqrt{3} \Rightarrow S = \frac{AB + DC}{2} \times AH = \frac{2+6}{2} \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

۲٤– قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم، ضلع یک شش ضلعی منتظم جدید است. مساحت شش ضلعی جدید چند برابر مساحت شش ضلعی اولیه است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ٤) ٤

پاسخ:گزینه۳



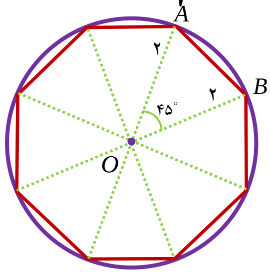
می‌دانیم در شش ضلعی منتظم به ضلع a قطر کوچک برابر $a\sqrt{3}$ است. همین طور مساحت یک شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ است. حال اگر ضلع شش ضلعی منتظم برابر $x = a\sqrt{3}$ باشد مساحت آن برابراست با:

$S_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}(a\sqrt{3})^2 = \frac{9\sqrt{3}}{2}a^2$

نسبت مساحت این شش ضلعی به مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{9\sqrt{3}}{2}a^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2}=3$$

۲۵– مساحت هشت ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۲ واحد، کدام است؟



۱) $8\sqrt{2}$ ۲) $8(\sqrt{2}-1)$ ۳) $8(1+\sqrt{2})$ ٤) $8(2+\sqrt{2})$

حل:گزینه ۱

$$S=8\left(\frac{1}{2}\times OA\times OB\times \sin 45^\circ\right)=4\times 2\times 2\times \frac{\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}$$

پایه و رشته دهم ریاضی

جناب استاد حمیدرضا کمالی خوش خلق