درس اول – فصل اول

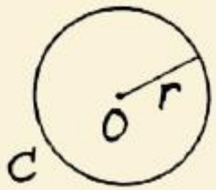
مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

دکتر مهدی یوسفی

دبیر هندسه دبیرستان ماندگار البرز

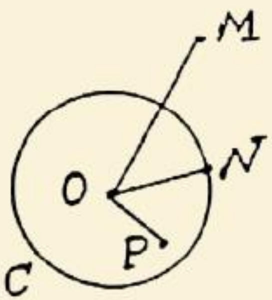
دایره: مجموعه‌ی نقاطی از یک صفحه که از یک نقطه‌ی ثابت، فاصله‌ی ثابتی دارند، دایره نامیده می‌شود.

نقطه‌ی ثابت را مرکز دایره و فاصله‌ی ثابت را شعاع دایره می‌نامند. معمولاً مرکز را با حرف O و شعاع را با r و دایره را با C نمایش می‌دهند.



قرارداد: دایره‌ی C به مرکز O و شعاع r را با $C(O,r)$ نمایش می‌دهیم.

اوضاع نسبی نقطه و دایره:

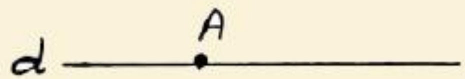


الف) نقطه‌ی M بیرون دایره‌ی $C(O,r)$ است، اگر و تنها اگر $OM>r$.

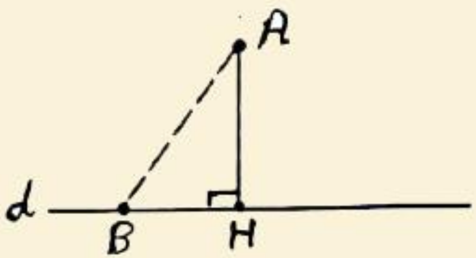
ب) نقطه‌ی N روی دایره‌ی $C(O,r)$ است، اگر و تنها اگر $ON=r$.

پ) نقطه‌ی P درون دایره‌ی $C(O,r)$ است، اگر و تنها اگر $OP<r$.

سوال: فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط d را چگونه محاسبه می‌کنید؟



پاسخ) حالت اول: اگر A روی d باشد، فاصله‌ی A از d برابر صفر است.

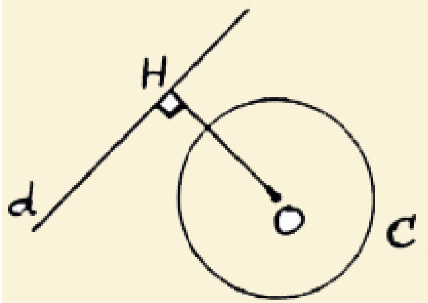


حالت دوم: اگر A روی d نباشد، از A عمودی بر d رسم می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم، اندازه‌ی پاره‌خط AH فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط d است.

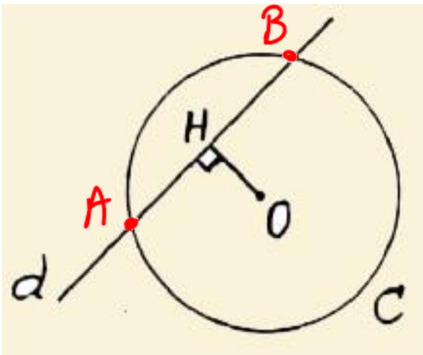
نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی A از دیگر نقاط خط d از AH بزرگ‌تر است. $(AB > AH)$

«فاصله‌ی نقطه‌ی A تا خط d کمترین فاصله بین نقطه‌ی A و نقاط خط d است.»

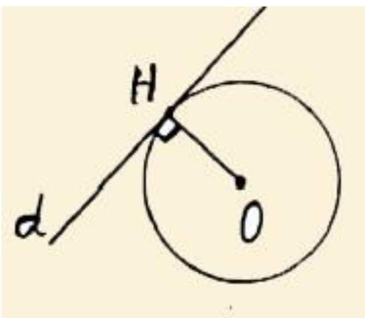
اوضاع نسبی خط و دایره



الف) خط d دایره‌ی C(O,r) را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند، در این حالت فاصله‌ی مرکز دایره از خط d از شعاع دایره بیشتر است. (OH>r)



ب) خط d دایره C(O,r) را در دو نقطه قطع می‌کند، در این حالت خط و دایره را متقاطع می‌نامند و فاصله‌ی مرکز دایره از خط d از شعاع دایره کمتر است. (OH<r)



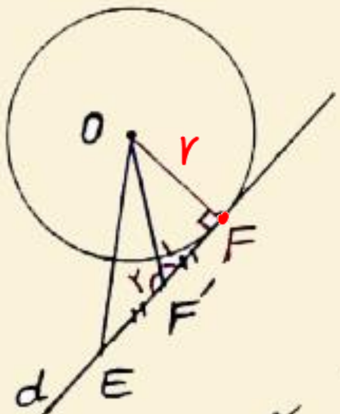
پ) خط d دایره C(O,r) را در یک نقطه قطع می‌کند، در این حالت خط، مماس بر دایره نامیده می‌شود و فاصله‌ی مرکز دایره از خط d برابر شعاع دایره است. (OH=r)

درست

~~نادرست~~

حکم

مسئله (مبتنی بر فعالیت ص ۱۱): اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، ثابت کنید شعاع OF، و خط مماس بر دایره در نقطه‌ی F، برهم عمودند.



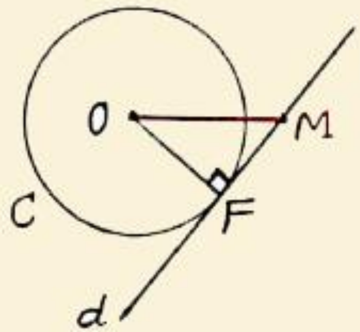
اثبات) فرض کنیم خط d بر دایره در نقطه‌ی F مماس باشد، نقطه‌ی F نزدیکترین نقطه‌ی خط d به نقطه‌ی O است، زیرا F تنها نقطه‌ای خط d است که روی دایره هم قرار دارد و بقیه‌ی نقاط خط d بیرون دایره هستند. از O خطی به d عمود می‌کنیم، ثابت می‌کنیم این خط عمود، خط d را در F قطع می‌کند. زیرا به خلف اگر فرض کنیم که خط عمود در نقطه دیگری مانند F' خط d را قطع کند آن‌گاه نقطه‌ای مانند E روی خط d چنان درنظر می‌گیریم که $EF' = F'F$، در این صورت

$$\left.\begin{array}{l} OF' = OF' \\ \hat{F'_1} = \hat{F'_2} = 90^\circ \\ F'F = EF' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض زض)}} \triangle OF'F \cong \triangle OEF' \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \boxed{OF = OE} = r$$

(تناقض)

یعنی نقطه‌ی E هم روی دایره قرار دارد که این غیر ممکن است زیرا خط d بر دایره مماس بوده و نمی‌تواند بیش از یک نقطه‌ی مشترک با دایره داشته باشد.

مسئله (عکس مسئله قبل - مبتنی بر فعالیت ۲ ص ۱۱): اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد و خط d بر شعاع OF در نقطه‌ی F عمود باشد، ثابت کنید خط d بر دایره مماس است.

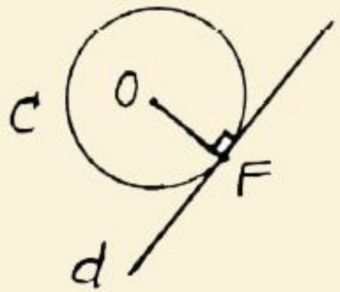


اثبات) فرض کنیم M نقطه‌ای به جز F روی خط d باشد چون $OM > OF$ پس نقطه‌ی M بیرون دایره C است؛ بنابراین خط d با دایره‌ی C فقط در نقطه‌ی F اشتراک دارند؛ یعنی خط d بر دایره‌ی C در نقطه‌ی F مماس است.

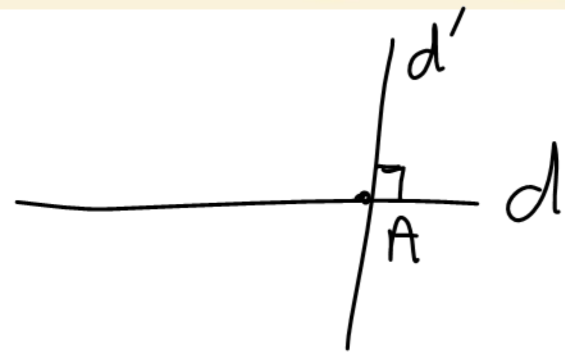
نتیجه: از دو مسئله قبل می‌توان گزاره‌ی دوشرطی زیر را نتیجه گرفت
«یک خط و یک دایره برهم مماسند اگر و تنها اگر خط در نقطه‌ی تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود باشد.»

نکته: شعاع در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است.

مسئله‌ی ترسیم (مبتنی بر فعالیت ۳ ص ۱۱): نقطه‌ی F روی دایره‌ی $C(O, r)$ مفروض است. خط مماس بر دایره در نقطه‌ی F را رسم کنید.



پاسخ) O را به F وصل می‌کنیم، سپس در نقطه‌ی F، به کمک خط‌کش و پرگار، خط d را عمود بر OF رسم می‌کنیم. خط d بر دایره‌ی C در نقطه‌ی F مماس است.



مفاهیم اولیه :

در ادامه به یادآوری برخی مفاهیم می‌پردازیم :

۱- شعاع دایره : پاره خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.

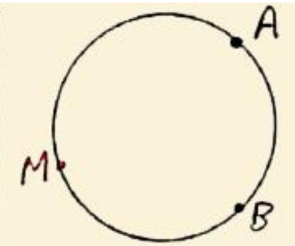
۲- وتر دایره : پاره خطی که دو سر آن روی دایره باشد.

۳- قطر دایره : وتری از دایره است که از مرکز دایره می‌گذرد.

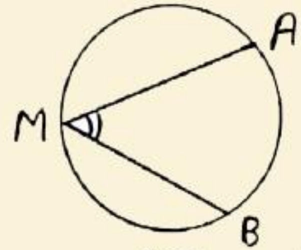
۴- زاویه‌ی مرکزی : زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد.

۵- زاویه‌ی محاطی : زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند.

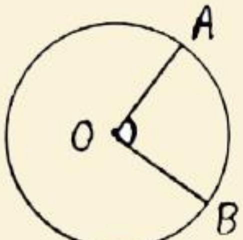
۶- کمان : کمان شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است.



دو نقطه‌ی A و B دو کمان روی دایره جدا می‌کنند: $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{AMB}$.

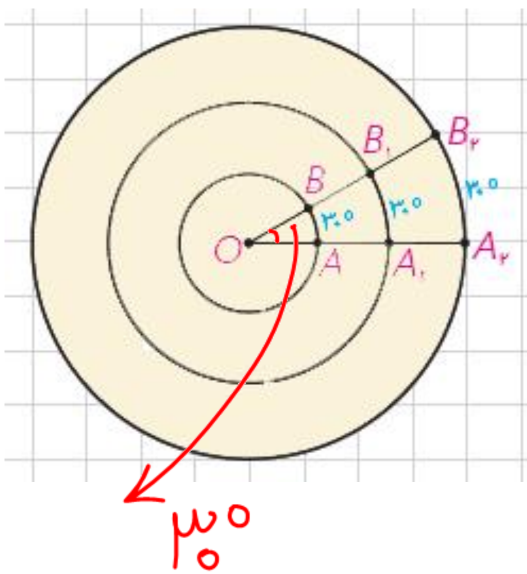


$\hat{AMB}$ زاویه‌ی محاطی و $\overset{\frown}{AB}$ کمان روبه‌روی آن است.



$\hat{AOB}$ زاویه‌ی مرکزی و $\overset{\frown}{AB}$ کمان روبه‌روی آن است.

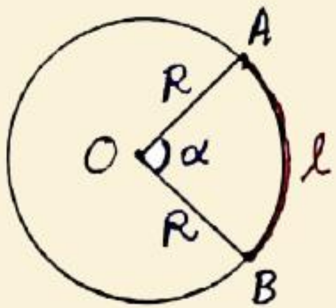
۷- اندازه‌ی کمان: همان اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می‌شود و واحد آن درجه است.



$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A_1B_1} = \overset{\frown}{A_2B_2} = 30^\circ$$

۸ ـ طول کمان : طول کمان با اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی آن رابطه‌ی مستقیم دارد ، و واحد طول کمان همان واحد طول (cm و m و ...) است .

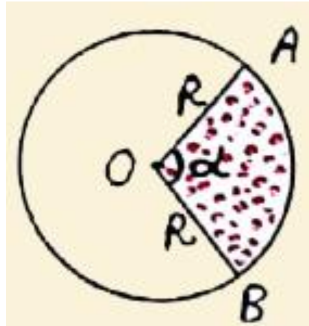
مسئله (مبتنی بر کار در کلاس ص ۱۲) : طول کمان روبه‌رو به زاویه‌ی مرکزی α در دایره‌ای به شعاع R را به دست آورید .



پاسخ) محیط دایره یک کمان به اندازه‌ی 360° است ، با استفاده از تناسب داریم :

$$\frac{\text{اندازه‌ی کمان } AB}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}} \Rightarrow \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\ell}{2\pi R} \Rightarrow \ell = \frac{\pi R \alpha}{180}$$

تذکر : α برحسب درجه است .



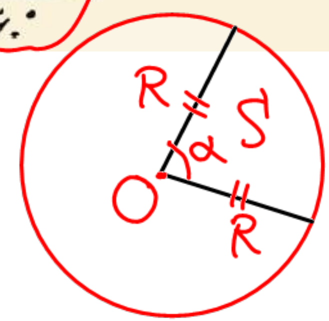
تعریف: ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است، یک قطاع دایره می‌نامند.

مسئله (مبتنی بر کار در کلاس ۲ صفحه ۱۲ کتاب درسی): اگر زاویه‌ی مرکزی قطاعی از دایره‌ی $C(O,R)$ برحسب درجه مساوی α باشد، ثابت کنید مساحت آن قطاع برابر $S=\frac{\pi R^2\alpha}{360}$ است.

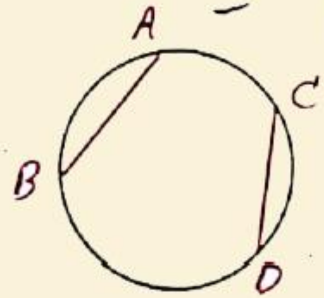
اثبات) با استفاده از تناسب داریم

$$\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{\text{مساحت قطاع}}{\text{مساحت دایره}} \Rightarrow \frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{S}{\pi R^2} \Rightarrow S=\frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}.$$

تذکر: α برحسب درجه است.

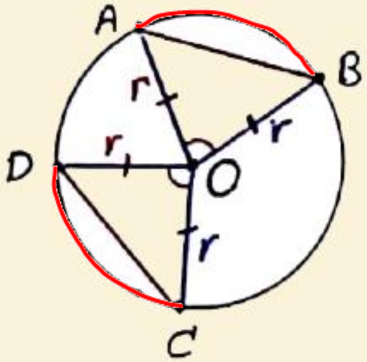


* یکی از ویژگی های وترهای مساوی در یک دایره، آن است که این وترها کمان های مساوی هم، روی دایره جدا می‌کنند و برعکس اگر روی دایره دو کمان مساوی هم در نظر بگیریم و وترهای نظیر آن ها را رسم کنیم می‌توان نتیجه گرفت که این وترها باهم مساویند.



$$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

درستی این دو ویژگی را در مسئله های بعد ثابت می‌کنیم.



مسئله (مبتنی بر فعالیت ۱ ص ۱۳): در شکل مقابل اندازه‌های کمان‌های AB و CD از دایره‌ی $C(O,r)$ باهم برابرند. ثابت کنید وترهای AB و CD نیز باهم برابرند.

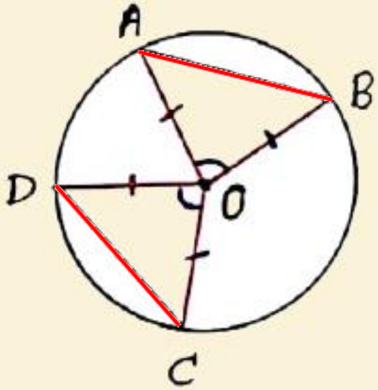
فرض	$\widehat{AB}=\widehat{CD}$
حکم	$AB=CD$

اثبات) O را به A و B و C و D وصل می‌کنیم، در این صورت

$A\hat{O}B=\widehat{AB}$ (مرکزی) ، $C\hat{O}D=\widehat{CD}$ (مرکزی) $\xrightarrow{\widehat{AB}=\widehat{CD}} A\hat{O}B=C\hat{O}D$

$$\left.\begin{array}{l} OA=OD \text{ (شعاع دایره)} \\ A\hat{O}B=C\hat{O}D \\ OB=OC \text{ (شعاع دایره)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{COD} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} AB=CD.$$

نتیجه: وترهای نظیر کمان‌های مساوی در یک دایره، باهم برابرند.



مسئله (مبتنی بر فعالیت ۲ ص ۱۳): در شکل مقابل دو وتر AB و CD از دایره با هم برابرند، ثابت کنید اندازه های کمان های AB و CD نیز باهم برابرند.

فرض	$AB=CD$
حکم	$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

اثبات) O را به A و B و C و D وصل می‌کنیم. در این صورت

$$\left.\begin{array}{l} AB=CD \\ OA=OD \\ OB=OC \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{COD} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \hat{AOB}=\hat{COD} \xrightarrow{\text{زاویه ی مرکزی}} \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$$

نتیجه: کمان های نظیر وترهای مساوی در یک دایره، باهم برابرند.

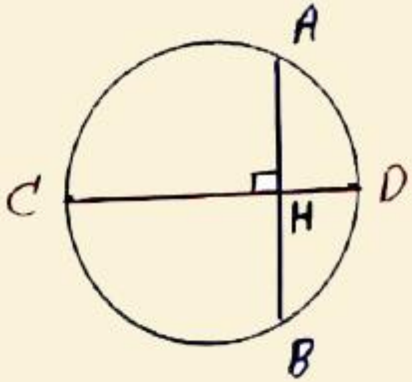
★: قطر CD و وتر AB را در دایره $C(O,R)$ در نظر می‌گیریم

۱- قطر CD بر وتر AB عمود است.

۲- قطر CD، وتر AB را نصف می‌کند.

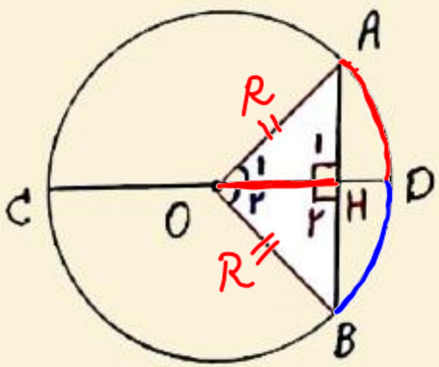
۳- قطر CD، کمان نظیر وتر AB را نصف می‌کند.

در مسئله‌های بعدی ثابت می‌کنیم که از هر یک از سه ویژگی فوق می‌توان دو ویژگی دیگر را نتیجه گرفت.



$$CD \perp AB \ , \ AH = HB \ , \ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} .$$

مسئله (مبتنی بر فعالیت ۳ ص ۱۳): در شکل مقابل وتر AB و قطر CD بر هم عمودند، ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.



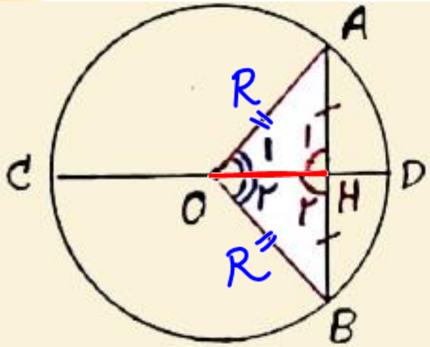
فرض	$CD \perp AB$ و CD قطری از دایره است
حکم	$AH = HB$ ، $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$

اثبات) O را به A و B وصل می‌کنیم، مثلث های AOH و HOB قائم الزاویه هستند و

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ OH = OH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه}} A\hat{O}H \cong H\hat{O}B \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} AH = HB. \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه‌ی مرکزی}} \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}. \end{array}\right.$$

نتیجه: در یک دایره، قطر عمود بر هر وتر آن وتر و کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

«ویژگی قطر عمود بر وتر»

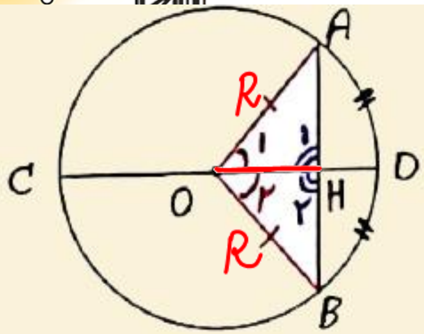


مسئله (مبتنی بر فعالیت ۴ ص ۱۳): در شکل مقابل قطر CD وتر AB را نصف کرده است، ثابت کنید قطر CD بر وتر AB عمود است و کمان نظیر وتر AB را نصف می‌کند.

فرض	$AH=HB$ و CD قطری از دایره است
حکم	$CD\perp AB$ و $\widehat{AD}=\widehat{DB}$

اثبات) O را به A و B وصل می‌کنیم، در این صورت

$$\left.\begin{matrix} AH=HB \\ OA=OB \\ OH=OH \end{matrix}\right\} \xRightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{AOH} \cong \overset{\Delta}{HOB} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \begin{cases} \hat{O}_1=\hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه‌ی مرکزی}} \widehat{AD}=\widehat{DB}. \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2 \xrightarrow{\hat{H}_1+\hat{H}_2=180^\circ} \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \rightarrow CD\perp AB. \end{cases}$$



مسئله (مبتنی بر فعالیت ۵ ص ۱۳): در شکل مقابل قطر CD کمان AB را نصف کرده است، ثابت کنید قطر CD بر وتر AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

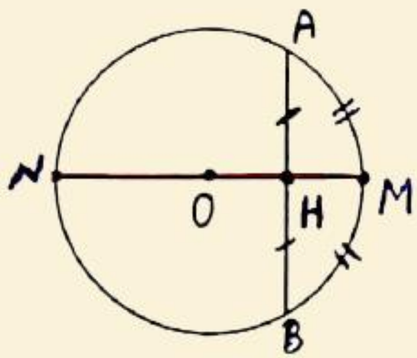
فرض	$\widehat{AD} = \widehat{DB}$ و CD قطری از دایره است
حکم	$CD \perp AB$ ، $AH = HB$

اثبات) O را به A و B وصل می‌کنیم، در این صورت

$$\text{(مرکزی)}\ \hat{O}_1 = \widehat{AD} \quad , \quad \text{(مرکزی)}\ \hat{O}_2 = \widehat{DB} \xrightarrow{\widehat{AD} = \widehat{DB}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OH = OH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\triangle}{AOH} \cong \overset{\triangle}{HOB} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} AH = HB . \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \xrightarrow{\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \Rightarrow CD \perp AB . \end{array}\right.$$

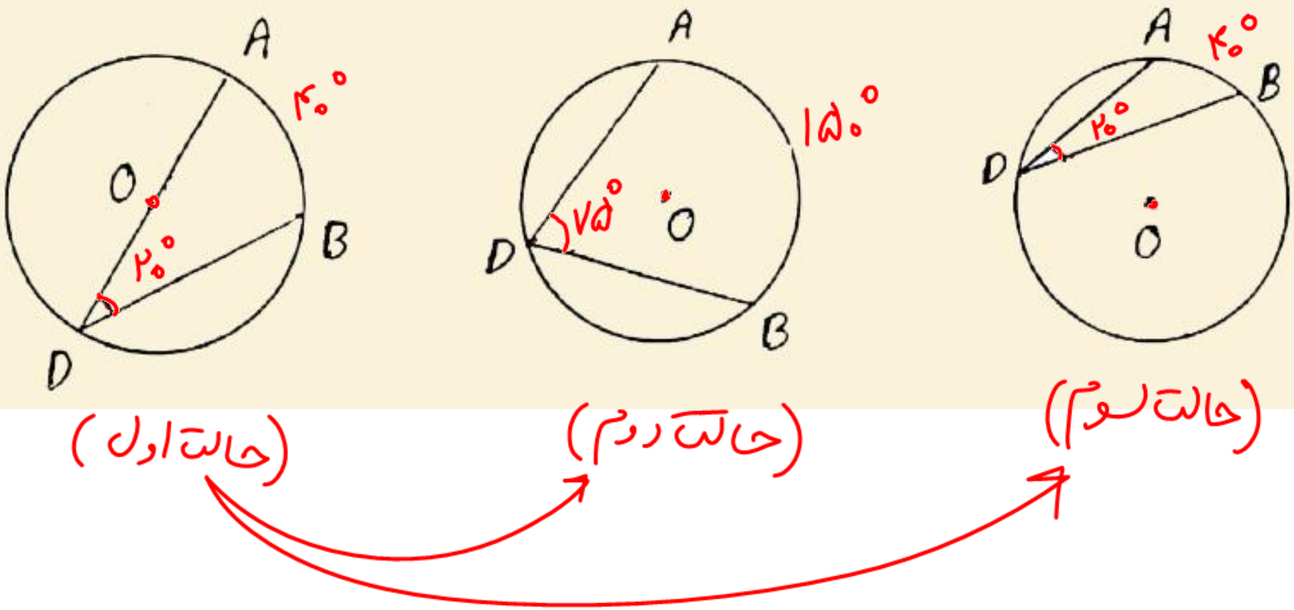
مسئله ی ترسیم (مبتنی بر فعالیت ۶ ص ۱۳): اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه قطر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟



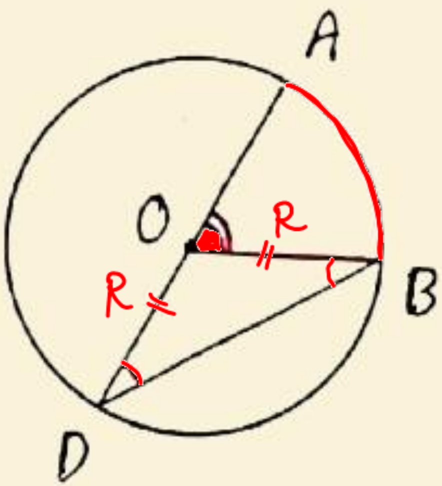
پاسخ) وسط کمان AB را M و وسط وتر را H می نامیم،
کافی است این دو نقطه را به هم وصل کنیم و از سمت H امتداد می دهیم تا دایره را در N قطع کند. MN قطر عمود بر این وتر است.

زاویهٔ محاطی : زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند.

در ادامه ثابت می‌کنیم که اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی نصف کمان روبه‌روی آن است، برای این منظور سه حالت برای زاویه‌ی محاطی در نظر گرفته و در هر حالت به اثبات مسئله می‌پردازیم.



قضیه (مبتنی بر فعالیت پایین صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی که یک ضلع آن از مرکز دایره می‌گذرد برابر نصف اندازه‌ی کمان روبه‌روی آن است.

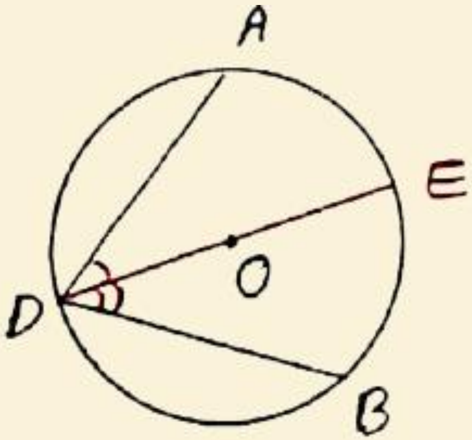


اثبات) زاویه‌ی محاطی ADB را چنان در نظر می‌گیریم که ضلع AD قطر دایره باشد. B را به O وصل می‌کنیم در این صورت

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{ODB}:\ (\text{خارجی})\ A\hat{O}B = \hat{B} + A\hat{D}B \\ OB = OD\ (\text{شعاع}) \Rightarrow \hat{B} = A\hat{D}B\end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{O}B = 2A\hat{D}B \xrightarrow{\div 2} A\hat{D}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B$$

از طرفی $A\hat{O}B$ یک زاویه‌ی مرکزی است و با کمان روبه‌رویش برابر است یعنی $A\hat{D}B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$.

قضیه (مبتنی بر فعالیت ۲ صفحه‌ی ۱۴ کتاب درسی) اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی که دو ضلع آن در دو طرف مرکز واقع شده‌اند برابر نصف اندازه‌ی کمان روبه‌روی آن است.

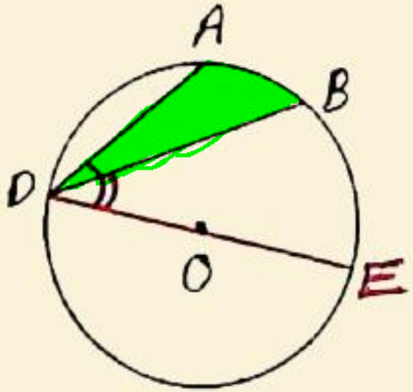


اثبات) زاویه‌ی محاطی ADB را چنان در نظر می‌گیریم که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند. قطر DE را رسم می‌کنیم در این صورت دو زاویه‌ی ADE و EDB محاطی هستند و یک ضلع آن‌ها از مرکز دایره می‌گذرد پس $\hat{ADE} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AE}$ ، $\hat{EDB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EB}$.

$$\hat{ADB} = \hat{ADE} + \hat{EDB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AE} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{EB}$$

$$= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{EB}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}.$$

قضیه (مبتنی بر فعالیت ۳ ص ۱۴ کتاب درسی) اندازه ی زاویه ی محاطی که دو ضلع آن در یک طرف مرکز واقع شده اند برابر نصف اندازه ی کمان روبه روی آن است.



اثبات) زاویه ی محاطی ADB را چنان در نظر می گیریم که دو ضلع آن در یک طرف O واقع شده اند. قطر DE را رسم می کنیم در این صورت دو زاویه ی ADE و BDE محاطی هستند و یک ضلع آن ها از مرکز دایره می گذرد، پس

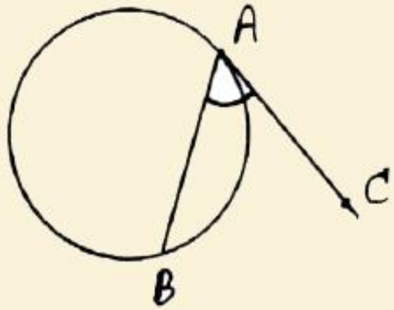
$$B\hat{D}E = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BE} \quad , \quad A\hat{D}E = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AE}$$

از طرفی با توجه به شکل داریم:

$$A\hat{D}B = A\hat{D}E - B\hat{D}E = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AE} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{BE}$$

$$= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{BE}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}.$$

تعریف: زاویه‌ی ظلی زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن شامل وتری از دایره است.

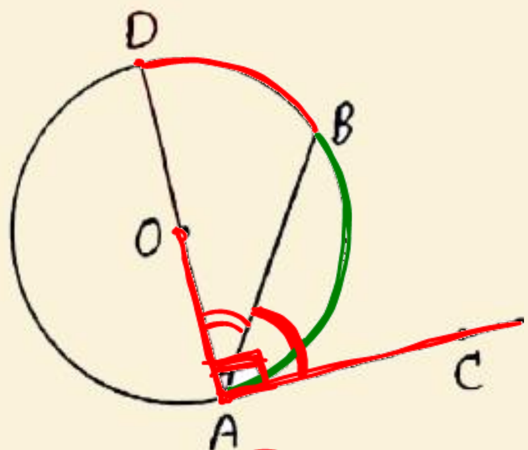


در شکل مقابل زاویه‌ی BAC ظلی است و

کمان AB، کمان روبه‌رو به این زاویه می‌باشد.

ثابت می‌کنیم اندازه‌ی زاویه‌ی ظلی نصف کمان روبه‌رو به آن زاویه است.

قضیه (مبتنی بر فعالیت ص ۱۴ کتاب درسی): اندازه‌ی هر زاویه‌ی ظلی برابر نصف کمان روبه رو به آن زاویه است.



حکم) $\hat{BAC} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

اثبات) زاویه‌ی ظلی BAC را در نظر می‌گیریم و قطر AD را رسم می‌کنیم

در این صورت زاویه‌ی DAC قائمه است،

زیرا قطر در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است، در ضمن از

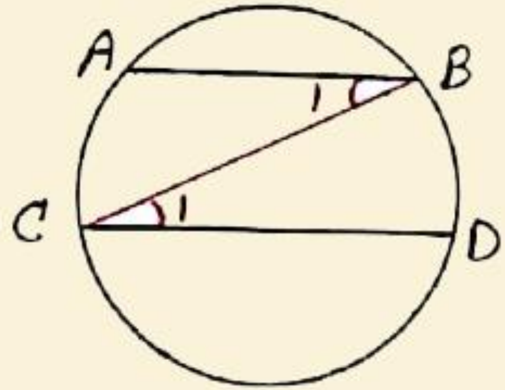
قطر بودن AD می‌توان نتیجه گرفت که $\overset{\frown}{DBA} = 180^\circ$.

$$\hat{BAC} = 90^\circ - \hat{DAB} \xrightarrow{\text{محاطی است } \hat{DAB}} \hat{BAC} = 90^\circ - \frac{\overset{\frown}{DB}}{2}$$

$$\xrightarrow{\overset{\frown}{DB} = 180^\circ - \overset{\frown}{AB}} \hat{BAC} = 90^\circ - \frac{180^\circ - \overset{\frown}{AB}}{2}$$

$$= \cancel{90^\circ} - (\cancel{90^\circ} - \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}) = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow \hat{BAC} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

مسئله (مبتنی بر کار در کلاس صفحه ۱۵) ثابت کنید در هر دایره، کمان های محصور بین دو وتر موازی، مساوی‌اند و برعکس.



فرض	$AB \parallel CD$
حکم	$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

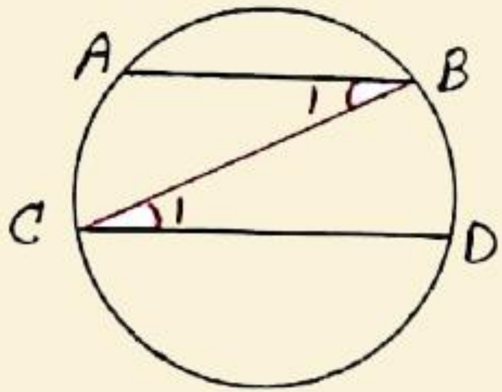
اثبات) دو وتر موازی هم AB و CD را در نظر می‌گیریم
و B را به C وصل می‌کنیم

$AB \parallel CD$ (مورب BC) $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$

از طرفی $\hat{B}_1$ و $\hat{C}_1$ زاویه‌های محاطی هستند و
در نتیجه $\hat{B}_1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ و $\hat{C}_1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ پس

$$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} \xrightarrow{\times 2} \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}.$$

مسئله (متن برکار در کلاس صفحه ۱۵) ثابت کنید در هر دایره، کمان های محصور بین دو وتر موازی، مساوی‌اند و برعکس.



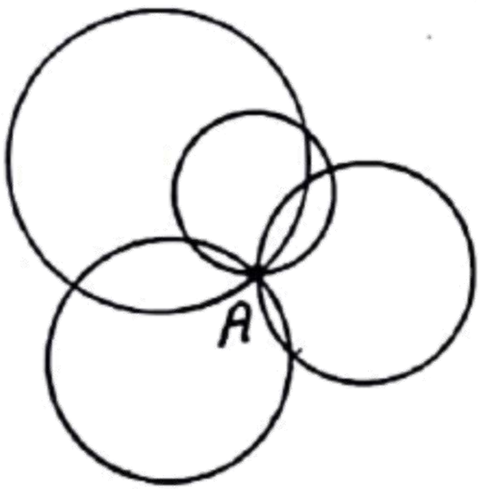
فرض	$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$
حکم	$AB \parallel CD$

برعکس فرض کنیم کمان های AC و BD باهم برابرند. ثابت می‌کنیم وترهای AB و CD باهم موازی‌اند. B را به C وصل می‌کنیم، در این صورت

$$\left.\begin{array}{l} (\text{محاطی})\ \hat{B}_1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} \\ (\text{محاطی})\ \hat{C}_1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} \end{array}\right\} \xrightarrow{\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}} \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \xrightarrow[\text{و مورب}]{\text{عکس قضیه‌ی خطوط موازی}} AB \parallel CD.$$

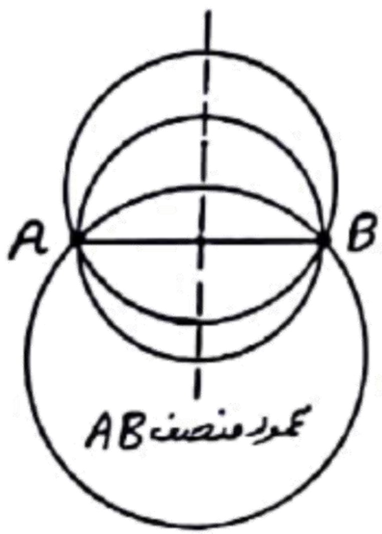
نکته: از یک نقطه بی‌شمار دایره می‌گذرد.

مرکز این دایره‌ها هر نقطه‌ی دلخواه از صفحه به جز آن نقطه است.

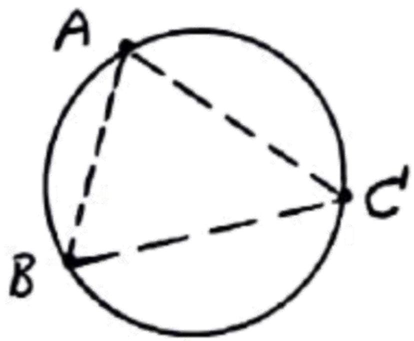


نکته: از دو نقطه‌ی متمایز A و B بی‌شمار دایره می‌گذرد.

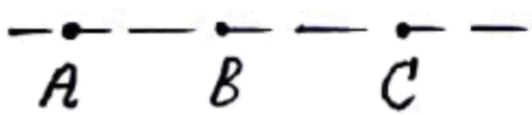
مرکز این دایره‌ها روی عمود منصف پاره‌خط AB است.



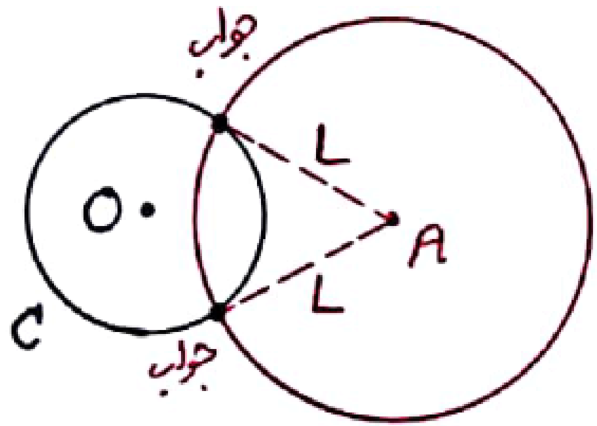
نکته: از سه نقطه‌ی A و B و C (غیرواقع بر یک خط راست) فقط یک دایره می‌گذرد. در درس های آینده خواهید دید که این دایره را دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌نامند و به بررسی ویژگی های این دایره خواهیم پرداخت.



نکته: از سه نقطه‌ی A و B و C که روی یک خط راست قرار دارند هیچ دایره‌ای نمی‌گذرد.

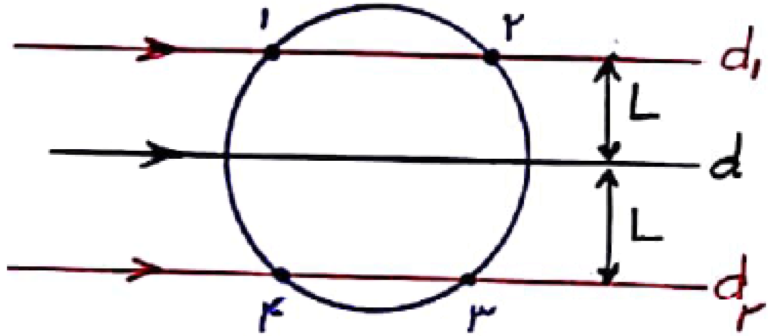


مسئله) دایره‌ی $C(O,R)$ و نقطه‌ی A در یک صفحه مفروضند، نقطه‌ای روی دایره بیابید که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معین L باشد.



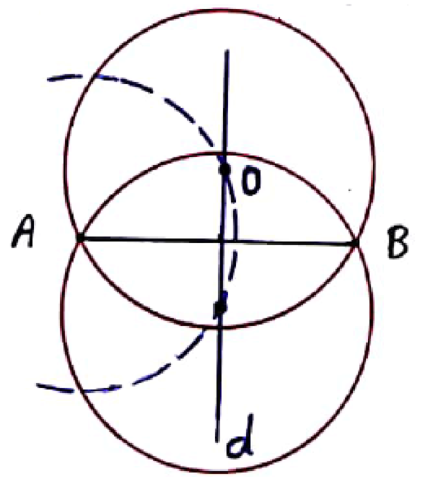
پاسخ) دایره‌ای به مرکز A و شعاع L رسم می‌کنیم، نقاط برخورد این دایره با دایره‌ی C جواب مسئله است. با توجه به مقدار L مسئله یک یا دو جواب دارد یا هیچ جوابی ندارد.

مسئله) دایره‌ی $C(O,R)$ و خط d در یک صفحه مفروضند، نقطه‌ای روی دایره بیابید که از خط d به فاصله‌ی معین L باشد.

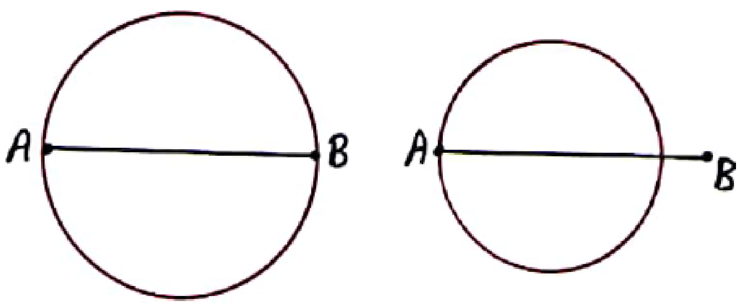


پاسخ) دو خط d_1 و d_2 را موازی d و به فاصله‌ی L از آن رسم می‌کنیم، نقاط تلاقی خطوط d_1 و d_2 با دایره‌ی C جواب مسئله است. این مسئله حداکثر چهار جواب دارد.

مسئله) دو نقطه‌ی A و B مفروضند، چند دایره به شعاع معین R می‌توان رسم کرد که از A و B بگذرند؟



پاسخ) عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم و آن را d می‌نامیم، سپس به مرکز A دایره‌ای به شعاع R رسم می‌کنیم تا خط d را در O قطع کند، سپس به مرکز O و شعاع R دایره‌ای رسم می‌کنیم، این دایره از هر دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد.



حالت اول) اگر $\frac{AB}{2} < R$ ، مسئله دو جواب دارد.

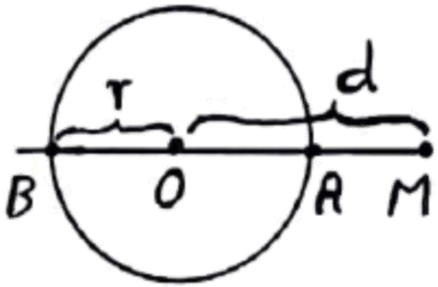
حالت دوم) اگر $\frac{AB}{2} = R$ ، مسئله یک جواب دارد.

حالت سوم) اگر $\frac{AB}{2} > R$ ، مسئله جواب ندارد.

دورترین و نزدیک‌ترین نقاط یک دایره از یک نقطه‌ی معلوم:

نقطه‌ی M و دایره‌ی $C(O,r)$ را درنظر بگیرید و خط شامل پاره‌خط OM را رسم کنید این خط دایره‌ی C را در دو نقطه‌ی A و B قطع می‌کند که یکی از این دو نقطه دورترین نقطه‌ی دایره از M و دیگری نزدیکترین نقطه‌ی دایره تا نقطه‌ی M است. فرض کنیم $OM=d$ در این صورت،

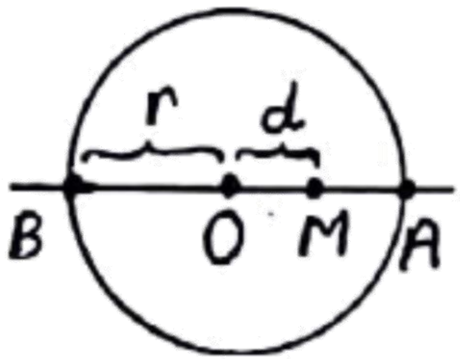
حالت اول) اگر M بیرون دایره‌ی C باشد



کمترین فاصله $= MA = d-r$

بیشترین فاصله $= MB = d+r$

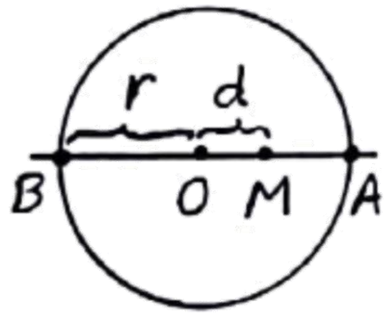
حالت دوم) اگر M درون دایره می باشد



کمترین فاصله $= MA = r - d$

بیشترین فاصله $= MB = r + d$

مثال: فاصله‌ی دورترین و نزدیک‌ترین نقاط یک دایره از یک نقطه‌ی ثابت درون آن، به ترتیب ۱۸ و ۸ واحد می‌باشد. شعاع دایره و فاصله‌ی نقطه تا مرکز دایره را به دست آورید.

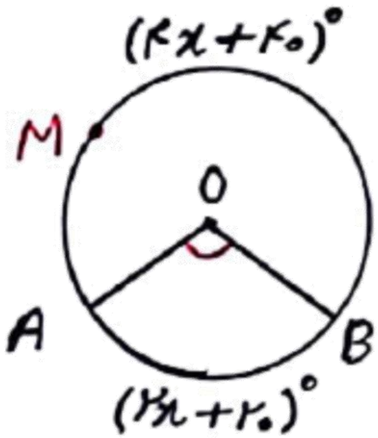


$$\begin{cases} MA = 8 \\ MB = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r - d = 8 \\ r + d = 18 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(+)} 2r = 26 \Rightarrow r = 13$$

$$r + d = 18 \Rightarrow 13 + d = 18 \Rightarrow d = 18 - 13 = 5$$

مثال : در شکل مقابل ، O مرکز دایره است. اندازه هر دو کمان AB را به دست آورده و اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی AOB را بیابید.



$$(2x+20)^\circ+(4x+40)^\circ=360^\circ \Rightarrow 6x+60^\circ=360^\circ$$

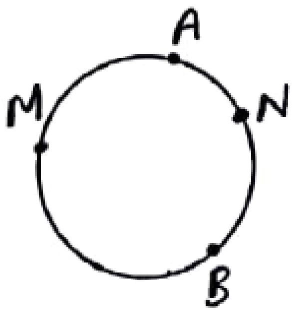
$$\Rightarrow 6x=300^\circ \Rightarrow x=50^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overset{\frown}{AB}=2x+20=120^\circ \\ \overset{\frown}{AMB}=4x+40=240^\circ \end{cases}$$

می‌دانیم اندازه‌ی هر زاویه‌ی مرکزی برابر اندازه‌ی کمان روبه‌روی آن است

$$A\hat{O}B=\overset{\frown}{AB}=120^\circ$$

۲- در شکل مقابل $\overset{\frown}{AMB} = 4\overset{\frown}{ANB}$ است، کمان ANB چه کسری از محیط دایره است؟



پاسخ)

$$\text{محیط دایره} = \overset{\frown}{AMB} + \overset{\frown}{ANB}$$

$$= 4\overset{\frown}{ANB} + \overset{\frown}{ANB} = 5\overset{\frown}{ANB}$$

پس

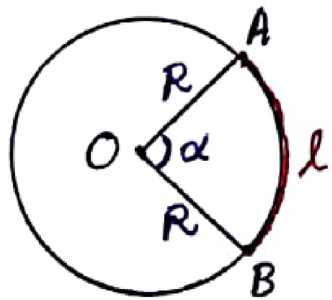
$$\frac{\overset{\frown}{ANB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\overset{\frown}{ANB}}{5\overset{\frown}{ANB}} = \frac{1}{5}.$$

۳- در دایره‌ی $C(O,5)$، طول کمان روبه رو به زاویه‌ی مرکزی $\alpha=30^\circ$ را محاسبه کنید. $(\pi=3)$

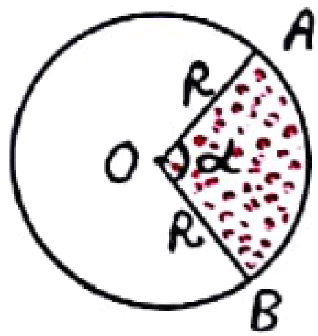
پاسخ)

$$l=\frac{\pi R\alpha}{180}=\frac{\pi\times 5\times 30}{180}$$

$$=\frac{5\pi}{6}=\frac{5\times 3}{6}=\frac{5}{2}=2/5.$$

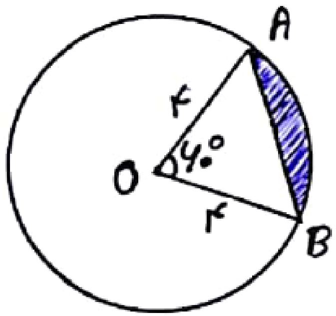


$$l = \frac{\pi R \alpha}{180}$$



$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$

مثال (مبتنی بر تمرین ۸ صفحه‌ی ۲۳ کتاب درسی) : در شکل زیر مساحت ناحیه‌ی سایه‌زده را محاسبه کنید.



$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ \hat{AOB} = 60^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AOB} \text{ متساوی‌الاضلاع است} \Rightarrow S(\overset{\triangle}{AOB}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$$

مساحت قسمت رنگی = مساحت قطاع ۶۰ درجه − مساحت مثلث AOB

$$= \frac{\pi \times 4^2 \times 60}{360} - 4\sqrt{3} = \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}.$$

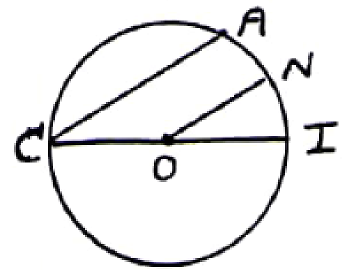
۴- اگر طول کمان 60° از دایره‌ی C با طول کمان 45° از دایره‌ی C' برابر باشد، مساحت دایره C چند برابر مساحت دایره‌ی C' است؟

پاسخ) می‌دانیم $l = \frac{\pi R \alpha}{180}$ پس

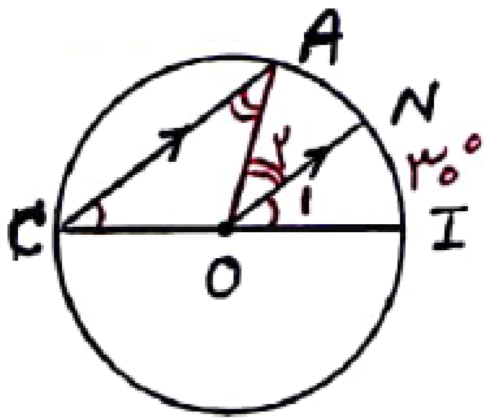
$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{\pi R \times 60}{180} = \frac{\pi R}{3} \\ l' &= \frac{\pi R' \times 45}{180} = \frac{\pi R'}{4} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{l = l'} \frac{\pi R}{3} = \frac{\pi R'}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{R^2}{R'^2} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \frac{9}{16} \Rightarrow S = \frac{9}{16} S'$$

۵- در شکل زیر O مرکز و CI قطر دایره است. اگر $\widehat{NOI}=30^\circ$ و $AC \parallel ON$ باشد، اندازه‌ی کمان AC چند درجه است؟



پاسخ) O را به A وصل می‌کنیم



$CA \parallel ON$ (مورب CI) $\Rightarrow \hat{O}_1=\hat{C}$ ①

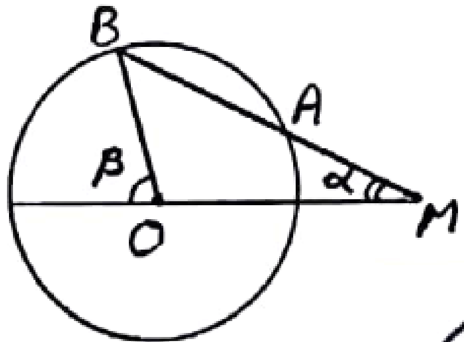
$CA \parallel ON$ (مورب OA) $\Rightarrow \hat{O}_2=\hat{A}$ ②

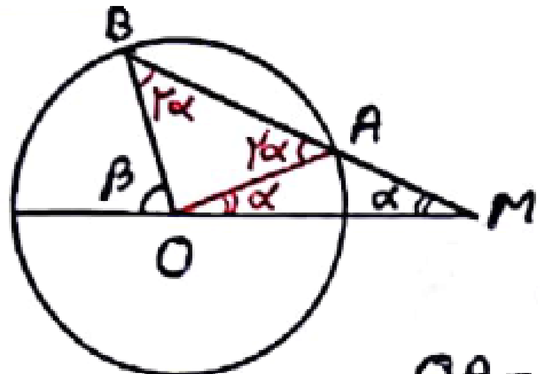
$OA=OC \Rightarrow \hat{C}=\hat{A} \xrightarrow{①,②} \hat{O}_1=\hat{O}_2 \Rightarrow \overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{NI}=30^\circ$

قطر CI $\Rightarrow \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AN}+\overset{\frown}{NI}=180^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC}+30^\circ+30^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=180^\circ-60^\circ=120^\circ.$

۶- (تمرین ۶ ص ۱۷ کتاب درسی) دایره‌ی $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه‌ی M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کرده است و $MA=R$، ثابت کنید $\beta = 3\alpha$.





اثبات) O را به A وصل می‌کنیم

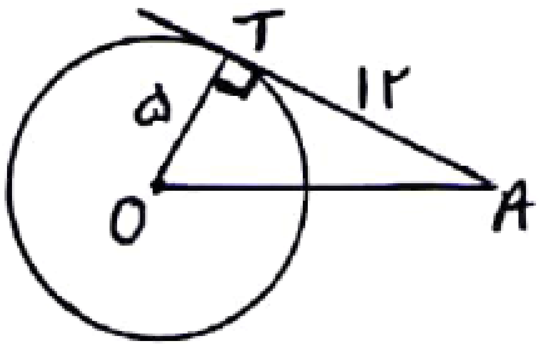
$$OA = MA = R \Rightarrow A\hat{O}M = \hat{M} = \alpha$$

$$\overset{\triangle}{AOM} : (\text{خارجی})\ O\hat{A}B = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

$$OA = OB = R \Rightarrow \hat{B} = O\hat{A}B = 2\alpha$$

$$B\hat{O}M : (\text{خارجی})\ \beta = \hat{B} + \hat{M} = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$$

پس $\beta = 3\alpha$.



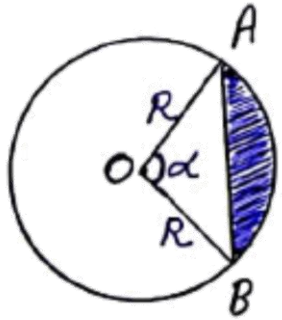
اندازه‌ی مماسی که از نقطه‌ی A بر دایره‌ای به شعاع ۵ واحد رسم می‌شود برابر با ۱۲ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی A تا دورترین نقاط دایره چند واحد است؟

پاسخ) فاصله‌ی نقطه‌ی A تا دورترین نقطه‌ی دایره برابر $OA+R$ است،

$$\overset{\triangle}{OAT}: OA^2 = OT^2 + AT^2 = ۵^2 + ۱۲^2 = ۱۶۹ \Rightarrow OA = ۱۳$$

$$\text{دورترین فاصله} = OA + R = ۱۳ + ۵ = ۱۸.$$

تعریف: در شکل مقابل ناحیه‌ی رنگی را یک «قطعه» می‌نامند.

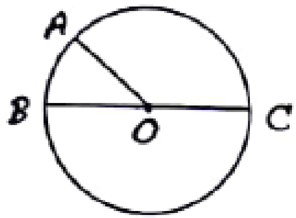


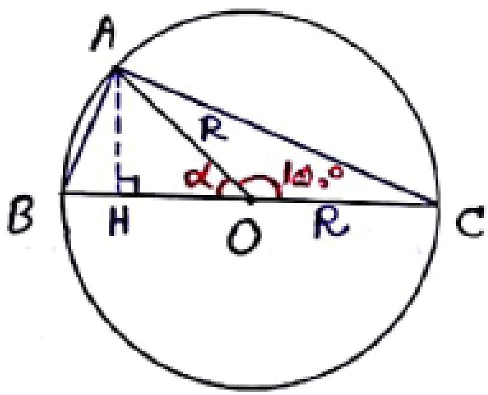
مساحت مثلث AOB − مساحت قطاع = مساحت قطعه

$$= \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha .$$

«مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع»

۵- در شکل زیر O مرکز دایره است. اگر طول کمان AB و مساحت قطاع AOB به ترتیب $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ و π باشد، مساحت مثلث ABC چقدر است؟





$$\begin{cases} L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \Rightarrow R\alpha = 60\sqrt{3} \\ S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} = \pi \Rightarrow R^2\alpha = 360^\circ \end{cases} \xRightarrow{(\div)} \frac{R^2\alpha}{R\alpha} = \frac{360}{60\sqrt{3}} \Rightarrow R = 2\sqrt{3}$$

$$R\alpha = 60\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{60\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 30^\circ$$

$$A\hat{H}O : \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow \sin\alpha = \frac{AH}{OA} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{AH}{2\sqrt{3}} \Rightarrow AH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$S(A\hat{B}C) = S(A\hat{B}O) + S(A\hat{O}C) = \left(\frac{1}{2}\, OB \times OH\right) + \left(\frac{1}{2}\, OA \times OC \times \sin 150^\circ\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= 3 + 3 = 6.$$