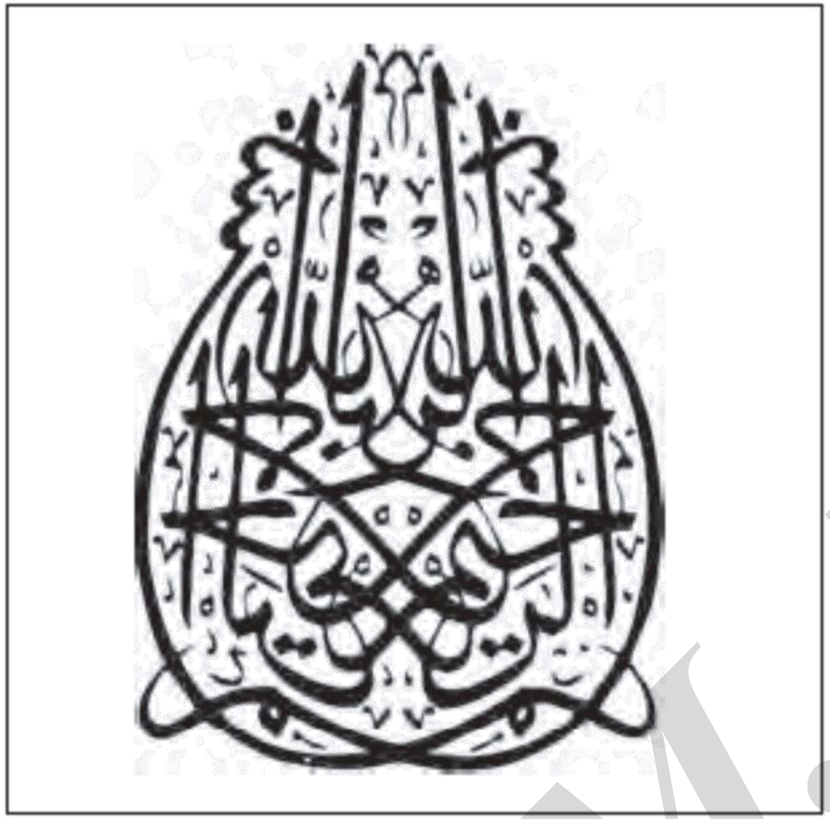
درس دوم – فصل دوم

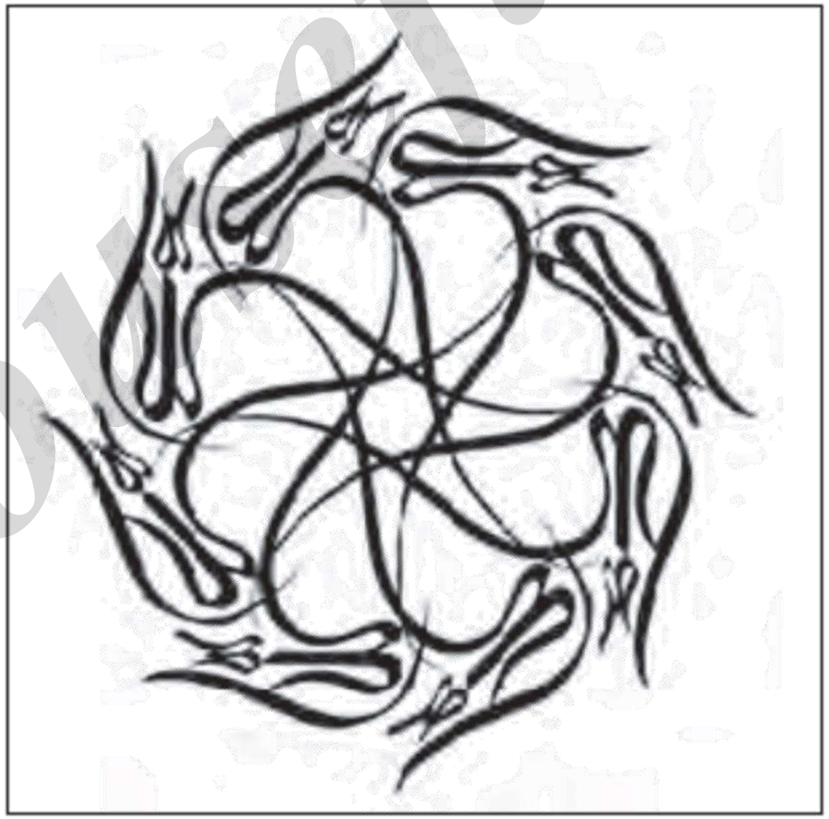
کاربرد تبدیل های هندسی

دکتر مهدی یوسفی

دبیر هندسه دبیرستان ماندگار البرز

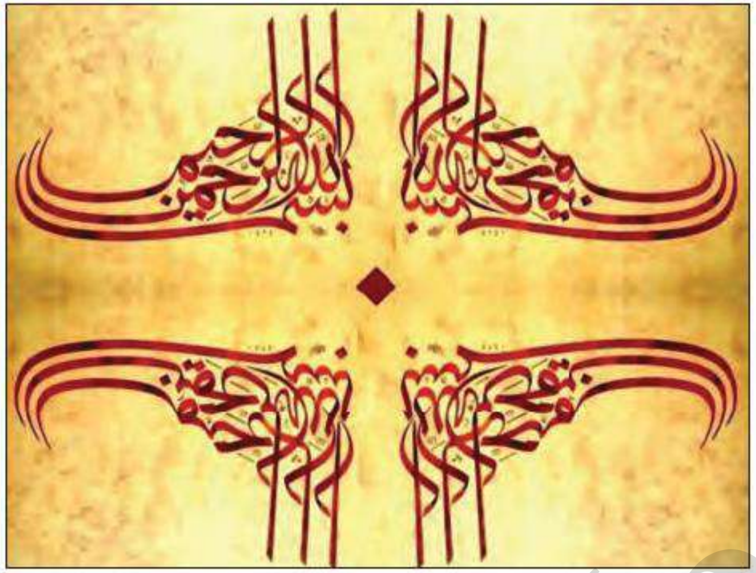
به این تصاویر دقت کنید. کدام‌یک از تبدیل‌های هندسی بر زیبایی خوشنویسی‌های زیر افزوده است؟





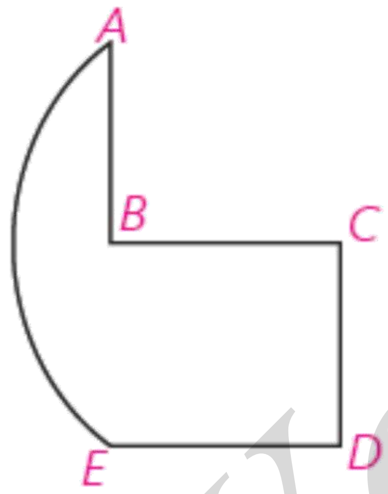
کاربرد تبدیل های هندسی

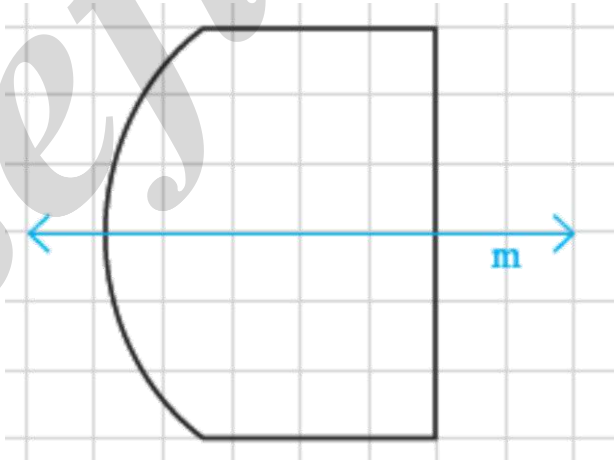
دکتر مهدی یوسفی

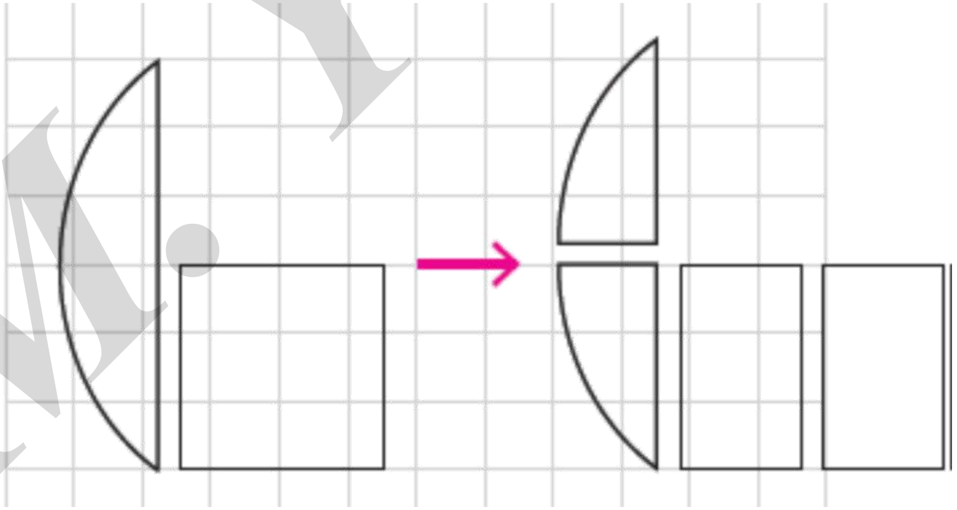


کاربردهایی از بازتاب (قرینه‌یابی)

۱ـ



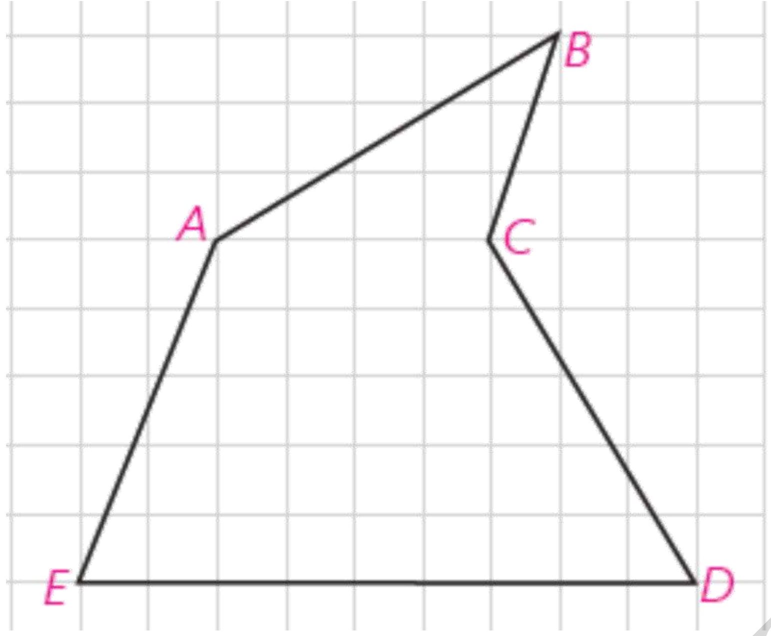




کاربرد تبدیل های هندسی

دکتر مهدی یوسفی

۲ـ یکی از کاربردهای بازتاب، حل مسائلی است که به مسائل **هم‌پیرامونی** یا **هم‌محیطی** معروف‌است. در این گونه مسائل، هدف این است که بدون اینکه محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چند ضلعی را تغییر دهیم.



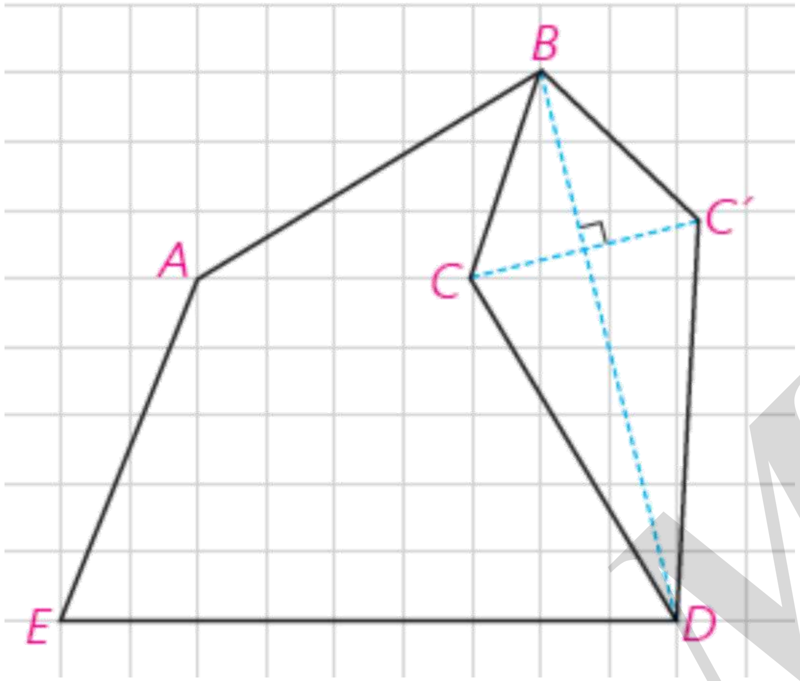
برای مثال فرض کنید که زمینی به شکل چندضلعی ABCDE داریم که دور آن را حصار کشیده‌ایم. حال می‌خواهیم با ثابت نگهداشتن محیط و ثابت نگهداشتن تعداد اضلاع چندضلعی، بدون اینکه اندازهٔ حصارکشی تغییر کند، مساحت زمین را افزایش دهیم.

به کمک این تصویر توضیح دهید که این عمل را چگونه می توان انجام داد.

چرا محیط چندضلعی ABCDE با محیط چندضلعی ABC′DE یکی است؟

B را به D وصل می‌کنیم ، بازتاب C را نسبت به BD به دست آورده و آن را C′ می‌نامیم، سپس C′ را به B و D وصل می‌کنیم ، در بازتاب نسبت به BD داریم

$S(B)=B$, $S(C)=C'$, $S(D)=D$

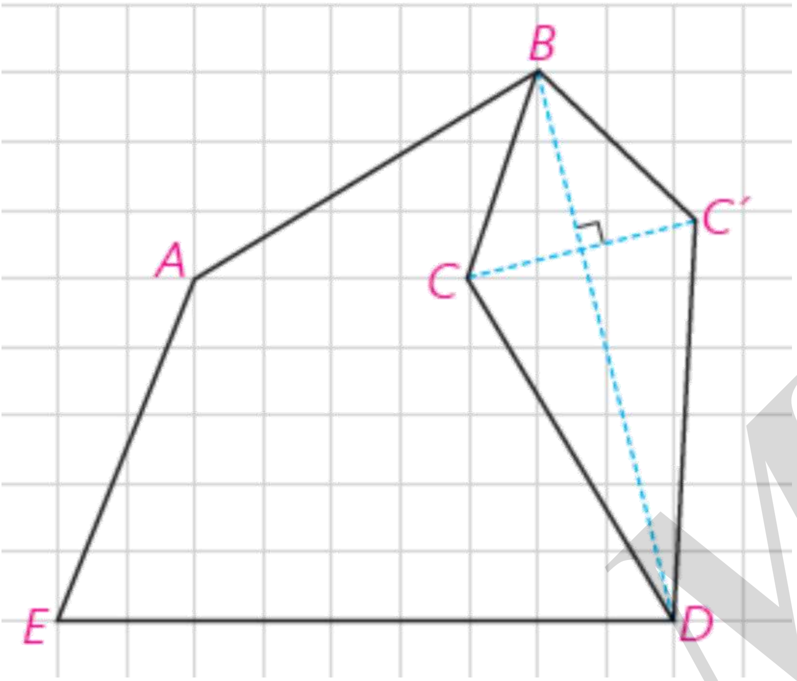


پس BC' بازتاب BC و $C'D$ بازتاب CD است. می‌دانیم بازتاب تبدیلی طولپاست پس

$BC=BC'$, $CD=C'D$

به کمک این تصویر توضیح دهید که این عمل را چگونه می‌توان انجام داد.

چرا محیط چندضلعی ABCDE با محیط چندضلعی ABC′DE یکی است؟



$BC = BC'$ و $CD = C'D$

بنابراین محیط پنج ضلعی $ABC'DE$ با محیط پنج ضلعی $ABCDE$ برابر است ولی مساحت آن بیشتر است زیرا

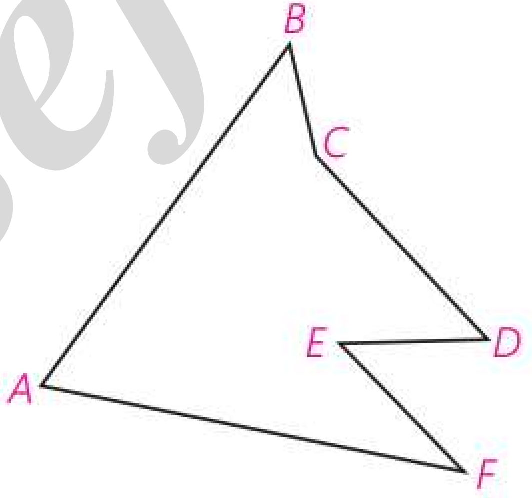
$$S(ABC'DE) = S(ABCDE) + \underbrace{S(B\overset{\square}{C}DC')}_{>0}$$

پس

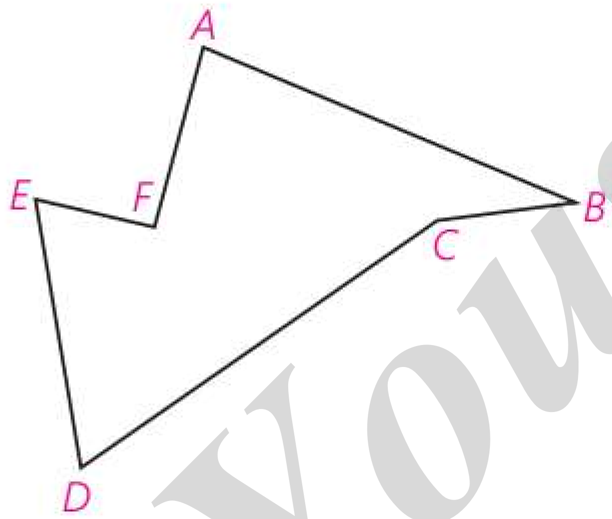
$$S(ABC'DE) > S(ABCDE).$$

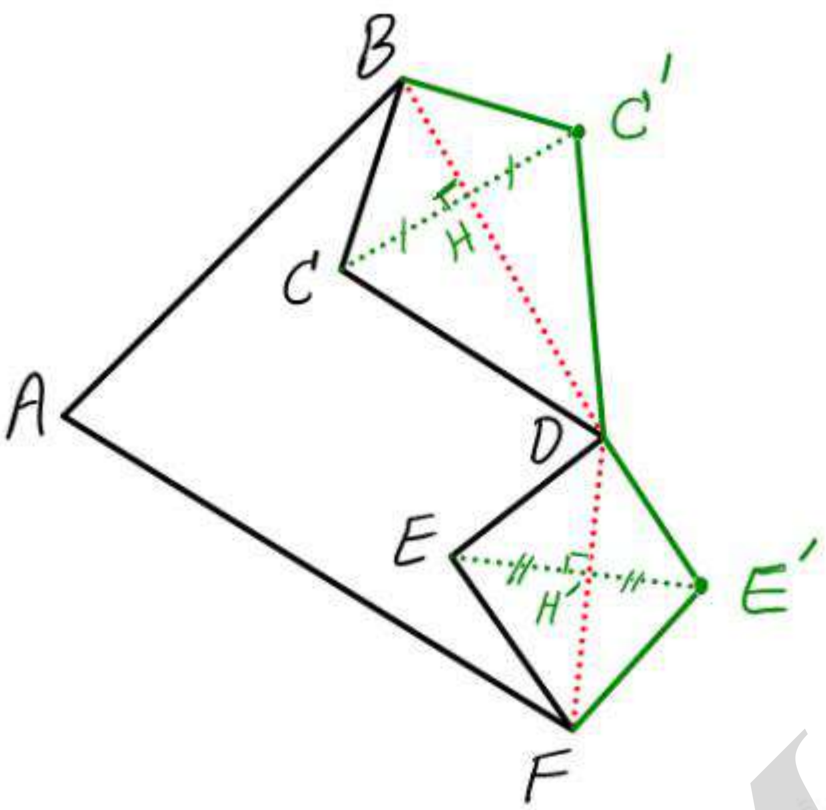
۱ــ دور زمین‌هایی مطابق شکل حصارکشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟

الف)



ب)





نقطه‌ی C را نسبت به BD و نقطه‌ی E را نسبت به DF بازتاب می‌دهیم تا نقاط C′ و E′ به دست آیند، از آنجا که بازتاب یک تبدیلِ هندسی طولپاست داریم:

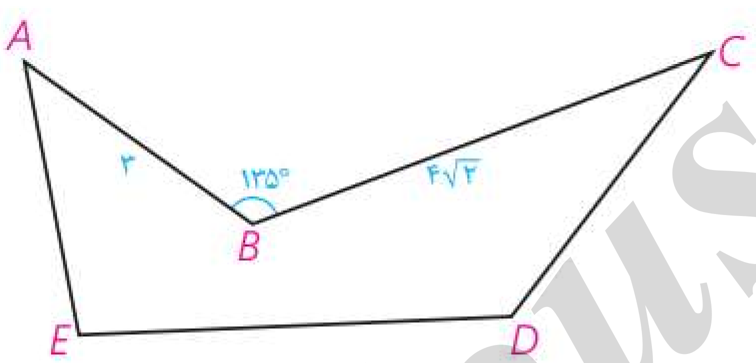
$$BC'=BC\,,\ C'D=CD\,,\ DE'=DE\,,\ E'F=EF$$

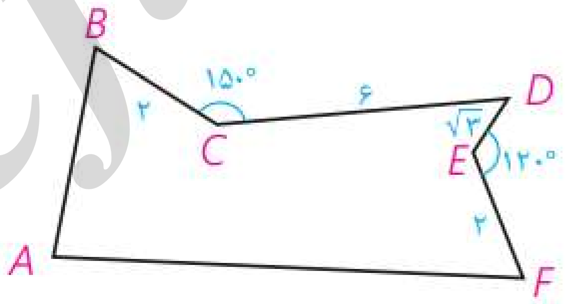
پس محیطِ شش‌ضلعی $ABC'DE'F$ با محیطِ شش‌ضلعی $ABCDEF$ برابر است امّا مساحتِ آن بیشتر است زیرا:

$$S(ABC'DE'F)=S(ABCDEF)+S(BCDC')+S(DEFE')$$

$$\Rightarrow S(ABC'DE'F)>S(ABCDEF).$$

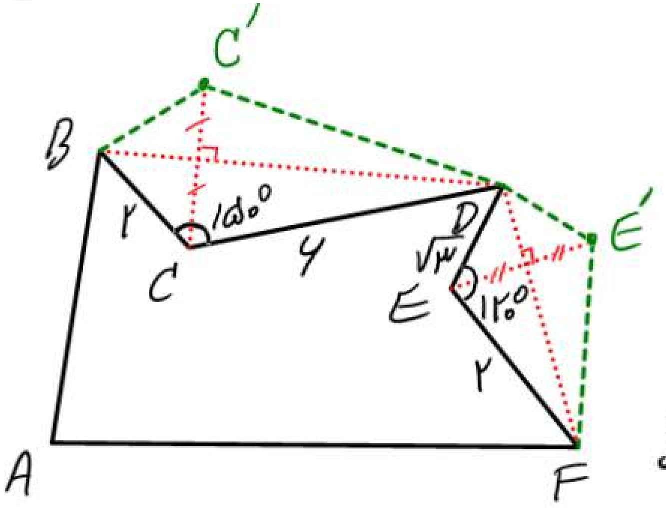
۵ ـ زمینی به شکل زیر داریم، می‌خواهیم بدون آنکه محیط این زمین تغییر کند مساحتش را افزایش دهیم در هر مورد میزان افزایش مساحت را حساب کنید.





تمرین صفحه ۵۶) B را به D، و D را به F وصل می‌کنیم.

بازتاب C نسبت به BD را C′ و بازتاب E نسبت به DF را E′ می‌نامیم و شش ضلعی $ABC'DE'F$ را تشکیل می‌دهیم؟



$$S(ABC'DE'F) = S(ABCDEF) + S(B\overset{\square}{C}DC') + S(D\overset{\square}{E}FE')$$

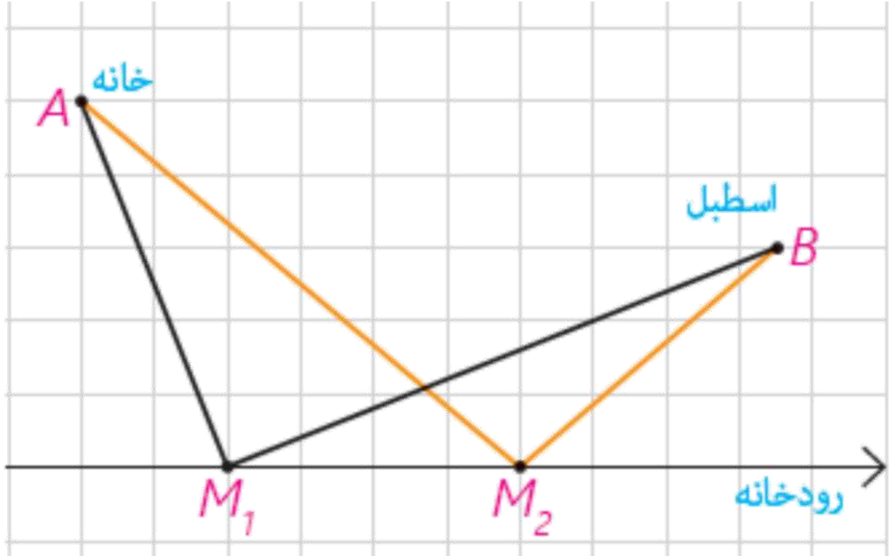
$$= S(ABCDEF) + \underbrace{2S(B\overset{\triangle}{C}D) + 2S(D\overset{\triangle}{E}F)}_{\Delta S \text{ میزان افزایش مساحت}}$$

$$\Delta S = \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}} BC \times CD \times \sin\hat{C}\right) + \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}} DE \times EF \times \sin\hat{E}\right)$$

$$= \left(2\times 6\underbrace{\sin 150^\circ}\right) + \left(\sqrt{3}\times 2\underbrace{\sin 120^\circ}\right) = 6 + 3 = 9 \quad (\text{واحد})^2.$$

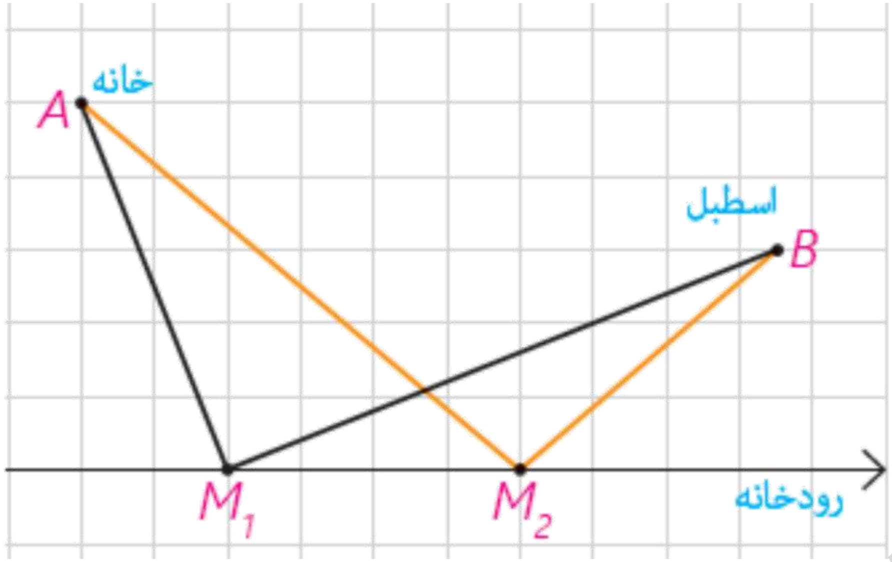
$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر



الف) هرون، ریاضی‌دانی است که به او دایرةالمعارف ریاضی و فیزیک لقب داده‌اند. او که در فاصلهٔ زمانی ۲۵۰ تا ۱۵۰ سال قبل از میلاد مسیح در مصر زندگی می‌کرد برای نخستین بار به کمک بازتاب، دستور پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر را در شرایطی خاص ارائه کرد.

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر



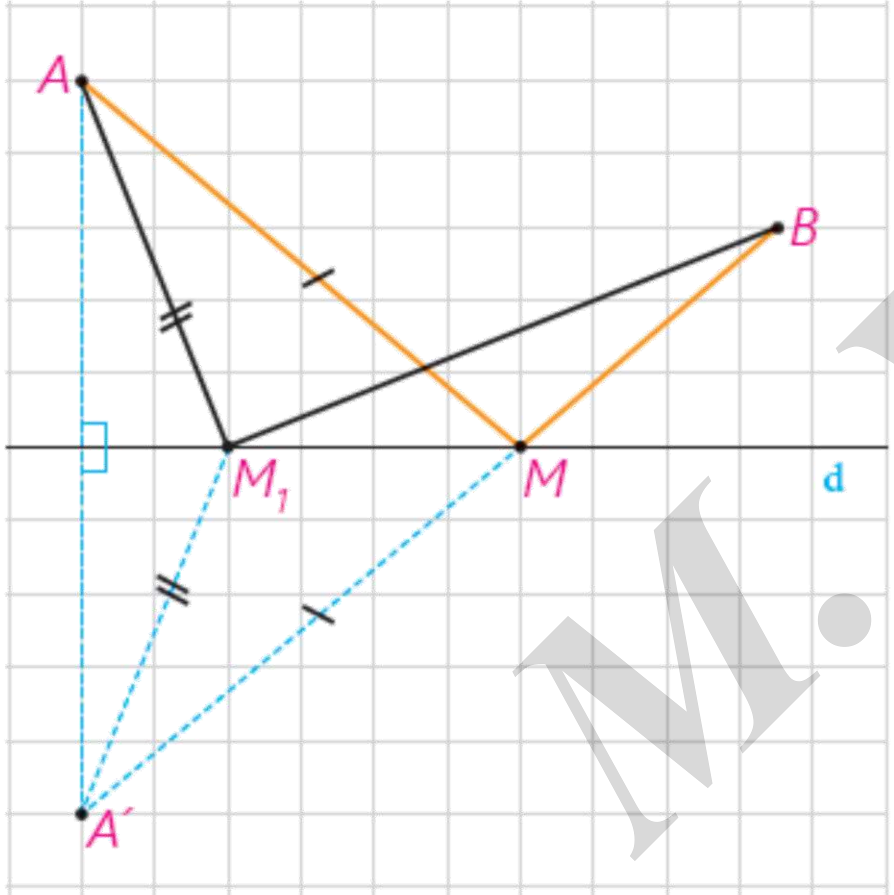
او با این مسئله روبه‌رو شده بود که :

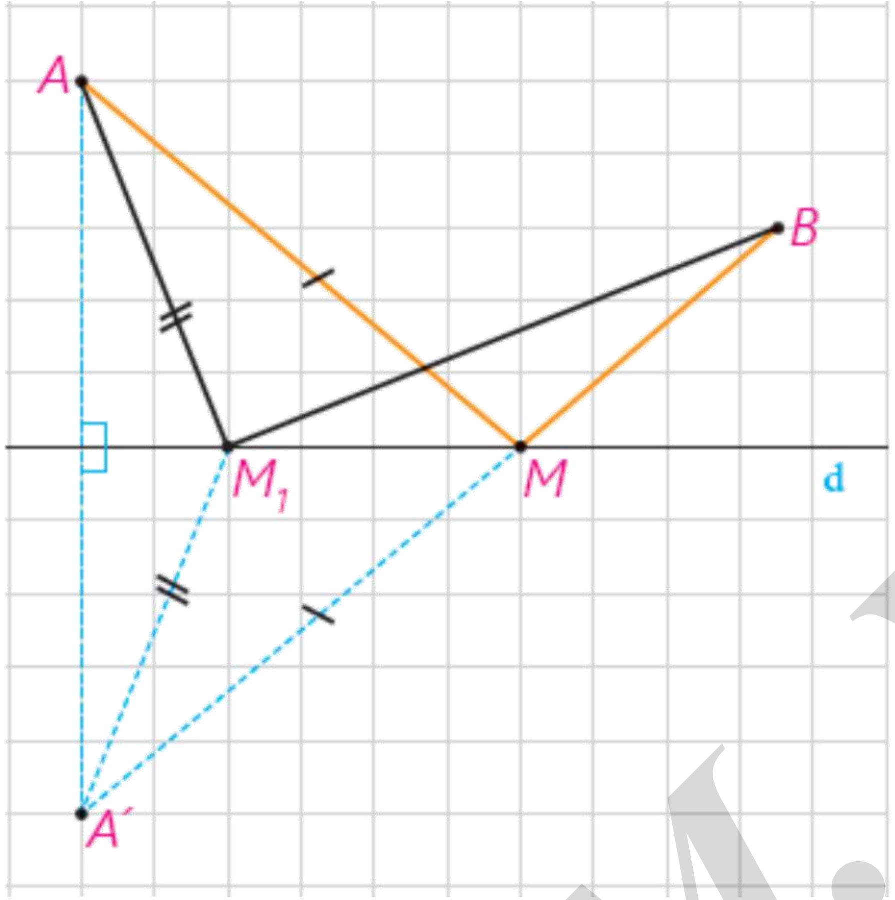
«مردی می‌خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه‌ای که لبهٔ مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به اسطبل[1] ببرد که در همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بردارد که مسافتی که در مجموع طی می‌کند، کمترین حالت ممکن باشد؟»

دکتر مهدی یوسفی

مسئله، پیدا کردن نقطهٔ M روی خط d است به گونه‌ای که $AM+MB$ کمترین مقدار ممکن باشد.

هرون ابتدا بازتاب A را نسبت به خط پیدا کرد و آن را A′ نامید. خط فرضی A′B خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع می‌کند. او مدعی شد که M جواب مسئله است و AM+MB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.





فرض کنیم M_1 نقطه‌ای دلخواه روی خط d به جز نقطهٔ M باشد؛

خط d (محور بازتاب) عمود منصف پاره خط AA' است،

پس هر نقطه روی d از دو سر پاره خط به یک فاصله است،

بنابراین

$$\begin{cases} AM_1 = A'M_1 & (1) \\ AM = A'M & (2) \end{cases}$$

بنا به نامساوی مثلث در $\overset{\triangle}{A'M_1B}$ داریم:

$$A'M_1 + M_1B > A'B$$

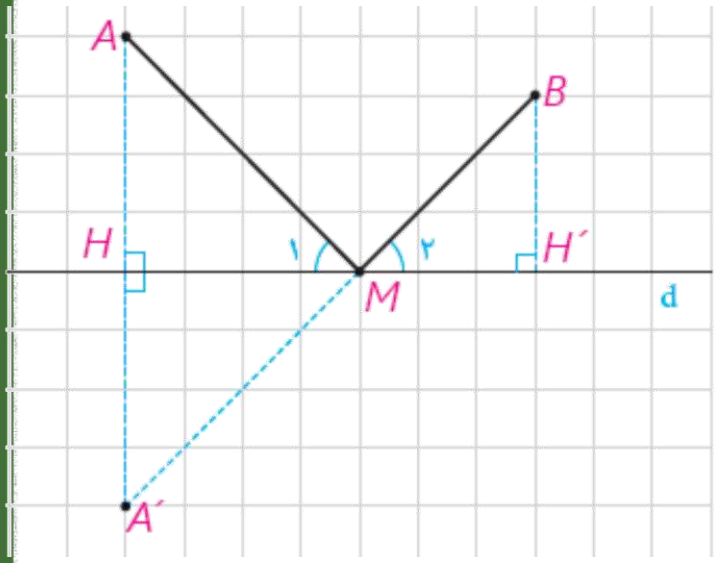
$$\overset{(1)}{\Rightarrow} AM_1 + M_1B > A'M + MB$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \underbrace{AM_1 + M_1B} > AM + MB$$

طول مسیر AM_1B > طول مسیر AMB

پس مسیر هرون در بین تمام مسیرهای دیگر دارای کمترین طول (کمترین مسافت) است.

دکتر مهدی یوسفی



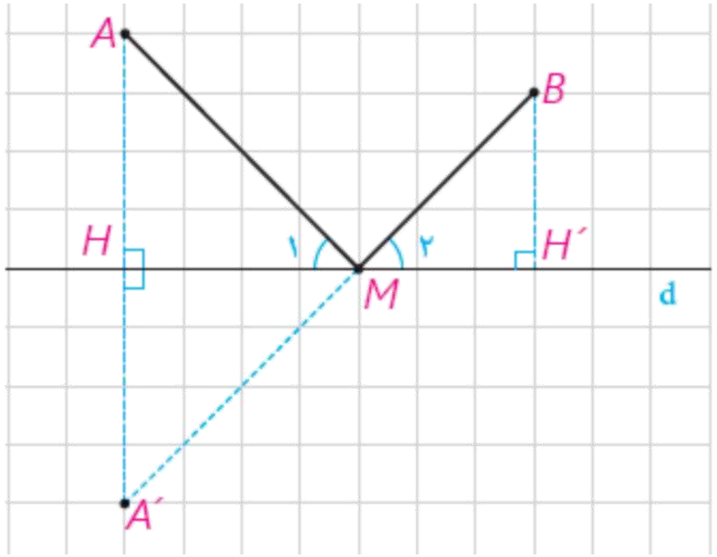
d عمود منصف پاره‌خط AA' است

$\xrightarrow{M \in d} MA = MA' \longrightarrow$ $M\hat{A}A'$ متساوی‌الساقین است

سپس در این مثلث ارتفاع وارد بر قاعده‌ی AA' نیم‌ساز زاویه‌ی رأس M نیز هست پس ① $\hat{M}_1 = \hat{M}_3$

از طرفی ② $\hat{M}_2 = \hat{M}_3$ (زیرا متقابل به رأس‌اند) پس

① و ② $\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$.

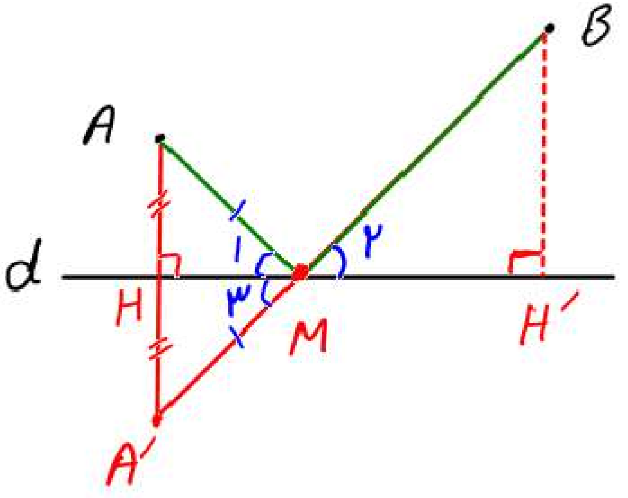


$$\left.\begin{array}{l}\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(دو زاویه)}} \overset{\triangle}{AHM} \sim \overset{\triangle}{BMH'} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AH}{BH'} = \frac{HM}{MH'}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{BH'} = \frac{HM}{MH'} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AH}{AH+BH'} = \frac{HM}{\underbrace{HM+MH'}_{HH'}}$$

$$\Rightarrow HM = \frac{AH \times HH'}{AH+BH'}.$$

۱) در شکل مقابل مسیر AMB کوتاهترین مسیر از نقطه‌ی A به نقطه‌ای روی خط d و سپس به نقطه‌ی B است. در این صورت:



الف) $MA = MA'$

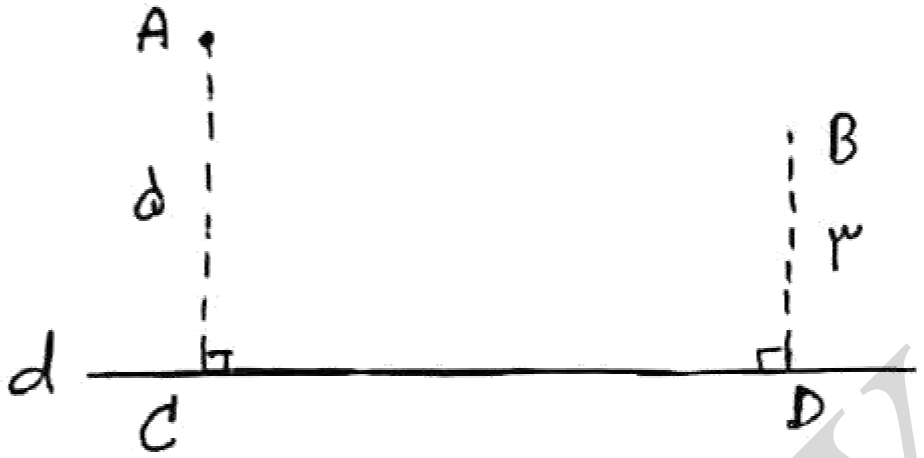
ب) $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

پ) $\overset{\triangle}{AHM} \sim \overset{\triangle}{BH'M}$

ت) $MH = \dfrac{AH \times HH'}{AH + BH'}$

ث) طول مسیر $AMB = A'B$

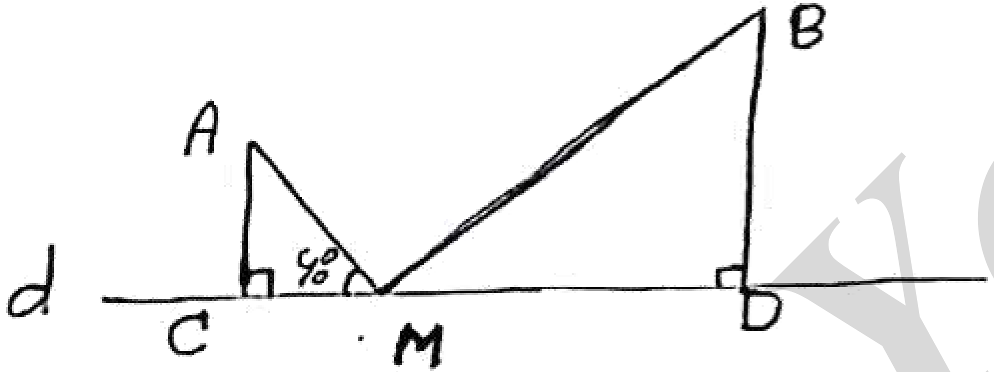
تست ۳) در شکل مقابل $CD=6$ است. می‌خواهیم از نقطه A، به خط d و سپس به نقطه B برویم طول کوتاه‌ترین مسیر چقدر است؟



۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰

۴) ۱۱

در شکل زیر AMB کوتاهترین مسیری است که در آن از نقطه‌ی A به خط d و از آن جا به نقطه‌ی B می‌رویم. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی B از خط d دو برابر فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط d باشد، طول کوتاهترین مسیر چند برابر AC است؟



۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

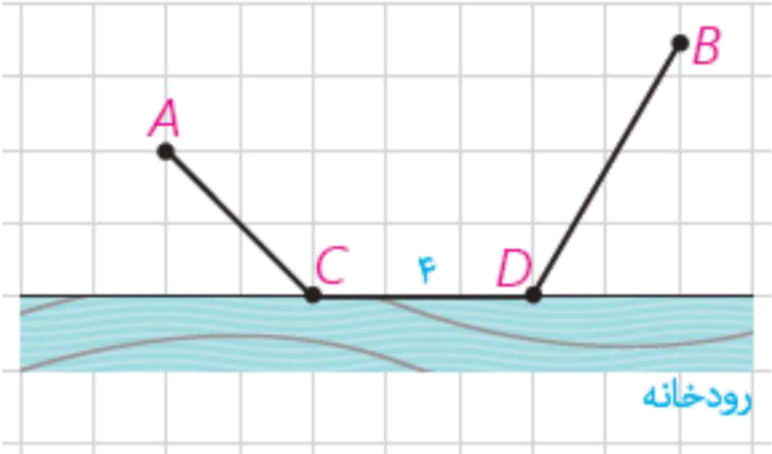
در لوزی $ABCD$ ، E وسط ضلع AD و M نقطه‌ای روی قطر BD است. اگر محیط مثلث MAE کمترین مقدار ممکن باشد، آن‌گاه مساحت این مثلث چه کسری از مساحت لوزی است؟

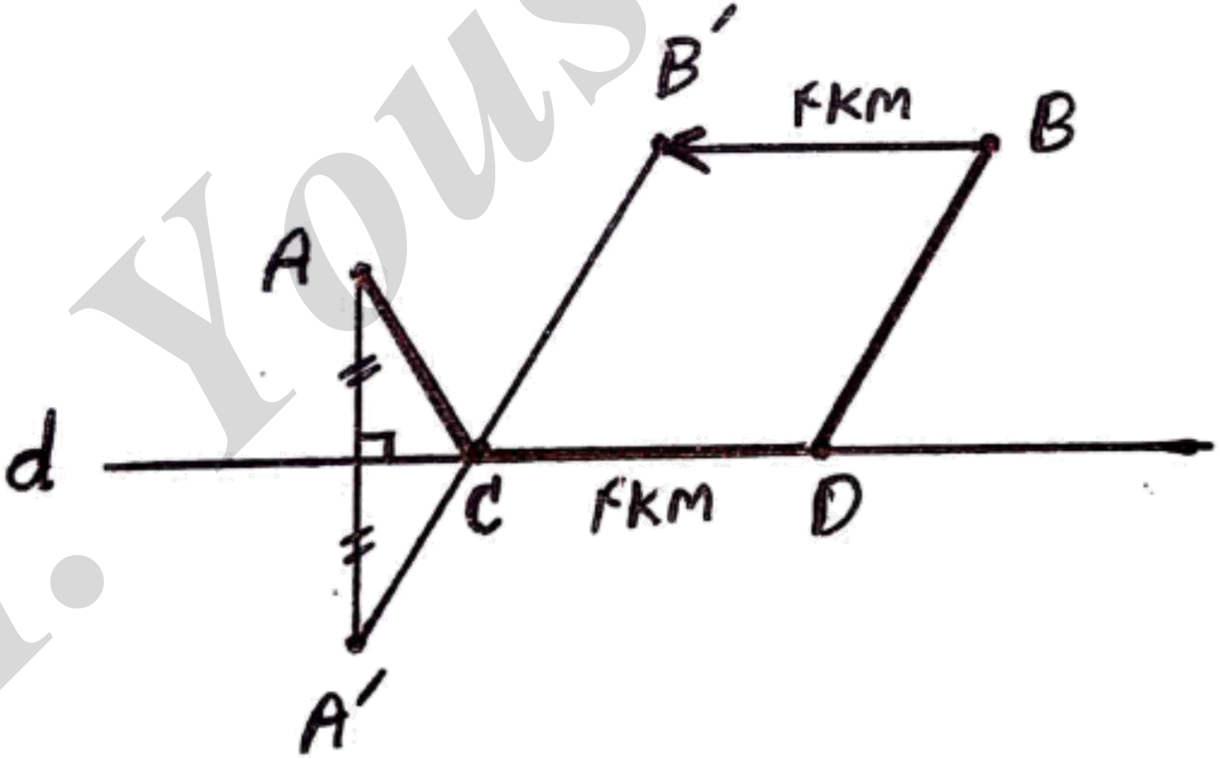
۱) $\frac{1}{12}$
۲) $\frac{1}{6}$
۳) $\frac{1}{9}$
۴) $\frac{1}{15}$

کاربرد تبدیل های هندسی

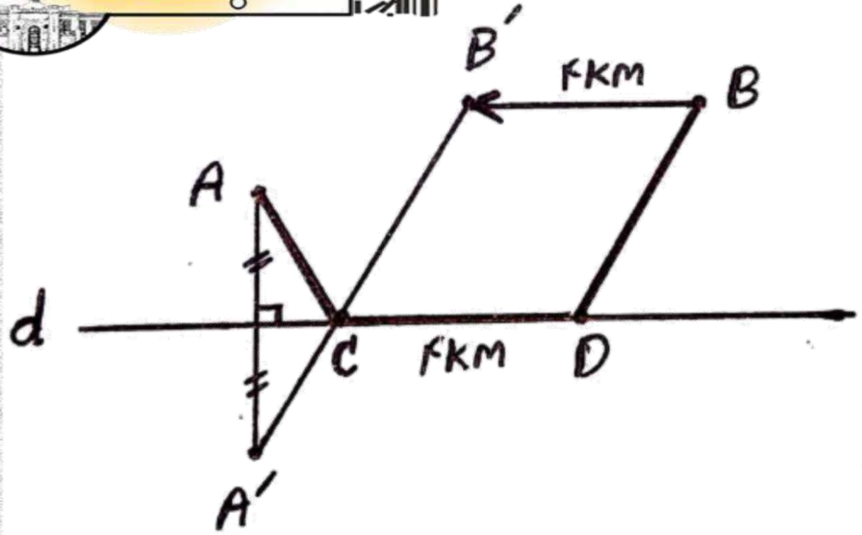
دکتر مهدی یوسفی

ب) دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه‌ای واقع‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به‌طوری‌که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر ACDB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟





با استفاده از برداری موازی ساحل رودخانه و به طول $4KM$ نقطه‌ی B را در جهت نزدیک شدن به نقطه‌ی A، به نقطه‌ی B' انتقال می‌دهیم، سپس به کمک راه‌حل مسئله هرون مسیر ACB' را تشکیل می‌دهیم (برای این منظور بازتاب A نسبت به خط d یعنی A' را پیدا کرده و آن را به B' وصل می‌کنیم، محل برخورد $A'B'$ با خط d همان نقطه‌ی C است، سپس A را به C وصل می‌کنیم.)
سپس از نقطه‌ی C روی خط d به طول $4KM$، پاره‌خط CD را رسم می‌کنیم و در آخر D را به B وصل می‌کنیم، مسیر $ACDB$ جواب مسئله است.



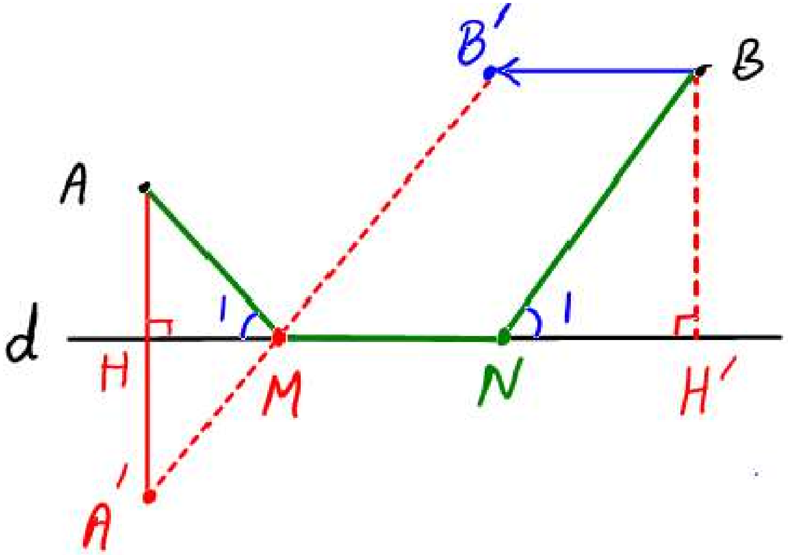
$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} BB' \parallel DC \\ BB' = DC \end{cases}$$

$\Rightarrow$ متوازی‌الاضلاع است $\square BB'CD \Rightarrow \begin{cases} BB' = CD = 4 \\ CB' = DB \end{cases}$

طول مسیر $ACDB$ $= AC + CD + DB = AC + 4 + CB'$

$= (AC + CB') + 4 =$ طول مسیر ACB' $+ 4$

با توجه به اینکه مسیر ACB' کوتاهترین مسیر است پس مسیر $ACDB$ نیز کوتاهترین مسیر مورد نظر مسئله است.



۲) فرض کنیم مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B باشد که در آن MN یک قطعه از مسیر به صورت یک جاده‌ی ساحلی به طول ثابتی است در این صورت:

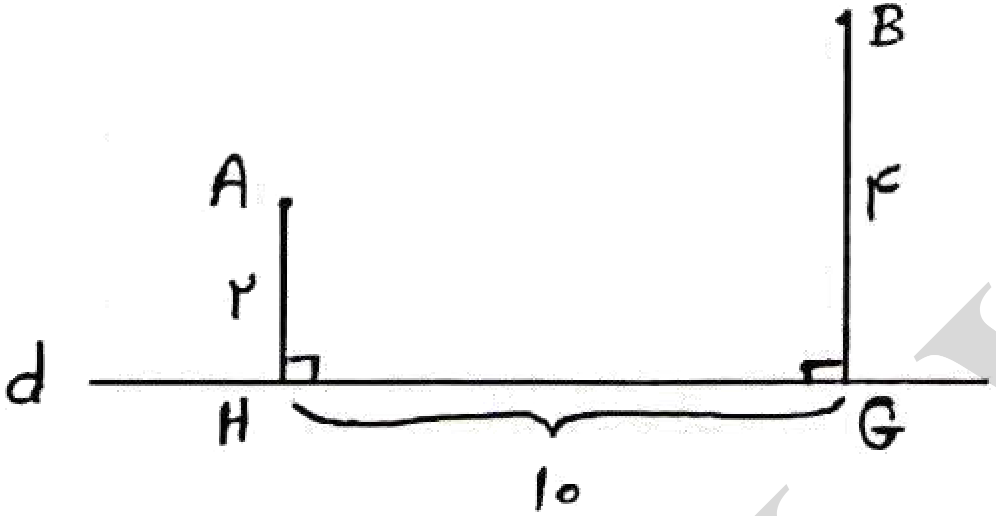
الف) $\hat{M}_1 = \hat{N}_1$

ب) $\overset{\triangle}{AHM} \sim \overset{\triangle}{BH'N}$

پ) طول مسیر AMNB $= A'B' + \underbrace{BB'}$

یا MN (طول قطعه‌ی ثابت مسیر)

در شکل مقابل می‌خواهیم در یک مسیر از نقطه‌ی A به خط d برویم، ۲ واحد روی خط d حرکت کنیم و سپس به نقطه‌ی B برویم. طول کوتاه‌ترین مسیر چقدر است؟



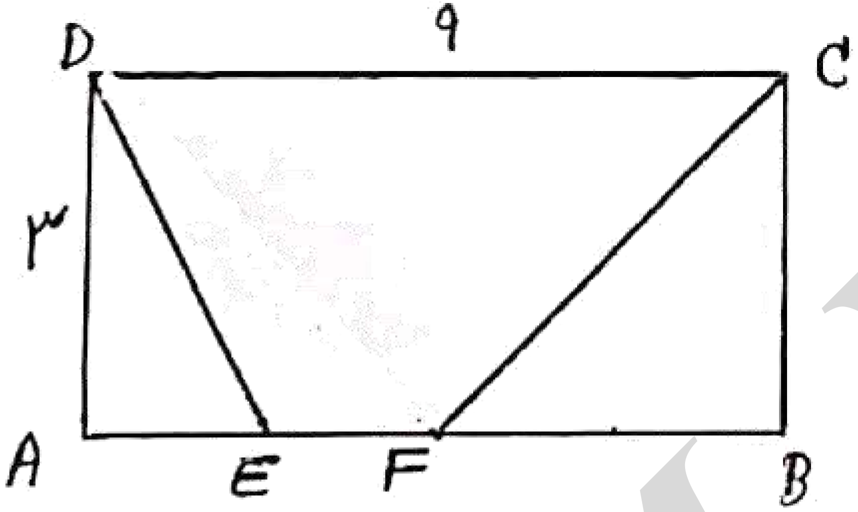
۱) ۱۰ ۲) ۱۲

۳) ۱۴ ۴) ۱۶

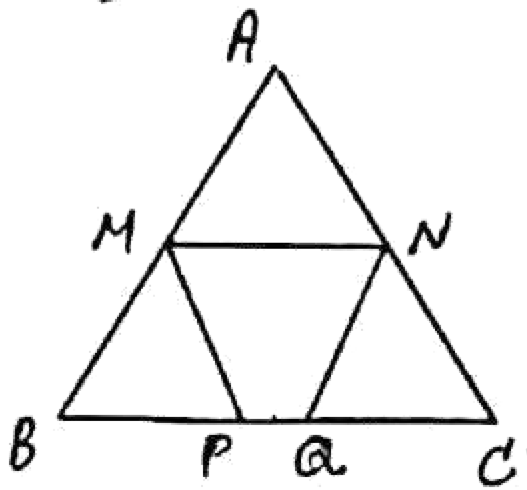
مطابق شکل ابعاد مستطیل ۳ و ۹ است. اگر قاعده‌ی کوچک ذوزنقه‌ی CDEF برابر $EF=1$ باشد، آنگاه کمترین مقدار محیط ذوزنقه کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰

۳) ۲۱ ۴) ۱۶



در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC = 10)$، طول ارتفاع وارد بر قاعده برابر ۸ واحد است. اگر M و N را به ترتیب وسط اضلاع AB و AC در نظر بگیریم و P و Q را به فاصله‌ی ۱ واحد از هم روی BC اختیار کنیم تا چهارضلعی $MPQN$ ایجاد شود، کمترین مقدار محیط این چهارضلعی کدام است؟

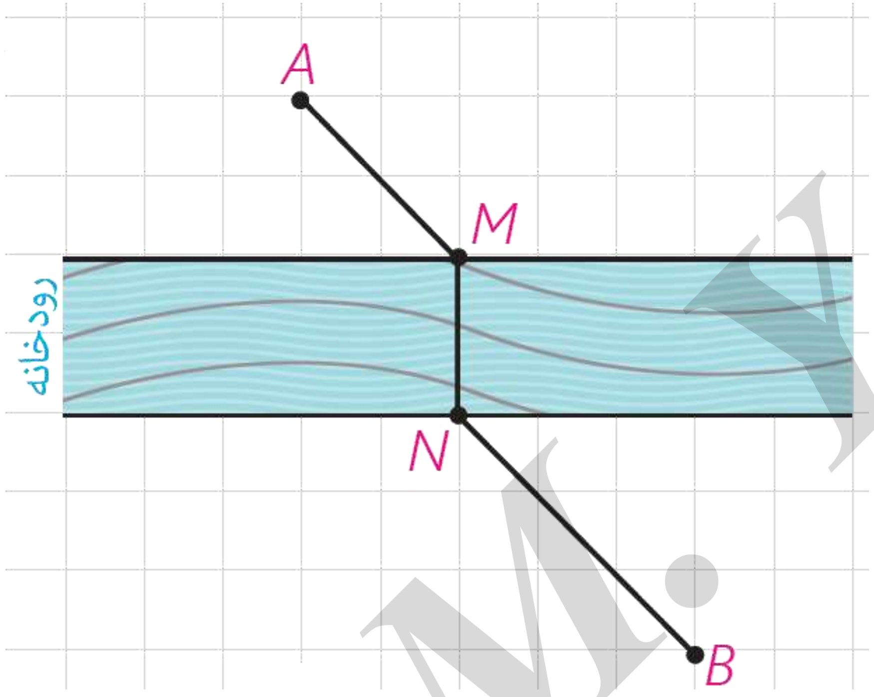


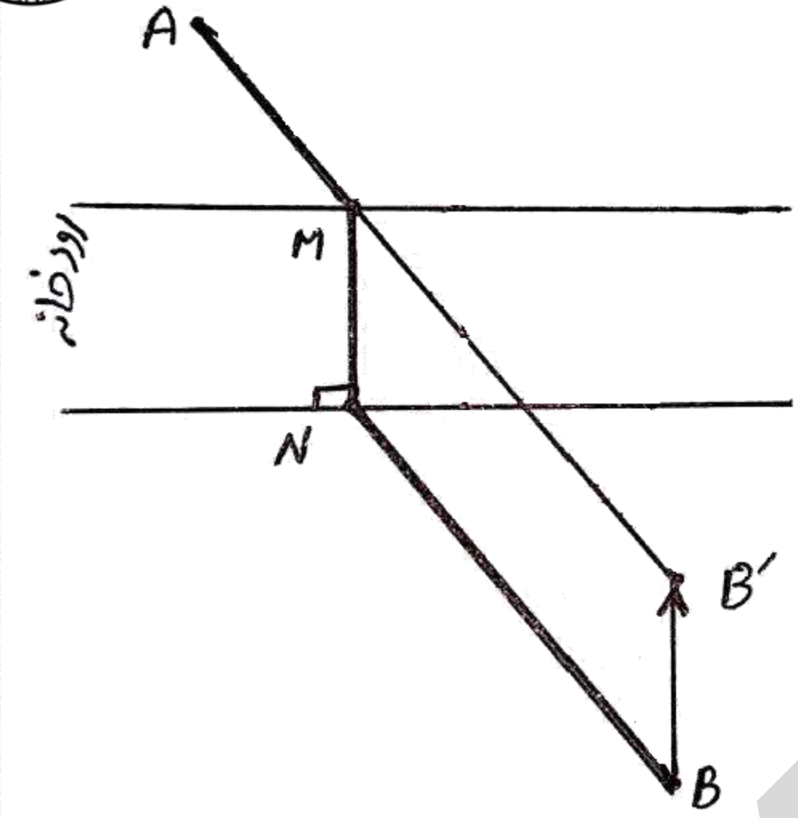
۱) $4+\sqrt{89}$ ۲) $4+2\sqrt{89}$

۳) $7+\sqrt{89}$ ۴) $7+2\sqrt{89}$

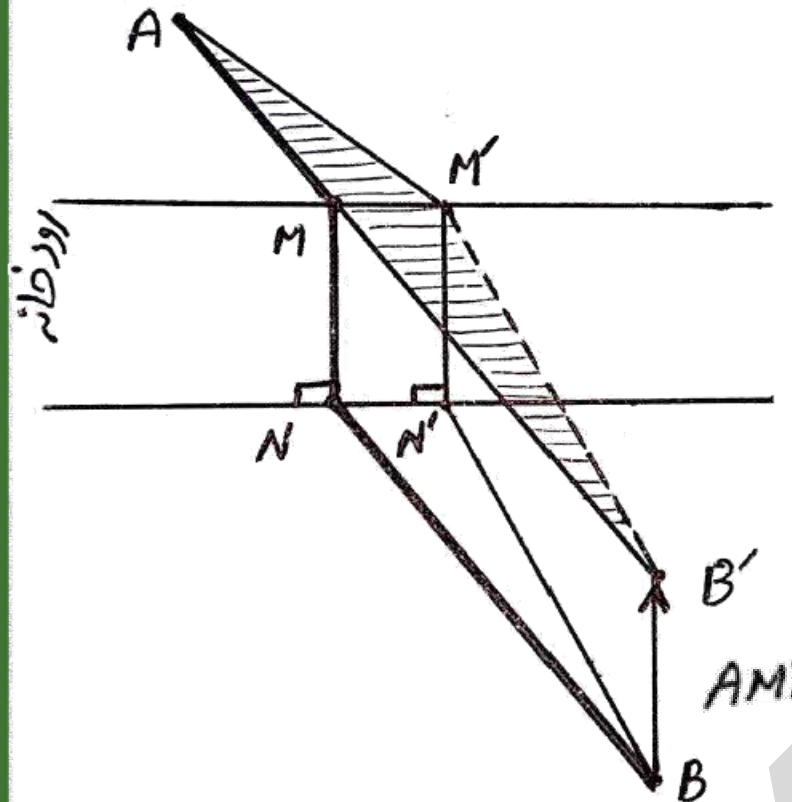
کاردرکلاس ۵۵

اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری‌که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟





مطابق شکل روبه رو ابتدا نقطه‌ی B را با برداری هم اندازه‌ی عرض رودخانه و عمود بر راستای رودخانه در جهت نزدیک شدن به نقطه‌ی A، به نقطه‌ی B' انتقال می‌دهیم، سپس B' را به A وصل می‌کنیم تا ساحل بالایی را در نقطه‌ی M قطع کند، از M عمودی به ساحل پایینی رودخانه رسم می‌کنیم تا آن را در N قطع کند؛ مسیر $AMNB$ جواب مسئله است.



فرض کنیم مسیر $AM'N'B$ مسیر دلخواهی بین دو نقطه‌ی A و B به جز مسیر $AMNB$ باشد، در این صورت:

$MN \underline{\underline{\parallel}} BB' \Rightarrow$ $\square MNBB'$ متوازی‌الاضلاع است $\Rightarrow NB = MB'$

طول مسیر $AMNB = AM + MN + NB$

$= AM + MN + MB' = \underbrace{(AM + MB')}_{AB'} + MN$

$= AB' + MN$

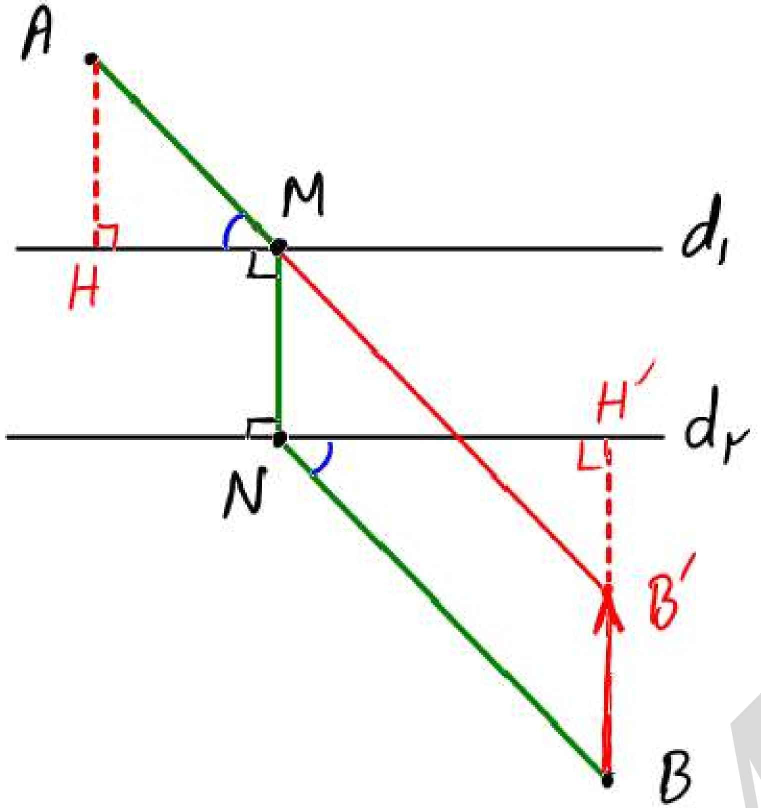
$M'N' \underline{\underline{\parallel}} BB' \Rightarrow$ $\square M'N'BB'$ متوازی‌الاضلاع است $\Rightarrow N'B = M'B'$

طول مسیر $AM'N'B = AM' + M'N' + N'B$

$= AM' + MN + M'B' = (AM' + M'B') + MN$

$\overset{\triangle}{AB'M'}: \quad AM' + M'B' > AB' \xRightarrow{+MN} (AM' + M'B') + MN > AB' + MN$

$\Rightarrow$ طول مسیر $AM'N'B >$ طول مسیر $AMNB$.



۳) در شکل مقابل مسیر AMNB کوتاهترین مسیر بین نقطه‌ی A و نقطه‌ی B با گذر از پل MN از روی رودخانه است، در این صورت:

الف) $\hat{M} = \hat{N}$

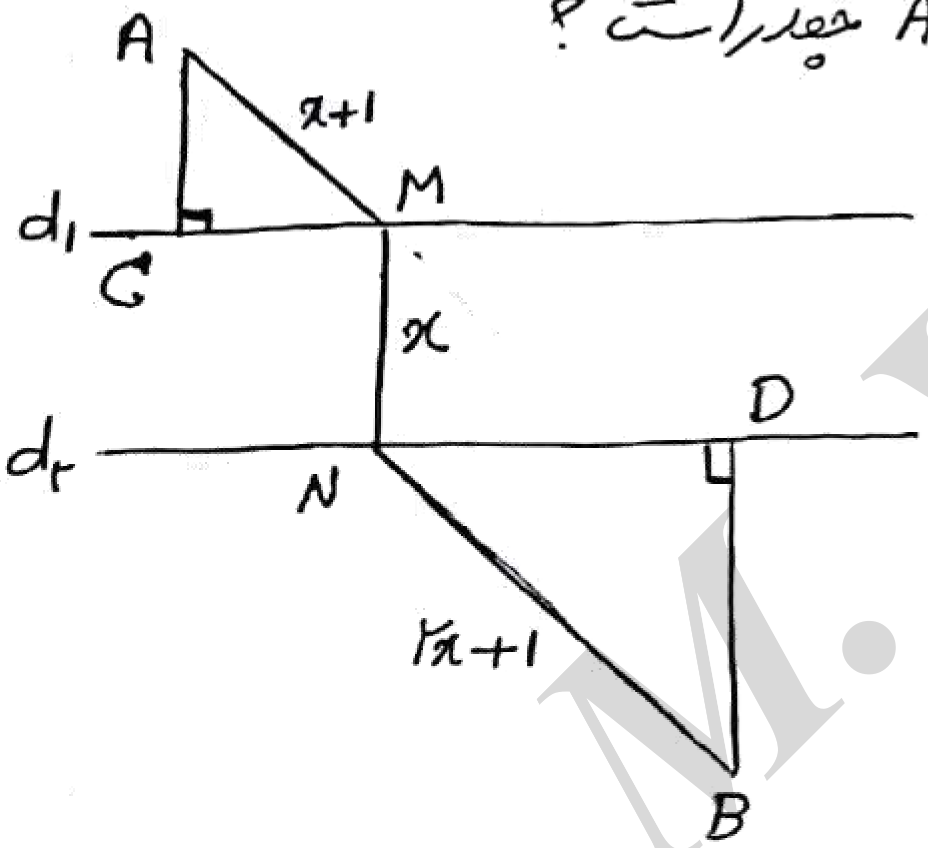
ب) $\overset{\triangle}{AHM} \sim \overset{\triangle}{B'H'N}$

پ) $AMNB$ طول مسیر $= AB' +$ عرض رودخانه

$(BB' \,\underline{\parallel}\, MN)$

دکتر مهدی یوسفی

در شکل مقابل AMNB کوتاه‌ترین مسیر از A به B است که در آن MN بر دو خط موازی d_1 و d_2 عمود است. اگر مساحت مثلث BND، $\frac{9}{4}$ مساحت مثلث AMC باشد، طول مسیر AMNB چقدر است؟

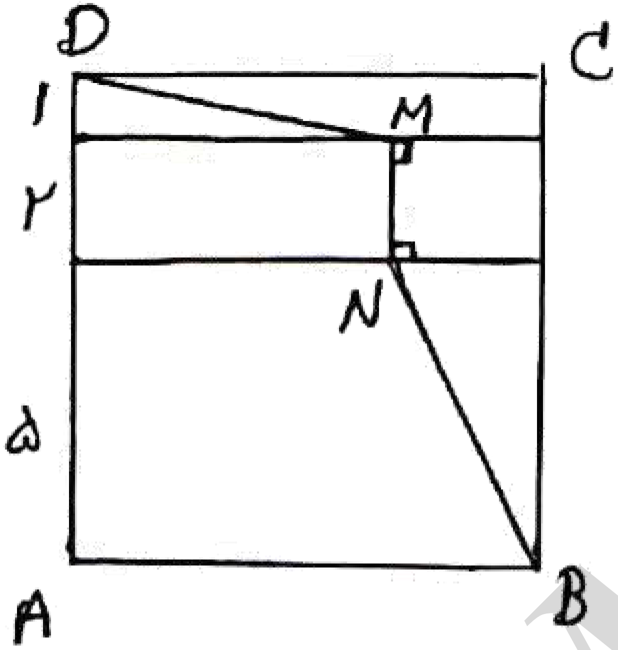


۱) ۶   ۲) ۷

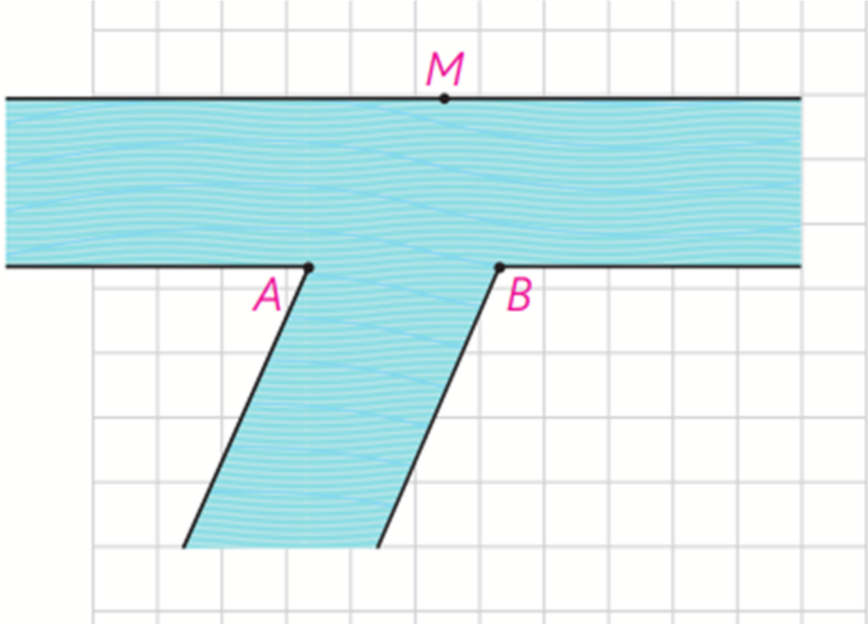
۳) ۸   ۴) ۹

چهارضلعی $ABCD$ مربعی است که از سه مستطیل به عرض های ۱ و ۲ و ۵ تشکیل شده است. طول کوتاه‌ترین مسیر $DMNB$ مطابق شکل کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴



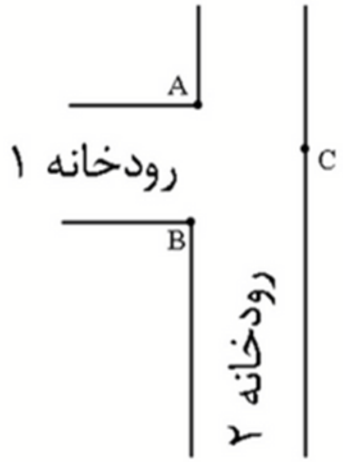
۲ـ می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکلهٔ A و B مطابق شکل مشخص است. اسکلهٔ M را در چه نقطه‌ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟



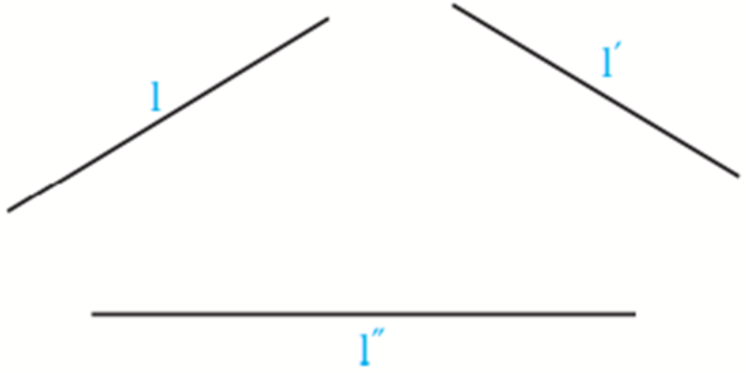
در شکل مقابل یک کشتی می‌خواهد مسیر ABCA را طی کند، A و B نقاط ثابتی هستند و عرض رودخانه ها یکسان است. کوتاهترین مسیری که این کشتی می‌تواند طی کند، چند برابر AB است؟

۱) $1+\sqrt{3}$ ۲) $2+\sqrt{3}$

۳) $1+\sqrt{5}$ ۴) $2+\sqrt{5}$



۳ــ سه خط دو به دو ناموازی l و l' و l'' در صفحه مفروض‌اند. پاره‌خطی به‌طول ۵ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی l و l' ، و موازی l'' باشد.



دو خط متمایز Δ و Δ' و نقطه‌ی A خارج آن دو مفروض‌اند. برای رسم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین با راس A که دو سر قاعده‌ی آن بر روی هر دو خط مفروض باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

۱) مجانس　　۲) دوران

۳) بازتاب (تقارن)　　۴) انتقال

نقطه‌ی A در صفحه دو خط متقاطع d و 'd است. در رسم مثلث متساوی الاضلاع به راس A، که دو راس دیگر آن بر روی هریک از دو خط مفروض باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

(سراسری - ۹۸)

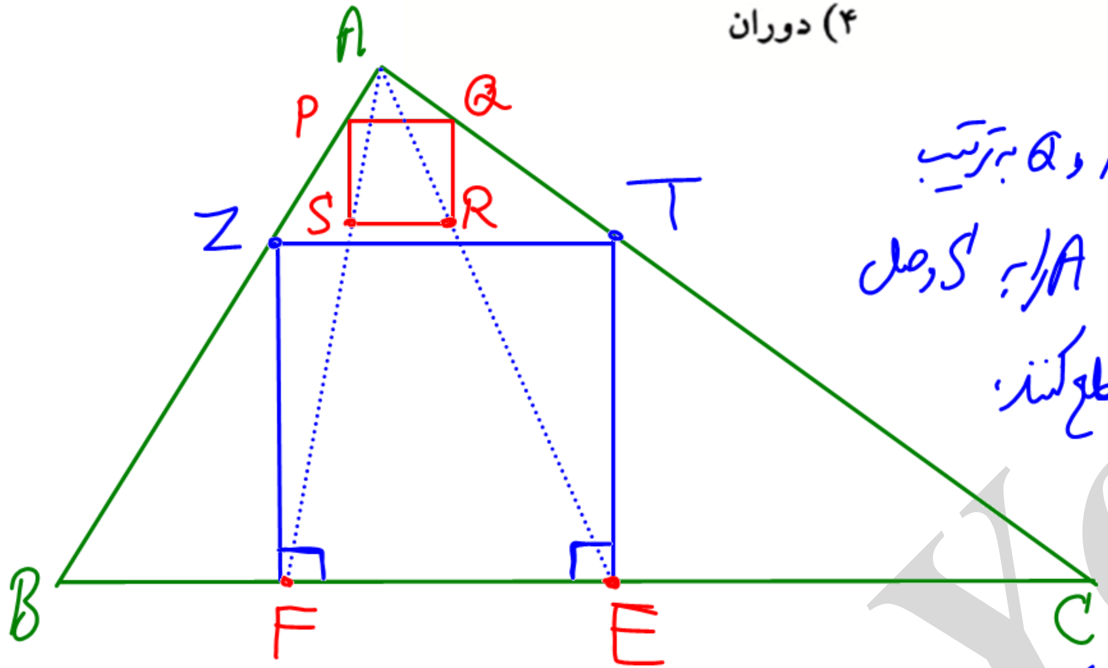
۱) انتقال ۲) بازتاب ۳) تجانس ۴) دوران

کاربرد تبدیل های هندسی

دکتر مهدی یوسفی

در رسم بزرگ‌ترین مربع ممکن داخل مثلث ABC، به طوری‌که یک ضلع مربع منطبق بر ضلع BC باشد. از کدام تبدیل هندسی، استفاده می‌شود؟

۱) انتقال ۲) تجانس ۳) بازتاب ۴) دوران



مربع دلخواه PQRS را چنان درنظر می‌گیریم که دو رأس P و Q به ترتیب روی اضلاع AB و AC باشند. سپس A را به R و A را به S وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را در نقاط E و F قطع کنند. در نقاط E و F خطوطی عمود بر BC رسم می‌کنیم تا اضلاع AC و AB را در T و Z قطع کنند (مربع ZTEF). مربع ZTEF، تجانس مربع PQRS در تجانس به مرکز A است) مربع ZTEF جواب مسئله است.

کاربرد تبدیل های هندسی
دکتر مهدی یوسفی

دایرهٔ C و مثلث ABC خارج آن مفروض‌اند. برای رسم مثلثی محاط در دایره که اضلاع آن با اضلاع مثلث ABC نظیر به نظیر موازی باشند، کدام تبدیل هندسی به‌کار می‌رود؟

۱) انتقال ۲) دوران ۳) بازتاب ۴) تجانس

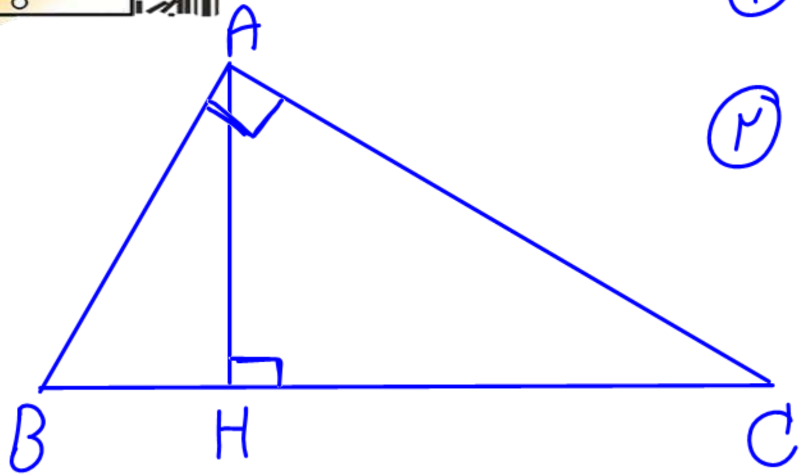
۴ــ فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K=-\frac{۱}{۲}$ باشد.

الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟

ب) مساحت مثلث $A'B'C'$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

دکتر مهدی یوسفی



(۱) $\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{AHC} \Rightarrow \boxed{AH^2 = BH \times HC}$

(۲) $\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \boxed{AB^2 = BH \times BC}$

(۳) $\overset{\triangle}{AHC} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \boxed{AC^2 = HC \times BC}$

(۴) $\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$

(۵) $\boxed{BC \times AH = AB \times AC} \; (= 2S)$

$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \sin\beta \\ \cos\alpha = -\cos\beta \end{cases}$$

α و β مکمل یکدیگر باشند

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}$$

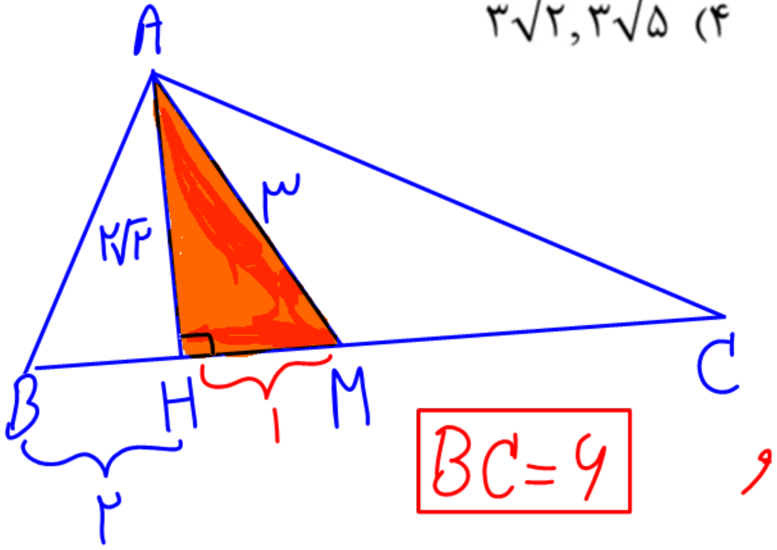
$$\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha}$$

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌های میانه و ارتفاع وارد بر وتر به ترتیب 3 و $2\sqrt{2}$ است. اندازه‌های اضلاع متوسط و کوچک این مثلث کدام است؟

۱) $\sqrt{2},3\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{5},2\sqrt{5}$ ۳) $2\sqrt{3},2\sqrt{6}$ ۴) $3\sqrt{2},3\sqrt{5}$

$AB=?$ $AC=?$



$\overset{\triangle}{AHM}: \hat{H}=90^\circ \Rightarrow HM=\sqrt{AM^2-AH^2}=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{9-8}=1$

میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس

$\boxed{BC=6}$ و $\boxed{BM=MC=AM=3}$

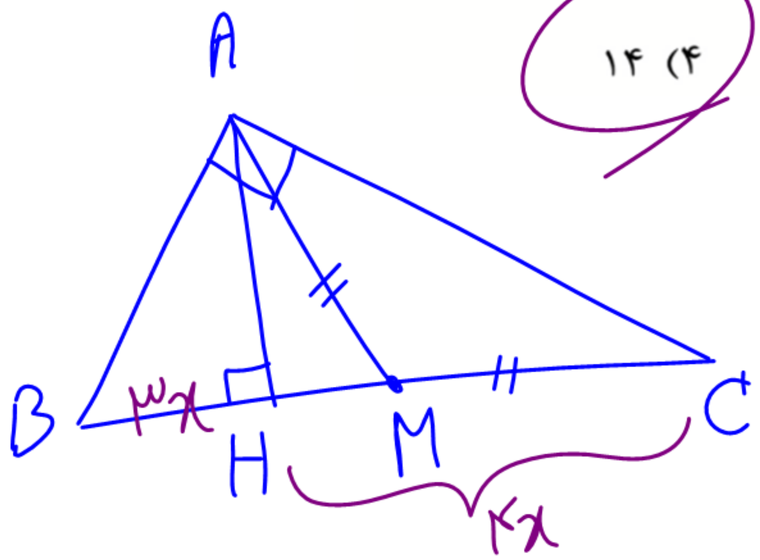
$$\begin{cases} BH=BM-HM=3-1=2 \\ HC=MC+HM=3+1=4 \end{cases}$$

$AB^2=BH\times BC=2\times 6=12 \Rightarrow AB=\sqrt{12} \Rightarrow AB=2\sqrt{3}$

$AC^2=HC\times BC=4\times 6=24 \Rightarrow AC=\sqrt{24} \Rightarrow AC=2\sqrt{6}$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{AB}{AC}$ ارتفاع AH و میانه AM رسم شده است، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

۱) ۷ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴



$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\text{به توان دو}} \frac{3}{4} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH \times \cancel{BC}}{HC \times \cancel{BC}} = \frac{BH}{HC}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BH = 3x \\ HC = 4x \end{cases} \Longrightarrow BC = 7x \rightarrow BM = \frac{7x}{2}$$

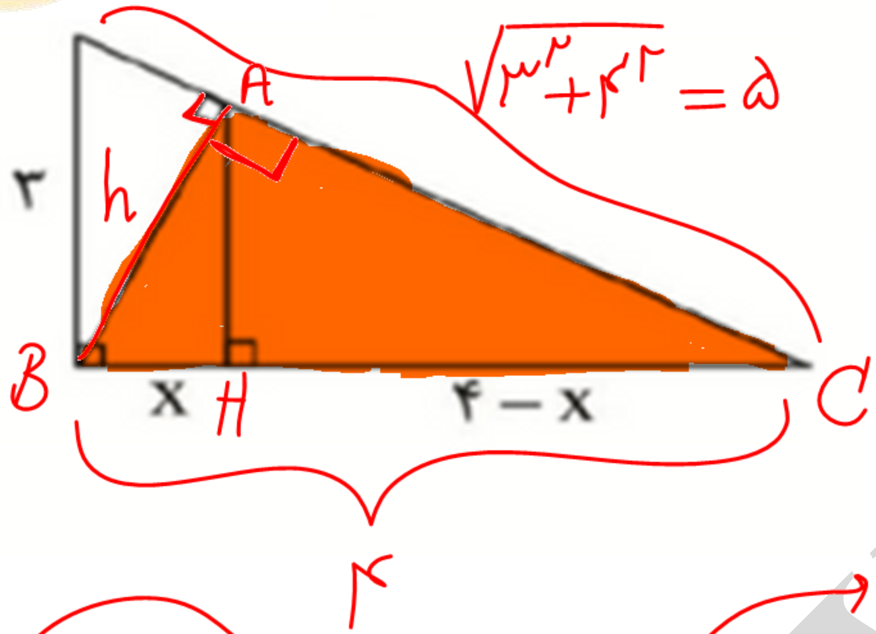
$$HM = BM - BH = \frac{7x}{2} - 3x = \frac{x}{2}$$

$$\frac{S(\overset{\triangle}{ABC})}{S(\overset{\triangle}{AMH})} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} BC \times \cancel{AH}}{\cancel{\frac{1}{2}} HM \times \cancel{AH}} = \frac{BC}{HM} = \frac{7x}{\frac{x}{2}} = 14$$

در شکل مقابل، ارتفاع هر دو مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است، اندازه x کدام است؟

۱) ۱/۴۴   ۲) ۱/۵۶

۳) ۱/۶۴   ۴) ۱/۹۶



$AB^2 = BH \times BC$

$5h = 3 \times 4 \Rightarrow h = \frac{12}{5}$

$\left(\frac{12}{5}\right)^2 = x \times 4 \Rightarrow \frac{144}{25} = 4x$

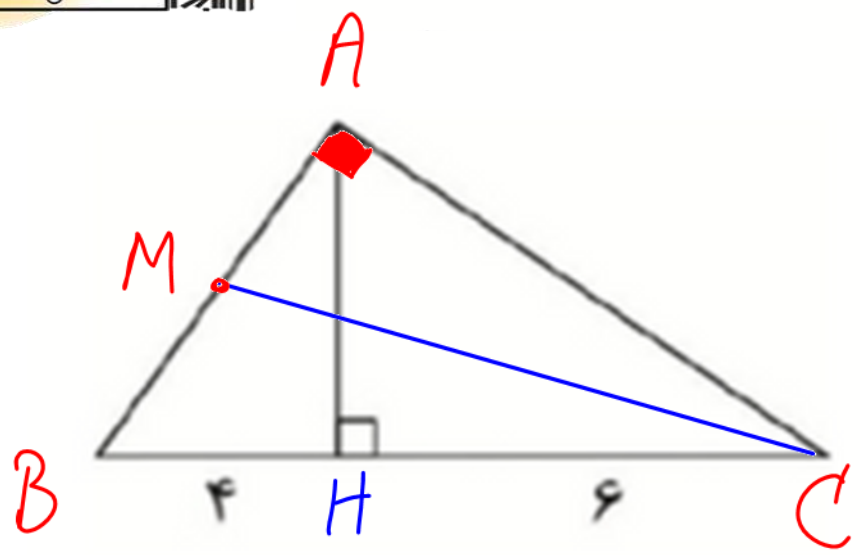
$\Rightarrow x = \frac{144}{4 \times 25} = \frac{144}{100} = 1/44$

دکتر مهدی یوسفی

در مثلث قائم‌الزاویه مقابل، اندازه بزرگ‌ترین میانه کدام است؟

۱) $\sqrt{50}$ ۲) $\sqrt{65}$

۳) $\sqrt{70}$ ۴) $\sqrt{75}$



وارد بر کوچکترین ضلع مثلث است

$CM = ?$

$AC^2 = HC \times BC = 6 \times 10 = 60$

$AB^2 = BH \times BC = 4 \times 10 \Rightarrow AB = 2\sqrt{10}$

$AM = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$

$$\overset{\triangle}{AMC}: \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow CM = \sqrt{\underbrace{AC^2}_{60} + \underbrace{AM^2}_{\sqrt{10}^2}} = \sqrt{60+10} = \sqrt{70}$$

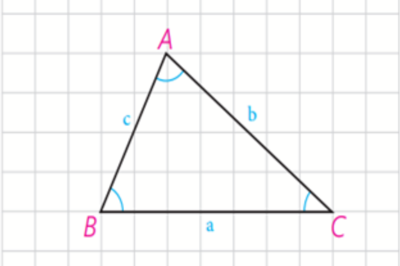
دکتر مهدی یوسفی

در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر $\frac{۱}{۵}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

در یک مستطیل به ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر، خطی بر آن قطر عمود می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک‌تر مستطیل را در M قطع کند. فاصله نقطه M از سر دیگر این قطر چند واحد است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۶

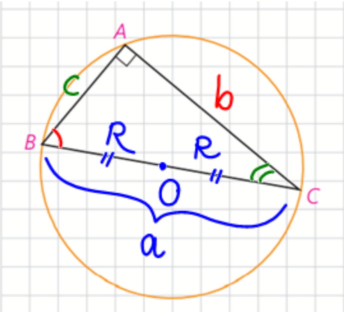


قضیهٔ سینوس‌ها: در مثلث ABC با اضلاع BC=a ، AC=b و AB=c داریم:

$$\frac{a}{\text{Sin}A}=\frac{b}{\text{Sin}B}=\frac{c}{\text{Sin}C}=2R$$

منفرجه الزاویه، حاده الزاویه، قائم الزاویه

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.



حالت اول) مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A}=90^\circ$) و دایره‌ی محیطی آن به مرکز O را در نظر می‌گیریم

$$\left.\begin{array}{l}\hat{BAC}=90^\circ\\ \text{(محاطی)}\ \hat{BAC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}=90^\circ \xrightarrow{\times 2} \overset{\frown}{BC}=180^\circ$$

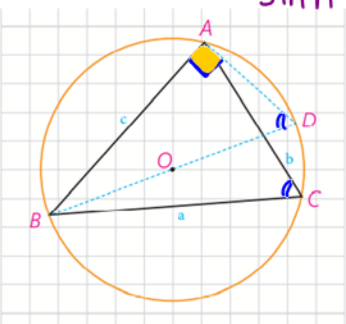
پس $\overset{\frown}{BC}$ در دایره شکل مقابل یک نیم‌دایره است پس BC قطر دایره‌ی محیطی است یعنی $\underset{a}{BC}=2R$ و مرکز دایره‌ی محیطی وسط ضلع BC (وتر مثلث) است.

$$\sin\hat{B}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{b}{2R}\Rightarrow\frac{b}{\sin\hat{B}}=2R$$

$$\sin\hat{C}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{c}{2R}\Rightarrow\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$$

$$\sin\hat{A}=\sin 90^\circ=1=\frac{a}{a}=\frac{a}{2R}\longrightarrow\frac{a}{\sin\hat{A}}=2R$$

⇒ (حکم)



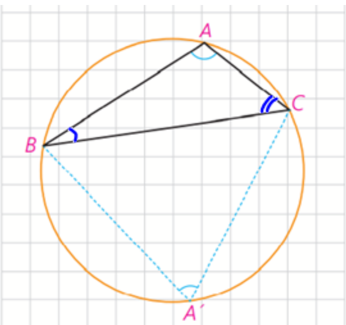
حالت دوم) مثلث حاده الزاویه ABC و دایره‌ی محیطی آن به مرکز O و شعاع R را در نظر می‌گیریم، قطر BD را رسم کرده و D را به A وصل می‌کنیم

$$\left.\begin{array}{l}\text{(محاطی)}\ \hat{D}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}\\ \text{(محاطی)}\ \hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{C}=\hat{D}\Rightarrow \sin\hat{C}=\sin\hat{D}\ (*)$$

BD قطر دایره است $\Rightarrow \overset{\frown}{BCD}=180^\circ \xrightarrow{\text{(محاطی)}\ \hat{BAD}=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}} \hat{BAD}=90^\circ \Rightarrow$ $\hat{BAD}$ قائم الزاویه است

با توجه به اثبات حالت اول $\longrightarrow \frac{AB}{\sin\hat{D}}=2R \xrightarrow{(*)} \frac{AB}{\sin\hat{C}}=2R$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که: $\frac{AC}{\sin\hat{B}}=2R$ ، $\frac{BC}{\sin\hat{A}}=2R$.



حالت سوم) مثلث منفرجه الزاویه ABC و دایره‌ی محیطی آن را در نظر می‌گیریم ($\hat{A}>90^\circ$)، نقطه‌ی دلخواه A' را روی $\overset{\frown}{BC}$ اختیار می‌کنیم و آن را به نقاط B و C وصل می‌کنیم در این صورت $\boxed{ABA'C}$ یک چهارضلعی محاطی می‌شود، در نتیجه

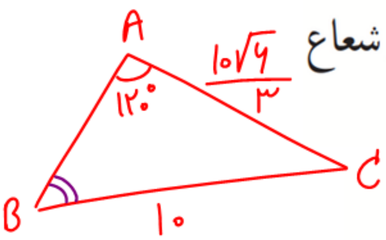
$$\hat{A}+\hat{A}'=180^\circ\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sin\hat{A}=\sin\hat{A}'\ (*)\\ (\text{منفرجه است}\ \hat{A})\Rightarrow(\text{حاده است}\ \hat{A}')\Rightarrow\frac{BC}{\sin\hat{A}'}=2R\end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{(*)}\frac{BC}{\sin\hat{A}}=2R.$$

نتیجه

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازهٔ هر ...ضلع... به ...سینوس... زاویهٔ روبه‌رو به آن برابر است با ...قطر دایرهٔ محیطی مثلث.

$$\frac{BC}{\sin\hat{A}}=\frac{AB}{\sin\hat{C}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}}=2R$$



مثال ۱ : در مثلث ABC، $BC=10\,cm$ و $\hat{A}=120^\circ$ و $AC=\frac{10\sqrt{6}}{3}$ مقدار شعاع دایرهٔ محیطی مثلث و اندازه زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را به‌دست آورید.

$R=?$?

حل : به کمک قضیهٔ سینوس‌ها می‌توان نوشت :

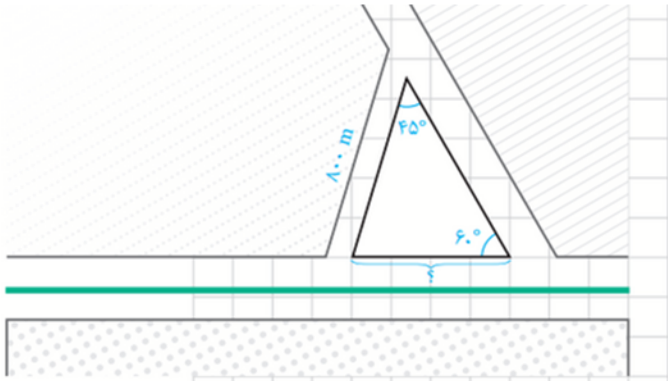
$$\frac{a}{\sin A}=2R \Rightarrow \frac{10}{\sin 120^\circ}=2R \text{ و } \sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

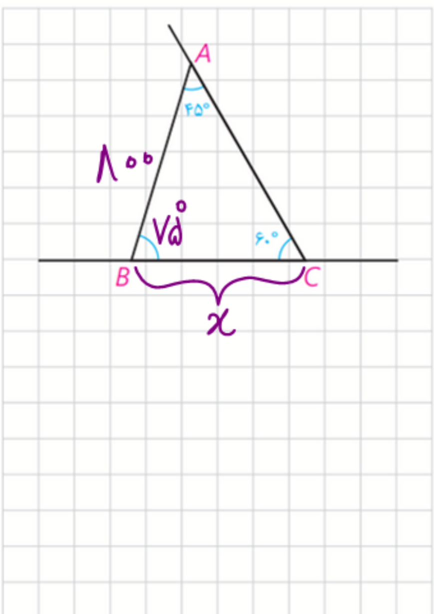
$$\Rightarrow 2R=\frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{و} \quad \boxed{R=\frac{10\sqrt{3}}{3}}$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R \Rightarrow \frac{\frac{10\sqrt{6}}{3}}{\sin B}=\frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin B=\frac{10\sqrt{6}}{20\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow B=45^\circ \text{ یا } \cancel{135^\circ} \text{ و } \underbrace{\hat{A}=120^\circ}_{\text{منفرجه}} \Rightarrow \boxed{\hat{B}=45^\circ} \Rightarrow \boxed{\hat{C}=15^\circ}$$

مثال ۲ : از یک بلوار افقی، یک خیابان فرعی باریک با زاویهٔ 60° جدا شده است. اکنون شهرداری منطقه می‌خواهد یک خیابان فرعی دیگر به طول ۸۰۰ متر بنا کند تا با زاویهٔ 45° از خیابان فرعی اول جدا، و به بلوار منتهی شود. این خیابان از چه فاصله‌ای از رأس زاویهٔ 60° باید شروع شود و با بلوار چه زاویه‌ای می‌سازد؟





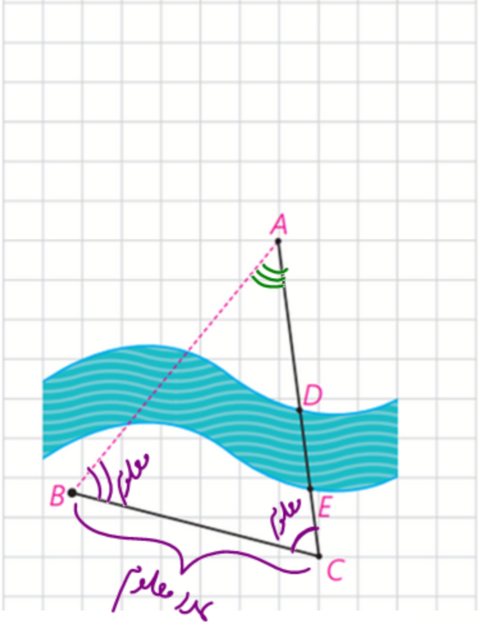
حل : با یک شکل مناسب مسئله را مدل‌سازی می‌کنیم. اولاً با توجه به مجموع اندازه‌های زوایای داخلی مثلث، روشن است که $\hat{B}=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$ ؛ یعنی خیابان فرعی باید با زاویهٔ 75° از بلوار جدا شود. ثانیاً به کمک قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC داریم :

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{800}{\underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}}=\frac{BC}{\underbrace{\sin 45^\circ}_{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}} \Rightarrow BC=\frac{800\times\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}=$$

$$\frac{800\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{800\sqrt{6}}{3}\approx 653/2\,m$$

یعنی خیابان فرعی را باید از فاصله تقریبی ۶۵۳/۲ متر با زاویهٔ 75° بنا کنیم.

کاردرکلاس



می‌خواهیم روی یک رودخانهٔ عمیق بین دو نقطهٔ A و B در دو طرف رودخانه، پلی بنا کنیم. برای محاسبات مربوط به احداث پل، باید فاصله ابتدا و انتهای آن (یعنی طول AB) را به‌دست بیاوریم؛ امّا امکان اندازه‌گیری مستقیم (به‌دلیل وجود رودخانه) وجود ندارد. برای این کار از نقطهٔ A در جهتی حرکت می‌کنیم تا با عبور از قسمت کم‌عمق رودخانه (DE) به نقطه C برسیم و طول BC را اندازه‌گیری می‌کنیم؛ سپس با زاویه‌یاب (تئودولیت) زاویهٔ دید AC از نقطهٔ B ($\hat{B}$) و زاویهٔ دید AB از C ($\hat{C}$) را اندازه می‌گیریم. به‌صورت زیر نشان دهید با داشتن طول BC و زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ می‌توان فاصلهٔ AB را به‌دست آورد:

مجهول

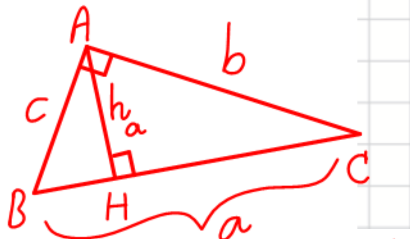
$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{BC}{\sin(180^\circ-(\hat{B}+\hat{C}))}=\frac{AB}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \boxed{AB=\frac{BC\times\sin\hat{C}}{\sin(\hat{B}+\hat{C})}}$$

اگر BC=۳km و $\hat{B}=70^\circ$ و $\hat{C}=60^\circ$ به کمک ماشین حساب طول AB را به‌دست آورید.

$$AB=\frac{3\times\sin 60^\circ}{\sin(70^\circ+60^\circ)}=\frac{3\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin 130^\circ}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sin 50^\circ}=?$$

تمرین

۱ــ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$) با ارتفاع $AH=h_a$ داریم:



$$\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$ (حکم

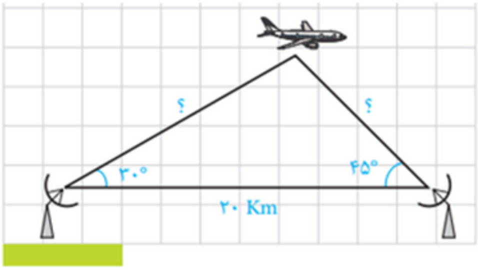
$S=\frac{1}{2}BC\times AH=\frac{1}{2}ah_a$

$S=\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{1}{2}bc$

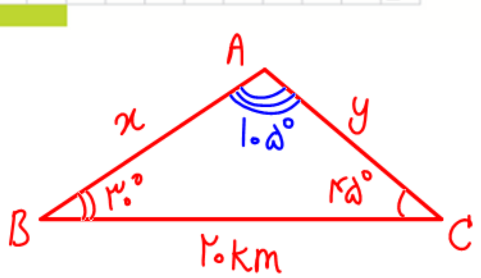
$\Rightarrow ah_a=bc \xrightarrow{\div a} \boxed{h_a=\frac{bc}{a}}$

طرف اول حکم $=\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{\frac{b^2c^2}{a^2}}=\frac{a^2}{b^2c^2}=\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}=\frac{\cancel{b^2}}{\cancel{b^2}c^2}+\frac{\cancel{c^2}}{b^2\cancel{c^2}}$

$=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=$ طرف دوم حکم



۲ــ دو ایستگاه رادار، که در فاصلهٔ ۲۰ کیلومتری از هم واقع‌اند، هواپیمایی را با زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده‌اند. فاصلهٔ هواپیما را از دو ایستگاه به‌دست آورید.



$\hat{A}=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=180^\circ-75^\circ=105^\circ$

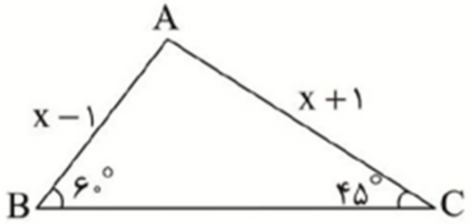
بنابر قضیه سینوس ها: $\frac{BC}{\sin\hat{A}}=\frac{AB}{\sin\hat{C}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}}$

$\Rightarrow \frac{20}{\sin 105^\circ}=\frac{x}{\sin 45^\circ}=\frac{y}{\sin 30^\circ}$; $\sin 105^\circ = 0/966$ ، $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{20\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{0/966}\simeq 10/35\ km \\ y=\frac{\frac{1}{2}\times 20}{0/966}\simeq 14/64\ km \end{cases}$

دکتر مهدی یوسفی

در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟



۱) ۷

۲) $۵+۲\sqrt{۶}$

۳) ۲

۴) $۵-۲\sqrt{۶}$

در مثلث ABC اگر مجموع سینوس‌های زاویه‌های داخلی برابر $\frac{۳}{۲}$ و شعاع دایره محیطی آن برابر ۵ باشد، محیط مثلث کدام است؟

۱) ۱۰　　۲) ۱۲　　۳) ۱۵　　۴) ۱۷

دکتر مهدی یوسفی

در مثلث ABC با معلوم بودن ضلع $BC = ۳ + \sqrt{۳}$ و زاویه‌های $\hat{B} = ۶۰^\circ , \hat{C} = ۴۵^\circ$ انـدازه ضلع AC کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ حاصل عبارت $\dfrac{\cos\hat{B}+\cos\hat{C}+\cos\dfrac{\hat{B}+\hat{C}}{۲}}{\sin\hat{B}+\sin\hat{C}+\sin\dfrac{\hat{B}+\hat{C}}{۲}}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

قضیه‌ی سینوس‌ها

دکتر مهدی یوسفی

در مثلث ABC، $\hat{A} = ۶۰^\circ$ و $\hat{B} = ۱۰۵^\circ$ و $AB = ۴(\sqrt{۶} - \sqrt{۲})$ است. طول نیمساز داخلی زاویه A چقدر است؟

۱) ۶ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

در مثلثی داریم $a=6, a \neq b=c$ و شعاع دایره محیطی آن $2\sqrt{3}$ است، اندازه b کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) ۳ ۴) ۴

دکتر مهدی یوسفی

قضیه‌ی سینوس‌ها

دکتر مهدی یوسفی