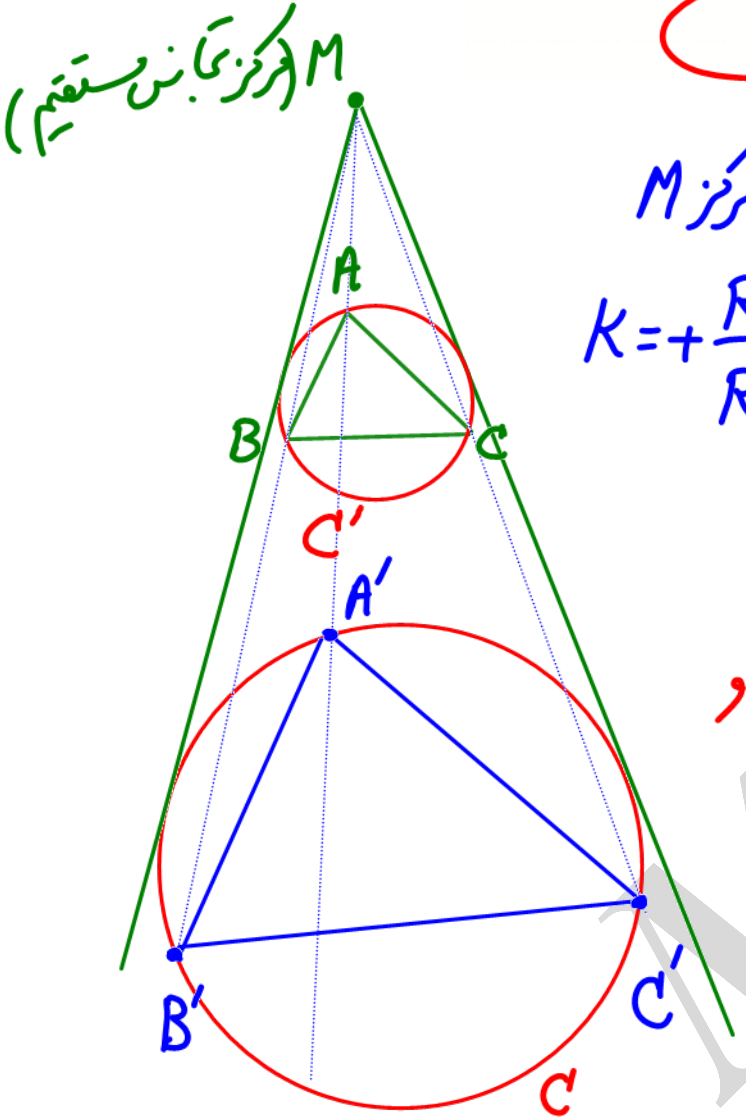
دایرهٔ C و مثلث ABC خارج آن مفروض‌اند. برای رسم مثلثی محاط در دایره که اضلاع آن با اضلاع مثلث ABC نظیر به نظیر موازی باشند، کدام تبدیل هندسی به‌کار می‌رود؟

۱) انتقال ۲) دوران ۳) بازتاب ۴) تجانس

$\underbrace{\text{نظیر به نظیر موازی}}_{\text{شیب خط را حفظ کند}}$



ابتدا دایره‌ی محیطی مثلث ABC را رسم کرده و آن را دایره‌ی C' می‌نامیم، در تجانس به مرکز M (M نقطه‌ی همرسی مماس مشترک های خارجی دو دایره و خط المرکزین) و نسبت $K=+\frac{R}{R'}$ تجانس $\overset{\triangle}{ABC}$ یعنی $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ جواب مسئله خواهد شد.

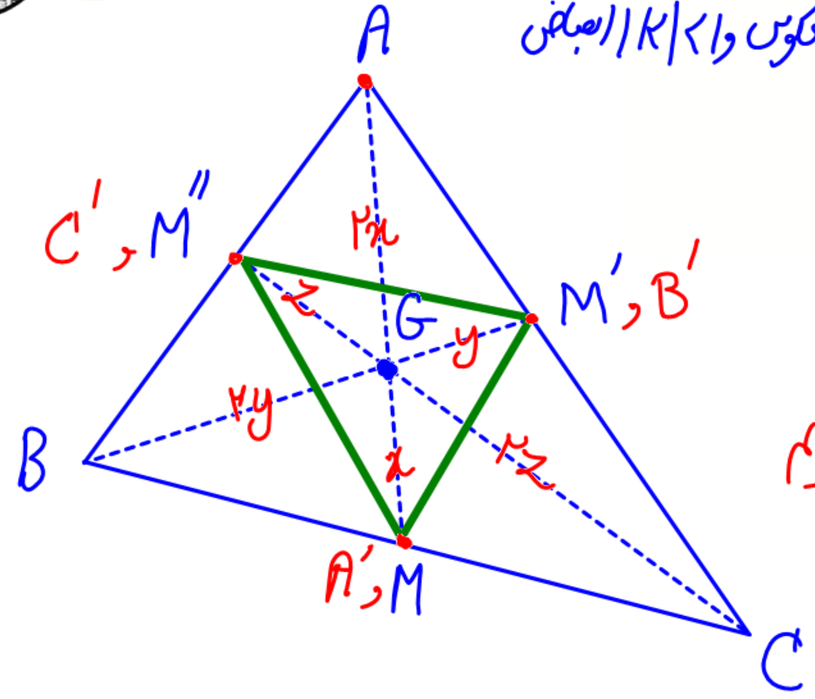
همچنین در تجانس به مرکز M' (M' نقطه‌ی همرسی مماس مشترک های داخلی و خط المرکزین دو دایره) و نسبت تجانس $K=-\frac{R}{R'}$ نیز مسئله را می‌توان حل کرد.

۴ـ فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K=-\frac{1}{2}$ باشد.

$K<0$ معکوس و $|K|<1$ انقباض

الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟

ب) مساحت مثلث $A'B'C'$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



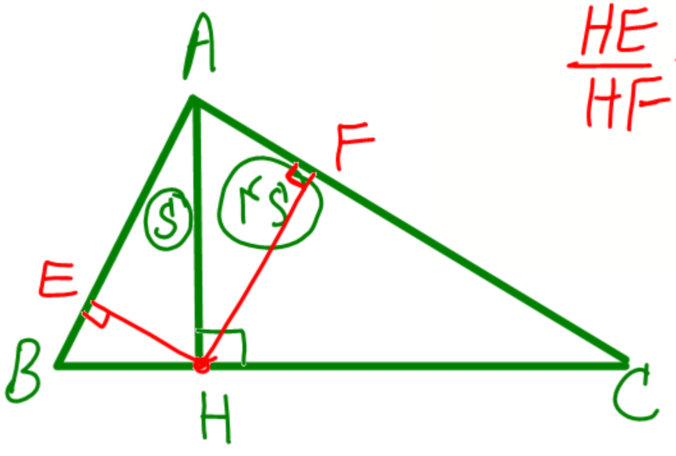
رأس A' وسط ضلع BC و رأس B' وسط ضلع AC و رأس C' وسط ضلع AB قرار دارد زیرا می‌دانیم از دبیرستان (نقطه‌ی همرسی میانه‌ها) هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند پس $AG=2x$ و $GM=x$ پس مجانس نقطه‌ی A یعنی نقطه‌ی A' با توجه به شکل به مرکز G با نسبت $K=-\frac{1}{2}$ دقیقاً روی نقطه M تشکیل می‌شود.

$\overset{\triangle}{A'B'C'}$ مجانس $\overset{\triangle}{ABC}$ در تجانس به مرکز G و نسبت $K=-\frac{1}{2}$ است پس این دو مثلث با نسبت $K=|-\frac{1}{2}|$ متشابه هستند.

$$\overset{\triangle}{ABC} \xrightarrow{K=\frac{1}{2}} \overset{\triangle}{A'B'C'} \Rightarrow \frac{S(\overset{\triangle}{A'B'C'})}{S(\overset{\triangle}{ABC})} = K^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر $\frac{۱}{۵}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$



$$\frac{HE}{HF} = ?$$

$$\frac{1}{4} = \frac{S(\overset{\triangle}{ABH})}{S(\overset{\triangle}{AHC})} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} AB \times HE}{\cancel{\frac{1}{2}} AC \times HF} = \underbrace{\frac{AB}{AC}}_{?} \times \frac{HE}{HF}$$

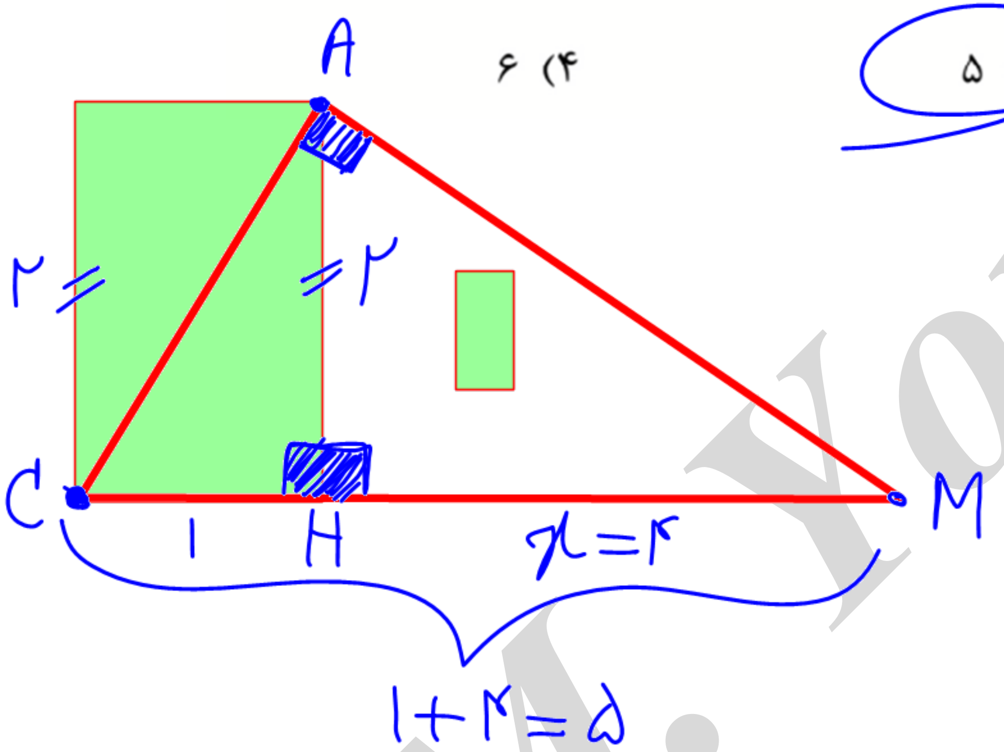
$$\frac{1}{4} = \frac{S(\overset{\triangle}{ABH})}{S(\overset{\triangle}{AHC})} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} BH \times \cancel{AH}}{\cancel{\frac{1}{2}} HC \times \cancel{AH}} = \frac{BH}{HC} \Rightarrow \boxed{\frac{BH}{HC} = \frac{1}{4}}$$

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH \times \cancel{BC}}{HC \times \cancel{BC}} = \frac{BH}{HC} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{جذر}} \boxed{\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{HE}{HF} \xrightarrow{\times 2} \frac{HE}{HF} = \frac{1}{2}$$

در یک مستطیل به ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر، خطی بر آن قطر عمود می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک‌تر مستطیل را در M قطع کند. فاصله نقطه M از سر دیگر این قطر چند واحد است؟

۱) ۴   ۲) ۴/۵   ۳) ۵   ۴) ۶



$$AH^2 = CH \times HM$$

$$2^2 = 1 \times x \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

$$CM = 1 + 4 = 5$$

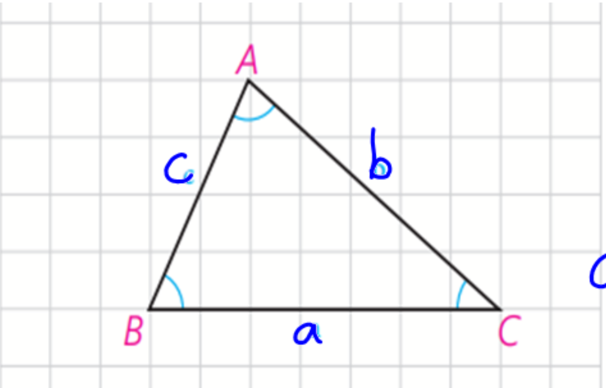
قضیهٔ سینوس‌ها: در مثلث ABC با اضلاع BC=a ، AC=b و AB=c داریم:

قائم الزاویه — حاده الزاویه — منفرجه الزاویه

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

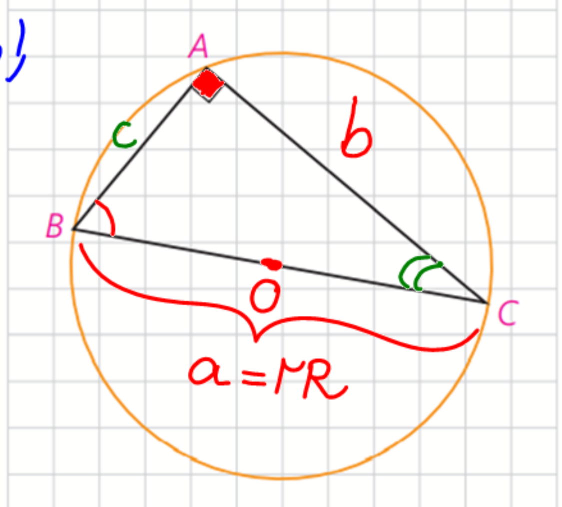
دایره‌ای است که از هر سه رأس مثلث می‌گذرد.



حالت اول) مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A}=90^\circ$) و دایره‌ی محیطی آن با شعاع R و مرکز O را در نظر می‌گیریم

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{BAC}=90^\circ\\ \text{(محاطی)}\ \widehat{BAC}=\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}=90^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=180^\circ$$

پس $\overset{\frown}{BC}$ در شکل مقابل یک نیم‌دایره است بنابراین BC قطر دایره است لذا $\boxed{BC=2R}$ و مرکز دایره‌ی محیطی یعنی نقطه‌ی O وسط ضلع BC است.



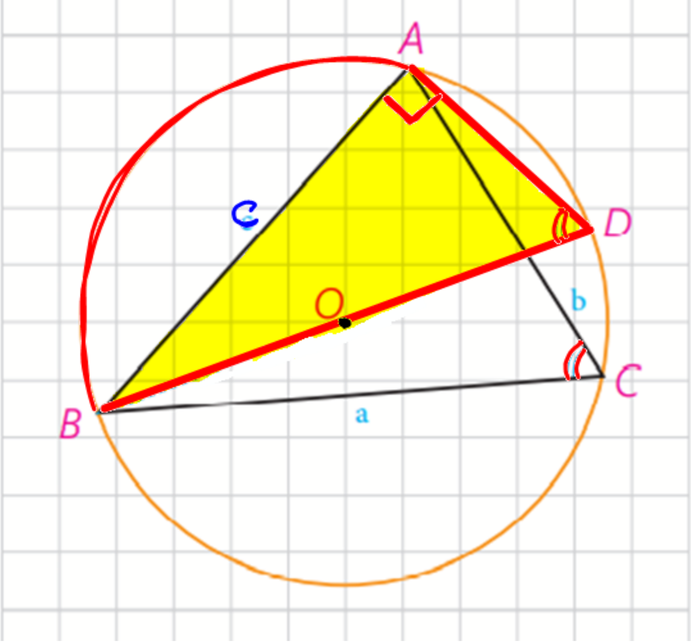
$$\sin\hat{B}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{2R}\Rightarrow\frac{b}{\sin\hat{B}}=2R$$

$$\sin\hat{C}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{2R}\Rightarrow\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$$

$$\hat{A}=90^\circ\Rightarrow 1=\sin\hat{A}=\frac{a}{a}=\frac{a}{2R}\Rightarrow\frac{a}{\sin\hat{A}}=2R$$

$$\Rightarrow\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R.$$

حالت دوم) مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC و دایره‌ی محیطی آن به مرکز O و شعاع R را در نظر می‌گیریم. ابتدا قطر BD را رسم می‌کنیم سپس D را به A وصل می‌کنیم



$$\left.\begin{array}{l}(\text{محاطی})\ \hat{D}=\dfrac{\widehat{AB}}{2}\\ (\text{محاطی})\ \hat{C}=\dfrac{\widehat{AB}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}=\hat{D} \Rightarrow \sin\hat{C}=\sin\hat{D} \quad (1)$$

$$(\text{محاطی})\ B\hat{A}D=\frac{\widehat{BCD}}{2}\ \underset{\text{قطر دایره است } BD}{=}\ \frac{180^\circ}{2}=90^\circ$$

پس $\overset{\triangle}{BAD}$ یک مثلث قائم‌الزاویه است، لذا

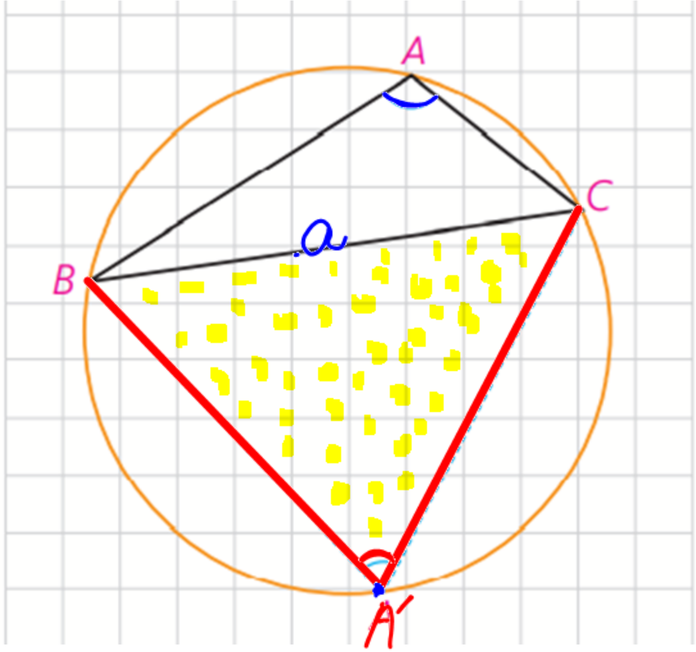
$$\sin\hat{D}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{AB}{BD}=\frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\sin\hat{D}}=2R$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$$

به همین ترتیب به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=2R.$$

حالت سوم) مثلث منفرجه‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A}>90^\circ)$ و دایره‌ی محیطی آن به مرکز O و شعاع R را در نظر می‌گیریم،
از نقطه‌ی دلخواه A' روی کمان BC به دو رأس B و C وصل می‌کنیم تا چهارضلعی محاطی $ABA'C$ تشکیل شود، در این چهارضلعی داریم:



$$\hat{A}+\hat{A}'=180^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin\hat{A}=\sin\hat{A}' \quad (1) \\ \hat{A}\ \text{منفرجه است}\ (\hat{A}>90^\circ) \Rightarrow \hat{A}'\ \text{حاده است}\ (\hat{A}'<90^\circ) \end{cases}$$

پس $\overset{\triangle}{A'BC}$ حاده‌الزاویه است، از برقراری قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث حاده‌الزاویه داریم:

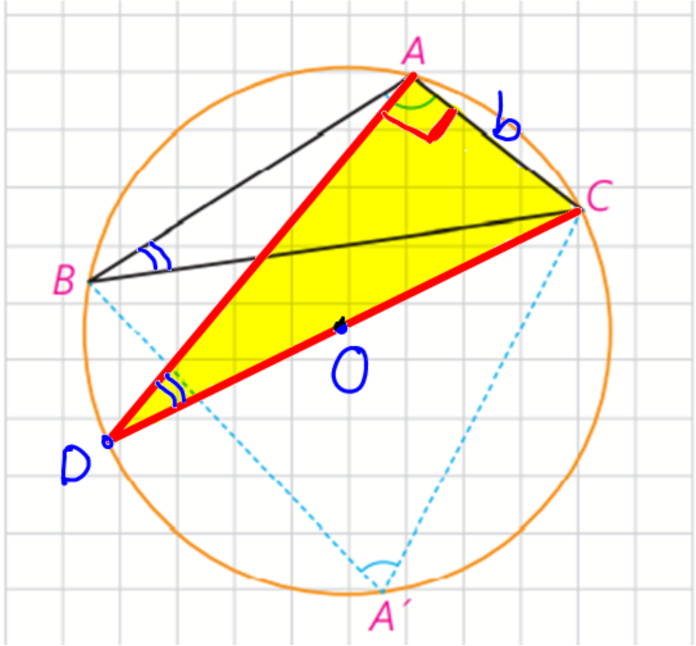
$$\frac{BC}{\sin\hat{A}'}=2R \xrightarrow[(1)]{BC=a} \boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}}=2R}$$

در ادامه ثابت می‌کنیم $\frac{b}{\sin\hat{B}}=2R$ و $\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$.

در ادامه قطر $C'D$ را رسم کرده و D را به A وصل می‌کنیم در این صورت

(محاطی) $D\hat{A}C' = \frac{\overset{\frown}{DA'C'}}{2} \underline{\underline{\text{قطر دایره است } C'D}} \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

پس $\overset{\triangle}{DAC'}$ قائم‌الزاویه است.



(محاطی) $\hat{B} = \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \Rightarrow \sin\hat{B} = \sin\hat{D}$ ①

$\sin\hat{D} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{C'D} = \frac{b}{2R} \Rightarrow \frac{b}{\sin\hat{D}} = 2R$

$\xrightarrow{①} \boxed{\frac{b}{\sin\hat{B}} = 2R}$

به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که $\frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$.

قضیه‌ی سینوس‌ها

دکتر مهدی یوسفی

نتیجه

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازهٔ هر ......ضلع.... به ....سینوس....زاویهٔ روبه‌رو به آن برابر است با ....قطر دایرهٔ محیطی آن مثلث.

$$\boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R}$$

مثال ۱ : در مثلث ABC، $\boxed{BC=10\,cm \text{ و } \hat{A}=120^\circ}$ و $\boxed{AC=\frac{10\sqrt{6}}{3}}$ مقدار شعاع دایرهٔ محیطی مثلث و اندازه زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را به‌دست آورید.

b

$R=?$

بنا بر قضیه‌ی سینوس ها داریم:

$$\frac{BC}{\sin\hat{A}}=2R \Rightarrow 2R=\frac{10}{\underbrace{\sin 120^\circ}_{\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}}} \Rightarrow R\sqrt{3}=10 \Rightarrow R=\frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{R=\frac{10\sqrt{3}}{3}}$$

$$\frac{AC}{\sin\hat{B}}=2R \Rightarrow \frac{\frac{10\sqrt{6}}{3}}{\sin\hat{B}}=\frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin\hat{B}=\frac{10\sqrt{6}}{20\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

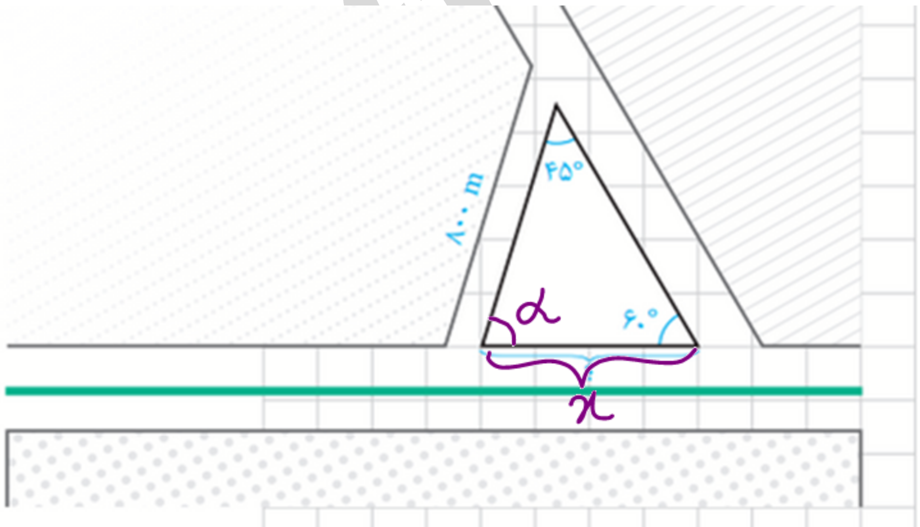
$\boxed{\hat{B}=45^\circ}$

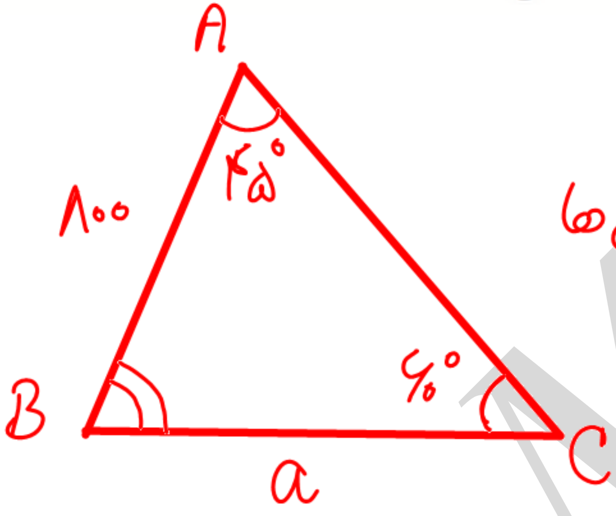
یا

$\hat{B}=135^\circ$ (غ ق ق)

$$\hat{C}=180^\circ-(120^\circ+45^\circ)=15^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{C}=15^\circ}$$

مثال ۲ : از یک بلوار افقی، یک خیابان فرعی باریک با زاویهٔ 60° جدا شده است. اکنون شهرداری منطقه می‌خواهد یک خیابان فرعی دیگر به طول ۸۰۰ متر بنا کند تا با زاویهٔ 45° از خیابان فرعی اول جدا، و به بلوار منتهی شود. این خیابان از چه فاصله‌ای از رأس زاویهٔ 60° باید شروع شود و با بلوار چه زاویه‌ای می‌سازد؟





$$\hat{B} = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

بنابر قضیه‌ی سینوس‌ها: $\frac{BC}{\sin\hat{A}} = \frac{AB}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{a}{\underbrace{\sin 45^\circ}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{800}{\underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

$$\Rightarrow a = \frac{800\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{800\sqrt{6}}{3} \simeq 653/2\,m$$

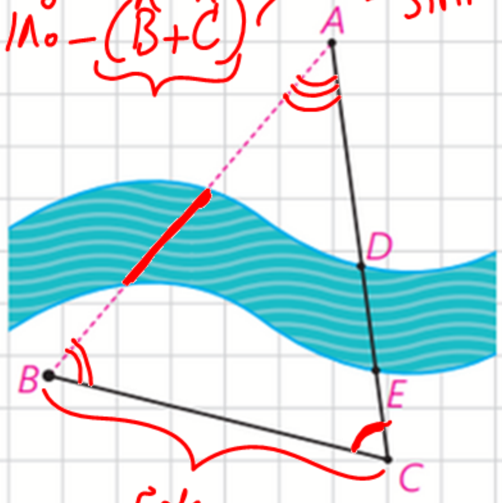
کار در کلاس

می‌خواهیم روی یک رودخانهٔ عمیق بین دو نقطهٔ A و B در دو طرف رودخانه، پلی بنا کنیم. برای محاسبات مربوط به احداث پل، باید فاصله ابتدا و انتهای آن (یعنی طول AB) را به‌دست بیاوریم؛ امّا امکان اندازه‌گیری مستقیم (به‌دلیل وجود رودخانه) وجود ندارد. برای این کار از نقطهٔ A در جهتی حرکت می‌کنیم تا با عبور از قسمت کم‌عمق رودخانه (DE) به نقطه C برسیم و طول BC را اندازه‌گیری می‌کنیم؛ سپس با زاویه‌یاب (تئودولیت) زاویهٔ دید AC از نقطهٔ B ($\hat{B}$) و زاویهٔ دید AB از C ($\hat{C}$) را اندازه می‌گیریم. به‌صورت زیر نشان دهید با داشتن طول BC و زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ می‌توان فاصلهٔ AB را به‌دست آورد:

BC معلوم ⇒ AB مجهول

$\hat{B}, \hat{C}$ معلومند

$\hat{A} = 180^\circ - \underbrace{(\hat{B}+\hat{C})}$ $\Rightarrow \sin\hat{A} = \sin(\hat{B}+\hat{C})$



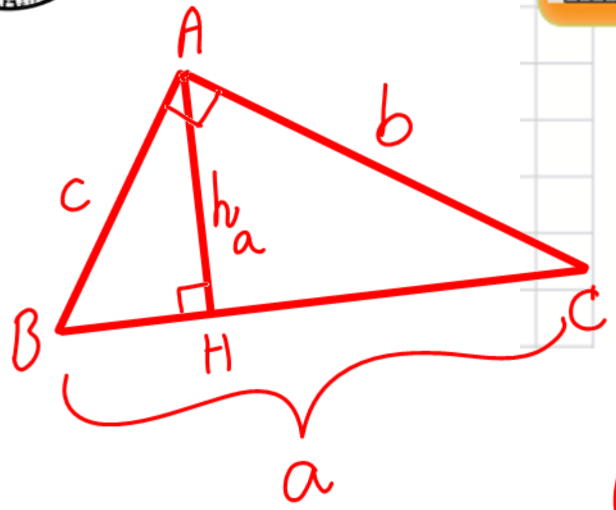
$$\frac{BC}{\sin\hat{A}} = \frac{AB}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{BC}{\underbrace{\sin(180^\circ-(\hat{B}+\hat{C}))}_{\sin(\hat{B}+\hat{C})}} = \frac{AB}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \boxed{AB = \frac{BC\times\sin\hat{C}}{\sin(\hat{B}+\hat{C})}}$$

اگر BC=۳km و $\hat{B}=70^\circ$ و $\hat{C}=60^\circ$ به کمک ماشین حساب طول AB را به‌دست آورید.

$$AB = \frac{3\times\overbrace{\sin 60^\circ}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sin 130^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sin 50^\circ} \simeq ?$$

تمرین

۱ـ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$) با ارتفاع $AH=h_a$ داریم :



$$\boxed{\text{حکم} \quad \frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

$\hat{A}=90^\circ \Rightarrow a^2=b^2+c^2$

می‌دانیم: $BC\times AH=AB\times AC \Rightarrow a\times h_a=bc \Rightarrow \boxed{h_a=\frac{bc}{a}}$

طرف اول $=\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{\left(\frac{bc}{a}\right)^2}=\frac{1}{\frac{b^2c^2}{a^2}}=\frac{a^2}{b^2c^2}=\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}$

تفکیک کسر

$\frac{\cancel{b^2}}{\cancel{b^2}c^2}+\frac{\cancel{c^2}}{b^2\cancel{c^2}}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}=$ طرف دوم حکم .

قضیه‌ی سینوس‌ها

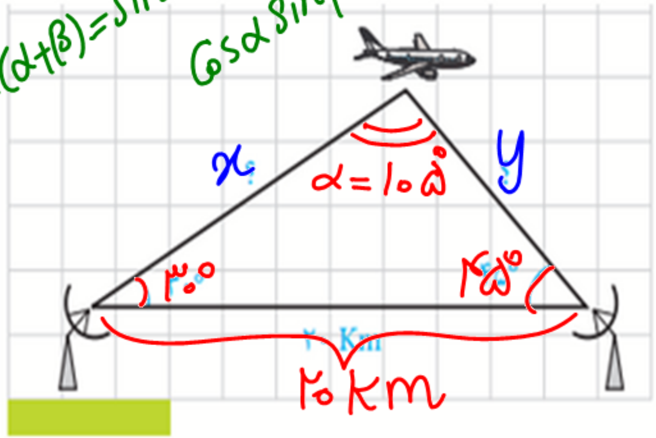
دکتر مهدی یوسفی

$$\alpha = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

$$\boxed{\sin 105^\circ = \sin 75^\circ} = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} \approx 0.966$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$



۲ـ دو ایستگاه رادار، که در فاصلهٔ ۲۰ کیلومتری از هم واقع‌اند، هواپیمایی را با زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده‌اند. فاصلهٔ هواپیما را از دو ایستگاه به‌دست آورید.

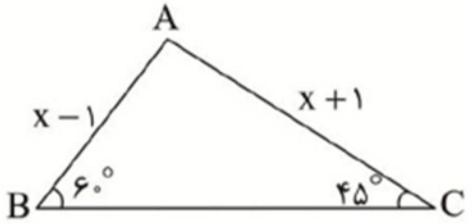
$$\frac{x}{\underbrace{\sin 45^\circ}_{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}} = \frac{20}{\underbrace{\sin 105^\circ}_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\cancel{4}\,2}}} \Rightarrow x = \frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{40\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}(1+\sqrt{3})} = \frac{40}{\sqrt{3}+1} = \frac{\cancel{40}^{\,20}(\sqrt{3}-1)}{\underbrace{3-1}_{\cancel{2}}} = 20(\sqrt{3}-1) \approx 14.64$$

$$\frac{20(\sqrt{3}-1)}{\underbrace{\sin 45^\circ}_{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}} = \frac{y}{\underbrace{\sin 30^\circ}_{\frac{1}{\cancel{2}}}} \Rightarrow y = \frac{20(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}} = 10(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \approx 10.35$$

قضیه‌ی سینوس‌ها

دکتر مهدی یوسفی

در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟



۱) ۷

۲) $۵+۲\sqrt{۶}$

۳) ۲

۴) $۵-۲\sqrt{۶}$

$$\frac{x-1}{\underbrace{\sin 45^\circ}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\frac{x+1}{\underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}} \Rightarrow x\sqrt{3}-\sqrt{3}=x\sqrt{2}+\sqrt{2} \Rightarrow x(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{\underbrace{3-2}_{1}}$$

$$=3+2\sqrt{6}+2=5+2\sqrt{6}$$

قضیه‌ی سینوس‌ها

دکتر مهدی یوسفی

پویش علمی جهاد

در مثلث ABC اگر مجموع سینوس‌های زاویه‌های داخلی برابر $\frac{۳}{۲}$ و شعاع دایره محیطی آن برابر ۵ باشد، محیط مثلث کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

$$\begin{cases} \sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}=\frac{۳}{۲} \\ R=۵ \end{cases} \Rightarrow a+b+c=?$$

$$\underbrace{\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}}=۲R$$

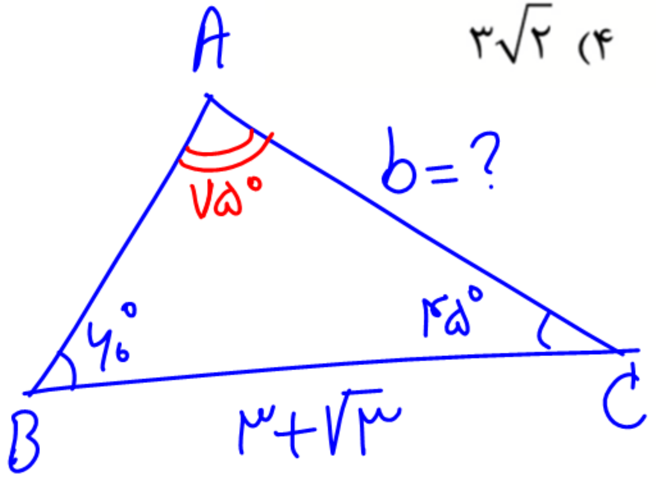
$$\frac{a+b+c}{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}=۲R \Rightarrow \frac{\text{محیط}}{\frac{۳}{۲}}=۱۰ \Rightarrow \text{محیط}=\frac{۳}{\cancel{۲}}\times\cancel{۱۰}^{۵}=۱۵$$

قضیه‌ی سینوس‌ها

دکتر مهدی یوسفی

در مثلث ABC با معلوم بودن ضلع $BC=3+\sqrt{3}$ و زاویه‌های $\hat{B}=60^\circ , \hat{C}=45^\circ$ اندازه ضلع AC کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{2}$



قضیه‌ی سینوس‌ها

دکتر مهدی یوسفی

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ حاصل عبارت $\dfrac{\cos\hat{B}+\cos\hat{C}+\cos\dfrac{\hat{B}+\hat{C}}{۲}}{\sin\hat{B}+\sin\hat{C}+\sin\dfrac{\hat{B}+\hat{C}}{۲}}$ کدام است؟

۱) ۰

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱

۴) ۲

دکتر مهدی یوسفی

در مثلث ABC، $\hat{A}=۶۰^\circ$ و $\hat{B}=۱۰۵^\circ$ و $AB=۴(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$ است. طول نیمساز داخلی زاویه A چقدر است؟

۱) ۶ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

در مثلثی داریم $a=۶, a \neq b=c$ و شعاع دایره محیطی آن $۲\sqrt{۳}$ است، اندازه b کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) ۳
۴) ۴

دکتر مهدی یوسفی

در یک طرف کوه

حمید و وحید در یک امتداد روی زمین دراز کشیده‌اند و به نوک یک کوه می‌نگرند. اگر یکی از آن‌ها قله کوه را در نقطه A با زاویه ۷۵ و دیگری در نقطه B با زاویه ۴۵ درجه ببینند و ارتفاع کوه برابر ۳/۸ کیلومتر باشد، فاصله آن دو از هم چند کیلومتر است؟ $(\sin 75^\circ \simeq 0/95)$

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

آنتنی روی زمین به‌صورت عمودی قرارگرفته است. اگر طول قسمت بیرون زمین آنتن ۱/۳ متر باشد و قسمت انتهای میله با نقطه A در داخل زمین زاویه ۵۳ درجه و قسمت ابتدایی بیرون زمین آنتن با آن نقطه زاویه ۳۰ درجه بسازد، طول آنتن کدام است؟

$(\sin 37^\circ \simeq 0/6, \sin 23^\circ \simeq 0/39)$

۱) ۲/۱ ۲) ۲/۲ ۳) ۲/۳ ۴) ۲/۴

موشکی از نقطه A تحت زاویه ۴۵ درجه نسبت به سطح زمین و موشک دیگری از نقطه B تحت زاویه ۳۰ درجه نسبت به سطح زمین به‌طور مایل و روی خط راست پرتاب می‌شوند. اگر موشک اول بعد از طی ۱۰ کیلومتر به نقطه C برسد، موشک دوم پس از طی چند کیلومتر به نقطه C می‌رسد؟

۱) $۵\sqrt{۲}$ ۲) $۱۰\sqrt{۲}$ ۳) $۲۰\sqrt{۵}$ ۴) $۲۰\sqrt{۱۰}$

دکتر مهدی یوسفی