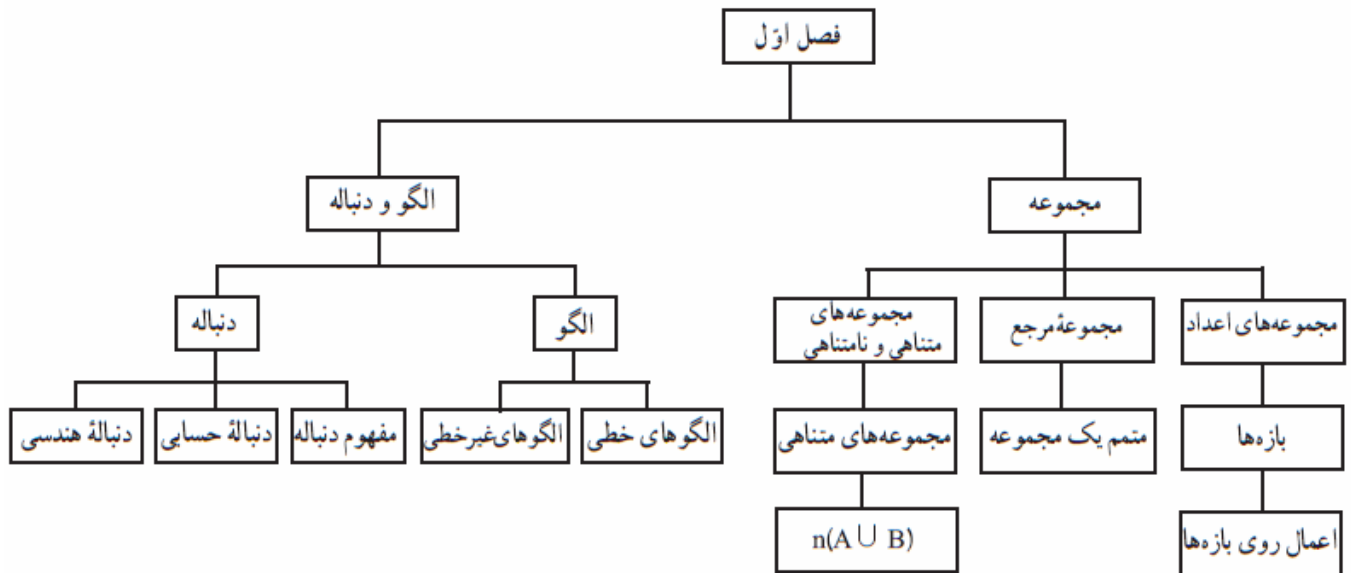




فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله





آشنایی با مجموعه‌ها

$\frac{1}{r} = 15$
 $\sqrt{r} = 1, 4, 1, \dots ?$
 $\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

مجموعه‌هایی که را در سال‌های قبل با آن آشنا شده‌اید با اعضا و یا به زبان ریاضی نمایش دهید.

مجموعه اعداد طبیعی = $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد حقیقی = $\mathbb{R} = \{\varphi, \varphi'\}$

مجموعه اعداد صحیح = $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 1, 2, \dots\}$

مجموعه اعداد طبیعی فرد = $O = \{1, 3, 5, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی = $\mathbb{W} = \{1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد طبیعی زوج = $E = \{2, 4, 6, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا = $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

مجموعه اعداد صحیح فرد = $\mathbb{Z}_o = \{1, 3, 5, \dots\}$

مجموعه اعداد گنگ = $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح زوج = $\mathbb{Z}_E = \{2, 4, 6, \dots\}$

اعمال جبری روی مجموعه‌ها

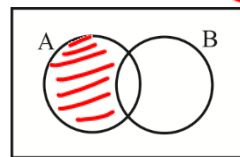
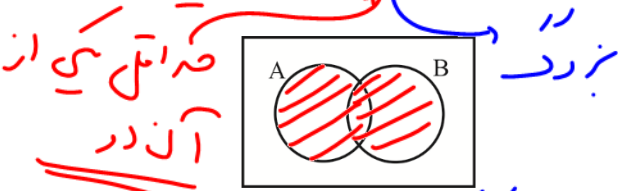
مثال ۱ طرف دوم هر یک از مجموعه‌های زیر را به زبان اعمال جبری روی مجموعه‌ها بنویسید و نمایش نمودار آن‌ها را

مثال ۱

کامل کنید.

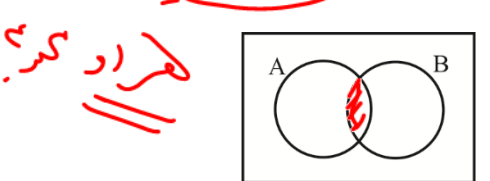
الف) $\{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\} = A \cup B$

پ) $\{x \mid x \in A, x \notin B\} = A - B = A \setminus B$



ب) $\{x \mid x \in A, x \in B\} = A \cap B$

ت) $\{x \mid x \in A \cup B, x \notin A \cap B\} = A \Delta B$



مثال ۲ حاصل هر یک از اعمال زیر را به دست آورید.

مثال ۲

۱) $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$

۲) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$

۳) $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{0, -1, -2, \dots\}$

۴) $\mathbb{Q}' - \mathbb{N} = \mathbb{Q}'$

۵) $\mathbb{W} - \mathbb{Q} = \emptyset$

۶) $\mathbb{W} - \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots\}$

۷) $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{0, -1, -2, \dots\}$

۸) $\mathbb{W} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$



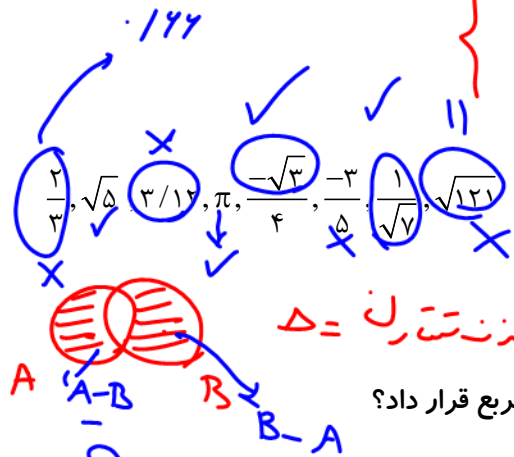
۱۰) $\mathbb{R} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

تدیس تند
 $\rightarrow \mathbb{Q}' \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

۱۱) $\mathbb{Q}' \cap \mathbb{Q} = \emptyset$

$A = \{ \frac{2}{3}, \sqrt{5} \} - B = \{ 5 \} = \{ 2 \}$
 $B - A = \{ \}$
 در بین اعداد زیر اعداد گنگ را مشخص کنید.

مثال ۳



عینیت
 عینیت
 تفاوت

صندتتارن = Δ

مثال ۴ کدام یک از علائم $\Delta, \cap, \cup, \notin, \in, \subseteq, \supseteq, \subset, \supset$ را می توان داخل هر مربع قرار داد؟

۱) $\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$

۲) $\mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$

۳) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

۴) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

۵) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

۶) $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$

۷) $(A \cup B) - (A \cap B) = A \Delta B$

۸) $(A - B) \cup (B - A) = A \Delta B$

$Z = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$
 $Z - A = \{ -2, -1 \} = A'$
 $A = \{ 0, 1, 2 \}$

مثال ۵ اگر $A = \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$ کدام یک درست و کدام نادرست است؟

۱) $\emptyset \in A$

۲) $\emptyset \text{ و } \{ \emptyset \} \in A$

۳) $\emptyset \in A$

۴) $\{ \emptyset \} \in A$

تعداد زیر مجموعه = 2^n
 $n = \text{تعداد اعضا}$
 $2^0 = 1$
 $A_1 = \emptyset$
 $A_2 = \{ \emptyset \}$
 $A_3 = \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$
 $A_4 = A$



تعریف بازه یا فاصله

همواره می‌توانیم محدوده یا فاصله بین دو عدد حقیقی a و b با شرط $a < b$ را به صورت نماد ریاضی یا نمایش

روی محور نشان داده بازه نامید. به بیان دیگر زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} مانند A که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد

مشخص a و b می‌باشند را بازه یا فاصله می‌نامیم. انواع بازه‌ها عبارتند از:

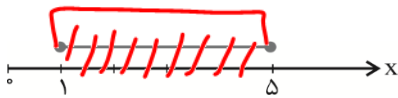
۱- بازه‌های بسته

به مجموعه اعداد حقیقی که در نامساوی $a \leq x \leq b$ قرار می‌گیرد فاصله یا بازه بسته می‌گوییم. دقت کنید که در این حالت

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

باید هر دو سر بازه عضوی از بازه باشند.

مثال ۶ $[1, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$



۲- بازه‌های باز

به مجموعه اعداد حقیقی که در نامساوی $a < x < b$ قرار می‌گیرند فاصله باز می‌گوییم و آن را به صورت (a, b) نشان

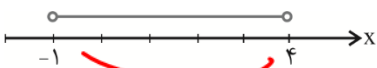
می‌دهیم. در این حالت نقاط ابتدای و انتهایی بازه عضو آن نمی‌باشند.

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



نویس
باز
(2, 4)
~~(2, 4)~~

مثال ۷ $(-1, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4\}$



$-\infty < x < +\infty$
 $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

$a < x < b \Rightarrow [a, b]$
 $a < x < b \Rightarrow (a, b)$
 $a \leq x < b \Rightarrow [a, b)$
 $a < x \leq b \Rightarrow (a, b]$

$x > a \Rightarrow [a, +\infty)$
 $x > a \Rightarrow (a, +\infty)$
 $x < b \Rightarrow (-\infty, b]$
 $x < b \Rightarrow (-\infty, b)$

مثال ۸ مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < \frac{x-1}{3} + 1 < 4\}$ را به صورت بازه نمایش داده و روی محور نشان دهید.

$2 < \frac{x-1}{3} + 1 < 4$
 $1 < \frac{x-1}{3} < 3$
 $3 < x-1 < 9$
 $4 < x < 10$
 $(4, 9)$

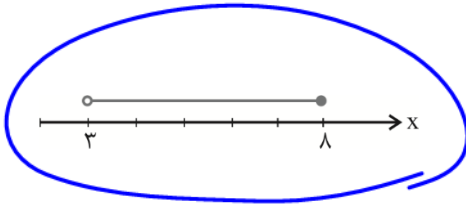


۳- بازه‌های نیمه باز (نیم بسته)

فقط یکی از دو سر بازه عضوی از بازه بوده و به یکی از دو حالت زیر می‌باشد:

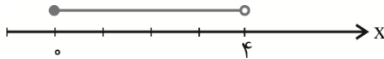
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \text{ (الف)}$$

$$(3, 8) = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 8\} \text{ مثال ۹}$$



$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \text{ (ب)}$$

$$[0, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 4\} \text{ مثال ۱۰}$$



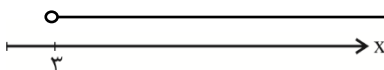
۴- بازه‌های بی کران

در این حالت بازه باید حداقل از یکی از دو طرف بی کران باشد.

$$(1) \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \text{ که از بالا بی کران است.}$$

$$(2) \quad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \text{ که از بالا بی کران است.}$$

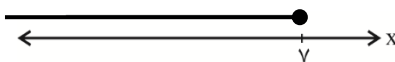
$$(3, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\} \text{ مثال ۱۱}$$



$$(3) \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \text{ که از پایین بی کران است.}$$

$$(4) \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

$$(-\infty, 7] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 7\} \text{ مثال ۱۲}$$



مثال ۱۳

مجموعه جواب نامعادله‌ها را به صورت بازه نمایش دهید.

الف) $2x - 1 \geq 0$

$\Rightarrow 2x \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$

ب) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} < 2x-1 \\ x - \frac{2x}{3} \geq x-1 \end{cases}$

$\xrightarrow{\times 2} x-1 < 4x-2 \Rightarrow x < -1$ $\Rightarrow x > \frac{1}{2}$

$\xrightarrow{\times 3} \frac{3x-2x}{3} \geq 3x-3 \Rightarrow \frac{x}{3} \geq 3x-3 \Rightarrow x \geq -9$ $\Rightarrow x < \frac{1}{2}$

نتیجه: $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3} \right)$

مثال ۱۴

نمایش هندسی هر یک از بازه‌های زیر را بر روی یک محور رسم و حاصل خواسته شده را تعیین کنید.

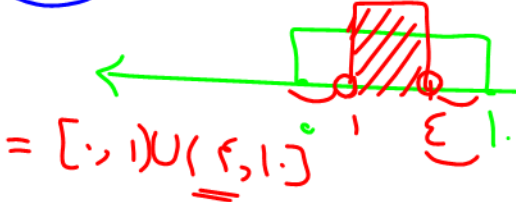
الف) $(-\infty, -1) \cup [-2, 0) = (-\infty, 0)$



ب) $(-1, 4) \cup [-1, 2) = (-1, 4)$



ج) $[0, 1) \cap [1, 4] = \emptyset$

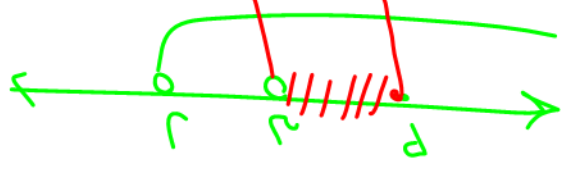


صفت اشتراک از مجموع اولی
توجه داشته باشید توی کجا

د) $(-3, 4) \cap [0, 4] = [0, 4)$



ه) $(2, +\infty) \cap (3, 5] = (3, 5]$

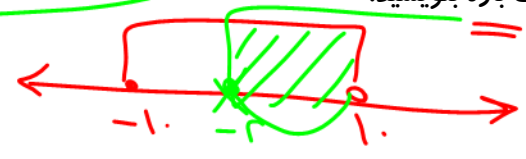


تذکره: برای تعیین اجتماع، اشتراک یا تفاضل بازه‌ها می‌توان از نمایش هندسی آن بازه‌ها بر روی محور اعداد حقیقی استفاده کرد.

مثال ۱۵ اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1\}$ و $C = \{x \in \mathbb{F} \mid x < 1\}$ حاصل هر یک از عبارات های زیر را به صورت بازه بنویسید.

طبیعی زوج

$C = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$



۱) $B \ominus A = [-1, -2)$

۲) $A \cap B = [-1, 1)$

۳) $B \cup C = B = [-1, 1)$

۴) $A \cup (B \cap C) = A \cup C = A = [-2, +\infty)$

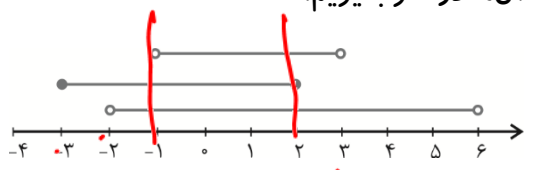
مثال ۱۶ اگر عبارت $\frac{-1-7x}{5}$ در بازه ی $(-\infty, 4]$ قرار گرفته باشد، حدود x را بنویسید.

$\left(\frac{-1-7x}{5} \leq 4\right) \Rightarrow -1-7x \leq 20 \Rightarrow 7x \geq -21 \Rightarrow x \geq -3$
 بازه: $[-3, +\infty)$

مثال ۱۷ اگر مجموعه $(2m-1, m+1)$ یک بازه باشد حدود m را بیابید.

بزرگتر < کوچکتر
 $2m-1 < m+1 \Rightarrow m < 2$
 $m=1$ بازه $(1, 2]$

مثال ۱۸ با توجه به شکل مقابل، اگر I_1 را اجتماع بازه ها و I_2 را اشتراک آن ها در نظر بگیریم.



$I_1 = \cup$
 $I_2 = \cap$

الف) I_1 و I_2 را به صورت بازه نمایش دهید و آن را بر روی محور نشان دهید.

$I_1 = \cup = [2, 6]$
 $I_2 = \cap = [-1, 3]$
 اشتراک: $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

ب) I_1 شامل چند عدد طبیعی و I_2 شامل چند عدد صحیح است؟



ج) $I_1 - I_2$ را به صورت بازه نمایش دهید و آن را بر روی محور نمایش دهید.
 $I_1 - I_2 = (-1, 2) \cup (3, 6)$



مثال ۱۹ درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را بررسی کنید.

۱) $\frac{5}{3} \in \left[\frac{2}{5}, 2 \right)$ ✓

۲) $1 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$ ✓

۳) $1 \in \{-1, 3\}$ ✗

۴) $\{2, 3\} \subseteq [1, 4]$ ✓

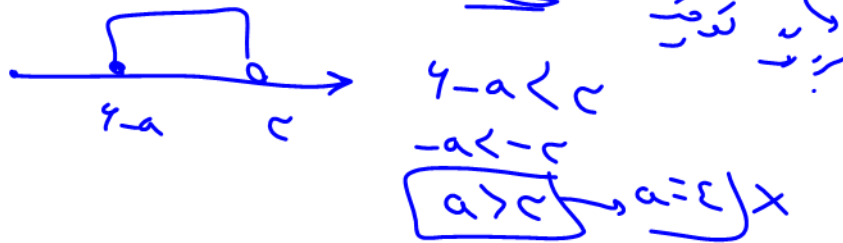
۵) $2-3 \in (-3, 0]$ ✗

۶) $4 \in \{-4, 5\}$ ✗

۷) $[-2, 2] \subseteq (-2, 2)$ ✗

۸) $[2, 5] = [2, 5)$ ✗

مثال ۲۰ بازه‌ی $(3 - a, 6]$ شامل دقیقه ۴ عدد صحیح است. حدود a را بیابید.



مثال ۲۱ حدود a را به نحوی بیابید تا $3 \notin (a-1, 2a+1]$.

$a-1 < 2a+1$
 $-a < 2$
 $a > -2$

عزیزه برتاری - تبارتاری

مجموعه‌ی متناهی و نامتناهی

مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی است را مجموعه متناهی می‌نامیم. در غیر این صورت مجموعه

را نامتناهی گوئیم. تعداد اعضای مجموعه‌های نامتناهی از هر عدد طبیعی که در نظر بگیریم بزرگ‌تر است. در واقع این

مجموعه‌ها بی‌نهایت عضو دارند.

$A = \{1, 2, 3\}$ $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

مثال ۲۲ سه مجموعه متناهی و سه مجموعه نامتناهی مثال بنویسید.

$B = \{ \dots, -2, -1, 0 \}$ $W = \{0, 1, 2, \dots\}$

مثال ۲۳ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد صحیح زوج $\{ \dots, -2, 0, 2, 4, \dots \}$

ب) مجموعه شماره‌های عدد ۲۴ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 24\}$



ن تنه

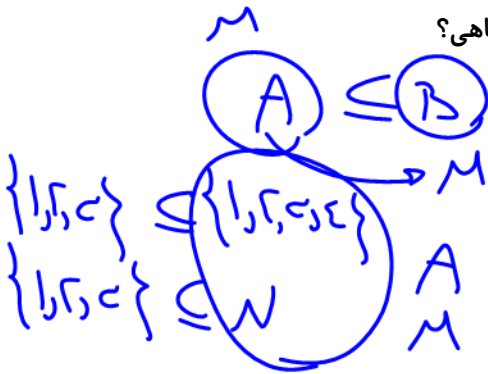
(ج) بازه $(\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$

ن تنه

(د) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 4\}$

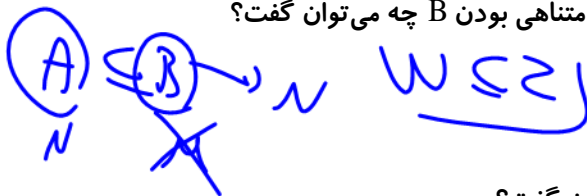
(ه) مجموعه مضارب طبیعی عدد ۱۰۰
 $\{100, 200, 300, \dots\}$

مثال ۲۴ الف) اگر $A \subseteq B$ بوده و B متناهی باشد، آنگاه A متناهی است یا نامتناهی؟



(ب) اگر $A \subseteq B$ و A متناهی باشد، در مورد B چه می توان گفت؟

(ج) اگر $A \subseteq B$ و A نامتناهی باشد در مورد متناهی یا نامتناهی بودن B چه می توان گفت؟



(د) اگر $A \subseteq B$ و B نامتناهی باشد در مورد A چه می توان گفت؟



مثال ۲۵ الف) اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، $A \cup B$ و $A - B$

$A = \{1\}$
 $B = \{2\}$

$A \cup B = \{1, 2\}$
 $A - B = \{1\}$

(ب) اگر A و B هر دو متناهی باشند، مجموعه های $A \cup B$ و $A - B$ و $A \cap B$

(ج) اگر A و B هر دو نامتناهی باشند، مجموعه $A \cup B$... ولی در مورد مجموعه های $A - B$ ، $A \cap B$ و $B - A$ و A' و B' و





الگوی مشخص و یا روش یکسان برای بیان ضابطه یک مجموعه به زبان ریاضی وجود ندارد و بستگی به خلاقیت،

هوش و ابتکار عمل دارد. در نوشتن بیان ریاضی مجموعه‌ها باید به مجموعه مرجع که معمولاً یکی از مجموعه‌های $\mathbb{W}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ است، توجه شود.



مثال ۲۶ اعضای هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

۱
A = $\{n^2 + 1 | n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 5, 10, 17, \dots\}$

B = $\{n^2 - n | n \in \mathbb{W}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

C = $\{n^2 + n | n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

D = $\left\{ \left(\frac{-1}{-1} \right)^{n+1} \frac{2n+2}{n^2+1} | n \in \mathbb{Z} \right\} = \{2, 1, \dots\}$

مثال ۲۷ هر یک از مجموعه‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

A = $\{0, 1, 3, 7, \dots\}$
 B = $\{9, 99, 999, 9999, \dots\}$
 C = $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \dots \right\}$
 D = $\left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \dots \right\}$

Handwritten solutions for Example 27:
 A: $\{2^n - 1 | n \in \mathbb{N}\}$
 B: $\{10^n - 1 | n \in \mathbb{N}\}$
 C: $\left\{ \frac{n}{n+1} | n \in \mathbb{N} \right\}$
 D: $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} | n \in \mathbb{N} \right\}$

مثال ۲۸ اعضای هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید و علت تفاوت عضوها را بیان کنید.

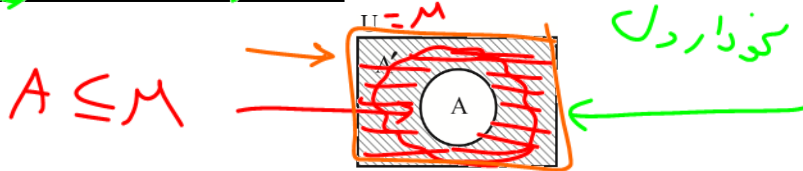
A = $\{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 2\} = (-1, 2)$ → نیست
 B = $\{x \in \mathbb{Z} | -1 < x < 2\} = \{0, 1\}$
 C = $\{x | x \in \mathbb{W}, -1 < x < 2\} = \{0, 1\}$
 D = $\{x | x \in \mathbb{N}, -1 < x < 2\} = \{1\}$ → نیست



مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه

تعریف متمم یک مجموعه: هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ آن گاه مجموعه $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U می‌باشد که در A نیستند.

$$A' = U - A = M - A = \{x \mid x \in M, x \notin A\}$$



مثال ۲۹

در هر یک از موارد زیر با توجه به مجموعه مرجع داده شده، متمم مجموعه را بیابید.

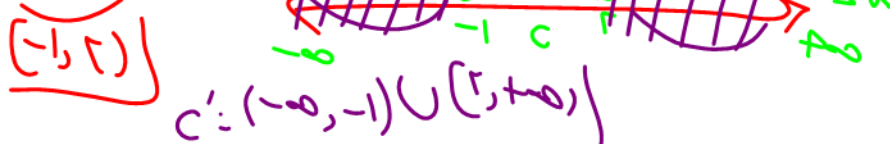
۱) $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $A = \{2, 3, 4\} \Rightarrow A' = ? = \{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = A'$

$A \cap A' = \emptyset$
 $A \cup A' = U$

۲) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 2\} \Rightarrow B' = ?$

$\mathbb{Z} = \text{مربع}$
 $B = \{-1, 0, 1\} \Rightarrow B' = \mathbb{Z} - B = \{\dots, -2, -3, \dots, 2, 3, \dots\}$

۳) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\} \Rightarrow C' = ?$



خواص اعمال جبری مجموعه‌ها

- ✓ ۱) $A \cup A = A$
- ✓ ۲) $A \cap A = A$
- ✓ ۳) $A \cup \emptyset = A$
- ✓ ۴) $A \cap \emptyset = \emptyset$ خاصیت جابه‌جایی: $A \cap B = B \cap A$
- ✓ ۵) $A \cup B = B \cup A$
- ✓ ۶) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ خاصیت شرکت‌پذیری:
- ✓ ۷) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ خاصیت توزیع‌پذیری یا پخش:
- ✓ ۸) $A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$
- ✓ ۹) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ قوانین دمورگان: $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- ✓ ۱۰) $A \cap (A \cup B) = A$
- ✓ ۱۱) $A \cup (A \cap B) = A$
- ✓ ۱۲) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

مثال ۳۰

طرف دوم تساوی‌های زیر را بیابید.

۱) $\emptyset' = M = \bar{U}$

۲) $(A')' = A$

۳) $U' = \emptyset$

۴) $A \cap A' = \emptyset$

۵) $A \cup A' = M$



۶) $A - A' = A$

۷) $A' - A = A'$

۸) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

۹) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

* ۱۰) $A \cap B' = A - B$

۱۱) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$

۱۲) $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$

تعریف عدد اصلی یا تعداد اعضای یک مجموعه

اگر A یک مجموعه متناهی باشد آنگاه تعداد اعضای مجموعه A یا همان عدد اصلی A را با علامت $n(A)$ یا $|A|$ نشان می‌دهیم.

تعداد اعضا

نشان می‌دهیم.

مثال ۳۱

عدد اصلی هر مجموعه را بیابید.

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 10\} \Rightarrow n(A) = ?$

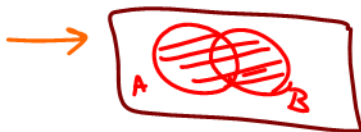
$A = \{1, 2, 3\}$

$n(A) = 3$

$B = \{ \text{مجموعه اعداد اول دو رقمی کمتر از } 50 \}$

$B = \{11, 13, 17, \dots\}$

$n(B) = \dots$



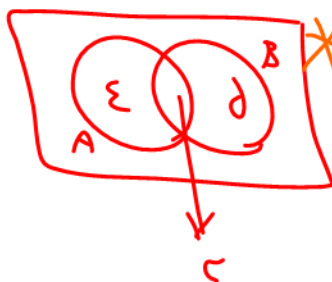
$n(A \cup B)$ و $n(A - B)$ را چگونه می‌توان توصیف کرد؟

مثال ۳۲

$n(A \cup B) = \text{تعداد اعضای } A \text{ و } B \text{ از درگیری}$
 $n(A \cap B) = \text{تعداد اعضای } A \text{ و } B \text{ اشتراکی}$

با فرض اینکه $n(A) = 7$ و $n(B) = 8$ و $n(A \cup B) = 12$. مطلوب است محاسبه $n(A \cap B)$.

مثال ۳۳



* $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ *
 $12 = 7 + 8 - x$
 $x = 3$

* $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 1$

مثال ۳۴ با فرض اینکه $n(U) = 100$ و $n(A) = 70$ و $n(B) = 50$ و $n(A \cap B) = 30$ باشد، حاصل هر یک از موارد

زیر را محاسبه کنید.

* $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 50 - 30 = 90$

* $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) = 40 + 30 + 20 = 90$

$A - B = A \cap B'$

(الف) $n(A \cup B)$ (ب) $n(B \cap A)$ (ج) $n(A' \cap B)$ (د) $n(A' \cap B')$

$n(A \cup B) = 40 + 30 + 20 = 90$

$n(A - B) = 40$ فقط A



$n(A \cap B) = 30$



$n(B - A) = 20$ فقط B

مثال ۳۵ در یک کلاس ۳۲ نفری، ۲۵ نفر به فوتبال و ۱۸ نفر به والیبال علاقمند هستند. در این کلاس چند نفر هم به

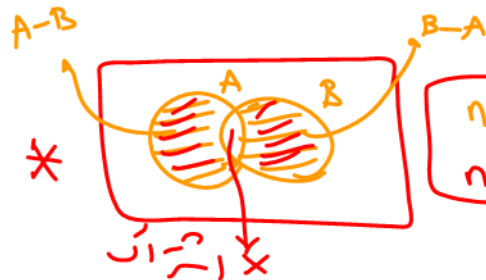
فوتبال و هم به والیبال علاقه دارند؟



$32 = 25 + 18 - x \Rightarrow x = 11$

$14 + 11 + 7 = 14 + 18 = 32$

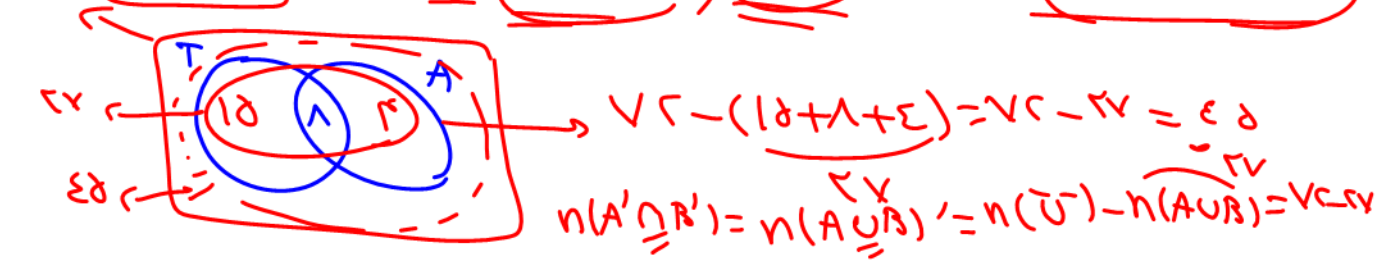
مثال ۳۶ با استفاده از نمودار ون $n(A \Delta B)$ را محاسبه و توصیف کنید.



$n(A \Delta B) = n(A - B) + n(B - A)$
 $n(A \Delta B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$

مثال ۳۷ تعداد مسافریں در یک هتل ۷۲ نفرند که ۲۳ نفر آنها تاجر و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. ۸ نفر از این

تاجریں برای اولین بار سفر کرده‌اند. چند نفر نه تاجر هستند و نه برای اولین بار سفر کرده‌اند؟

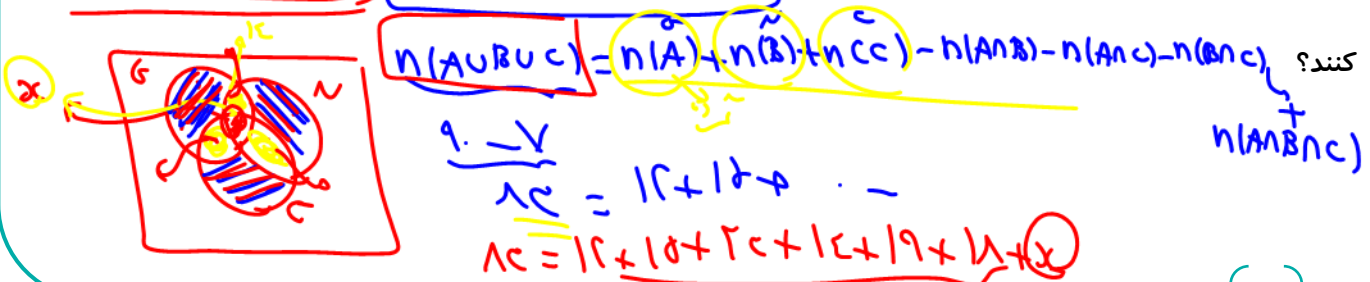


$72 - (15 + 8 + 9) = 72 - 32 = 40$

$n(A' \cap T') = n(A \cup T)' = n(U) - n(A \cup T) = 72 - 32 = 40$

مثال ۳۸ در یک بررسی آماری در استفاده از گرامافون، نوار کاست و سی دی از ۹۰ نفر این نتایج به دست آمده است:

۱۲ نفر فقط از گرامافون و ۱۵ نفر فقط از نوار کاست و ۲۳ نفر فقط از سی دی، ۱۴ نفر از گرامافون و نوار کاست، ۱۹ نفر از نوار کاست و سی دی، ۱۸ نفر از گرامافون و سی دی و ۷ نفر از هیچ کدام استفاده نمی‌کنند. چند نفر از هر سه استفاده می‌کنند؟



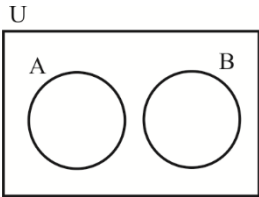
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$12 + 15 + 23 = 14 + 15 + 19 + 18 + x$

$50 = 56 + x \Rightarrow x = -6$

تعریف دو مجموعه جدا از هم (مجزا)

دو مجموعه A و B را از هم جدا گوئیم اگر گاه اشتراک آنها تهی باشد.



$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = 0$

مثال ۳۹ اگر A و B دو مجموعه جدا از هم تنها باشند، نشان دهید که: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

$n(A \cap B) = 0$

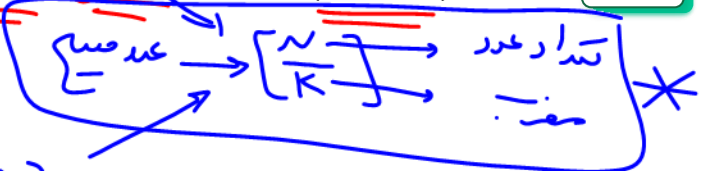
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= \binom{20}{8} + \binom{20}{12} - \binom{20}{0}$

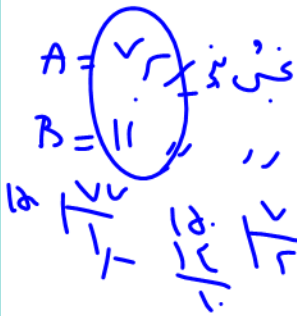
مثال ۴۰ از مجموعه $\{1, 2, \dots, 200\}$ چند عضو مضرب ۴ با مضرب ۹ هستند؟



$\frac{200}{4} = 50$
 $\frac{200}{9} = 22$
 $\frac{200}{36} = 5$

مثال ۴۱

چند عضو از مجموعه $\{1, 2, \dots, 150\}$ بر ۷ بخش پذیر هستند ولی بر ۱۱ بخش پذیر نیستند؟



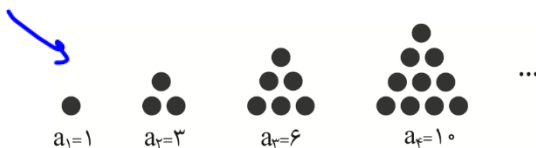
$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

$= \binom{150}{7} - \binom{150}{77} = 21 - 2 = 19$

الگو و دنباله

الگو: الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد می باشد که می تواند تکرار شونده یا

رشد کننده و یا کاهنده و یا ترکیبی از آنها باشد مانند الگوی زیر:

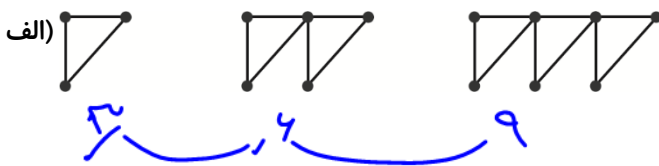


نکته منظور از a_i جمله i ام یک الگو (و یا دنباله که در ادامه مطرح خواهیم کرد) است که آن ها را متغیرهای

اندیس دار می نامیم. برای مثال در شکل بالا منظور از a_n تعداد نقطه های شکل n ام است.

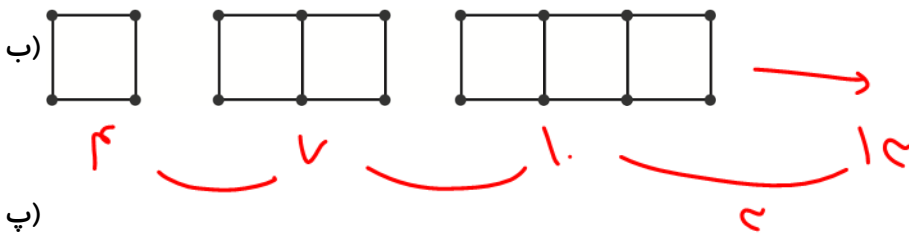
مثال ۴۲

در شکل‌های زیر الگوی کلی تعداد چوب کبریت‌های مرحله n ام را بیابید.

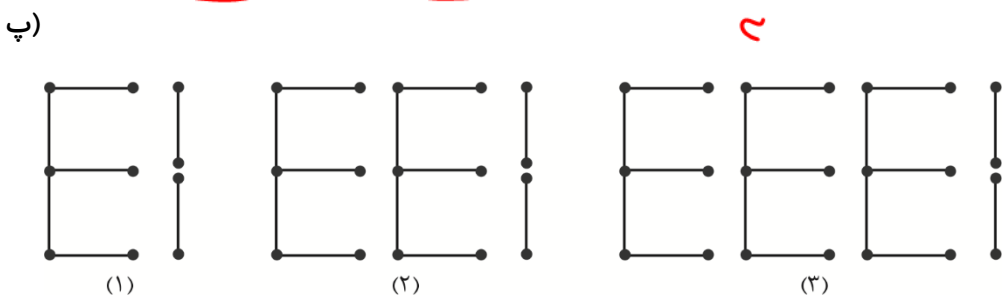


Handwritten notes for problem 42a:

- $a_n = 3n$ (circled in blue)
- $a_1 = 3$
- $a_2 = 6$
- Handwritten text: "نوعی" (Type) with a circle containing "۳", "۶", "۹".

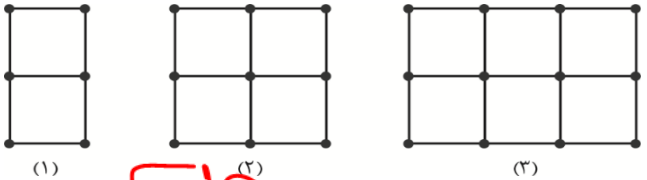


Handwritten formula for problem 42b: $a_n = 3n + 1$



مثال ۴۳

الگوی کلی برای تعداد چوب کبریت‌های زیر را بیابید.



Handwritten calculations for problem 43:

- $n = 1 \Rightarrow a_1 = 1(5) + 2$
- $n = 2 \Rightarrow a_2 = 2(5) + 2$
- $n = 3 \Rightarrow a_3 = 3(5) + 2$
- Final formula: $a_n = 5n + 2$ (circled in red)
- Handwritten text: "نوعی" (Type) with a checkmark.

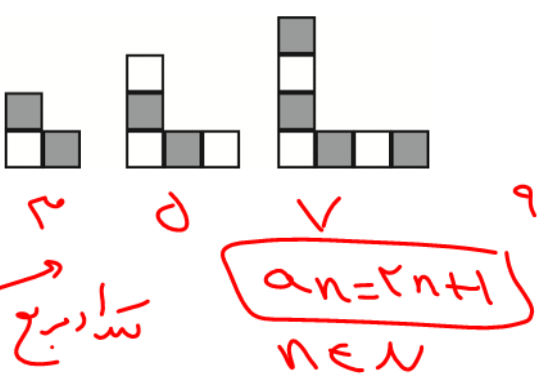
Handwritten note: "الگو (رنگ) ←" (Pattern (color) ←) with arrows pointing to the diagrams.

مثال ۴۴

شکل‌های زیر با چوب کبریت ساخته شده‌اند.

الف) تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله n ام را بیابید.

ب) تعداد مربع‌های موجود در مرحله n ام را محاسبه کنید.



Handwritten formula for problem 44: $a_n = 4n + 1$ (circled in red), with $n \in \mathbb{N}$ written below.

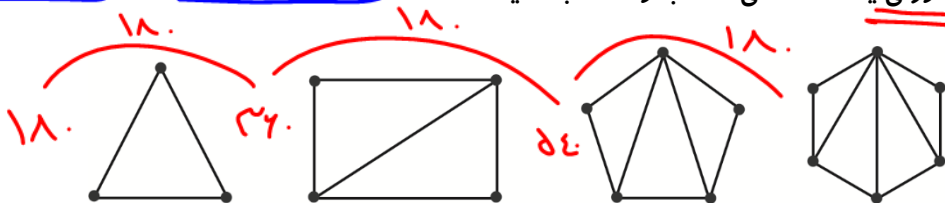
Handwritten note: "تعداد مربع" (Number of squares) with an arrow pointing to the squares in the diagram.

مثال ۴۵ با تبدیل یک n ضلعی به تعدادی مثلث در درون آن که همگی در یک رأس مشترک می‌باشند (مانند شکل‌های

$$a_n = (n-2) \times 180 = (2n-4) \times 90$$

زیر) مجموع زوایای درونی یک n ضلعی محدب را محاسبه کنید.

$n=3$



دنباله: الگوهایی را که در آن‌ها تعدادی عدد پشت سر هم قرار می‌گیرند یک دنباله می‌نامیم و این اعداد را جملات دنباله

می‌نامیم. برای مثال:

دنباله اعداد طبیعی فرد متوالی: ۱, ۳, ۵, ۷, ...

$$a_n = 2n - 1$$

دنباله اعداد طبیعی زوج متوالی: ۲, ۴, ۶, ۸, ...

$$a_n = 2n$$

مثال ۴۶ تساوی‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$1+2 = 3-1$$

$$1+2+4 = 7-1$$

$$1+2+4+8 = 15-1$$

$$1+2^1+2^2+2^3+2^4 = 2^5-1$$

(الف) تساوی‌های مرتبط به سطر هفتم را حدس بزنید و درستی حدس خود را ثابت کنید.

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

(ب) فرم‌های کل این تساوی‌ها را بنویسید.

برای هر یک از دنباله‌های زیر یک الگو حدس بزنید و داخل مربع را پر کنید.

مثال ۴۷

(الف) ۰, ۲, ۶, ۱۲, ۲۰, ۳۰, ۴۲, ۵۶, ...

(ب) ۵, ۷, ۱۰, ۱۴, ۱۹, ۲۵, ۳۲, ۴۰, ...

$$a_n = (n-1)n$$

$a_1 = 0$ $n \in \mathbb{N}$ $a_8 = (8-1) \times 8 = 7 \times 8 = 56$

$$a_1 = 2+1 = 3$$

$$a_2 = 3+1 = 4$$

$$a_3 = 4+1 = 5$$

$$a_4 = 5+1 = 6$$

$$a_5 = 6+1 = 7$$

$$a_6 = 7+1 = 8$$

تذکر: همه دنباله‌ها لزوماً جمله عمومی ندارند. مثلاً دنباله‌ی اعداد اول یعنی: ۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ...

برای پیدا کردن جمله عمومی دنباله‌ها قانون مشخصی که بتواند برای همه دنباله‌ها کارساز باشد، وجود ندارد

ولی با توجه به جمله‌های دنباله و اندیس آن‌ها، می‌توان به الگو بسیار نزدیک شد.

با توجه به الگوی داده شده در هر مرحله جاهای خالی را پر کنید و جمله دهم هر دنباله را بیابید.

مثال ۴۸

(الف) -۲, ۳, -۴, ۵, , , ...

$$a_n = (-1)^n \cdot (n+1)$$



$d_1 = -1$
 $d_2 = -2$
 $d_3 = -3$
 $d_n = 2 - 3n$

پ) $2, 0, \dots$
 $c_4 = 12 - 2 \cdot 4 + 2$
 $c_5 = 25 - 2 \cdot 5 + 2$

ت) $3, 7, 17, 43, \dots$

ث) $-1, -1, -1, \dots$

$t_1 = \frac{5}{-5}$ $t_2 =$

$b_n = 2^n + 3^{n-1}$

$t_n = \frac{|2n-7|}{2n-7}$

الگوی خطی

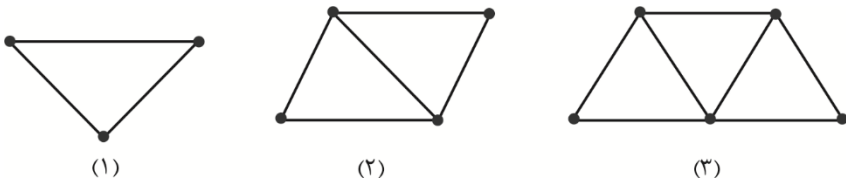
به طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آنها به صورت $t_n = an + b$ باشد الگوی خطی می نامیم. که در آن a, b اعداد حقیقی و ثابت هستند. در الگوهای خطی، تفاضل هر جمله از جمله قبل آن، عددی ثابت است که همان ضریب n یعنی a خواهد شد.

$t_n = 3n + 1$ $4, 7, 10, 13, \dots$

جمله عمومی یک الگوی خطی است که در آن $c_7 = 43$ و $c_3 = 23$. جمله دهم این دنباله را بیابید.

$c_n = an + b$
 $c_7 = 7a + b = 43$
 $c_3 = 3a + b = 23$
 $a = 2, b = 1$
 $c_n = 2n + 1$
 $c_{10} = 2 \cdot 10 + 1 = 21$

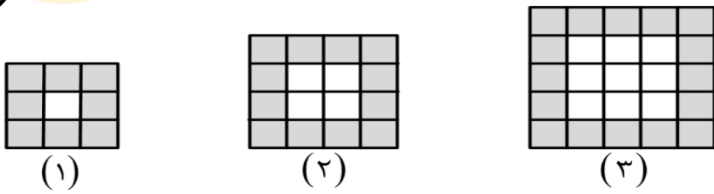
الگوی خطی تعداد چوب کبریت های زیر را تعیین کنید.



$a_n = 2n + 1$



مثال ۵۲ الگوی خطی متناظر با مربع‌های رنگی در شکل‌های زیر را تعیین کنید.



$$\frac{2^n \times 2}{(2^n)^2 - 1} = \frac{2x}{x^2 - 1} \Rightarrow \frac{2}{x-1} = \frac{2x}{x^2 - 1} \Rightarrow 2x^2 - 2x = 2x \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

مثال ۵۳ کدام جمله ی دنباله‌ی $a_n = \frac{2^{n+1}}{4^n - 12}$ برابر با $\frac{4}{13}$ می‌باشد؟

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(2)(-3) = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{-1 \pm 5}{4}$$

$x = 1$ or $x = -3/2$

زیر $ax^2 + bx + c = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

مثال ۵۴ جمله پنجم دنباله‌ی $a_n = 5n^2 + 12$ با جمله هفتم دنباله‌ی $b_n = 2n^2 - n + 1$ برابر است؟

$$b_7 = 2 \times 7^2 - 7 + 1 = 98 - 7 + 1 = 92$$

$$a_n = 5n^2 + 12 = 92 \Rightarrow 5n^2 = 80 \Rightarrow n^2 = 16 \Rightarrow n = 4$$

$a_4 = b_7$

$a_{(n-1)} = n^2 + 2 \rightarrow a_n = ?$

مثال ۵۵ جمله پنجم دنباله $a_n = 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ برابر با ۷۱۶۸ می‌باشد؟

$$2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 7168$$

$$2^n(1 + 2 + 4) = 7168 \Rightarrow 7 \times 2^n = 7168 \Rightarrow 2^n = 1024 \Rightarrow n = 10$$

مثال ۵۶ در دنباله‌ی $a_n = 4n^2 - 4n + 3$ جمله‌ی n ام دنباله را بیابید.

$a_{2n+1} = a_t$

$$a_t = 4\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{t-1}{2}\right) + 3$$

$$a_n = 4\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{n-1}{2}\right) + 3$$



دنباله درجه دوم

الگوریتم: $t_n = an^2 + bn + c$ خطی

دنباله‌هایی را که جمله عمومی آن‌ها به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ باشد را دنباله درجه دوم می‌نامیم که در آن a, b, c

و $a \neq 0$ اعداد حقیقی و ثابت هستند و $a \neq 0$.

برای تعیین ضابطه‌ی یک دنباله‌ی درجه‌ی ۲ که جملات آن داده شده است به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

(۱) چون در هر دنباله‌ی درجه‌ی ۲، اعداد حاصل از تفاضل هر دو جمله متوالی یعنی $t_{n+1} - t_n$ ، خود تشکیل یک دنباله‌ی خطی

می‌دهند، مقدار a از تساوی زیر به دست می‌آید.

اختلاف اختلاف‌ها = شیب خط $2a$

رشته

(۲) حال با تشکیل t_1 و t_2 بر مبنای جملات اعداد داده شده رابطه‌ی کلی t_n به محاسبه‌ی b و c می‌پردازیم.

مثال ۵۷ آیا می‌توان روشی برای تشخیص دنباله درجه دوم بودن یک دنباله از روی جملات آن ارائه کنید؟

افزایش افتادگی = شیب $2a$ = شیب

$a_n = an^2 + bn + c$

مثال ۵۸ ضابطه‌ی دنباله‌ی درجه‌ی ۲ زیر را تعیین کنید.

$t_3 = 3(3)^2 + c - 1 = 27 + c - 1 = 29$

۳	۱۳	۲۹	۵۱
+۱۰	+۱۶	+۲۲	

$2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow t_n = 3n^2 + bn + c$

$t_1 = 3 = 3(1)^2 + b(1) + c \Rightarrow b + c = 0$

$t_2 = 13 = 3(2)^2 + b(2) + c \Rightarrow 2b + c = 1$

$\Rightarrow b = 1, c = -1 \Rightarrow t_n = 3n^2 + n - 1$

t_1	a	b	c
t_2	a	b	c
t_3	a	b	c

مثال ۵۹ جمله عمومی دنباله‌ی $3, 11, 25, 45, \dots$ را به دست آورید.

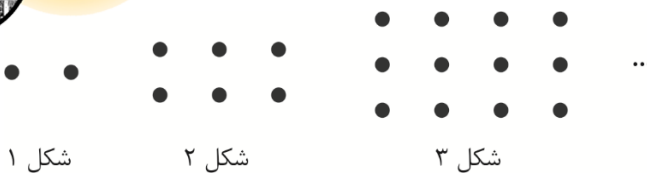
$2a = 8 \Rightarrow a = 4$
 $a_n = 4n^2 + bn + c$
 $a_1 = 4 + b + c = 3 \Rightarrow b + c = -1$
 $a_2 = 16 + 2b + c = 11 \Rightarrow 2b + c = -5$
 $\Rightarrow c = 1, b = -2$
 $a_n = 4n^2 - 2n + 1$

مثال ۶۰ برای دنباله زیر یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی دنباله را بیابید.

$2a = 2 \Rightarrow a = 1$
 $a_n = n^2 + bn + c$
 $a_1 = 1 + b + c = 3 \Rightarrow b + c = 2$
 $a_2 = 4 + 2b + c = 7 \Rightarrow 2b + c = 3$
 $\Rightarrow b = 1, c = 1$
 $a_n = n^2 + n + 1$



مثال ۶۱



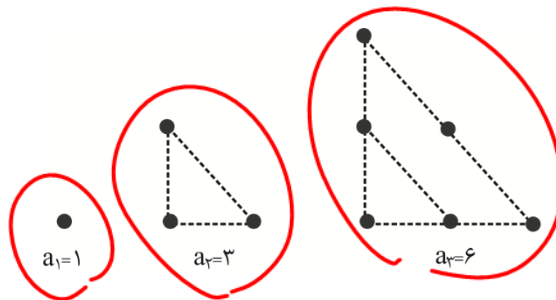
$$a_n = 1, 4, 9, \dots$$

دنباله‌های مهم درجه دوم

الف) دنباله‌ی مثلثی

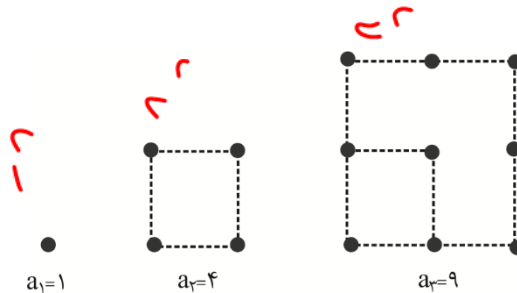
$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 3 \\ a_3 &= 6 \end{aligned}$$



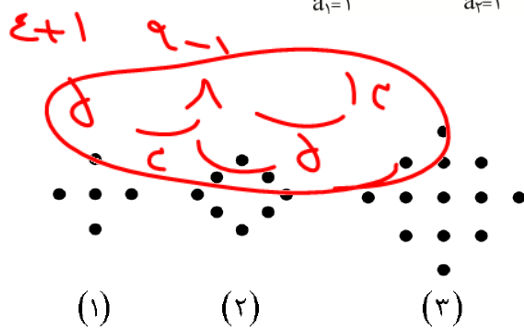
$$a_n = n^2$$

ب) دنباله‌ی مربعی



تعداد نقاط در شکل ۲۰ ام الگوی زیر را محاسبه کنید.

مثال ۶۲



$$a_n = 1, 4, 9, \dots$$

مثال ۶۳ جمله‌ی بیستم دنباله‌ی مربعی چقدر بیش‌تر از جمله‌ی بیستم دنباله‌ی مثلثی است؟

مثال ۶۳

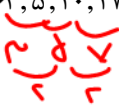
$$\begin{aligned} a_n &= n^2 & a_{20} &= 20^2 = 400 \\ a_n &= \frac{n(n+1)}{2} & a'_{20} &= \frac{20 \cdot (20+1)}{2} = 210 \\ a_{20} - a'_{20} &= 400 - 210 = 190 \end{aligned}$$



مثال ۶۴

یک الگوی هندسی برای دنباله‌ی زیر رسم کنید و سپس به کمک آن، جمله عمومی را بیابید.

۲, ۵, ۱۰, ۱۷, ...



$$2a = 2 \quad a = 1$$

$$a_n = a + (n-1)d = an' + b \rightarrow y = ax + b$$

دنباله حسابی

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله‌ی قبل از خودش به دست می‌آید،

یک دنباله‌ی حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گویند.

اگر جمله‌ی اول را a و قدرنسبت را d فرض کنیم آن گاه جملات دنباله به صورت $a, a+d, a+2d, \dots$ بود.

جمله‌ی عمومی آن به صورت $a_n = a + (n-1)d$ خواهد شد.

توجه شود که هر دنباله‌ی حسابی خود یک الگوی خطی است که:

$$a_n = (n-1)d + a$$

در هر دنباله‌ی حسابی تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی برابر قدرنسبت دنباله است، یعنی:

$$d = a_n - a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

مثال ۶۵

پنج جمله‌ی اول یک دنباله حسابی را بنویسید که در آن جمله اول $a = 3$ و قدرنسبت $d = 5$ باشد.

Handwritten solution for Example 65:

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_1 = a + 0d = 3$$

$$a_2 = a + 1d = 3 + 5 = 8$$

$$a_3 = a + 2d = 3 + 10 = 13$$

$$a_4 = a + 3d = 3 + 15 = 18$$

$$a_5 = a + 4d = 3 + 20 = 25$$

Sequence: 3, 8, 13, 18, 25, ...

مثال ۶۶

در یک دنباله حسابی داریم $88a + 88d = 888$ ، جمله‌ی دوازدهم آن را بیابید.

Handwritten solution for Example 66:

$$a_{12} = a + 11d = 111$$

$$a_7 = 17$$

$$a_{11} = 27$$

$$d = \frac{27 - 17}{11 - 7} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

مثال ۶۷

در یک دنباله حسابی، جمله هفتم ۱۷ و جمله یازدهم ۳۷ است. جمله عمومی این دنباله را بیابید.

Handwritten solution for Example 67:

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_7 = a + 6d = 17$$

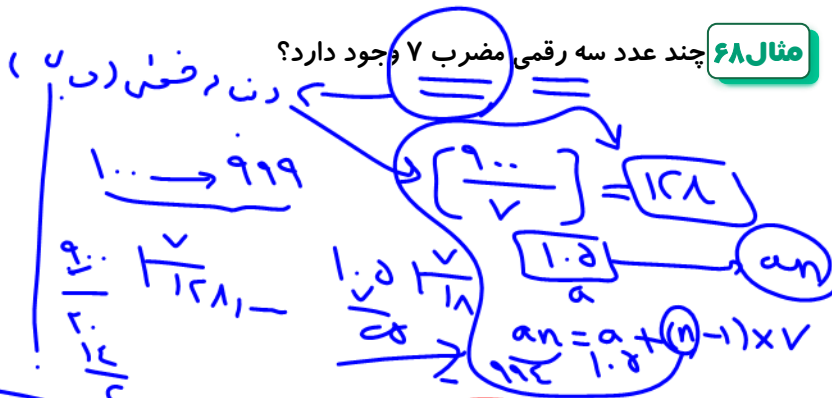
$$a_{11} = a + 10d = 37$$

$$a_n = -14 + 2n$$



مثال ۶۸

چند عدد سه رقمی مضرب ۷ وجود دارد؟



$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

$$994 = 1.8 + (n-1) \times 7$$

$$994 - 1.8 = 7n - 7$$

مثال ۶۹ دنباله‌ی $125, x, 38, y, \dots$ یک دنباله حسابی است. مقدار y را حساب کنید.

$$a_2 = b = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{125 + 38}{2} = 81.5$$

$$a_3 - a_2 = d = 38 - 81.5 = -43.5$$

$$a_4 - a_3 = d = y - 38 = -43.5 \Rightarrow y = -5.5$$

$$a_8 - a_7 = (a_7 + d) - (a_7) = d = -5$$

مثال ۷۰ اگر در یک دنباله حسابی $a_7 + a_7 = 14$ و $a_7 - a_7 = 20$ باشد، a و d را بیابید.

$$a_1 + d + a_1 + 4d = 14 \Rightarrow 2a_1 + 5d = 14$$

$$2a_1 + 7d = 16$$

$$a_8 - a_7 = (a_8 - a_7)(a_8 + a_7) = 20$$

$$a_8 - a_7 = \frac{20}{14} = \frac{10}{7}$$

$$d = \frac{10}{7}$$

$$a_m - a_n = (m - n)d$$

$$2a_1 + 7d = 16 \Rightarrow 2a_1 + 7(\frac{10}{7}) = 16 \Rightarrow 2a_1 + 10 = 16 \Rightarrow 2a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = 3$$

مثال ۷۱

a_m و a_n دو جمله دلخواه از یک دنباله حسابی می‌باشند. $(m \neq n)$ ثابت کنید: $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$

$$(n + k - m)d = kd$$

مثال ۷۲ ثابت کنید در هر دنباله حسابی داریم: $a_{n+k} - a_n = kd$



اگر a و b و c با همین ترتیب سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند b را واسطه‌ی حسابی یا عددی a و

c نامند، می‌نویسیم:

$$b = \frac{a+c}{2} \rightarrow \text{جمله میانی}$$

$$2b = a+c$$

درج k واسطه حسابی

در صورتی که بخواهیم بین دو عدد a و b به تعداد k جمله بنویسیم به طوری که $(k+2)$ جمله حاصل تشکیل دنباله‌ی حسابی

دهند، می‌توان قدرنسبت دنباله را از رابطه‌ی $d = \frac{b-a}{k+1}$ متناسبه کرد، سپس واسطه‌ها را به دست آورد.

a , b درج k واسطه‌ی حسابی

مثال ۷۳ درستی رابطه $d = \frac{b-a}{k+1}$ را برای درج k واسطه‌ی حسابی بین a و b ثابت کنید.

مثال ۷۴ اعداد $a, b, 2, 16$ به همین ترتیب تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند. حاصل $a+b$ را بیابید.

$$a = \frac{16+2}{2} = 9 \Rightarrow 2 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow b = -5 \Rightarrow a+b = -3$$

مثال ۷۵ پنج واسطه‌ی حسابی بین دو عدد -8 و 22 درج کنید.

مثال ۷۶ بین ارقام 11 و 111 چند واسطه حسابی درج کنیم که بزرگ‌ترین آن‌ها از کوچک‌ترین آن‌ها 92 واحد بیش‌تر

باشد.



مثال ۷۷ اگر بین دو عدد ۸ و ۹۸ بتوانیم ۱۴ واسطه حسابی درج کنیم، جمله‌ی هفتم از جملات درج

مثال ۷۸ عبارت‌های $x^2 + 13$ و $2x^2 + 3$ و $x^2 + 1$ ، سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند. مقادیر x را بیابید.

$$a - d, a, a + d$$

سه جمله متوالی در یک دنباله حسابی:

نکته

$$a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$$

پنج جمله متوالی در یک دنباله حسابی:

مثال ۷۹ پنج عدد تشکیل دنباله حسابی داده‌اند و عدد بزرگتر برابر ۲۰ است. اگر مجموع این اعداد ۳۰ باشد، این ۵ عدد را

بیابید.

دنباله هندسی

دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب کردن جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیر صفر به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. پس می‌توان ساختار کلی یک دنباله هندسی را به صورت زیر

در نظر گرفت: a, ar, ar^2, ar^3, \dots

پس $t_n = ar^{n-1}$ جمله عمومی دنباله هندسی است که در آن a جمله‌ی اول و r قدرنسبت دنباله می‌باشد.

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

قدرنسبت هر دنباله هندسی از تقسیم هر جمله بر جمله قبلی‌اش به دست می‌آید. یعنی:

نکته



کدام یک از دنباله‌های زیر هندسی‌اند؟ در هر مورد قدرنسبت را مشخص کنید و سپس جواب دهید.

مثال ۸۰

بیاید.

الف) $5, 10, 20, \dots$

ب) $18, 6, 2, \dots$

ج) $4, 12, 48, \dots$

د) $\sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}, \dots$

اگر عبارت‌های $2x+1$ و $5x$ و $12x-4$ جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را بیابید.

مثال ۸۱

اگر a, b, c تشکیل دنباله هندسی دهند، آنگاه $b^2 = ac$ ، در این صورت b را واسطه هندسی بین a و c گویند.

نکته

درج k واسطه‌ی هندسی

اگر بخواهیم بین دو عدد a و b به تعداد k جمله بنویسیم (یعنی k واسطه هندسی قرار دهیم) که $k+2$ عدد

حاصل دنباله‌ی هندسی دهند قدرنسبت دنباله را از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌کنیم:

$$r^{k+1} = \frac{b}{a}$$

جمله‌ی چندم دنباله‌ی $128, 64, 32, \dots$ برابر 16^{-2} می‌باشد؟

مثال ۸۲

مثال ۸۳ اگر در یک دنباله‌ی هندسی، روابط زیر بین جملات برقرار باشد، قدرنسبت دنباله را بیابید.

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 5186 \quad a_3 \times a_5 = 576$$

مثال ۸۴ واسطه هندسی بین دو عدد ۳ و ۷۵ را بیابید.

مثال ۸۵ بین دو عدد ۳ و ۲۱۸۷ پنج واسطه‌ی هندسی درج کنید.

مثال ۸۶ بین دو عدد ۳ و ۴۸ سه واسطه‌ی هندسی درج کنید و دنباله‌های ایجاد شده را بنویسید.

مثال ۸۷ سه عدد تشکیل دنباله هندسی می‌دهند به طوری که حاصل ضرب آن‌ها ۱۰۰۰ و حاصل جمع آن‌ها برابر ۳۵ شود آن‌ها

را بیابید.

مثال ۸۸ جملات پنجم، هفتم و یازدهم یک دنباله عددی، تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. قدرنسبت دنباله هندسی را بیابید.



اگر جملات a_n, a_m, a_p سه جمله دلخواه از یک دنباله حسابی باشند که تشکیل دنباله هندسی

نکته

این دنباله هندسی از رابطه $r = \frac{p-m}{m-n}$ به دست می آید.

مثال ۸۹ حاصل ضرب ۳۰ جمله اول دنباله هندسی $1, 3, 9, 27, \dots$ را محاسبه کنید.

مثال ۹۰ آرمان دوچرخه‌ای را به قیمت ۸۰۰ هزار تومان خریده است. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم در هر سال ۵

درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از چهار سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال، از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

تست‌های فصل اول



۱. اگر Z مجموعه مرجع و A و B زیرمجموعه‌های آن باشند و A' نامتناهی و B متناهی باشد، آن‌گاه کدام یک از مجموعه‌ها ممکن است متناهی باشد؟

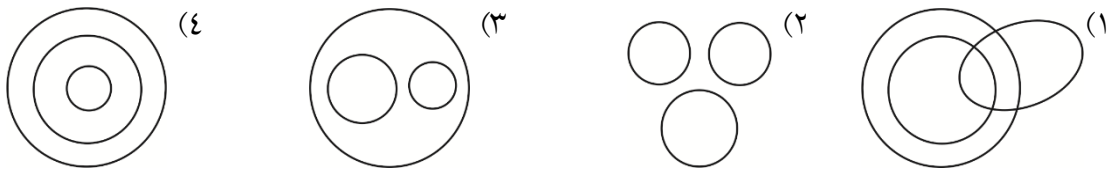
- (۱) $B \cup A'$ (۲) $B' \cap A$ (۳) $A' \cup B'$ (۴) $A' - B$

۲. چه تعداد از گزینه‌های زیر درست است؟

- الف) اگر $x \in A \cup B$ آن‌گاه $x \in A$.
ب) اگر $x \in B'$ آن‌گاه $x \in (A \cap B)'$.
ج) اگر $x \in A \cap B$ آن‌گاه $x \in A \cup B$.
د) اگر $x \in A \cap B'$ آن‌گاه $x \in A$.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳. کدام نمودار زیر بهترین ارتباط بین ۳ مجموعه‌ی زنان، مادران و مهندسان را نشان می‌دهد؟



۴. اگر داشته باشیم $A = \left\{ \frac{n(n-1)}{2} \mid n \in W \right\}$ و $B = (-2, 2]$ ، آن‌گاه $A \cap B$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌نهایت

۵. اگر $A \subseteq B$ ، حاصل عبارت $(A - B') \cup (B - A)$ کدام است؟

- (۱) A (۲) A' (۳) B (۴) B'



۶. کلاسی شامل ۳۰ دانش آموز است. ۵ نفر از آنها فقط در درس فیزیک تجدید شده اند و

شیمی. اگر ۱۵ نفر در هر دو درس قبول شده باشند، چند نفر در هر دو درس مردود شده اند؟

- ۶ (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴)

۷. اگر $(A - B) \cap (B - A) = A$ باشد کدام گزینه درست نیست؟

- ۱) $A \cup \emptyset = \emptyset$ ۲) $A \cap B = \emptyset$ ۳) $B - A = \emptyset$ ۴) $A \cap B' = \emptyset$

۸. حاصل عبارت $(A - (A - B)) \cup (B \cap (A'))$ کدام است؟

- ۱) $A - B$ ۲) A' ۳) B ۴) $A \cup B$

۹. در مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ چند عدد فقط بر یکی از اعداد ۵ و ۷ بخش پذیر است؟

- ۱) ۲۱۴ ۲) ۲۵۲ ۳) ۲۸۶ ۴) ۱۵۲

۱۰. کدام مجموعه متناهی است؟

- ۱) $(1/1, 1/2)$ ۲) عددهای گویا بین ۱ و ۲
۳) عددهای گنگ بین ۱ و ۲ ۴) عددهای بین ۱ و ۲ که ده برابرشان عددی طبیعی است.

۱۱. به ازای کدام مقدار گویای a عدد $\sqrt{1+a}$ نیز گویا است؟

- ۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{7}{36}$ ۳) $\frac{11}{25}$ ۴) $\frac{25}{49}$



۱۲. اگر $U_{2n} = \frac{1}{4n^2}$ باشد، آنگاه U_n کدام است؟

$2n^2$ (۴)

n^2 (۳)

$\frac{1}{2n}$ (۲)

$\frac{1}{n^2}$ (۱)

۱۳. جمله عمومی دنباله $\frac{1}{28}, \frac{1}{18}, \frac{1}{10}, \frac{1}{4}$ کدام است؟

$\frac{1}{n(n+3)}$ (۴)

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$ (۳)

$\frac{1}{n^2+n+5}$ (۲)

$\frac{1}{2n^2+2}$ (۱)

۱۴. در یک دنباله عددی $t_1 + t_2 + t_3 = 8$ و $t_4 + t_5 + t_6 = 2$ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۲ (۴)

$-\frac{2}{3}$ (۳)

-۲ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

۱۵. اعداد $2x+3$ و $3x+4$ و $5x-1$ سه جمله متوالی یک دنباله عددی هستند. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۱۶. اگر در یک دنباله عددی $t_1 = 170$ و $t_2 = 161$ ، آنگاه کدام جمله این دنباله منفی است؟

۲۰ (۴)

۱۹ (۳)

۱۸ (۲)

۱۷ (۱)

۱۷. بیست جمله اول یک دنباله عددی با جمله اول $t_1 = 2$ و قدرنسبت $d_1 = 3$ و بیست جمله اول دنباله عددی

دیگری با جمله اول $s_1 = 3$ و قدرنسبت $d_2 = 2$ چند جمله مشترک دارند؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)



۱۸. جمله n ام یک دنباله عددی که در آن $t_1 = 5$ و $d = 3$ ، چقدر از جمله n ام دنباله t_n بزرگتر است؟

۱ (۱) $n + 1$ (۲) n (۳) $n - 1$ (۴)

$n - 1$ (۴)

n (۳)

$n + 1$ (۲)

۱ (۱)

۱۹. در یک دنباله هندسی $a_5 = 2a_4$. جمله اول دنباله کدام است؟

$2\sqrt{2}$ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

۲۰. در یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۲، حاصل $\frac{a_7 a_9}{a_8^2}$ کدام است؟

۴ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

۱۶ (۲)

$\frac{1}{16}$ (۱)

۲۱. بزرگترین جمله دنباله هندسی $\frac{1}{24}, d, \frac{1}{3}, b, a$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{8}{3}$ (۲)

۱ (۱)

۲۲. در دنباله هندسی صعودی، جمله سوم برابر ۱۰ و جمله هفتم برابر ۴۰ است. جمله اول کدام است؟

$\frac{5}{4}$ (۴)

۵ (۳)

۲۵ (۲)

$\sqrt{5}$ (۱)

۲۳. در یک دنباله عددی، جملات t_3, t_7, t_9 می‌توانند سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند. چندین جمله دنباله

عددی برابر صفر است؟

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)



همواره

۲۴. اگر a, b, c به ترتیب تشکیل یک دنباله هندسی دهند، حاصل $\frac{a^2 + b^2 + a}{c^2 + b^2 + c}$

(۴) -۱

(۳) ۱

(۲) $\frac{c}{a}$

(۱) $\frac{a}{c}$

۲۵. اگر $x > 0$ باشد، جمله چندم دنباله هندسی $\dots, x+1, \sqrt{3}, x-1$ برابر با ۸۱ است؟

(۴) $n = 6$

(۳) $n = 7$

(۲) $n = 8$

(۱) $n = 9$

۲۶. اعداد $x+z, 3x, y+2, x-2$ ، جملات متوالی یک دنباله حسابی و یک دنباله هندسی هستند. حاصل

کدام است؟ $\frac{x^2 + y^2}{z}$

(۴) ۱۴

(۳) -۱۳

(۲) ۶

(۱) -۸

۲۷. حاصل ضرب n جمله اول دنباله هندسی با قدرنسبت r کدام است؟

(۴) $\frac{n(n-1)}{a_1 \cdot q^2}$

(۳) $\frac{n(n-1)}{a_1^n \cdot q^2}$

(۲) $\frac{n(n+1)}{a_1 \cdot q^2}$

(۱) $\frac{n(n+1)}{a_1^n \cdot q^2}$

$\begin{cases} 3, 7, 11, \dots \\ 1, 4, 7, \dots \end{cases}$

۲۸. جمله عمومی دنباله جملات مشترک دو دنباله روبه‌رو کدام است؟

(۴) $8n - 1$

(۳) $6n + 4$

(۲) $12n - 5$

(۱) $10n + 3$