

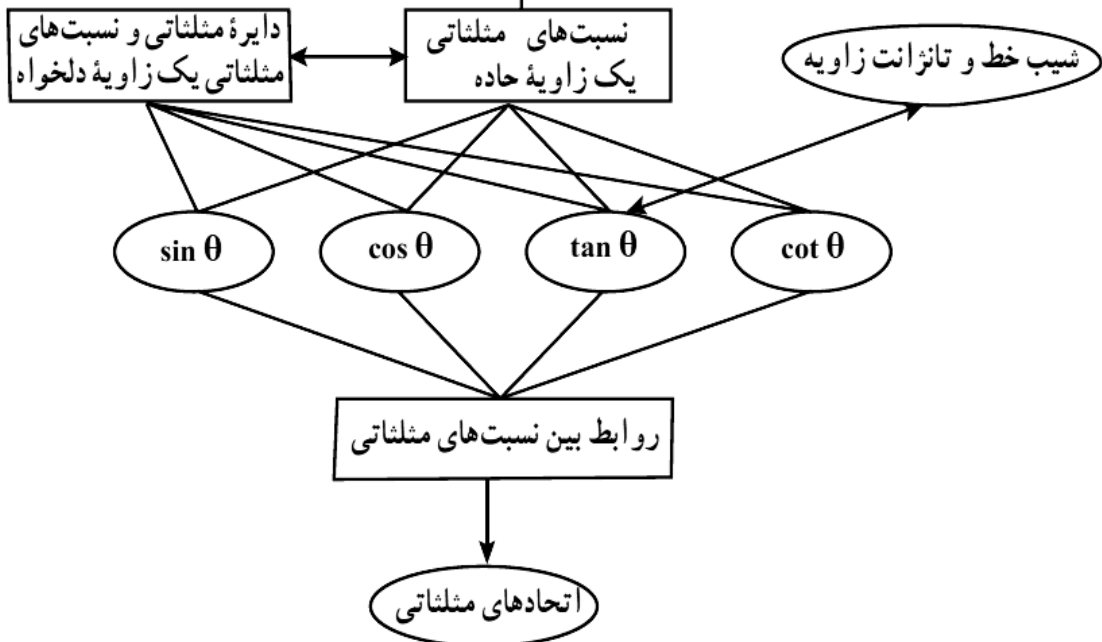


فصل دوم

مثلثات



نسبت اضلاع دو مثلث قائم الزاویه متشابه و رابطه آن با زاویه های مثلث



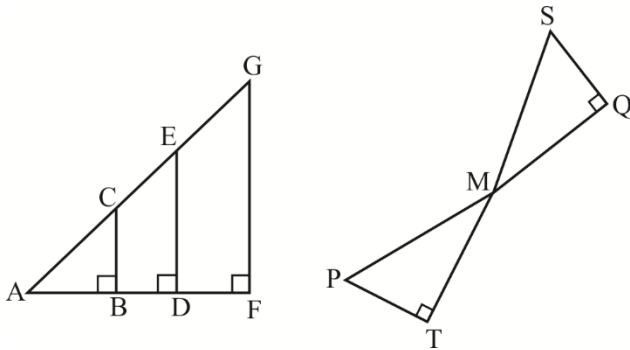


مقدمه: مثلثات به عنوان ترکیبی از ریاضیات و هندسه دانشی است که به بررسی روابط بین زاویه ها و اضلاع یک مثلث می پردازد و غیر از آن در مسائل فیزیک، پزشکی و حتی مسائل نظامی نقش بسیار اساسی دارد.

یادآوری

مثال ۱: دو مثلث متشابهند هر گاه از مثلثی با از مثلث دیگر برابر باشند.

مثال ۲: در هر یک از شکل های زیر



الف) هر دو مثلث متشابه را مشخص کنید. با دلیل
ب) نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث را بنویسید.

$$\begin{aligned} \angle A &= \angle A, \angle B = \angle D \Rightarrow \triangle ABC \approx \triangle ADE \Rightarrow \\ \angle A &= \angle A, \angle B = \angle F \Rightarrow \triangle ABC \approx \triangle AFG \Rightarrow \\ \angle A &= \angle A, \angle D = \angle F \Rightarrow \triangle ADE \approx \triangle AFG \Rightarrow \\ \angle P &= \angle Q, \angle S = \angle T = 90^\circ \Rightarrow \triangle PMS \approx \triangle QMT \Rightarrow \end{aligned}$$

مثال ۳: در مثال ۲،

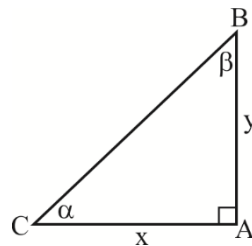
الف) نسبت اضلاع روبه‌رو به اضلاع مجاور زاویه A در هر ۳ مثلث ABC و ADE و AFG را بنویسید. آیا این نسبت ها برابرند؟

ب) آیا نسبت اضلاع روبه‌رو به M و وتر در مثلث های MPT و MQS برابر است؟ چرا؟
آیا می توان گفت در همه مثلث های قائم الزاویه، نسبت اضلاع روبه‌رو به مجاور زاویه ای برابر با α با هم مساوی اند؟

تعریف: نسبت ضلع روبه‌رو به ضلع مجاور زاویه ای α در مثلث قائم الزاویه ABC را تانژانت زاویه α گویند و به صورت

زیر نمایش می دهند.

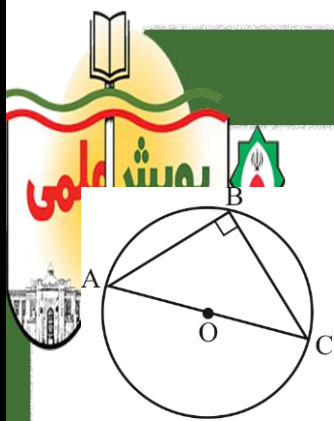
$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$



ضلع مجاور زاویه
ضلع روبه‌رو زاویه

تعریف: عکس تانژانت را کتانژانت می نامند و به صورت cot یا $\cot g$ نمایش می دهند.

$$\cot \alpha = \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{x}{y}$$



مثال ۴: در مثلث ABC اگر O مرکز دایره و $BC = OC$ باشد:
 الف) اندازه زاویه‌های A و C را معلوم کنید.
 ب) $\tan A$ و $\tan C$ را به دست آورید. \cot این زاویه‌ها چقدر است؟

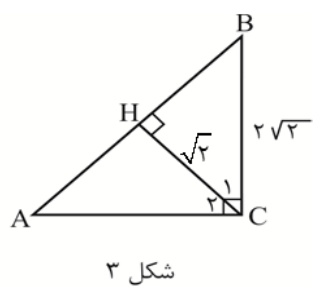
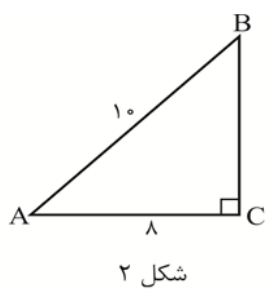
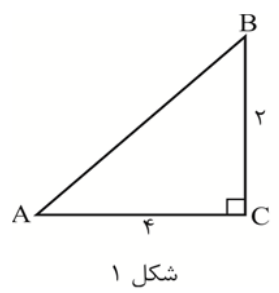
مثال ۵: با توجه به تمرینات حل شده جدول زیر را کامل کنید.

α	30°	45°
نسبت			
$\tan \alpha$
$\cot \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

مثال ۶: مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۲ سانتی‌متر رسم کنید و به کمک آن نشان دهید:

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \quad , \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مثال ۷: در هر یک از شکل‌های زیر تانژانت زاویه‌های تند را به دست آورید.

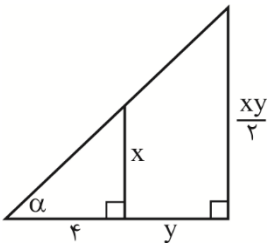


مثال ۸: در هر یک از شکل‌های تمرین ۲، مقدار کتانژانت زاویه‌های تند را به دست آورید.

مثال ۹: زاویه‌ای رسم کنید که تانژانت آن برابر با $\frac{5}{12}$ است.

مثال ۱۰: زاویه‌ای رسم کنید که کتانژانت آن برابر با $\frac{2}{4}$ است.

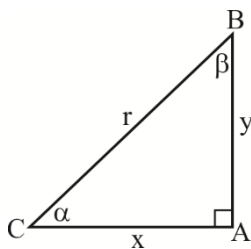
مثال ۱۱: در شکل مقابل $\tan \alpha = \frac{3}{y}$ است، مقدار x و y را به دست آورید.



مثال ۱۲: اگر α و β دو زاویه متمم باشند و داشته باشیم $\frac{4 \tan \alpha - 3 \cot \beta}{\tan^2 \alpha} = \sqrt{3}$ ، آنگاه $\cot \alpha$ را به دست آورید.

نسبت‌های مثلثاتی

در مثلث قائم‌الزاویه مقابل نسبت‌های بین اضلاع مثلث را چنین تعریف می‌کنیم:



$$\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} : \text{کتانژانت } \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} : \text{تانژانت } \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$$

سینوس α : نسبت ضلع روبه‌روی زاویه α به وتر مثلث

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$$

کسینوس α : نسبت ضلع مجاور زاویه α به وتر مثلث



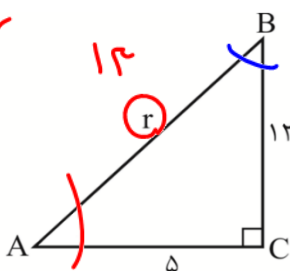
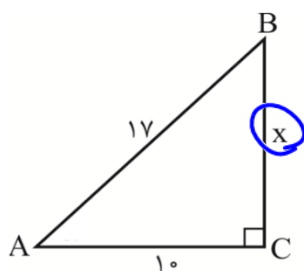
مثال ۱۳: همه نسبت‌های مثلثاتی زاویه β را بنویسید و آن‌ها را با نسبت‌های زاویه α مقایسه کنید.

$$\tan \beta = \frac{x}{y} = \cot \alpha, \quad \sin \beta = \frac{x}{r} = \cos \alpha$$

$$\cot \beta = \frac{y}{x} = \tan \alpha, \quad \cos \beta = \frac{y}{r} = \sin \alpha$$

مثال ۱۴: اگر $\alpha + \beta = \dots\dots\dots$ آن‌گاه $\sin \alpha = \cos \beta$ و $\sin \beta = \cos \alpha$ و $\tan \alpha = \cot \beta$ و $\tan \beta = \cot \alpha$

مثال ۱۵: با توجه به هر شکل نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های A و B را بنویسید.



$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{a}{c} = \cos B \\ \cos A &= \frac{b}{c} = \sin B \\ \tan A &= \frac{a}{b} = \cot B \\ \cot A &= \frac{b}{a} = \tan B \end{aligned}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

مثال ۱۶: با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) نسبت سینوس به کسینوس یک زاویه با کدام نسبت مثلثاتی برابر است؟ و عکس این نسبت با کدام نسبت برابر است؟

$$\frac{\sin \alpha = \frac{y}{r}}{\cos \alpha = \frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \tan \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

ب) ثابت کنید $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

ج) نتایج حاصل از رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ را بنویسید.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$



مثال ۱۷: حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $(\alpha + \beta = 90^\circ)$

$$\frac{\sin \alpha + \cos \beta}{\cos \beta} = \frac{\tan \alpha}{\cot \beta} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1$$

$\tan \alpha, \cot \alpha \neq 0$

مثال ۱۸: با رسم مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین نسبت های مثلثاتی زاویه 45° را بیابید.

$$y^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow y = \sqrt{2}x$$

$$\sin 45^\circ = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ$$

$$\tan 45^\circ = \frac{x}{x} = 1 = \cot 45^\circ$$

مثال ۱۹: ثابت کنید:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

الف) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

ب) $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 60^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

مثال ۲۰: جدول مقادیر مثلثاتی برای زوایای $30^\circ, 45^\circ$ و 60° را کامل کنید.

نسبت \ α	30° *	45° *	60° *
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$



مثال ۲۱: در مثلث ABC اگر $\angle A = 90^\circ$ و $AB = 2\sqrt{2}$ و $AC = 3\sqrt{2}$ سانتی متر باشد،

آن گاه عبارت های زیر را کامل کنید.

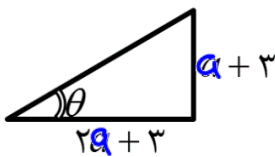
الف) $\sin^2 B - \cos^2 B = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = 0$

ب) $\cos^2 C - \sin^2 C = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = 0$

ج) $\cot B \cot C = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \times \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$

Diagram: A right-angled triangle with vertices A, B, C. Angle A is 90 degrees. Side AB is $2\sqrt{2}$ and side AC is $3\sqrt{2}$. The hypotenuse BC is $5\sqrt{2}$. A box contains the identities: $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$, $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$, $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$.

مثال ۲۲: در شکل مقابل $\tan \theta = \frac{3}{4}$ مقدار a را به دست آورید.



$\tan \theta = \frac{a+3}{2a+3} = \frac{3}{4}$

$4(a+3) = 3(2a+3)$

$4a+12 = 6a+9$

$4a-6a = 9-12$

$-2a = -3$

$a = \frac{3}{2}$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

مثال ۲۳: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

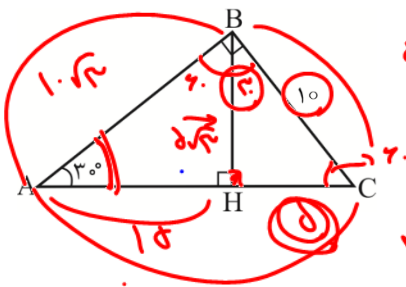
الف) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4}$

ب) $\tan 60^\circ \cdot \tan 30^\circ = \tan 60^\circ \times \cot 60^\circ = 1$

ج) $\tan 45^\circ \cdot \sin 60^\circ + \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{4}$

د) $\tan 75^\circ \cdot \cot 75^\circ - \sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ = 1 - (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) = 1 - 1 = 0$

مثال ۲۴: با توجه به شکل مقابل، طول اضلاع خواسته شده را بیابید.



الف) $AC = 15$ (ب) $AB = 20$ (ج) $BH = 10$

ه) $AH = 5$ (د) $HC = 10$

* * در مثلث قائم الزامی مندرج در این زاویه ۳۰ درجه است.

$\sin 30^\circ = \frac{x}{10} = \frac{1}{2}$ $x = 10 \times \frac{1}{2} = 5$

مثال ۲۵: علی بادبازی را از روی زمین با نخ به طول ۳۰ متر به هوا فرستاده است. اگر زاویه نخ با خط افق برابر با ۶۰ درجه باشد، ارتفاع بادباز از زمین چقدر است؟ (قد علی ۱۵۰ سانتی متر است).

Diagram: A right-angled triangle representing the kite problem. The vertical side is the height of the kite, the horizontal side is the ground distance, and the hypotenuse is the string of length 30. The angle between the string and the ground is 60 degrees. The height of the boy is 150.

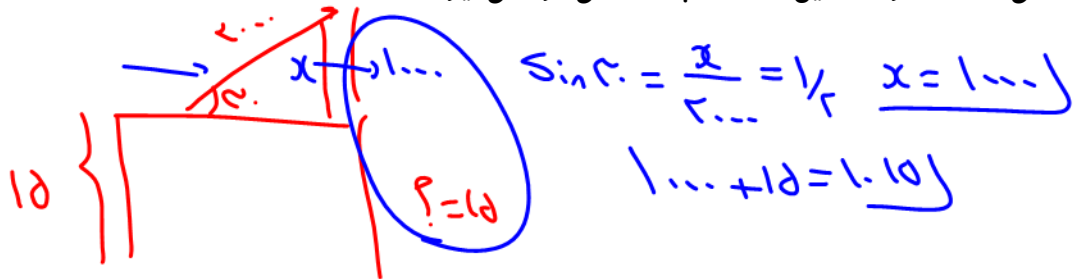
$\sin 60^\circ = \frac{x}{30} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$

Total height = $150 + 15\sqrt{3}$

مثال ۲۶: یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین با زاویه ۳۰° پرتاب می‌شود. این موشک

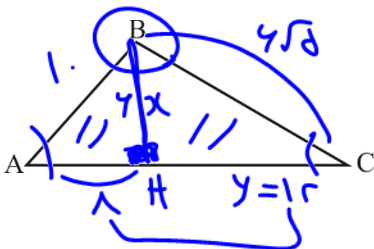
پس از طی ۲۰۰۰ متر در همین راستا در چه ارتفاعی قرار می‌گیرد؟



مثال ۲۷: اگر در مثلث مقابل $\sin A = \frac{3}{5}$ و $\tan C = \frac{1}{2}$ و $AB = 10$ cm باشد

الف) محیط مثلث را بیابید.

ب) مساحت مثلث را حساب کنید.



$\sin A = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$x = 6$

$\tan C = \frac{1}{2} = \frac{x}{y} = \frac{6}{y} \Rightarrow y = 12$

$12^2 + 6^2 = 144 + 36 = 180$

$BC = \sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5} = 6\sqrt{5}$

$P = 10 + 12 + 6\sqrt{5} = 22 + 6\sqrt{5}$

$S = \frac{6 \times 12}{2} = 36$

مثال ۲۸: اگر طول قد نسرين ۱/۵ متر و طول سایه‌اش ۰/۵ متر باشد ارتفاع تیر برقی که سایه‌اش ۳ متر است را به دست

آورید.



$\tan \alpha = \frac{1/5}{0/5} = \frac{x}{3}$

$3 \times 1/5 = 0/5 \times x \Rightarrow 3/5 = 0/5 x \Rightarrow 3 = 0x \Rightarrow x = 9$

مثال ۲۹: یک هواپیما در نقطه A در ارتفاع ۲ کیلومتری از زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه فرود هواپیما با افق

۱۳° باشد هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می‌آید؟ هواپیما برای فرود چه فاصله‌ی افقی را طی می‌کند؟



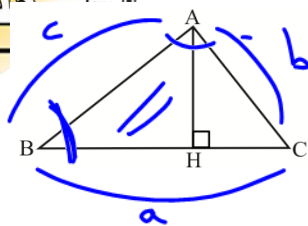
$(\tan 13^\circ = 0/23)$

$\tan 13^\circ = \frac{2}{x} = \frac{23}{100}$

$23x = 200 \Rightarrow x = 200/23$

مساحت مثلث

با توجه به شکل جاهای خالی را کامل کنید.



$\sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow$ ارتفاع $AH = AB \times \sin B$

با توجه به این که $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$ بنابراین:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ **قانون سینوس**

و یا

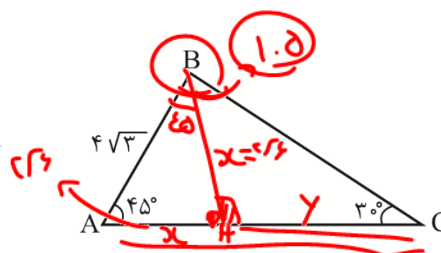
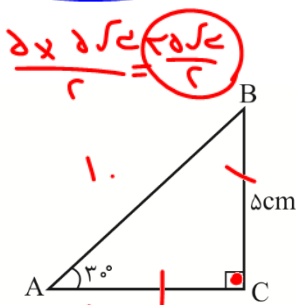
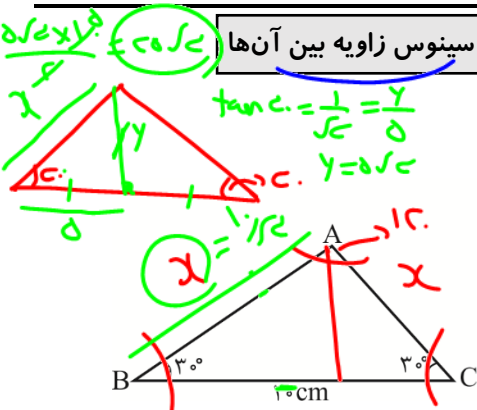
~~$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$~~

$a \sin C = c \sin A$
 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \times \sin C = \frac{1}{2} b \cdot c \times \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$

بنابراین فاصله مساحت مثلث = نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها

مثال ۳۰: مساحت مثلث‌های زیر را بیابید.

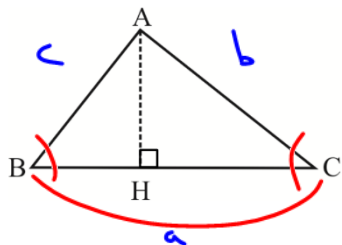


$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$
 $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\alpha = \hat{A}$ $\beta = \hat{B}$ $\theta = \hat{C}$

مثال ۳۱: با توجه به شکل، جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.



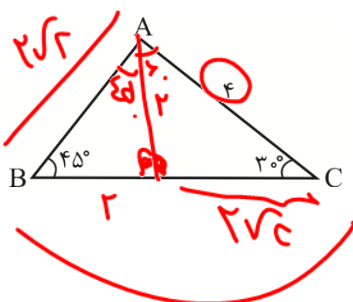
$\cos B = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \times \cos B$

$a = c \cos B + b \cos C$

$\cos C = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = AC \times \cos C$

$\Rightarrow BC = BH + HC = AB \times \cos B + AC \times \cos C = c \cos B + b \cos C$

مثال ۳۲: محیط و مساحت مثلث مقابل را بیابید.



$P = 2 + 2 + 2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}$
 $S = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$



مساحت متوازی الاضلاع به کمک نسبت های مثلثاتی

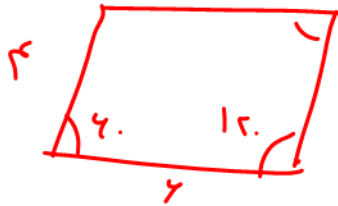


مساحت متوازی الاضلاعی که طول دو ضلع آن a و b، همچنین زاویه بین این دو ضلع α باشد، برابر است با

$$S = ab \sin \alpha$$

مثال ۳۳: طول اضلاع متوازی الاضلاعی برابر ۴ و ۶ متر می باشد. اگر یکی از زوایای آن 120° درجه باشد، مساحت شکل

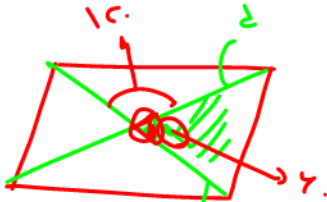
را به دست آورید.



$$S = 4 \times 6 \times \sin 120^\circ$$

$$= 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

مساحت متوازی الاضلاع به کمک قطر های آن



اگر طول دو قطر متوازی الاضلاع d و d' و زاویه بین این دو قطر برابر α باشد، داریم:

$$S = \frac{1}{2} dd' \sin \alpha$$

در واقع از برخورد دو قطر متوازی الاضلاع، چهار مثلث هم مساحت ایجاد می شود. (چرا؟)

$$S_D = \frac{1}{2} dd' \sin \alpha = \frac{1}{2} \times d \times d' \times \sin \alpha$$

مثال ۳۴: اگر زاویه بین دو قطر متوازی الاضلاع 120° و طول این دو قطر ۵ و ۹ واحد باشند، مساحت شکل را بیابید.

$$S_D = \frac{1}{2} \times 5 \times 9 \times \sin 120^\circ = \frac{45}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{45\sqrt{3}}{4}$$

دایره مثلثاتی

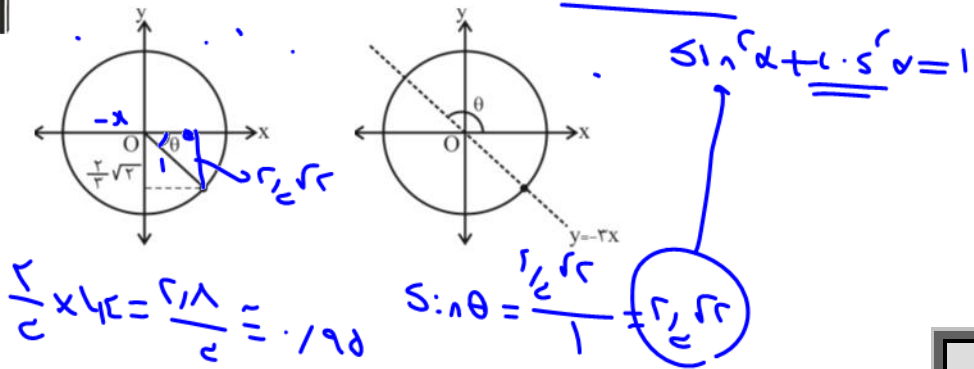
$$R = 1$$

تعریف دایره مثلثاتی: دایره ای است جهت دار به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع واحد که جهت مثبت آن عکس حرکت عقربه های ساعت می باشد.





مثال ۳۷: با توجه به شکل نسبت‌های مثلثاتی θ در دایره‌ی مثلثاتی را به دست آورید.



رادیان

برای اندازه‌گیری زاویه‌ها واحد دیگری هم وجود دارد که بسیار کارآمد است. این واحد رادیان نام دارد.

تعریف یک رادیان

در هر دایره رادیان، برابر با اندازه‌ی زاویه‌ای مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر با طول شعاع دایره است. یک

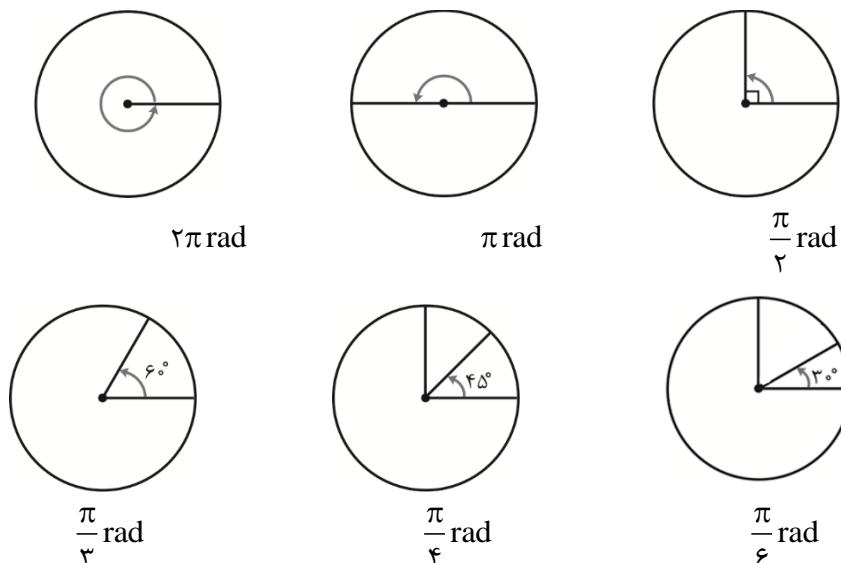
رادیان تقریباً $57/29^\circ$ است. یعنی: $1 \text{ rad} = 57/29^\circ$

تبدیل واحدهای زاویه

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

اگر D اندازه زاویه‌ای برحسب درجه و R اندازه این زاویه برحسب رادیان باشد، آن‌گاه:

مثال ۳۸: در شکل زیر زاویه‌های معروف را با اندازه‌ی آن‌ها برحسب رادیان نشان داده‌ایم.





مثال ۳۹: کدام تساوی درست نیست؟

(۱) $\frac{3\pi}{4}$ رادیان = 135°

(۲) $\frac{3\pi}{8}$ Rad = 67.5°

(۳) $\frac{4}{15}$ رادیان = 32°

(۴) $\frac{3}{4}$ رادیان = $(\frac{135}{\pi})^\circ$

مثال ۴۰: انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 6° رادیان در کدام ناحیه قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

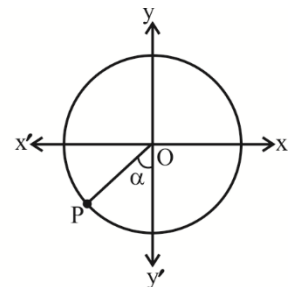
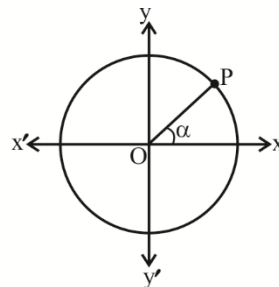
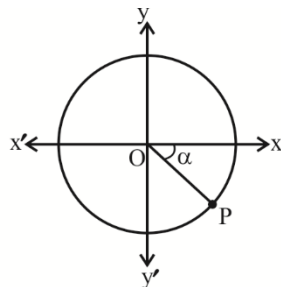
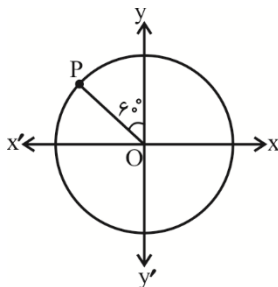
مثال ۴۱: انتهای کمان نظیر زاویه‌ی $\frac{17\pi}{4}$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

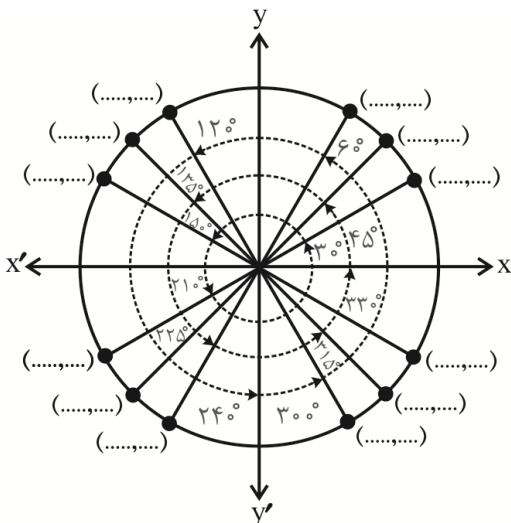
تعیین علامت مختصات نقاط در ۴ ناحیه

$\alpha = 60^\circ, OP = 1$

مثال ۴۲: با توجه به شکل‌های مقابل مختصات نقطه‌ی P را به دست آورید.



مثال ۴۳: با توجه به شکل مختصات هر یک از نقاط را بنویسید. به علامت مختصات در هر ناحیه توجه کنید.



مثال ۴۴: حاصل عددی هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) $\sin 30^\circ \times \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \times \sin 45^\circ =$

ب) $\sin 60^\circ \times \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \times \sin 45^\circ =$

ج) $\sin^2 60^\circ - \cos^2 60^\circ - \frac{1}{3} \tan^2 60^\circ =$

د) $\frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \times \tan 30^\circ} =$

مثال ۴۵: اگر α و β دو زاویه حاده باشد که $\alpha < \beta$ ، مقایسه هر یک از عبارتهای زیر را کامل کنید.

الف) $\sin \alpha$ $\sin \beta$

ب) $\cos \alpha$ $\cos \beta$

ج) $\tan \alpha$ $\tan \beta$

د) $\cot \alpha$ $\cot \beta$



$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

مثال ۴۶: اگر $\sin \alpha = -\frac{1}{6}$ و انتهای کمان α در ناحیه سوم واقع باشد، دیگر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

مثال ۴۷: اگر $\tan \alpha = -3$ باشد، α در چه ناحیه‌هایی می‌تواند قرار داشته باشد؟

مثال ۴۸: اگر $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ باشد و $\tan \alpha > 0$ باشد حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

الف) $\sin \alpha \cdot \tan \alpha - \cos \alpha =$

ب) $\frac{\cot \alpha \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} - \tan \alpha \cot \alpha =$

مثال ۴۹: اگر خط $y = x$ از مبدأ (O) یک دایره مثلثاتی بگذرد و نقطه P واقع بر آن در ناحیه سوم باشد، OP با جهت مثبت محور x ها چه زاویه‌ای دارد؟ نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را به دست آورید.

مثال ۵۰: اگر انتهای کمان α و β در ناحیه دوم باشد و $\alpha < \beta$ آن گاه هر یک از عبارتهای زیر را کامل کنید.

الف) $\sin \alpha$ $\sin \beta$

ب) $\cos \alpha$ $\cos \beta$

ج) $\tan \alpha$ $\tan \beta$

د) $\cot \alpha$ $\cot \beta$

مثال ۵۱: اگر $15^\circ < \alpha < 90^\circ$ و $\sin 2\alpha = \frac{3m-1}{5}$ باشد، محدوده‌ی m را تعیین کنید.

مثال ۵۲: اگر α و β دو زاویه تند باشد به طوری که $\alpha < \beta$ باشد آن گاه هر یک از عبارتهای زیر را کامل کنید.

الف) $\sin(-\alpha)$ $\sin(-\beta)$

ب) $\cos(-\alpha)$ $\cos(-\beta)$

ج) $\tan(-\alpha)$ $\tan(-\beta)$

د) $\cot(-\alpha)$ $\cot(-\beta)$

تعیین مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای بیش از ۹۰ درجه

فرض کنیم α زاویه‌ای تند دارای نسبت‌های مثلثاتی شناخته شده باشد، زوایای بیش از ۹۰ درجه به دو دسته تقسیم می‌شوند.

(زاویه α برابر با 0° ، 30° ، 45° ، 60° و 90° باشد.)

دسته اول: زوایایی که از جمع یا تفریق α با مضربی از 180° به دست می‌آید. مانند:

$$\alpha = 210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$$

$$\alpha = 420^\circ = 2(180^\circ) + 60^\circ$$

$$\alpha = 300^\circ = 2(180^\circ) - 60^\circ$$

$$x = k(180^\circ) \pm \alpha$$



دسته دوم: زوایایی که از جمع یا تفریق α با مضرب فردی از 90° به دست می آیند. یعنی:

$$\alpha = 240^\circ = 3(90^\circ) - 30^\circ$$

$$\alpha = 135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$$

$$x = k(90^\circ) \pm \alpha \text{ فرد } k$$

برای محاسبه مقادیر مثلثاتی این زوایا (هر دو دسته) گام نخست این است:

گام اول: تعیین علامت نسبت مثلثاتی خواسته شده با توجه به ناحیه‌ای که انتهای کمان در آن قرار دارد.

گام دوم دسته اول: برای تعیین مقدار نسبت مثلثاتی دسته اول پس از ثبت علامت کافی است نسبت مثلثاتی زاویه α نوشته

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

شود، مانند:

گام دوم دسته دوم: برای تعیین علامت مقدار نسبت مثلثاتی دسته دوم از تغییر نسبت استفاده می‌کنیم یعنی پس از ثبت

علامت نسبت خواسته شده باید نسبت زاویه α را با تغییر نسبت خواسته شده از سینوس به کسینوس و برعکس (و از تانژانت به کتانژانت و برعکس) نوشته شود.

مثال ۵۳: با توجه به نمونه کامل و شکل داده شده جاهای خالی را کامل کنید.

دسته اول:

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + \dots) = \dots = \dots$$

$$\tan 120^\circ = \tan(\dots - \dots) = \dots = \dots$$

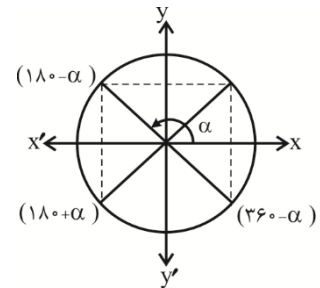
$$\cot 240^\circ = \dots$$

$$\sin(-60^\circ) = \dots$$

$$\cos(240^\circ) = \dots$$

$$\tan(420^\circ) = \dots$$

$$\cot(390^\circ) = \dots$$



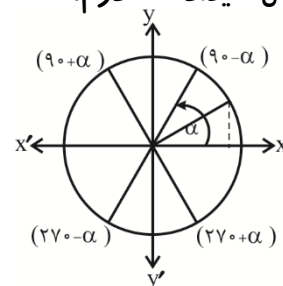
مثال ۵۴: کامل کنید. دسته دوم:

$$\sin 225^\circ = \sin(270^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 330^\circ = \cos(270^\circ + \dots) = \dots = \dots$$

$$\tan 120^\circ = \dots = \dots = \dots$$

$$\cot 210^\circ = \dots = \dots = \dots$$





مثال ۵۵: کامل کنید.



$$\sin 205^\circ = \sin (180^\circ + 25^\circ) = -\sin 25^\circ$$

$$\cos 380^\circ = \dots\dots$$

$$\tan 110^\circ = \dots\dots$$

$$\sin 75^\circ = \sin (90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$\cos 105^\circ = \dots\dots$$

$$\tan 250^\circ = \dots\dots$$

$$\cot 290^\circ = \dots\dots$$

$$\sin(90 + \alpha) = \dots$$

$$\cos(90 + \alpha) = \dots\dots$$

$$\tan(90 + \alpha) = \dots$$

$$\cot(90 + \alpha) = \dots\dots$$

مثال ۵۶. اگر فرض کنیم $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ هر یک از عبارات را کامل کنید. (راهنمایی: ابتدا هر یک از نسبت های α را



بیابید.)

$$\sin (90^\circ + \alpha) =$$

$$\cos (270^\circ - \alpha) =$$

$$\tan (270^\circ + \alpha) =$$

$$\cot (270^\circ - \alpha) =$$

مثال ۵۷. مقادیر نسبت های مثلثاتی زوایای خواسته شده را بیابید. ($\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$)



$$1) \sin (150^\circ) + \cos (120^\circ) =$$

$$3) \tan (105^\circ) + \cot (285^\circ) =$$

$$2) \tan (420^\circ) + 2 \sin (240^\circ) =$$

$$4) \sin (75^\circ) - \cos (255^\circ) =$$



مثال ۵۸: اگر α و β دو زاویه در ناحیه اول مختصات باشند و $\alpha + \beta = 90^\circ$ ،

حاصل $\cos(2\alpha + \beta) - \sin(\alpha + 2\beta)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $2 \sin \alpha$ (۳) $-2 \sin \alpha$ (۴) $\sin \alpha$

مثال ۵۹: مقدار هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را بنویسید و جدول را کامل کنید. (مقادیر جدول را به خاطر بسپارید).

α / نسبت	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								
$\tan \alpha$								
$\cot \alpha$								

α / نسبت	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								
$\tan \alpha$								
$\cot \alpha$								

شیب خط (ضریب زاویه)

مثال ۶۰: الف) نمودار خط‌های زیر را به دقت رسم کنید.

۱) $y = 3x$

۲) $y = -x + 1$

ب) زاویه هر خط نسبت به جهت مثبت محور X ها را پیدا کرده و تانژانت آن را بیابید.

ج) چه رابطه‌ای بین \tan زاویه و شیب خط وجود دارد؟



مثال ۶۱: معادله خطی به صورت $(a-1)x + 2ay = 5$ مفروض است. a را چنان تعیین کنید که

خط مزبور با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه 135° درجه بسازد.

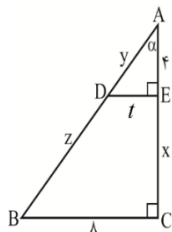
مثال ۶۲: m را چنان بیابید که خطی به معادله $my + mx - x + 5 = 0$ با جهت مثبت محور x ها زاویه 30° درجه

بسازد.

مثال ۶۳: m و n را چنان بیابید که خط $y = mx + n$ با جهت مثبت محور y ها زاویه 135° درجه بسازد و از نقطه‌ای به

طول واحد واقع بر محور طول‌ها بگذرد.

مثال ۶۴: مطلوبست شیب خطی که با خط $\sqrt{3}x - y = 1$ زاویه 45° درجه می‌سازد.



مثال ۶۵: در شکل مقابل مقادیر مجهول را بیابید. $(\tan \alpha = 7/5)$

مثال ۶۶: نقاط $A(2, a)$ و $B(2a-1, a+7)$ مفروضند. a را چنان تعیین کنید که خط AB با جهت مثبت محور طول‌ها

زاویه 135° درجه بسازد.

مثال ۶۷: زاویه‌ی هر یک از خط‌های زیر را با محور y ها تعیین کنید.

الف) $3x - 3y = 8$

ب) $\sqrt{3}x - y = 2$

اتحاد مثلثاتی

تعریف: هر تساوی که به ازای هر مقدار کمان مثلثاتی تعریف شده و برقرار است را یک اتحاد مثلثاتی می‌گویند.

مثال ۶۸: برخی اتحادهای مثلثاتی که پیش از این به کمک تعاریف ثابت کرده‌اید را کامل کنید.

$$\begin{cases} ۱) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \\ ۲) \sin \alpha = \\ ۳) \cos \alpha = \end{cases}$$

$$۵) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} =$$

$$۶) ۱ + \tan^2 \alpha =$$

$$۷) ۱ + \cot^2 \alpha =$$

$$۴) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$۸) \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$$

مثال ۶۹: درستی هر یک از رابطه‌های زیر را ثابت کنید.

$$۱) \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

$$۲) \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \tan x$$

$$۳) \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$۴) \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \cot x + \tan x$$





مثال ۷۰: هرگاه $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = 2$ باشد، $\tan x$ را حساب کنید.

مثال ۷۱: اگر $\tan x = 2$ باشد حاصل $\frac{3 \sin x + 2 \cos x}{5 \sin x - 4 \cos x}$ را به دست آورید.

مثال ۷۲: اگر $\tan \alpha = \frac{x+1}{x}$ و $\cot \alpha = \frac{2x}{x^2-1}$ باشد مقدار x را به دست آورید.

مثال ۷۳: عبارت‌های زیر را بر حسب $\cot x$ بنویسید.

۱) $\frac{\sin x}{1 - \cos x} - \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

۲) $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} - \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}$