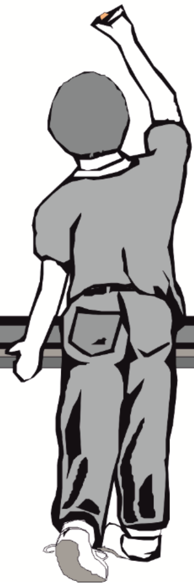
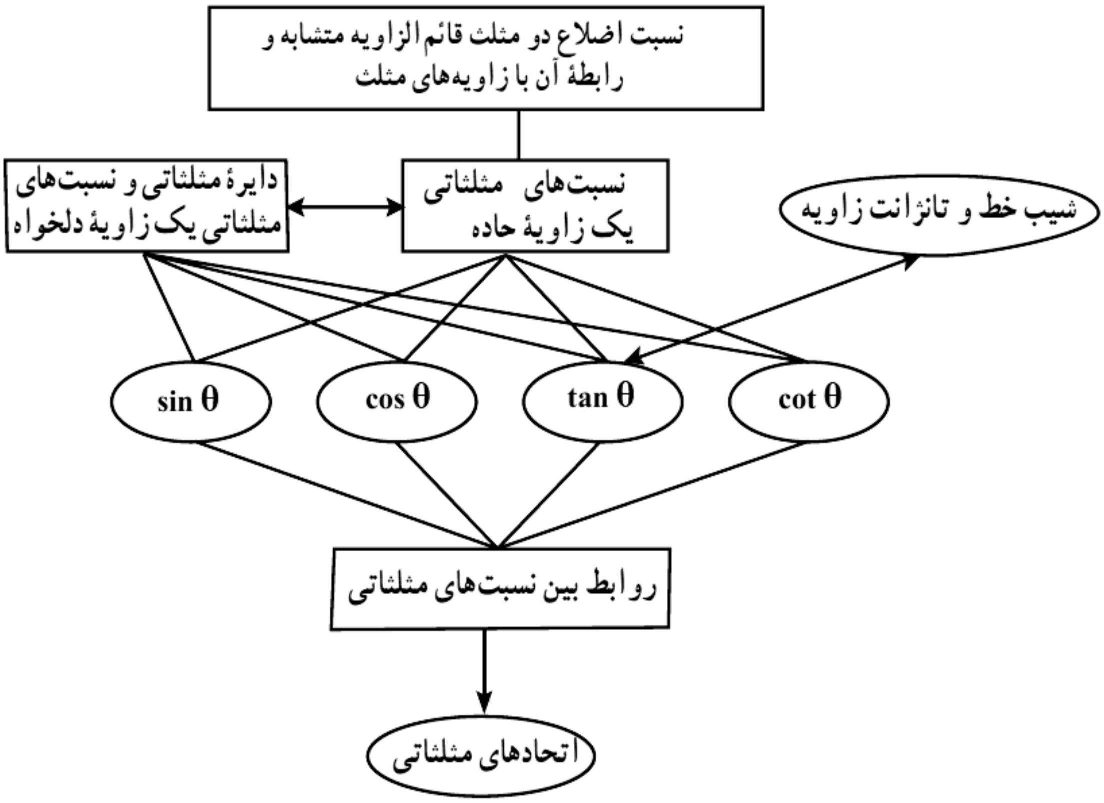
فصل دوم

مثلثات



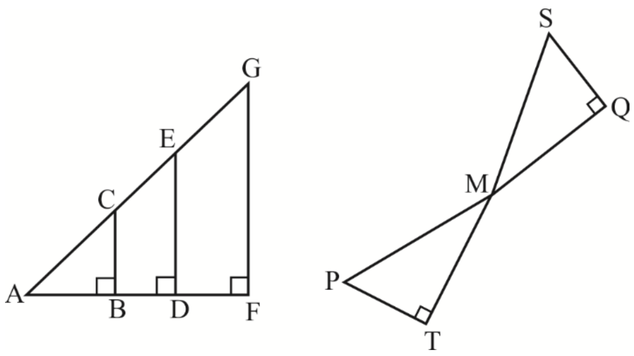


مقدمه: مثلثات به عنوان ترکیبی از ریاضیات و هندسه دانشی است که به بررسی روابط بین زاویه ها و اضلاع یک مثلث می پردازد و غیر از آن در مسائل فیزیک، پزشکی و حتی مسائل نظامی نقش بسیار اساسی دارد.

یادآوری

مثال ۱: دو مثلث متشابهند هرگاه .... از مثلثی با .... از مثلث دیگر برابر باشند.

مثال ۲: در هر یک از شکل‌های زیر



الف) هر دو مثلث متشابه را مشخص کنید. با دلیل

ب) نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث را بنویسید.

$\hat{A}=\hat{A}, \hat{B}=\hat{D} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta ADE \Rightarrow$

$\hat{A}=\hat{A}, \hat{B}=\hat{F} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta AFG \Rightarrow$

$\hat{A}=\hat{A}, \hat{D}=\hat{F} \Rightarrow \Delta ADE \approx \Delta AFG \Rightarrow$

$\hat{M}=\hat{M}$ متقابل به رأس , $\hat{T}=\hat{Q}=90^\circ \Rightarrow \Delta PTM \approx \Delta MQS \Rightarrow$

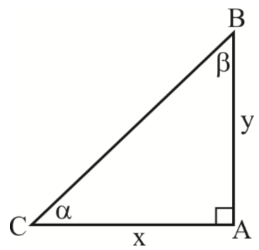
مثال ۳: در مثال ۲،

الف) نسبت اضلاع روبه‌رو به اضلاع مجاور زاویه A در هر ۳ مثلث ABC و ADE و AFG را بنویسید. آیا این نسبت‌ها برابرند؟

ب) آیا نسبت اضلاع روبه‌رو به M و وتر در مثلث‌های MPT و MQS برابر است؟ چرا؟

آیا می‌توان گفت در همه مثلث‌های قائم‌الزاویه، نسبت اضلاع روبه‌رو به مجاور زاویه‌ای برابر با α با هم مساوی‌اند؟

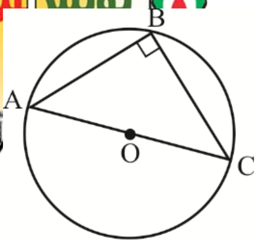
تعریف: نسبت ضلع روبه‌رو به ضلع مجاور زاویه ای α در مثلث قائم‌الزاویه ABC را تانژانت زاویهٔ α گویند و به‌صورت زیر نمایش می‌دهند.



$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$

تعریف: عکس تانژانت را کتانژانت می‌نامند و به‌صورت $\cot$ یا $\cot g$ نمایش می‌دهند.

$$\cot\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور زاویه } \alpha}{\text{ضلع روبه‌رو زاویه } \alpha} = \frac{x}{y}$$



مثال ۴ : در مثلث ABC اگر O مرکز دایره و $BC = OC$ باشد:

الف) اندازه زاویه‌های A و C را معلوم کنید.

ب) $\tan A$ و $\tan C$ را به‌دست آورید. $\cot$ این زاویه‌ها چقدر است؟

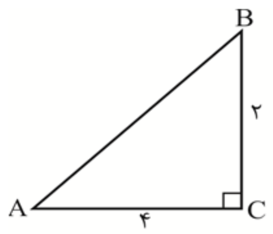
مثال ۵ : با توجه به تمرینات حل شده جدول زیر را کامل کنید.

α / نسبت	۳۰°	۴۵°	....
$\tan\alpha$	....	....	....
$\cot\alpha$	....	....	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

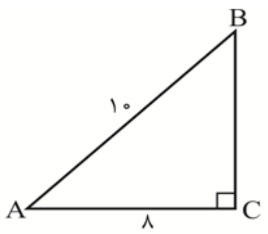
مثال ۶: مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۲ سانتی‌متر رسم کنید و به کمک آن نشان دهید:

$\tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$, $\tan ۳۰^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$

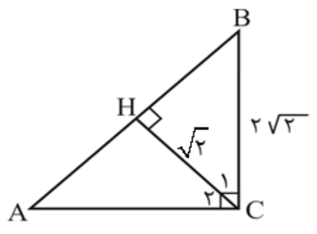
مثال ۷: در هر یک از شکل‌های زیر تانژانت زاویه‌های تند را به‌دست آورید.



شکل ۱



شکل ۲



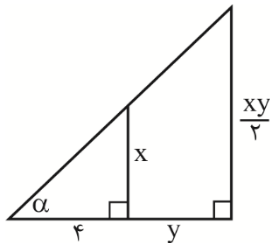
شکل ۳

مثال ۸: در هر یک از شکل‌های تمرین ۲، مقدار کتانژانت زاویه‌های تند را به‌دست آورید.

مثال ۹: زاویه‌ای رسم کنید که تانژانت آن برابر با $\frac{۵}{۱۲}$ است.

مثال ۱۰: زاویه‌ای رسم کنید که کتانژانت آن برابر با ۲/۴ است.

مثال ۱۱: در شکل مقابل $\tan\alpha = \frac{۳}{۷}$ است، مقدار x و y را به‌دست آورید.



مثال ۱۲: اگر α و β دو زاویه متمّم باشند و داشته باشیم $\frac{۴\tan\alpha - ۳\cot\beta}{\tan^{۲}\alpha} = \sqrt{۳}$، آنگاه $\cot\alpha$ را به‌دست آورید.

نسبت‌های مثلثاتی

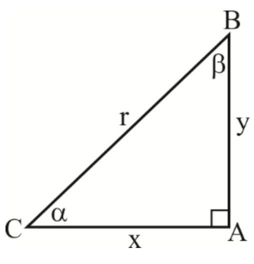
در مثلث قائم‌الزاویه مقابل نسبت‌های بین اضلاع مثلث را چنین تعریف می‌کنیم:

تانژانت α: $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$

کتانژانت α: $\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}$

سینوس α: نسبت ضلع روبه‌روی زاویه α به وتر مثلث $\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$

کسینوس α: نسبت ضلع مجاور زاویه α به وتر مثلث $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$



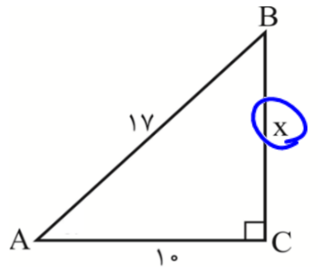
مثال ۱۳: همه نسبت‌های مثلثاتی زاویه β را بنویسید و آن‌ها را با نسبت‌های زاویه α مقایسه کنید.

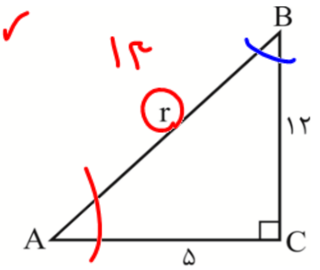
$$\sin\beta = \frac{x}{r} = \cos\alpha \quad , \quad \tan\beta = \frac{x}{y} = \cot\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} = \sin\alpha \quad , \quad \cot\beta = \frac{y}{x} = \tan\alpha$$

مثال ۱۴: اگر $\alpha+\beta = ...$ آن‌گاه $\sin\alpha = \cos\beta$ و $\sin\beta = \cos\alpha$ و $\tan\alpha = \cot\beta$ و $\tan\beta = \cot\alpha$

مثال ۱۵: با توجه به هر شکل نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های A و B را بنویسید.





$\sin A = \frac{12}{13} = \cos B$

$\cos A = \frac{5}{13} = \sin B$

$\tan A = \frac{12}{5} = \cot B$

$\cot A = 5/12 = \tan B$

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

مثال ۱۶: با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) نسبت سینوس به کسینوس یک زاویه با کدام نسبت مثلثاتی برابر است؟ و عکس این نسبت با کدام نسبت برابر است؟

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$; $\frac{y/r}{x/r} = \frac{y}{x} = \tan\alpha$

۱) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ ۲) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$

ب) ثابت کنید $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2+x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$

ج) نتایج حاصل از رابطه $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ را بنویسید.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \end{cases}$$

مثال ۱۷: حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید. $(\alpha+\beta=90^\circ)$

$\tan\alpha , \cot\alpha \neq 0$

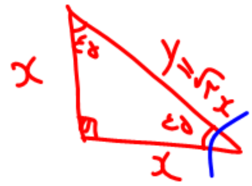
$$\frac{2\sin\alpha+\cos\beta}{\cos\beta}-\frac{\tan\alpha}{\cot\beta}=$$

$\frac{3\sin\alpha}{\sin\alpha}=3$

$\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha}=1$

$=3-1=\boxed{2}$

مثال ۱۸: با رسم مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین نسبت‌های مثلثاتی زاویه 45° را بیابید.



$y^2=x^2+x^2=2x^2$

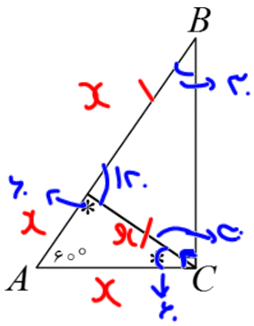
$y=\sqrt{2}x$

$\sin 45=\frac{x}{\sqrt{2}x}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\cos 45$

$\tan 45=\frac{x}{x}=1=\cot 45$

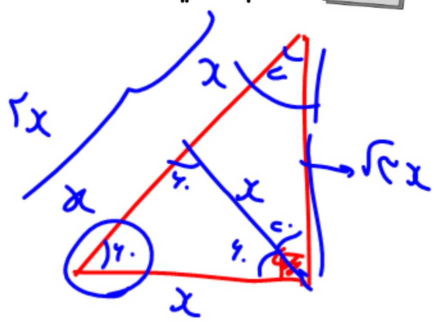
مثال ۱۹: ثابت کنید:

$4x^2-x^2=3x^2$



الف) $\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

ب) $\sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\sin 30=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}=\cos 60$

$\sin 60=\frac{\sqrt{3}x}{2x}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30$

مثال ۲۰: جدول مقادیر مثلثاتی برای زوایای 30°، 45° و 60° را کامل کنید.

نسبت \ α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

پایه و رشته دهم جناب استاد بابک روغنی

مثال ۲۱: در مثلث ABC اگر $\hat{A} = 90^\circ$ و $AB = 2\sqrt{2}$ و $AC = 3\sqrt{2}$ سانتی‌متر باشد،

آن‌گاه عبارت‌های زیر را کامل کنید.

$8 + 18 = 26 = BC^2$

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$

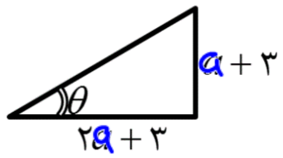
$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$

الف) $\sin^2 B - \cos^2 B = \left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{26}}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{26}}\right)^2 = \frac{18}{26} - \frac{8}{26} = \frac{10}{26}$

ب) $\cos^2 C - \sin^2 C = \left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{26}}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{26}}\right)^2 = \frac{18}{26} - \frac{8}{26} = \frac{10}{26}$

ج) $\cot B \underset{\tan B}{\cot C} = \frac{\cancel{2\sqrt{2}}}{\cancel{3\sqrt{2}}} \times \frac{\cancel{3\sqrt{2}}}{\cancel{2\sqrt{2}}} = 1$

مثال ۲۲: در شکل مقابل $\tan\theta = \frac{3}{4}$ است. مقدار a را به‌دست آورید.



$\tan\theta = \boxed{\frac{3}{4} = \frac{a+3}{2a+3}}$

$3(2a+3) = 4(a+3)$

$6a+9 = 4a+12$

$6a-4a = 12-9$

$2a = 3$

$\boxed{a = 3/2}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

مثال ۲۳: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

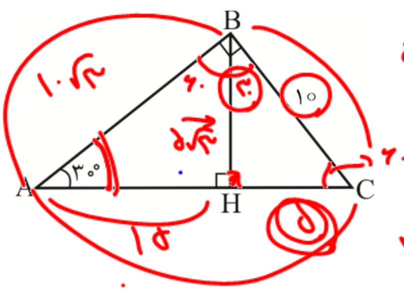
الف) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4}$

ب) $\tan 60^\circ \tan 30^\circ = \tan 60 \times \cot 60 = 1$

ج) $\tan 45^\circ . \sin 60^\circ + \cos 30^\circ . \cos 45^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}}$

د) $\tan 75^\circ . \cot 75^\circ - \sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ = 1 - (\sin^2 15 + \cos^2 15) = 1 - 1 = \boxed{0}$

مثال ۲۴: با توجه به شکل مقابل، طول اضلاع خواسته شده را بیابید.



الف) $AC = 15 + 5 = 20$ ب) $AB = 10\sqrt{3}$ ج) $BH = 5\sqrt{3}$

د) $HC = 5$ هـ) $AH = 15$

** در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰ نصف وتر است.

$20^2 = 400 + 100$

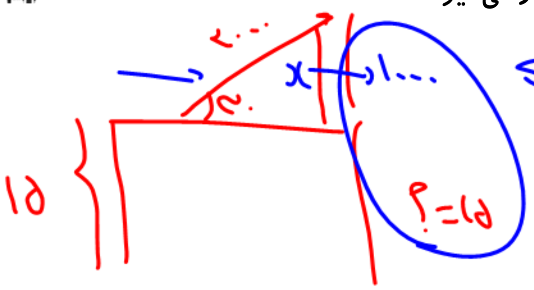
$\sin 30 = \frac{x}{10} = \frac{1}{2}$ $x = 10 \times \frac{1}{2} = 5$

مثال ۲۵: علی بادباکی را از روی زمین با نخی به طول ۳۰ متر به هوا فرستـــاده اســت. اگر زاویه نخ با خط افق برابر با ۶۰ درجه باشد، ارتفاع بادباک از زمین چقدر است؟ (قد علی ۱۵۰ سانتی‌متر است.)

$? = x (15\sqrt{3})$ $\sin 60 = \frac{x}{\cancel{30}_{15}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = 15\sqrt{3}$

$\boxed{15\sqrt{3} + 1/5}$

مثال ۲۶: یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین با زاویه ۳۰° پرتاب می‌شود. این موشک پس از طی ۲۰۰۰ متر در همین راستا در چه ارتفاعی قرار می‌گیرد؟



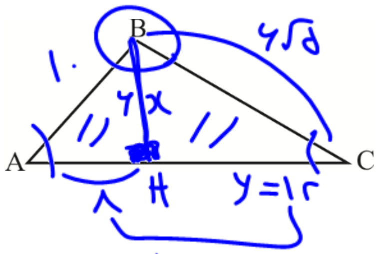
$\sin 30 = \frac{x}{2000} = \frac{1}{2}$ $\quad x = 1000$

$1000 + 15 = 1015$

مثال ۲۷: اگر در مثلث مقابل $\sin A = \frac{۳}{۵}$ و $\tan C = \frac{۱}{۲}$ و $AB = ۱۰\,cm$ باشد

الف) محیط مثلث را بیابید.

ب) مساحت مثلث را حساب کنید.



$\sin A = \frac{3}{5} = \frac{x}{10}$

$\boxed{x = 6}$

$\tan C = \frac{1}{2} = \frac{x}{y} = \frac{6}{y} \Rightarrow \boxed{y = 12}$

$12^2 + 6^2 = 144 + 36 = 180$

$BC = \sqrt{180} = \sqrt{4 \times 9 \times 5} = 6\sqrt{5}$

$20^2 = 400$

$100 + 180$

$P = 10 + 20 + 6\sqrt{5}$

$= \boxed{30 + 6\sqrt{5}}$

$S = \frac{6 \times 20}{2} = 60$

مثال ۲۸: اگر طول قد نسرین ۱/۵ متر و طول سایه‌اش ۰/۵ متر باشد ارتفاع تیر برقی که سایه‌اش ۳ متر است را به‌دست آورید.

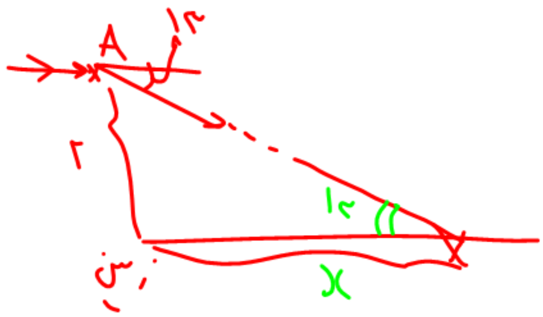
$\tan\alpha = \frac{1/5}{0/5} = \frac{x}{3}$

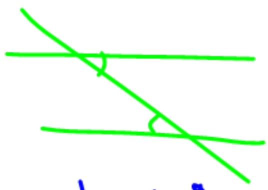
$3 \times 1/5 = 0/5 \times x$

$4/5 = 0/5x \longrightarrow x = \frac{4/5}{0/5} = \frac{45}{5} = \boxed{9}$

مثال ۲۹: یک هواپیما در نقطه A در ارتفاع ۲ کیلومتری از زمین در حال فرود آمدن اسـت. اگر زاویه فرود هواپیما با افق ۱۳° باشـد هواپیما در چه فاصـله‌ای از نقطه A فرود می‌آید؟ هواپیما برای فرود چه فاصـله‌ی افقی را طی می‌کند؟

$(\tan ۱۳^\circ = ۰/۲۳)$





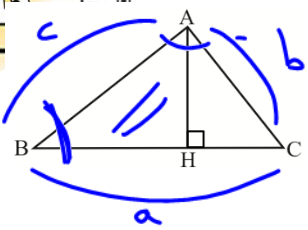
$\tan 13^\circ = \frac{2}{x} = \frac{23}{100}$

$23x = 200$

$x = \frac{200}{23}$

مساحت مثلث

با توجه به شکل جاهای خالی را کامل کنید.



$\sin B = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow$ ارتفاع $AH = AB \times \sin B$

با توجه به این‌که $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH.BC$ بنابراین:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.BC.\sin B$

$\boxed{\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}}$ قضیه سینوس‌ها

$S_\Delta = \frac{1}{2} ab\sin C = \frac{1}{2} bc\sin A = \frac{1}{2} ac\sin B$

$a\sin C = c\sin A$

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$

و یا

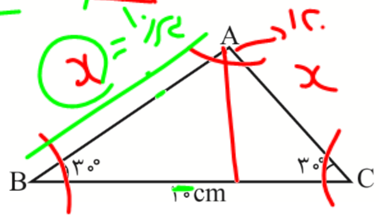
$S_{ABC} = \frac{1}{2} \ldots a \ldots \times \ldots b \ldots \times \sin C = \frac{1}{2} \ldots b \ldots \times \ldots c \ldots \times \sin A = \frac{1}{2} ac\sin B$

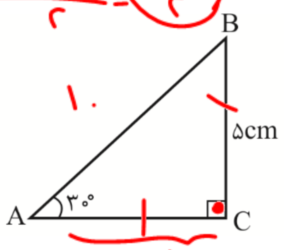
بنابراین فاصله | مساحت مثلث = نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آن‌ها |

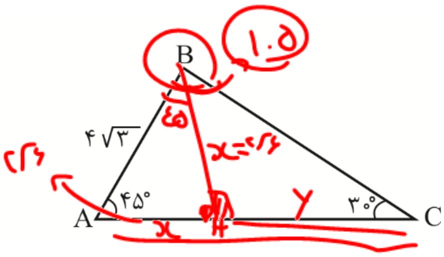
مثال ۳۰: مساحت مثلث‌های زیر را بیابید.

$\dfrac{5 \times 5\sqrt{3}}{2} = \dfrac{25\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{y}{5}$, $y = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$







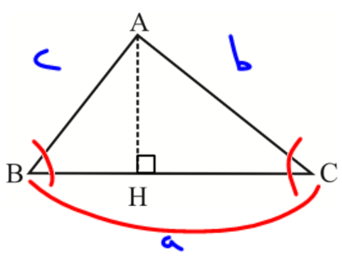
قضیه کسینوس‌ها

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos\beta$
$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \times \cos\theta$

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

$\alpha =$ آ ض $\quad \beta =$ ض ب $\quad \theta =$ ض ت

مثال ۳۱: با توجه به شکل، جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.



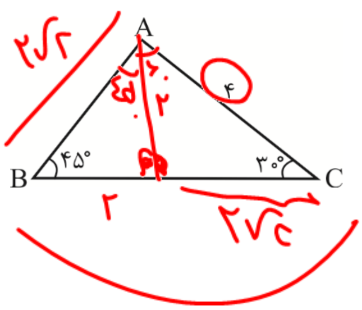
$a = c\cos B + b\cos C$

$\cos B = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \times \cos B$

$\cos C = \dfrac{HC}{AC} \Rightarrow HC = AC \times \cos C$

$\Rightarrow BC = BH + HC = AB \times \cos B + AC \times \cos C = c \times \cos B + b\cos C$

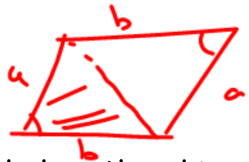
مثال ۳۲. محیط و مساحت مثلث مقابل را بیابید.



محیط $= P = 2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{3} + 4 = 6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow S = \dfrac{2 \times (2 + 2\sqrt{3})}{2} = 2 + 2\sqrt{3}$

مساحت متوازی‌الاضلاع به کمک نسبت‌های مثلثاتی



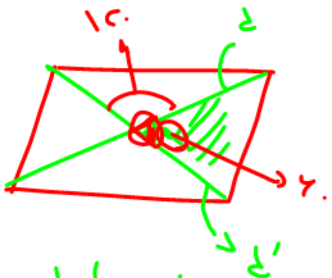
مساحت متوازی الاضلاعی که طول دو ضلع آن a و b ، همچنین زاویه بین این دو ضلع α باشد، برابر است با

$$\boxed{S = ab\sin\alpha}$$

مثال ۳۳: طول اضلاع متوازی الاضلاعی برابر ۴ و ۶ متر می باشد. اگر یکی از زوایای آن ۱۲۰ درجه باشد، مساحت شکل را به دست آورید.

$S = 4\times 6\times \sin 60 = 4\times 6\times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$

مساحت متوازی‌الاضلاع به کمک قطر های آن



اگر طول دو قطر متوازی الاضلاع d و d' و زاویه بین این دو قطر برابر α باشد، داریم:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}dd'\sin\alpha}$$

در واقع از برخورد دو قطر متوازی الاضلاع، چهار مثلث هم مساحت ایجاد می شود.(چرا؟)

$S_1 = \frac{1}{2}\times\frac{d}{2}\times\frac{d'}{2}\times\sin\alpha = \frac{1}{8}\sin\alpha\times d.d'$

$S_{\square} = 4\times S_{\triangle} = 4\times\frac{1}{8}\times\sin\alpha.dd' = \boxed{\frac{1}{2}dd'\sin\alpha}$

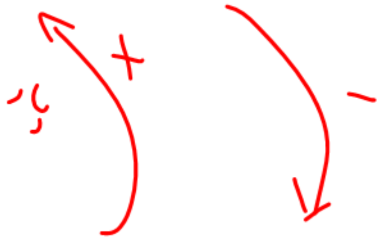
مثال ۳۴: اگر زاویه بین دو قطر متوازی الاضلاع ۱۲۰ و طول این دو قطر ۵ و ۹ واحد باشند، مساحت شکل را بیابید.

$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\times 5\times 9\times \sin 120 = 45\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{45\sqrt{3}}{4}$

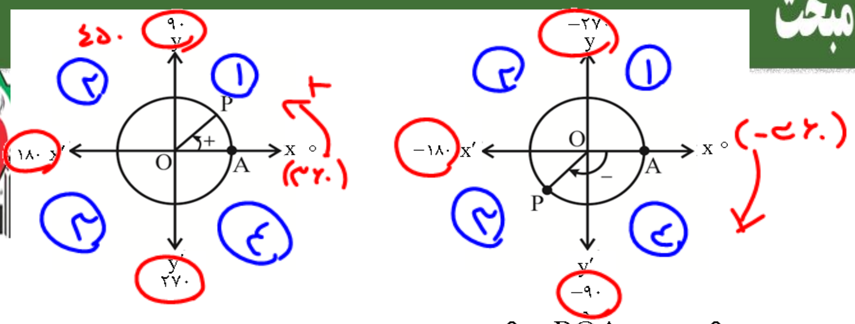
دایره مثلثاتی

$\boxed{R=1}$

تعریف دایره مثلثاتی: دایره‌ای ا ست جهت‌دار به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع واحد که جهت مثبت آن عکس حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد.

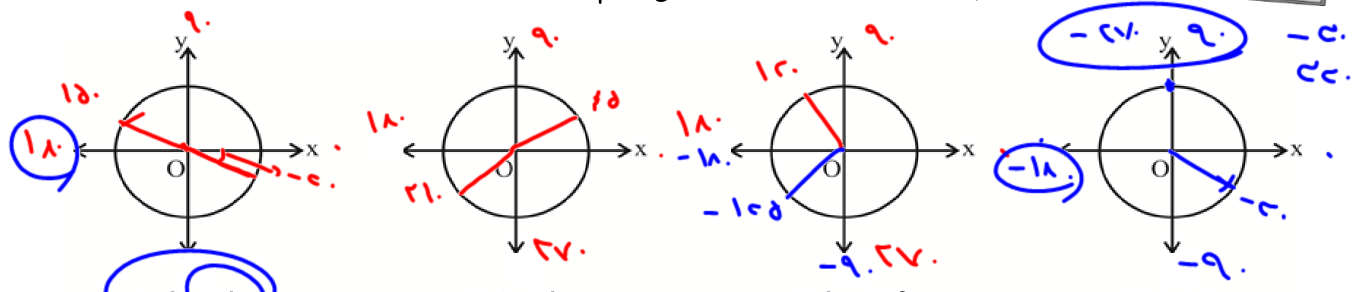


پادساعتگرد



$$-۱۸۰° < POA < -۹۰°$$

مثال ۳۵: هر یک از زوایای خواسته شده را روی دایره مثلثاتی رسم کنید.



مثال ۳۶: معادل هر یک از زوایای زیر را تعیین کنید. (برحسب جهت موافق و مخالف دایره مثلثاتی)

۱) $۱۸۰° \rightarrow$ −۱۸۰

۲) $۹۰° \rightarrow$ −۲۷۰

۳) $-۳۰۰° \rightarrow$ ۶۰

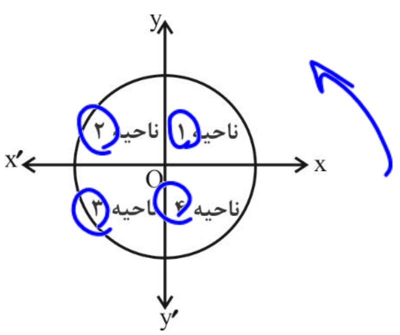
۴) $۲۱۰° \rightarrow$ −۱۵۰

۵) $-۱۳۵° \rightarrow$ ۲۲۵

۶) $-۳۰° \rightarrow$ ۳۳۰

۳۶۰ −
۱۳۵
۲۲۵

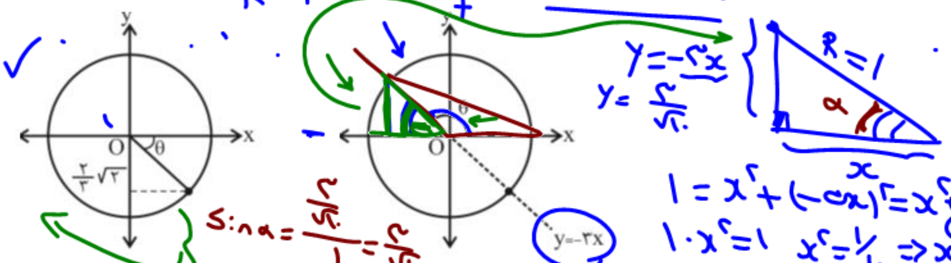
تذکر: دستگاه مختصات دایره مثلثاتی را به چهار ناحیه تقسیم می‌کند که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت شماره‌گذاری می‌شوند.



$S_\Delta = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$

مثال **۳۷: با توجه به شکل نسبت‌های مثلثاتی θ در دایره‌ی مثلثاتی را به‌دست آورید.**

$R=1$



$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha=1$

$y=-3x$

$y=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$R=1$

$1=x^2+(-3x)^2=x^2+9x^2$

$10x^2=1 \quad x^2=\frac{1}{10} \Rightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\sin\alpha=\frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{1}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\cos\alpha=\frac{-\frac{1}{\sqrt{10}}}{1}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\tan\alpha=\frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{-\frac{1}{\sqrt{10}}}=-3$

$\cot\alpha=-\frac{1}{3}$

رادیان

برای اندازه‌گیری زاویه‌ها واحد دیگری هم وجود دارد که بسیار کارآمد است. این واحد رادیان نام دارد.

تعریف یک رادیان

در هر دایره رادیان، برابر با اندازه‌ی زاویه‌ای مرکزی ا ست که طول کمان روبه‌رو به آن برابر با طول شعاع دایره ا ست. یک

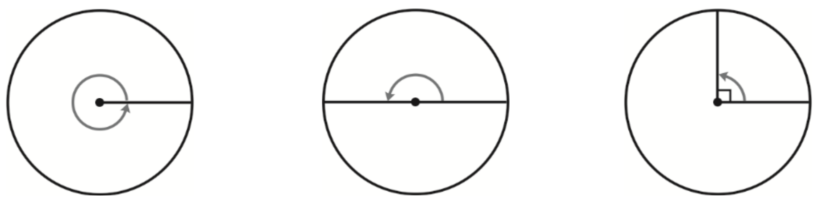
رادیان تقریباً $۵۷/۲۹^\circ$ است. یعنی: $1\text{rad} = ۵۷/۲۹^\circ$

تبدیل واحدهای زاویه

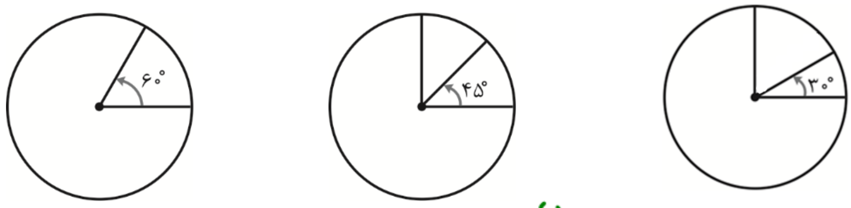
اگر D اندازه زاویه‌ای برحسب درجه و R اندازه این زاویه برحسب رادیان باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}}$$

مثال **۳۸: در شکل زیر زاویه‌های معروف را با اندازه‌ی آن‌ها برحسب رادیان نشان داده‌ایم.**



$2\pi\,\text{rad} = 360$ $\qquad$ $\pi\,\text{rad} = 180$ $\qquad$ $\frac{\pi}{2}\,\text{rad} = 90$



$\frac{\pi}{3}\,\text{rad} = 60$ $\qquad$ $\frac{\pi}{4}\,\text{rad} = 45$ $\qquad$ $\frac{\pi}{6}\,\text{rad} = 30$

مثال ۳۹: کدام تساوی درست نیست؟

۱) $۱۳۵^\circ = \frac{۳\pi}{۴}$ رادیان

۲) $\frac{۳\pi}{۸}\text{Rad} = ۶۷/۵^\circ$

۳) $۳۲^\circ = \frac{۴}{۱۵}$ رادیان

۴) $(\frac{۱۳۵}{\pi})^\circ = \frac{۳}{۴}$ رادیان

مثال ۴۰: انتهای کمان روبه‌رو به زاویه ۶− رادیان در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

مثال ۴۱: انتهای کمان نظیر زاویه‌ی $\frac{۱۷\pi}{۴}$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

تعیین علامت مختصات نقاط در ۴ ناحیه

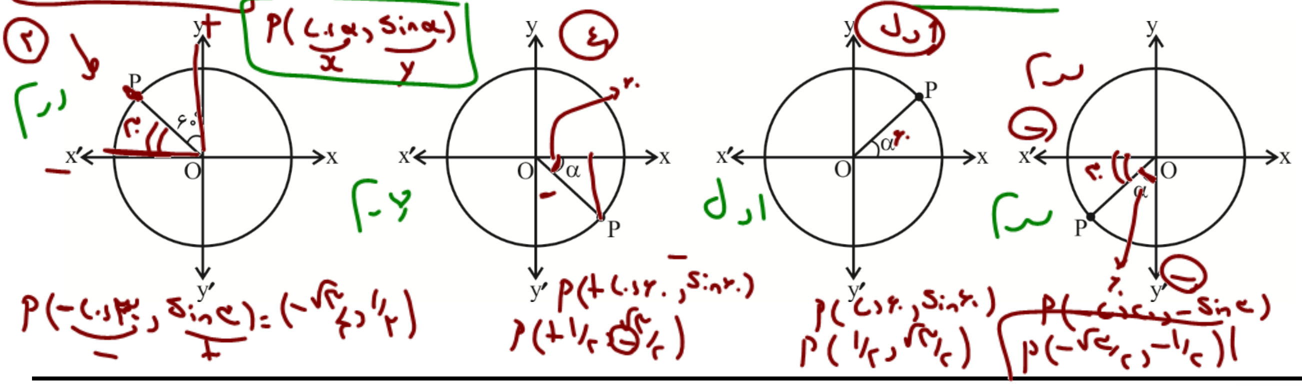
$\sin\alpha = \frac{y}{R=1} = y$

$\cos\alpha = \frac{x}{R=1} = x$

مثال ۴۲: با توجه به شکل‌های مقابل مختصات نقطه‌ی P را به‌دست آورید.

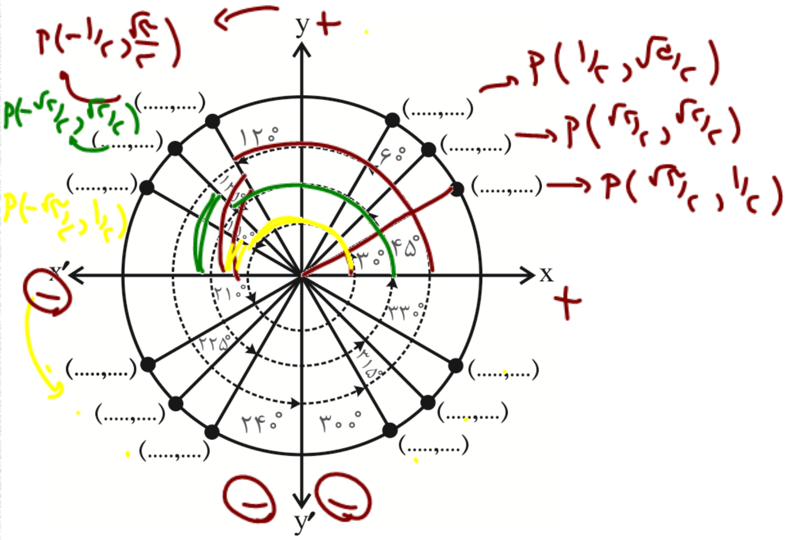
$\alpha = ۶۰^\circ , OP = ۱$ R=1

$P(\cos\alpha, \sin\alpha)$



مثال ۴۳: با توجه به شکل مختصات هر یک از نقاط را بنویسید. به علامت مختصات در هر ناحیه توجه کنید.

$P(\cos\alpha, \sin\alpha)$



مثال ۴۴: حاصل عددی هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sin 30^\circ \times \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

ب) $\sin 60^\circ \times \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \times \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ج) $\sin^2 60^\circ - \cos^2 60^\circ - \frac{1}{3}\tan^2 60^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}(\sqrt{3})^2=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times 3 = \frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

د) $\frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ \times \tan 30^\circ} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

مثال ۴۵: اگر α و β دو زاویه حاده باشد که $\alpha < \beta$، مقایسه هر یک از عبارت‌های زیر را کامل کنید.

حاده = تند = از ۹۰ کمتر

ناحیه اول

۹۰

الف) $\sin\alpha \; \boxed{<} \; \sin\beta$ — ب) $\cos\alpha \; \boxed{>} \; \cos\beta$

ج) $\tan\alpha \; \boxed{<} \; \tan\beta$ — د) $\cot\alpha \; \boxed{>} \; \cot\beta$

تذکر

۰ و ۱۸۰ منفی ضرب

$|-2|=2$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ — $\sin(-30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ — $\cos(-45^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ — $\tan(-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$ — $\cot(-60^\circ)=-\cot 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

30° ، -30° ، $+$ ، $-$ ، ربع

مثال ۴۶: اگر $\sin\alpha = -0/6$ و انتهای کمان α در ناحیه سوم واقع باشد، دیگر نسبت‌های مثلثاتی را به‌دست آورید.

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-(0.6)^2} = \sqrt{1-0.36} = \sqrt{0.64} = -0.8$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-0.6}{-0.8} = +\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ ، $\cot\alpha = \frac{4}{3}$

$\sin\alpha = -0.6 = \frac{y}{R} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$

$x^2+y^2=R^2$ ، $x^2+9=25$ ، $x^2=16$

$x=-4$ ، $y=-3$ ، $R=5$

مثال ۴۷: اگر $\tan\alpha = -3$ باشد، α در چه ناحیه‌هایی می‌تواند قرار داشته باشد؟

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$\tan\alpha = -3 = \frac{y}{x}$

ربع دوم ، ربع چهارم

$\boxed{\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \sqrt{1-\frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

مثال ۴۸: اگر $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$ باشد و $\tan\alpha > 0$ باشد حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{21}}{5}}{-\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$

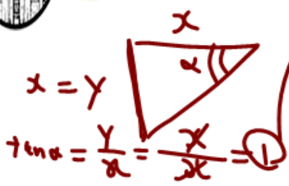
ربع سوم

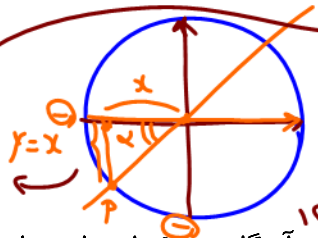
الف) $\sin\alpha . \tan\alpha - \cos\alpha =$

$-\frac{\sqrt{21}}{5}\times\frac{\sqrt{21}}{2}-\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{-21}{10}+\frac{2}{5} = \frac{-21+4}{10} = -\frac{17}{10}$

ب) $\frac{\cot\alpha . \sin\alpha}{\cos\alpha} - \tan\alpha \cot\alpha =$

مثال ۴۹: اگر خط $y = x$ از مبدأ (O) یک دایره مثلثاتی بگذرد و نقطه P واقع بر آن در ناحیه سوم باشد، OP با جهت مثبت محور xها چه زاویه‌ای دارد؟ نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را به‌دست آورید.





$x=y$, $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{x}{x} = 1$

$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow \alpha = 45$

$\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

مثال ۵۰: اگر انتهای کمان α و β در ناحیه دوم باشد و $\alpha < \beta$ آن‌گاه هر یک از عبارت‌های زیر را کامل کنید.

$120 < 150$

الف) $\sin\alpha \ \boxed{>} \ \sin\beta$ ب) $\cos\alpha \ \boxed{>} \ \cos\beta$

ج) $\tan\alpha \ \boxed{<} \ \tan\beta$ د) $\cot\alpha \ \boxed{>} \ \cot\beta$

مثال ۵۱: اگر $15^\circ < \alpha < 90^\circ$ و $\sin 2\alpha = \frac{3m-1}{5}$ باشد، محدوده‌ی m را تعیین کنید.

$\times 2 \quad (15 < \alpha < 90)$

$(30 < 2\alpha < 180)$

$\sin 30 = \frac{1}{2}$, $\sin 90 = 1$, $\sin 180 = 0$

$0 < \sin 2\alpha \leq 1$

$(0 < \frac{3m-1}{5} \leq 1) \times 5$

$0 < 3m-1 \leq 5$

$1 < 3m \leq 6$

$\frac{1}{3} < m \leq 2$

مثال ۵۲: اگر α و β دو زاویه‌ی تند باشد به‌طوری‌که $\alpha < \beta$ باشد آن‌گاه هر یک از عبارت‌های زیر را کامل کنید.

$30 \quad 45$

الف) $\sin(-\alpha) \ \boxed{>} \ \sin(-\beta)$ ب) $\cos(-\alpha) \ \boxed{>} \ \cos(-\beta)$

$-\sin\alpha \quad -\sin\beta$

$-\sin 30 \quad -\sin 45$

$-\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-0.5 > -0.7$

ج) $\tan(-\alpha) \ \boxed{} \ \tan(-\beta)$ د) $\cot(-\alpha) \ \boxed{} \ \cot(-\beta)$

تعیین مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای بیش از ۹۰ درجه

فرض کنیم α زاویه‌ای تند دارای نسبت‌های مثلثاتی شناخته شده باشد، زوایای بیش از ۹۰ درجه به دو دسته تقسیم می‌شوند.

(زاویه α برابر با ۰، 30°، 45°، 60° و 90° باشد.)

دسته اول: زوایایی که از جمع یا تفریق α با مضربی از 180° به‌دست می‌آید. مانند:

$$\alpha = 210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$$

$$\alpha = 420^\circ = 2(180^\circ) + 60^\circ = 360 + 60$$

$$\alpha = 300^\circ = 2(180^\circ) - 60^\circ$$

$$\boxed{x = k(180^\circ) \pm \alpha}$$

دسته دوم: زوایایی که از جمع یا تفریق α با مضرب فردی از ۹۰ به‌دست می‌آیند. یعنی:

$۱۲۰ < \begin{matrix} ۱۸۰-۶۰ \\ ۹۰+۳۰ \end{matrix}$

$\alpha = ۲۴۰^{\circ} = ۳(۹۰^{\circ}) - ۳۰^{\circ}$

$\alpha = ۱۳۵^{\circ} = ۹۰^{\circ} + ۴۵^{\circ}$

$$\boxed{x = k(۹۰^{\circ}) \pm \alpha \quad \text{فرد } k}$$

برای محاسبه مقادیر مثلثاتی این زوایا (هر دو دسته) گام نخست این است:

گام اول: تعیین علامت نسبت مثلثاتی خواسته شده با توجه به ناحیه‌ای که انتهای کمان در آن قرار دارد.

گام دوم دسته اول: برای تعیین مقدار نسبت مثلثاتی دسته اول پس از ثبت علامت کافی است نسبت مثلثاتی زاویه α نوشته شود، مانند: $\sin(۱۸۰^{\circ} + \alpha^{\circ}) = -\sin\alpha^{\circ}$

$۱۲۰ = ۱۸۰ - ۶۰$

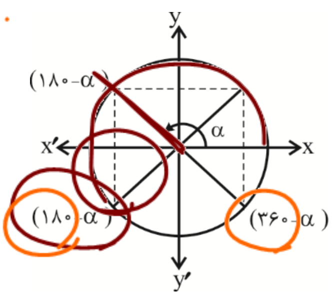
$۱۲۰ = ۹۰ + ۳۰$

گام دوم دسته دوم: برای تعیین علامت مقدار نسبت مثلثاتی دسته دوم از تغییر نسبت استفاده می‌کنیم یعنی پس از ثبت علامت نسبت خواسته شده باید نسبت زاویه α را با تغییر نسبت خواسته شده از سینوس به کسینوس و برعکس (و از تانژانت به کتانژانت و برعکس) نوشته شود.

مثال ۵۳: با توجه به نمونه کامل و شکل داده شده جاهای خالی را کامل کنید.

دسته اول:

$۳۰ - ۴۵ - ۶۰$



$\alpha + \beta = ۹۰ \quad \begin{cases} \sin\alpha = \cos\beta \\ \tan\alpha = \cot\beta \end{cases}$

$\sin ۲۱۰^{\circ} = \sin(۱۸۰^{\circ} + ۳۰^{\circ}) = -\sin ۳۰^{\circ} = -\frac{۱}{۲}$

$\cos ۲۲۵^{\circ} = \cos(۱۸۰^{\circ} + ۴۵) = -\cos ۴۵ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\tan ۱۲۰^{\circ} = \tan(۱۸۰ - ۶۰) = -\tan ۶۰ = -\sqrt{۳}$

$\cot ۲۴۰^{\circ} = \ldots \quad \cot(۱۸۰ + ۶۰) = \cot ۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$\cot(۲۷۰ - ۳۰) = \tan ۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$\sin(-۶۰^{\circ}) = -\sin ۶۰ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

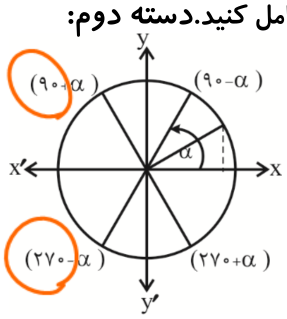
$\cos(۲۴۰^{\circ}) = \ldots \quad \cos(۱۸۰ + ۶۰) = -\cos ۶۰ = -\frac{۱}{۲}$

$\cos(۲۷۰ - ۳۰) = -\sin ۳۰ = -\frac{۱}{۲}$

$\tan(۴۲۰^{\circ}) = \tan(۳۶۰ + ۶۰) = \tan ۶۰ = \sqrt{۳}$

$\cot(۳۹۰^{\circ}) = \cot(۳۶۰ + ۳۰) = \cot ۳۰ = \sqrt{۳}$

مثال ۵۴: کامل کنید. دسته دوم:



$\sin ۲۲۵^{\circ} = \sin(۲۷۰^{\circ} - ۴۵^{\circ}) = -\cos ۴۵^{\circ} = -\sqrt{۲}/۲$

$\cos ۳۳۰^{\circ} = \cos(۲۷۰^{\circ} + ۶۰) = \sin ۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\tan ۱۲۰^{\circ} = \ldots = \ldots = \ldots \rightarrow \tan(۹۰ + ۳۰) = -\cot ۳۰ = -\sqrt{۳}$

$\cot ۲۱۰^{\circ} = \ldots = \ldots = \ldots \rightarrow \cot(۲۷۰ - ۶۰) = \tan ۶۰ = \sqrt{۳}$

۵۴۸۷۷

مثال ۵۵: کامل کنید.

جدول علامت‌ها

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

همه مثبت / سینوس / تانژانت / کسینوس

$\sin ۲۰۵^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۲۵^\circ) = -\sin ۲۵^\circ$

$\cos ۳۸۰^\circ = \cos(۳۶۰ + ۲۰) = +\cos ۲۰$

$\tan ۱۱۰^\circ = \tan(۹۰ + ۲۰) = -\cot ۲۰$

$\sin ۷۵^\circ = \sin(۹۰^\circ - ۱۵^\circ) = -\cos ۱۵^\circ$

$\cos ۱۰۵^\circ = \cos(۹۰ + ۱۵) = -\sin ۱۵$

$\tan ۲۵۰^\circ = \tan(۲۷۰ - ۲۰) = \cot ۲۰$

$\cot ۲۹۰^\circ = \cot(۲۷۰ + ۲۰) = -\tan ۲۰$

$\sin(90 + \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90+\alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(90 + \alpha) = -\cot\alpha$

$\cot(90+\alpha) = -\tan\alpha$

مثال ۵۶. اگر فرض کنیم $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ هر یک از عبارت‌ها را کامل کنید. (راهنمایی: ابتدا هر یک از نسبت‌های α را بیابید.)

$\cos\alpha = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$

$\cot\alpha = \frac{4}{3}$

$\sin(۹۰^\circ + \alpha) = \cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\cos(۲۷۰^\circ - \alpha) = -\sin\alpha = -\frac{3}{5}$

$\tan(۲۷۰^\circ + \alpha) = -\cot\alpha = -\frac{4}{3}$

$\cot(۲۷۰^\circ - \alpha) = \tan\alpha = \frac{3}{4}$

مثال ۵۷. مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای خواسته شده را بیابید. $(\tan ۱۵^\circ = ۲ - \sqrt{۳})$

$\cot 15 = \frac{1}{\tan 15} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{1}$

$\cot 15 = 2 + \sqrt{3}$

۱) $\sin(۱۵۰^\circ) + \cos(۱۲۰^\circ) = \sin 30 - \cos 60 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

۲) $\tan(۴۲۰^\circ) + ۲\sin(۲۴۰^\circ) = \tan 60 - 2\sin 60 = \sqrt{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

۳) $\tan(۱۰۵^\circ) + \cot(۲۸۵^\circ) = -\cot 15 - \tan 15 = -2 - \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} = -4$

۴) $\sin(۷۵^\circ) - \cos(۲۸۵^\circ) = \cos 15 + \sin 15$

مثال ۵۸: اگر α و β دو زاویه در ناحیه اول مختصات باشند و $\alpha + \beta = 90^\circ$ ، حاصل $\cos(2\alpha + \beta) - \sin(\alpha + 2\beta)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $2\sin\alpha$ ۳) $-2\sin\alpha$ ۴) $\sin\alpha$

$\cos 120 = \cos(180 - 60) = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$

$\sin 150 = \sin(180 - 30) = \sin 30 = \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

مثال ۵۹: مقدار هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را بنویسید و جدول را کامل کنید. (مقادیر جدول را به خاطر بسپارید.)

α / نسبت	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°
sin α	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	×	×	×
cos α	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$			
tan α	$\frac{0}{1}=0$							
cot α	$\frac{1}{0}=$ تعریف نشده							

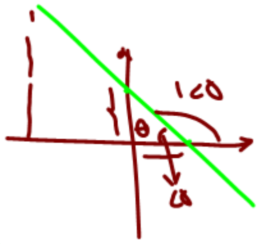
$\tan = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ، $\cot = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

α / نسبت	۱۸۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۲۷۰°	۳۰۰°	۳۱۵°	۳۳۰°
sin α								
cos α								
tan α								
cot α								

شیب خط (ضریب زاویه) $= \tan\alpha$

مثال ۶۰: الف) نمودار خط‌های زیر را به دقت رسم کنید.

۱) $y = 3x$



۲) $y = -x + 1$

ب) زاویه هر خط نسبت به جهت مثبت محور x ها را پیدا کرده و تانژانت آن را بیابید.

$\tan\alpha = \frac{3}{1} = 3$ ، $\tan\theta = \frac{-1}{1} = -1$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$

$m = \frac{3-0}{1-0} = \frac{3}{1} = 3$

ج) چه رابطه‌ای بین tan زاویه و شیب خط وجود دارد؟

مثال ۶۱: معادله خطی به‌صورت $(a-1)x+2ay=5$ مفروض است. a را چنان تعیین کنید که خط مزبور با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه ۱۳۵ درجه بسازد.

$y=ax+b$

$ax+by+c=0$

$\tan 135 = \tan(180-45) = -\tan 45 = -1$

$2ay = -(a-1)x+5$

$y = -\frac{(a-1)}{2a}x + \frac{5}{2a}$

$\frac{-(a-1)}{2a} = -1$

$-a+1=-2a$

$a=-1$

مثال ۶۲: m را چنان بیابید که خطی به معادله ی $my+mx-x+5=0$ با جهت مثبت محور x ها زاویه ۳۰ درجه بسازد.

شیب $= \tan 30 = \frac{\sqrt3}{3}$

$my+(m-1)x+5=0$

$my = -(m-1)x-5$

$y = \frac{-(m-1)}{m}x - \frac{5}{m}$

$\frac{-m+1}{m} = \frac{\sqrt3}{3}$

$m = \dots$

مثال ۶۳: m و n را چنان بیابید که خط $y=mx+n$ با جهت مثبت محور y ها زاویه ۱۳۵ درجه بسازد و از نقطه‌ای به طول واحد واقع بر محور طول‌ها بگذرد.

$m=\tan 135=\tan(180-45)=-\tan 45=-1$

$\boxed{m=-1}$

$y=-x+n \Rightarrow 0=-1+n \quad \boxed{n=1}$

$\boxed{y=-x+1}$

$(1,0)$

مثال ۶۴: مطلوبست شیب خطی که با خط $\sqrt3x-y=1$ زاویه ۴۵ درجه می‌سازد.

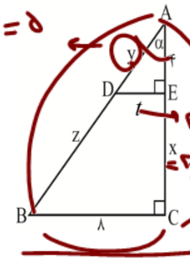
$y=\sqrt3x-1$

$m=\sqrt3=\tan\alpha \quad \alpha=60$

$m=\tan(60+45)=\tan(105)$

۱۵

مثال ۶۵: در شکل مقابل مقادیر مجهول را بیابید. $(\tan\alpha = 0/75)$



$y=5$

$\tan\alpha = 0.75 = \frac{3}{4}$

$\overset{\triangle}{ADE}: \tan\alpha = \frac{t}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{t=3}$

$\overset{\triangle}{ABC}: \tan\alpha = \frac{8}{4+x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 12+3x=32 \quad 3x=20 \quad x=\frac{20}{3}$

مثال ۶۶: نقاط $A(2,a)$ و $B(2a-1,a+7)$ مفروضند. a را چنان تعیین کنید که خط AB با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه ۱۳۵ درجه بسازد.

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\tan 135=-1=\frac{a+7-a}{2a-1-2}=\frac{7}{2a-3}=\frac{-1}{1}$

$-2a+3=7 \quad -2a=4 \quad \boxed{a=-2}$

مثال ۶۷: زاویه‌ی هر یک از خط‌های زیر را با محور y ها تعیین کنید.

الف) $3x-3y=8$ → $3y=3x-8 \Rightarrow y=x-\frac{8}{3}$ ، $m=1=\tan\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha=45}$ ، $90-45=\boxed{45}$

ب) $\sqrt{3}x-y=2$ → $y=\sqrt{3}x-2$ ، $\sqrt{3}=\tan\alpha$ ، $\alpha=60$

اتحاد مثلثاتی

تعریف: هر تساوی که به ازای هر مقدار کمان مثلثاتی تعریف شده و برقرار است را یک اتحاد مثلثاتی می‌گویند.

مثال ۶۸: برخی اتحادهای مثلثاتی که پیش از این به کمک تعاریف ثابت کرده‌اید را کامل کنید.

$a^2+b^2=c^2$

۱) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ، $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ ، $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

۲) $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

۳) $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

۴) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ ، $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$ ، $\alpha\neq 0$ ، $\alpha\neq 90$

۵) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$

۶) $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ → $\tan\alpha$ ، $\cos\alpha$

۷) $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ → $\cot\alpha$ ، $\sin\alpha$

۸) $\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}$ ، $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$

$1+\tan^2\alpha=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm 2ab$

مثال ۶۹: درستی هر یک از رابطه‌های زیر را ثابت کنید.

۱) $\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin x}$

۲) $\frac{1}{\cos x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}=\tan x$

۳) $\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}$

۴) $\frac{1}{\sin x.\cos x}=\cot x+\tan x$

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

$=\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}+\cancel{2\sin\alpha\cos\alpha}+\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}-\cancel{2\sin\alpha\cos\alpha}$

$=1+1=2$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}$

مثال ۷۰: هرگاه $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = ۲$ باشد، $\tan x$ را حساب کنید.

مثال ۷۱: اگر $\tan x = ۲$ باشد حاص $\frac{۳\sin x + ۲\cos x}{۵\sin x - ۴\cos x}$ را به‌دست آورید.

مثال ۷۲: اگر $\tan \alpha = \frac{x+۱}{x}$ و $\cot \alpha = \frac{۲x}{x^۲ - ۱}$ باشد مقدار x را به‌دست آورید.

مثال ۷۳: عبارت‌های زیر را برحسب $\cot x$ بنویسید.

۱) $\frac{\sin x}{۱ - \cos x} - \frac{\sin x}{۱ + \cos x}$

۲) $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} - \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}$