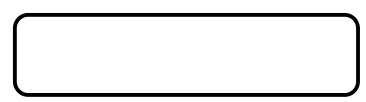
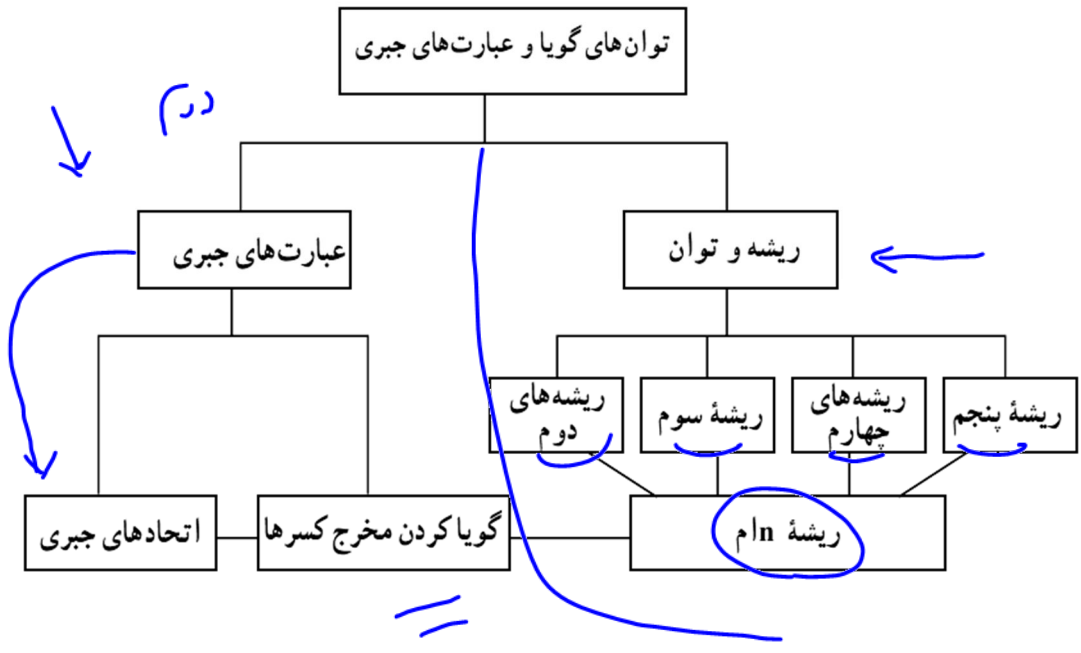




# فصل سوم

## توان های گویا و عبارات های جبری



# درس ریاضی مبحث فصل ۳ توان های گویا و عبارات جبری

درس اول: ریشه و توان

پویشر علمی جهاد



ریشه و توان رابطه‌ای دو سویه دارند یعنی عمل ریشه گیری عکس عمل توان رسانی است

ریشه دوم: عدد  $b$  را یک ریشه دوم عدد  $a$  می‌نامیم هرگاه  $b^2 = a$ .

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$\pm b = \sqrt{a} \Leftrightarrow b^2 = a$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$-b$  هم دیگر ریشه دوم عدد  $a$  است.

نکته

$$b^2 = a \xrightarrow{a > 0} a \text{ ریشه‌های دوم } b = \pm \sqrt{a}$$

نتیجه: اگر  $a$  یک عدد حقیقی مثبت باشد، آنگاه  $\sqrt{a}$  و  $-\sqrt{a}$  ریشه‌های دوم عدد  $a$  هستند.

مثال ۱

ریشه‌های دوم ۱۶ و ۰/۰۴ را تعیین کنید.

$$\begin{aligned} x^2 = 16 &\rightarrow x = \pm 4 \\ \sqrt{16} &= 4 \\ x^2 = 0.04 &\Rightarrow x = \pm 0.2 \\ \sqrt{0.04} &= 0.2 \end{aligned}$$

(۱) عددهای منفی، ریشه دوم ندارند مثلاً  $\sqrt{-3}$  تعریف نشده است.

(۲) ریشه دوم عدد صفر، صفر است یعنی  $\sqrt{0} = 0$

(۳) هر عدد حقیقی مثبت، دو تا ریشه دوم دارد که با هم قرینه‌اند.

ریشه سوم: عدد حقیقی  $b$  را ریشه سوم عدد  $a$  می‌نامیم هرگاه  $a = \sqrt[3]{b}$ .

هر عدد حقیقی مانند  $a$ ، دقیقاً یک ریشه سوم دارد که با خود  $a$  هم علامت است.

$$b^3 = a \xrightarrow{a \in \mathbb{R}} a = b = \sqrt[3]{a} \text{ ریشه سوم}$$

$$\begin{aligned} x^3 = 8 &\Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \sqrt[3]{-27} &= -3 \end{aligned}$$

مثال ۲

ریشه سوم ۸ و  $-64$  را تعیین کنید.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt{-a} = -\sqrt{a}$$

اگر  $a$  یک عدد حقیقی باشد، آنگاه:

$$\sqrt{(x^2+1)^2} = |x^2+1| = x^2+1$$

مثال ۳

عبارت‌های  $\sqrt[3]{-0.064}$ ,  $\sqrt[3]{0.008}$ ,  $\sqrt{x^2+2x^2+1}$ ,  $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$  را ساده کنید.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{16} &= |2| = 2 \\ \sqrt[3]{-27} &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0.4 & \quad 0.2 \\ |1-\sqrt{3}| &= -(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1 \end{aligned}$$

ریشه چهارم و پنجم: ریشه‌های چهارم و پنجم عدد حقیقی  $a$  نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند.

پایه و رشته دهم جناب استاد روغنی

# درس ریاضی مبحث فصل ۳ توان های گویا و عبارات جبری

پویتر علمی جهاد



$$b^r = a \xrightarrow{a \in \mathbb{R}^+} b = \pm \sqrt[r]{a}$$

$$b^r = a \xrightarrow{a \in \mathbb{R}} b = \sqrt[r]{a}$$

مثال ۴

ریشه چهارم ۸۱ و ریشه پنجم ۳۲- را تعیین کنید.

$$\sqrt[4]{81} = 3$$

$$x^5 = 32 \rightarrow x = \pm 2$$

$$x^5 = -32 \rightarrow x = -2$$

نکته

اعداد منفی، ریشه دوم، چهارم، ششم و به طور کلی ریشه مرتبه زوج ندارند مثلاً  $\sqrt{-8}$  وجود ندارد.

مثال ۵

اگر  $a = 0.00243$  و  $b = -0.00032$  باشند، حاصل  $\sqrt[5]{a}$  و  $\sqrt[5]{b}$  را تعیین کنید.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{m}{n}]{}^*$$

$$\sqrt[5]{0.00243} = 0.21 = \frac{21}{100}$$

$$\sqrt[5]{-0.00032} = -0.08 = -\frac{8}{100}$$

$$\sqrt[5]{(0.21)^5} = 0.21$$

مثال ۶

اگر  $b$  ریشه سوم عدد ۵ باشد، حاصل  $|b^6 - (2b)^2|$  را بیابید.

$$\sqrt[3]{5} = b$$

$$|5^2 - 4 \times 5| = |25 - 20| = 5$$

مثال ۷

عددی را بیابید که ریشه پنجم آن عدد، نصف ریشه سوم آن باشد. مسأله چند جواب دارد؟

$$\sqrt[5]{x} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt[5]{x^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \sqrt[3]{x^5} \Rightarrow \sqrt[5]{x^5} = \frac{1}{32} \sqrt[3]{x^5}$$

$$x^2 = \frac{1}{32} x^2 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{32} x^2 = 0 \Rightarrow x^2 \left(1 - \frac{1}{32}\right) = 0 \Rightarrow x^2 \left(\frac{31}{32}\right) = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{32}{31}}$$

محاسبه تقریبی ریشه‌ها

رادیکال‌هایی مانند  $\sqrt{a}$  که  $a > 0$  مربع کامل نباشد و یا  $\sqrt[3]{b}$  که  $b$  مکعب کامل نباشد، اعداد حقیقی گنگ و اعشاری

بوده که تعداد ارقام اعشاری آن‌ها بی‌شمار و دارای دوره تناوب نیستند. هیچ‌گاه مقدار دقیق آن‌ها به صورت اعشاری قابل

نمایش نیست و فقط می‌توانیم مقدار تقریبی آن‌ها را به دست آوریم.

$$\sqrt{11} \approx 3.3166, \sqrt{9} = 3, \sqrt{10} \approx 3.1622$$

مثال ۸

تقریبی از  $\sqrt{93}$  با یک رقم اعشار به دست آورید.

# درس ریاضی مبحث فصل ۳ توان های گویا و عبارات جبری

پویتر علمی  
جهاد



$$\sqrt{81} < \sqrt{93} < \sqrt{100} \rightarrow 9 < \sqrt{93} < 10$$

x	9/5	9/6	9/7
x <sup>2</sup>	90/25	92/16	94/09

از دو عدد  $(9/6)^2 = 92/16$ ،  $(9/7)^2 = 94/09$ ، عدد  $92/16$  به عدد  $93$  نزدیک تر است.

بنابراین مقدار تقرب  $\sqrt{93}$  با تقریب  $0/1$  برابر  $9/6$  است.  $\sqrt{93}$  بین کدام اعداد صحیح متوالی قرار دارد؟ و تقریبی از آن با یک رقم اعشار به دست آورید.

مثال ۹

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

مثال ۱۰ ثابت کنید  $\sqrt{4n^2 + 4n + 1}$  یک عدد صحیح است و به کمک آن مشخص کنید که عدد  $\sqrt{40201}$  بین چه اعداد صحیح متوالی قرار دارد؟ ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$\sqrt{(2n+1)^2} = 2n+1$$

$$\sqrt{40201} = 201$$

## درس دوم: ریشه n ام

تعریف: عدد حقیقی b را یک ریشه n ام عدد a می‌نامیم هرگاه  $b^n = a$  ( $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ ):

$$b^n \Rightarrow b = \begin{cases} \sqrt[n]{a} & \text{فرد } n \\ \pm \sqrt[n]{a} & \text{زوج } n \text{ و } a > 0 \end{cases}$$

## خواص ریشه n ام

تمام روابط زیر به شرطی برقرارند که ۲ نکته رعایت شود:

(۱) زیر رادیکال با فرجه زوج منفی نشود. (۲) علامت عبارت رادیکالی تغییر نکند.

۱) $(\sqrt[n]{a})^n = a$	۲) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{فرد } n \\  a  & \text{زوج } n \end{cases}$	۳) $\sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} a \sqrt[n]{b} & \text{فرد } n \\  a  \sqrt[n]{b} & \text{زوج } n \end{cases}$
--------------------------	---	---

در حالت کلی  $\sqrt[n]{a^n} \neq (\sqrt[n]{a})^n$  مثلاً  $\sqrt[4]{(-3)^4} \neq (\sqrt[4]{-3})^4$

نکته

پایه و رشته دهم جناب استاد روغنی

# درس ریاضی مبحث فصل ۳ توان های گویا و عبارات جبری

پویتر علمی جهاد



در واقع تساوی فوق وقتی برقرار است که n فرد یا a مثبت باشد.

✓  $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$  ,  $\sqrt[n]{ab} \neq \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$  :  $\sqrt{(-3)(-5)} \neq \sqrt{-3} \times \sqrt{-5}$

✓  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$  ,  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \neq \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$  ✓ :  $\sqrt{\frac{-8}{-2}} \neq \frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}$

Handwritten:  $\sqrt{5} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{20} = \sqrt{2 \times 10} = \sqrt{20}$

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$  ✓  $\sqrt[n]{a^m} \neq (\sqrt[n]{a})^m$  :  $\sqrt[6]{(-2)^2} \neq (\sqrt[6]{-2})^2$

\*  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$   $\Rightarrow \sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[nmp]{a}$  :  $\sqrt{\sqrt{-8}} \neq \sqrt{-8}$  تعریف نشده

$\sqrt[n]{a^m \sqrt[p]{b^q} \sqrt[r]{c^s}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n]{b^q} \times \sqrt[n]{c^s}$

$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^m b^m}$  \*  $\sqrt[3]{\sqrt{8}} \neq \sqrt[3]{(-3)^2} \times 5$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{a}$  :  $\sqrt[6]{(-5)^2} \neq \sqrt{-5}$

$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{m+n}}$

Handwritten:  $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{10}$

Handwritten:  $\sqrt{81} = 3^2 = 9$ ,  $\sqrt{16} = 2^2 = 4$ ,  $\sqrt{25} = 5^2 = 25$ ,  $\sqrt{36} = 6^2 = 36$

ریشه سوم  $\sqrt[3]{512}$  و ریشه دوم  $\sqrt{64}$  را بدست آورید.

مثال ۱۱

در چه صورت  $\sqrt{x^{17}} = x^r$  صحیح است؟

مثال ۱۲

در مورد شرایط برقراری تساوی های  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$  و  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  بحث کنید.

مثال ۱۳

Handwritten:  $\sqrt{2x} \times \sqrt{\frac{1}{2x}} = \sqrt{2x \times \frac{1}{2x}} = \sqrt{1} = 1$

Handwritten:  $\sqrt{2x} \times \sqrt{\frac{1}{4x^2}} = \sqrt{2x \times \frac{1}{4x^2}} = \sqrt{\frac{2}{4x}} = \sqrt{\frac{1}{2x}}$

Handwritten:  $\sqrt{2x} \times \sqrt{\frac{1}{2x}} = \sqrt{2x \times \frac{1}{2x}} = \sqrt{1} = 1$

اگر  $x < 0$  باشد، حاصل  $\sqrt{2x} \sqrt{\frac{1}{4x^2}}$  را بیابید.

مثال ۱۴

پایه و رشته دهم جناب استاد روغنی



مثال ۱۵

اگر ریشه پنجم  $\sqrt[5]{16a}$  یک عدد طبیعی باشد، مقدار  $a$  را بیابید.

$$\sqrt[5]{16a} = x \Rightarrow x^5 = 16a \Rightarrow x = \sqrt[5]{16a} = \sqrt[5]{2^4 \times a} = \sqrt[5]{2^4 \times 2 \times a} = \sqrt[5]{2^5 \times a} = 2\sqrt[5]{a}$$

$$\sqrt[5]{2^5 \times a} = 2\sqrt[5]{a} \Rightarrow \sqrt[5]{2^5 \times a} = 2\sqrt[5]{a} \Rightarrow \sqrt[5]{2^5 \times a} = 2\sqrt[5]{a} \Rightarrow \sqrt[5]{2^5 \times a} = 2\sqrt[5]{a}$$

پایه  $a=1$

مثال ۱۶

در صورتی که  $x = \sqrt{2\sqrt{2}}$  باشد، مقدار  $x^8$  را بیابید.

$$x = \sqrt{2\sqrt{2}} \Rightarrow x^2 = 2\sqrt{2} \Rightarrow x^4 = (2\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8 \Rightarrow x^8 = 8^2 = 64$$

مثال ۱۷

به ازای چه مقدار  $m$  رابطه  $\sqrt[m]{a^m \sqrt{a^4}} = a$  برقرار است؟

$$\sqrt[m]{a^m \sqrt{a^4}} = a \Rightarrow \sqrt[m]{a^m \times a^2} = a \Rightarrow \sqrt[m]{a^{m+2}} = a \Rightarrow a^{\frac{m+2}{m}} = a^1 \Rightarrow \frac{m+2}{m} = 1 \Rightarrow m+2 = m \Rightarrow 2 = 0$$

اینجا اشتباه است. باید  $\sqrt[m]{a^m \times a^2} = a \Rightarrow a^{\frac{m+2}{m}} = a^1 \Rightarrow \frac{m+2}{m} = 1 \Rightarrow m+2 = m \Rightarrow 2 = 0$  این معادله را حل نمی‌کند. باید  $\sqrt[m]{a^m \times a^2} = a \Rightarrow a^{\frac{m+2}{m}} = a^1 \Rightarrow \frac{m+2}{m} = 1 \Rightarrow m+2 = m \Rightarrow 2 = 0$  این معادله را حل نمی‌کند. باید  $\sqrt[m]{a^m \times a^2} = a \Rightarrow a^{\frac{m+2}{m}} = a^1 \Rightarrow \frac{m+2}{m} = 1 \Rightarrow m+2 = m \Rightarrow 2 = 0$  این معادله را حل نمی‌کند.

مثال ۱۸

حاصل هر یک از عبارات های زیر را بیابید.

الف)  $(2 + \sqrt{3})\sqrt{70} \sqrt{4\sqrt{3}}$

$$(2 + \sqrt{3})\sqrt{70} \sqrt{4\sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})\sqrt{70} \times 2\sqrt[4]{3} = 2(2 + \sqrt{3})\sqrt{70} \sqrt[4]{3}$$

ب)  $(3 + \sqrt{5})\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$

$$(3 + \sqrt{5})\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = \sqrt{(3 + \sqrt{5})^2 (14 - 6\sqrt{5})} = \sqrt{(9 + 6\sqrt{5} + 5)(14 - 6\sqrt{5})} = \sqrt{(14 + 6\sqrt{5})(14 - 6\sqrt{5})} = \sqrt{14^2 - (6\sqrt{5})^2} = \sqrt{196 - 180} = \sqrt{16} = 4$$

پ)  $(\sqrt[4]{16\sqrt{3}})^2 + (\sqrt{2 \times \sqrt[4]{16\sqrt{3}}})$

$$(\sqrt[4]{16\sqrt{3}})^2 + (\sqrt{2 \times \sqrt[4]{16\sqrt{3}}}) = (\sqrt{2\sqrt{3}})^2 + (\sqrt{2 \times \sqrt[4]{16\sqrt{3}}}) = 2\sqrt{3} + \sqrt{2 \times \sqrt[4]{16\sqrt{3}}}$$

نکته اگر در زیر رادیکال دو جمله‌ای باشد، سعی کنیم در صورت امکان، آن را به عبارتی تبدیل کنیم که توانش با

فرجه برابر باشد تا از زیر رادیکال بیرون بیاید.

رادیکال‌های مسلسل

# درس ریاضی مبحث فصل ۳ توان های گویا و عبارات جبری

پویتر علمی جهاد



$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ \Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 9 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \times 1} \\ x = \frac{1 \pm 3}{2} \\ x = 2 \text{ or } -1 \end{cases}$$

در این حالت حاصل را x می گیریم و با به توان رساندن طرفین معادله و قرار دادن بخشی از معادله برابر با x، معادله را حل کرده و x را می یابیم.

حاصل رادیکال زیر چیست؟ (از اتحاد جمله مشترک  $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ ) کمک بگیرید.

مثال ۱۹

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}} = x \Rightarrow \sqrt{2 + x} = x \Rightarrow 2 + x = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

در متون ریاضی  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  را عدد طلایی می نامند و رادیکال مسلسل  $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$  موکد آن است.

نکته

مقدار x را در روابط زیر بیابید:

مثال ۲۰

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = x \Rightarrow \sqrt{1+x} = x \Rightarrow 1+x = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

الف)  $\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots}}} = x \Rightarrow \sqrt{3+x} = x \Rightarrow 3+x = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-3) = 13 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

ب)  $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}} = x \Rightarrow \sqrt{6+x} = x \Rightarrow 6+x = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 25 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

پ)  $2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + \dots}}} = x \Rightarrow \sqrt{3+x} = \frac{x}{2} \Rightarrow 3+x = \frac{x^2}{4} \Rightarrow 4x^2 - 4x - 12 = 0$

$$x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 13 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

رابطه رادیکال مرکب

$$\sqrt{A \pm m\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}} \quad (1+1\sqrt{3})^2 = 4$$

که در آن  $C = \sqrt{A^2 - m^2B}$  است. توجه شود که می توان به جای حفظ کردن رابطه فوق، برای حل چنین مسائلی کافی

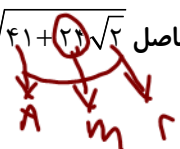
است زیر رادیکال را به صورت مربع کامل نوشت.

$$C = \sqrt{41^2 - 2^2 \times 2}$$

حاصل  $\sqrt{41+2\sqrt{2}}$  را بیابید.

مثال ۲۱

$$\sqrt{(2+\sqrt{2})^2} = 2 + \sqrt{2}$$



پایه و رشته دهم جناب استاد روغنی



نکته

در حل بسیاری از سؤالات رادیکالی خصوصاً از دو اتحاد مربع دو جمله‌ای و مزدوج استفاده فراوان می‌گردد.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

تک‌دبرج‌های

سزرج  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 = 1$

اگر  $a^2 - b^2 = 1$  شود، همیشه  $(a+b) = (a-b)^{-1}$  و بالعکس.

حاصل عبارات زیر را بیابید.

مثال ۲۲

الف)  $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{9-6\sqrt{2}} =$

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1$$

$$\sqrt{9-6\sqrt{2}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$$

ب)  $\sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{2+2\sqrt{3}} + \sqrt{13+4\sqrt{3}} =$

$$\sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$$

$$\sqrt{2+2\sqrt{3}} = \sqrt{2+2\sqrt{3}+3-3} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 - 3} = \sqrt{3}+1$$

$$\sqrt{13+4\sqrt{3}} = \sqrt{9+4\sqrt{3}+4} = \sqrt{(\sqrt{3}+2)^2} = \sqrt{3}+2$$

$$\sqrt{2}+1 - (\sqrt{3}+1) + \sqrt{3}+2 = \sqrt{2} - \sqrt{3} + 2$$

ریشه‌ی دوم اعداد  $8+4\sqrt{3}$  و  $4\sqrt{3}-8$  را در صورت وجود بیابید.

مثال ۲۳

$$x^2 = 8 + 4\sqrt{3} = 2(\sqrt{3}+1)^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2$$

$$x^2 = 4(\sqrt{3}+1)^2$$

$$x = \pm 2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = \pm (6+2\sqrt{3})$$

در بعضی موارد با ضرب رادیکالی در رادیکال بزرگ‌تر، زیر رادیکال بزرگ مربع کامل می‌شود.

نکته

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1$$

درس سوم: توان های گویا



# درس ریاضی مبحث فصل ۳ توان های گویا و عبارات جبری

پویشر علمی  
جهاد



تعریف  $a^{\frac{1}{n}}$ : اگر  $a$  یک عدد حقیقی مثبت و  $n$  یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲ باشد، آن گاه توان  $\frac{1}{n}$  عدد  $a$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$a \in (0, +\infty), n \in \{2, 3, \dots\}, a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \quad 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3} \quad \pi^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\pi}$$

نکته

اگر  $a$  منفی باشد آن گاه  $a^{\frac{1}{n}}$  را تعریف نمی کنیم مثلاً  $(-3)^{\frac{1}{4}}$  یا  $(-3)^{\frac{1}{2}}$  تعریف نمی شود.

تعریف  $a^{\frac{m}{n}}$ : اگر  $a$  یک عدد حقیقی مثبت و  $m$  و  $n$  هر دو عدد طبیعی و  $n$  بزرگتر یا مساوی ۲ باشد، آن گاه توان  $\frac{m}{n}$  عدد  $a$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$a \in \mathbb{R}^+, m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9} \quad 5^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{25} = \sqrt{5} \quad 16^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{16^5} = \sqrt[4]{(2^4)^5} = \sqrt[4]{2^{20}} = \sqrt{2^5} = 2^{\frac{5}{2}} = 2^2 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

نکته

اگر  $a$  منفی باشد آن گاه  $a^{\frac{m}{n}}$  تعریف نمی شود.

تعریف  $a^{-\frac{m}{n}}$ : اگر  $a$  یک عدد حقیقی مثبت و  $m$  و  $n$  هر دو عدد طبیعی و  $n$  بزرگتر یا مساوی ۲ باشد آن گاه  $a^{-\frac{m}{n}}$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$2^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$a \in \mathbb{R}^+, m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

$$16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2} \quad 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad 81^{-\frac{2}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{2}{4}}} = \frac{1}{(81^{\frac{1}{2}})^2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81}$$

قواعد توان های گویا

پایه و رشته دهم جناب استاد روغنی

# درس ریاضی مبحث فصل ۳ توان های گویا و عبارات جبری

پویتر علمی جهاد



قواعد توان های گویا مانند قواعد توان های صحیح است یعنی اگر  $r$  و  $s$  دو عدد گویا و  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی مثبت

باشند، آن گاه:

۱)  $a^r \times a^s = a^{r+s}$

۲)  $a^r \div a^s = a^{r-s}$

۳)  $(a^r)^s = a^{rs}$

۴)  $a^r \times b^r = (ab)^r$

۵)  $a^r \div b^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

۶)  $a^{-r} = \frac{1}{a^r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r$

$6^{-1/2} = \frac{1}{6^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

حاصل اعداد  $6^{-1/2}$  و  $(\sqrt{2})^2$  و  $\sqrt[6]{16^2}$  را به صورت رادیکال بنویسید.

مثال ۲۴

$(\sqrt{2})^{1/2} = (2^{1/2})^{1/2} = 2^{1/4} = \sqrt[4]{2}$   
 $\sqrt[6]{16^2} = \sqrt[6]{2^8} = 2^{8/6} = 2^{4/3} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

## توان های گنگ

بحث توان های گنگ، جزء مطالب تکمیلی در این فصل مطرح می شود لکن باید در نظر داشت که در عمل وقتی با عددی توان دار با توان گنگ سروکار داریم باید آن را با یک تقریب مناسب گویا کرده و با عدد تقریب شده گویا کار کنیم

مثلا برای محاسبه  $3^{\sqrt{2}}$  داریم:

$\sqrt{2} = 1/4 \Rightarrow 3^{\sqrt{2}} = 3^{1/4} = 3^{14/4} = 3^{7/2} = 3^{3.5} = \sqrt[2]{3^7} = 3\sqrt[2]{3^2} = 3\sqrt{9}$

تمام قواعد توان های گنگ مانند قواعد توان های گویا است.

نکته

عبارت های زیر را ساده کنید. مثال ۲۵

الف)  $(8)^{2/3} - (0.25)^{-1/5} + (\sqrt{3}\sqrt{2})^{2\sqrt{2}}$   
 $(2^3)^{2/3} = 2^2 = 4$   
 $(1/4)^{-1/5} = 4^{1/5}$   
 $(\sqrt{3}\sqrt{2})^{2\sqrt{2}} = (\sqrt{6})^{2\sqrt{2}} = \sqrt{6^2} = \sqrt{36} = 6$   
 $ج = 16 - 4 + 6 = 17$

ب)  $\sqrt{2}(\sqrt{50} - \sqrt{4}) + 8 \frac{2}{3}$   
 $\sqrt{2}(\sqrt{50} - \sqrt{4}) = \sqrt{2}(\sqrt{25 \cdot 2} - 2) = \sqrt{2}(5\sqrt{2} - 2) = 10 - 2\sqrt{2}$   
 $8 \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$   
 $= 10 - 2\sqrt{2} + \frac{16}{3} = 8 + \frac{14}{3} = \frac{38}{3}$

مثال ۲۶

با فرض تعریف پذیری هر یک از عبارات داده شده حاصل هر یک از آن ها را تا حد امکان ساده کنید.

پایه و رشته دهم جناب استاد روغنی

# درس ریاضی مبحث فصل ۳ توان های گویا و عبارات جبری

پویتر علمی جهاد



$$\sqrt{x^m} = x^{m/2}$$

$$(x^r)^s = x^{rs}$$

$$x^{1/2} \cdot x^{1/2} = \sqrt{x^2} = x$$

۱)  $x^2 \sqrt{x^2} \sqrt{x^2} \div \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} =$

Handwritten solution for problem 1:

$$x^2 \cdot x^{1/2} \cdot x^{1/2} \div x^{1/2} \cdot x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x^{2+1/2+1/2} \div x^{1/2+1/2+1/2} = x^3 \div x^{3/2} = x^{3-3/2} = x^{3/2}$$

Handwritten solution for problem 1 (continued):

$$\sqrt{x^3} = x^{3/2}$$

Handwritten solution for problem 1 (continued):

$$x^2 \cdot x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x^{2+1/2+1/2} = x^3$$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x^{1/2+1/2+1/2} = x^{3/2}$$

$$x^3 \div x^{3/2} = x^{3-3/2} = x^{3/2}$$

۳)  $(1+\sqrt{2})\sqrt{8}(\sqrt{8}-\sqrt{2})\sqrt{2} =$

Handwritten solution for problem 3:

$$(1+\sqrt{2})\sqrt{8}(\sqrt{8}-\sqrt{2})\sqrt{2} = ((1+\sqrt{2})\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) \cdot 2 = (2-1) \cdot 2 = 2$$

۴)  $27^{1/3} \times 4^{1/2} \times 3^{1/9} \times 2^{1/54} =$

Handwritten solution for problem 4:

$$27^{1/3} \times 4^{1/2} \times 3^{1/9} \times 2^{1/54} = 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 36$$

۵)  $(17+12\sqrt{2})^{1/25} \times (48-32\sqrt{2})^{1/5} =$

Handwritten solution for problem 5:

$$(17+12\sqrt{2})^{1/25} \times (48-32\sqrt{2})^{1/5} = ((17+12\sqrt{2})^{1/25})^{25} \times ((48-32\sqrt{2})^{1/5})^{5} = 17+12\sqrt{2} \times 48-32\sqrt{2} = 17+12\sqrt{2} - 128+32\sqrt{2} = -111+44\sqrt{2}$$

۶)  $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)(\sqrt{4}+1+\sqrt{2}) =$

Handwritten solution for problem 6:

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)(\sqrt{4}+1+\sqrt{2}) = (2-1)(2+\sqrt{2}+1+\sqrt{2}) = 1 \times (3+2\sqrt{2}) = 3+2\sqrt{2}$$

مقدار x را در معادلات زیر بیابید.

مثال ۲۷

۱)  $\sqrt{x} \sqrt{x} \times x \sqrt{x} = 4$

Handwritten solution for problem 1:

$$x \times x \times x^{3/2} = 4 \Rightarrow x^{5/2} = 4 \Rightarrow x^5 = 16 \Rightarrow x = 2$$

۲)  $\sqrt{\sqrt{x^2} \sqrt{x^2}} = 2$

Handwritten solution for problem 2:

$$\sqrt{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

اگر  $a^n$  و  $\sqrt[n]{a}$  برای  $n \in \mathbb{N}$  و  $n \geq 2$  تعریف شده باشند در این صورت می توان آن ها را به حالات زیر با هم مقایسه کرد:

- ۱) در صورتی که  $a > 1$  باشد:  $1 < \dots < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n-1]{a} < \dots < a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots$
- ۲) در صورتی که  $0 < a < 1$  باشد:  $\dots < a^4 < a^3 < a^2 < a < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n-1]{a} < \dots < 1$
- ۳) در صورتی که  $-1 < a < 0$  باشد:  $-1 < \dots < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n-1]{a} < a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots < 0$
- ۴) در صورتی که  $a < -1$  باشد:  $\dots < a^5 < a^3 < a < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n-1]{a} < \dots < -1$

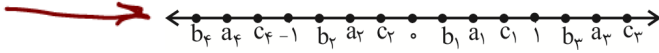
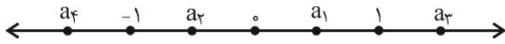
پایه و رشته دهم جناب استاد روغنی



مثال ۲۸

هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با

ریشه سوم آن عدد است، وصل کنید.



اعدد  $2-\sqrt{2}$  و  $(\sqrt{2})^{-2}$  را با هم مقایسه کنید.

$2-\sqrt{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{1} = \frac{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} = \frac{4-2}{2+\sqrt{2}} = \frac{2}{2+\sqrt{2}}$   
 $(\sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$

نتیجه:  $2-\sqrt{2} < (\sqrt{2})^{-2}$

مثال ۲۹

مثال ۳۰

اگر  $-1 \leq a \leq 2$  باشد، عدد  $a^5$  بزرگ تر است یا  $a^7$ ؟ بحث کنید.

$a = -1 \quad a^5 = a^7 = -1$   
 $a = 2 \quad a^5 = 32 \quad a^7 = 128$

مثال ۳۱

اگر  $a^6$  گنگ باشد و  $b^2$  گویا، چه تعداد از اعداد زیر گنگ است؟

الف)  $a^4 + b^4$

ب)  $a^4 + b^6$

پ)  $\frac{(ab)^2 + (ab)^4}{a^2 b^4}$

ت)  $\sqrt{a^4 \times b^3}$

## عبارات جبری

تعریف: هر عبارتی شامل متغیری مانند  $x$  و  $y$  و ... و توان هایی از آنها را عبارت جبری می نامیم. در حالت خاص

یک عدد را هم عبارت جبری گوئیم.

مثال ۳۲

کدام یک از عبارت زیر جبری اند:

$\sqrt{3}$ ,  $\pi x^2$ ,  $xy$ ,  $\frac{1}{2}x$ ,  $4x^2$ ,  $a|b|$ ,  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\frac{x^4 y^2}{z}$

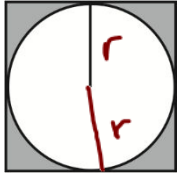
# درس ریاضی مبحث فصل ۳ توان های گویا و عبارات جبری

پویتر علمی  
جهاد



مثال ۳۳

در شکل مقابل یک دایره به شعاع  $r$  داخل یک مربع قرار داده شده است. مساحت قسمت رنگی را به صورت یک عبارت جبری بنویسید و در حالی که  $r=5$  باشد مقدار این عبارت را حساب کنید.



$$\left. \begin{array}{l} 2r \\ 2r \end{array} \right\}$$

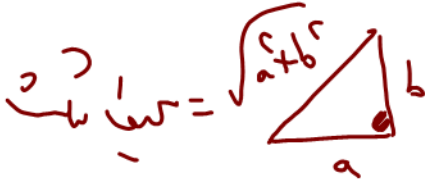
دایره  $S = \pi r^2$   
مربع  $S = (2r)^2$

$$(2r)^2 - \pi r^2 = 4r^2 - \pi r^2 = (4 - \pi)r^2$$

$$(4 - \pi) \times 5^2 = (4 - \pi) \times 25$$

مثال ۳۴

هر یک از روابط زیر را به صورت هندسی تفسیر کنید.



$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$2(a+b)$$

مثال ۳۵

حاصل عبارت جبری  $(y^z)^{x+1}$  را به ازای  $y = \sqrt{2}$  و  $x = 1$  و  $z = -1$  حساب کنید.

$$(\sqrt{2}^{-1})^{1+1} = (\sqrt{2}^{-1})^2 = \sqrt{2}^{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}^2} = \frac{1}{2}$$

مثال ۳۶

در عبارت جبری  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + b^2}$  مقدار عبارت را در هر یک از حالات زیر در صورت وجود بیابید.

ب)  $b=4, a=3$  ج)  $b=2, a=0$

الف)  $b=-1, a=1$

$$P = \frac{a+b+c}{2} \quad S = \dots$$

عبارت جبری زیر مربوط به محاسبه مساحت یک مثلث دلخواه است که  $P$  نصف محیط می باشد. مساحت مثلث

مثال ۳۷

متساوی الاضلاع به طول ضلع  $a$  را به کمک این عبارت جبری حساب کنید.

دستور هرول

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$



مثال ۳۸

مساحت مثلثی که طول اضلاعش ۱۰، ۸ و ۷ می باشد را به دست آورید.

$$P = \frac{7+8+10}{2} = 12.5$$

$$S = \sqrt{12.5(12.5-10)(12.5-8)(12.5-7)}$$

پایه و رشته دهم جناب استاد روغنی



در صورتی که  $a + 2b = 5$  و  $b + 3c = 7$  باشد حاصل  $4(a+c) + 5(3b+c)$  چند است؟

مثال ۳۹

$$\begin{aligned} a + 2b &= 5 \\ b + 3c &= 7 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a - 9c = -16 \\ 9c + 6b = 21 \\ b + 3c = 7 \end{cases}$$

در صورتی که  $A = 1 - 2x^2$  و  $B = 3x^2 - 4x + 1$  و  $C = x^2 - 1$  حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

مثال ۴۰ ✓

الف)  $3A - 2B + 3C$

ب)  $B + (x+1)A + 2xC$

ج)  $A \times B + 6x^4 - x^2$

اتحادها و تجزیه

تعریف: اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسان داشته باشند، برابری جبری حاصل از آنها را اتحاد جبری می‌نامیم.

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

اتحاد مربع سه‌جمله‌ای

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

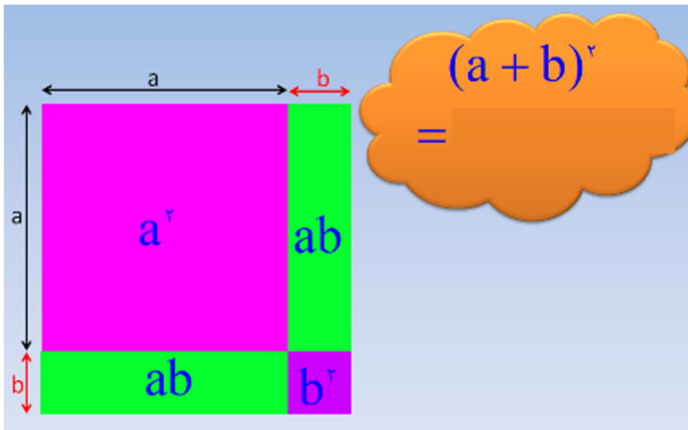
اتحاد مزدوج

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

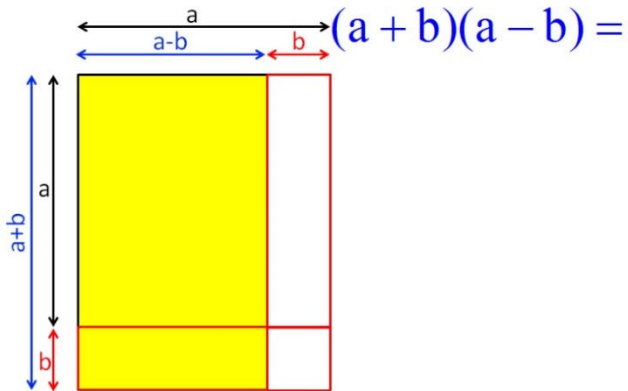
اتحاد جمله مشترک



اثبات هندسی اتحاد مربع دو جمله‌ای



اثبات هندسی اتحاد مزدوج



حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

مثال ۴۱

۱)  $(3x+1)^2 =$

۳)  $(x^2 - \frac{1}{2})^2 =$

۴)  $(d - 3\sqrt{2})^2 =$

۶)  $(\frac{2}{7})^2 + 2(\frac{2}{7})(\frac{3}{3}) + (\frac{3}{3})^2 =$



$$7) (x^n - 1)(x^n - 1) =$$

$$8) \begin{cases} 1001^2 = \\ 9999^2 = \end{cases}$$

$$9) (3^{1+x} + 3^{1-x})^2 =$$

جای خالی را در تساوی زیر چنان پر کنید که این عبارت به یک اتحاد تبدیل شود.

مثال ۴۲

$$1) (y - \dots)^2 = \dots - \dots + 25x^4$$

$$4) (xy - \frac{1}{2})^2 = \dots - \dots + \frac{1}{4}$$

$$2) (x^3 + \dots)^2 = \dots + \dots + y^6$$

$$5) (\dots - \dots)^2 = x^4 - \dots + \frac{1}{x^4}$$

$$3) (\frac{1}{m^2} + 7)^2 = \frac{1}{m^4} + \dots + \dots$$

$$6) (\dots + \dots)^2 = 4x^{-2}y^2z^4 + \dots + \frac{9}{4}x^2z^{-4}$$

نکته

نتایجی از اتحاد مربع دوجمله‌ای:

الف)  $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$

ب)  $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

پ)  $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

مثال ۴۳ اگر  $a+b=5$  و  $a-b=3$  باشد حاصل  $a^4 + b^4$  را به دست آورید.

مثال ۴۴

مثال ۴۴ معادله‌ی  $(2^{x+1} + 4^x)^2 + (2^{x+1} - 4^x)^2 = 24$  را حل کنید.

مثال ۴۵

مثال ۴۵ اگر  $2^{x+3} = a$  و  $4^{2x-1} = b$  باشد، رابطه‌ی بین  $a$  و  $b$  را بیابید.

مثال ۴۵





نکته

اگر مجموع مربعات چند عبارت صفر گردد آن گاه تک تک عبارات را مساوی صفر قرار می دهیم.

مثال ۴۶

در صورتی که  $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$  باشد ابتدا ثابت کنید که  $x = y = z$  سپس حاصل

$$A = \frac{\sqrt[3]{9(x^3 + y^3 + z^3)}}{x} \quad (x \neq 0) \text{ را محاسبه کنید.}$$

مثال ۴۷

هرگاه  $\frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{1}{11}$  باشد در این صورت  $x - \frac{1}{x}$  ریشه‌ی دوم چه عددی است؟

مثال ۴۸

هرگاه  $a + b = 1$  باشد ثابت کنید:  $a^2(a^2 - 2) + b^2(b^2 - 2) = 2a^2b^2 - 1$

تجزیه به کمک اتحاد مربع

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b)$$

مثال ۴۹

به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^2 + 10x + 25, 4a^2 + 4ax + x^2, x^2y^2 - 8xy + 16, x^4 - 2x^2yz + y^2z^2$$

مثال ۵۰

عبارت  $A = a^2 + b^2 + 2(a+1)(b+1) - 1$  را تجزیه کنید.



$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

مثال ۵۱ حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱)  $4x^2 - \frac{1}{4}y^2 = (\dots + \dots)(\dots - \dots)$

۲)  $(2x+1)^2 - y^2 = [(2x+1) - \dots][(\dots) + y]$

۳)  $(2x+1)^2 - (3x+4)^2 = [(\dots) - (\dots)][(\dots) + (\dots)]$

۴)  $(3a - \sqrt{ab})(3a + \sqrt{ab}) = (\dots)^2 - (\dots)^2$

۵)  $(2x+5)(\dots - \dots) = 4x^2 - 25$

۶)  $(5ab - \frac{3}{c})(5ab + \frac{3}{c}) =$

۷)  $(4a^3 + 1)(4a^3 - 1) =$

۸)  $(a - b + 1)(a + b - 1) =$

۹)  $(2^{x-1} + 2^{x+1} - \frac{15}{2})(2^x + 3) =$

عبارات زیر را تجزیه کنید.

مثال ۵۲

الف)  $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} =$

ب)  $x^2y^4 - 9z^2 =$

پ)  $x^3 - 81x =$

ت)  $a^2 + b^2 - c^2 - 2ab =$

ث)  $4^x - 9^y =$

ج)  $4x^3 - 36x =$



$$x^2 + Ax + B = (x + \alpha)(x + \beta)$$

که در آن  $A = \alpha + \beta$  و  $B = \alpha \cdot \beta$ .

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

حاصل عبارات زیر را به کمک اتحاد به دست آورید.

مثال ۵۳

۱)  $(a - 3b)(a + 5b) =$

۲)  $(x^3 - 2)(x^6 + 1)(x^3 + 2) =$

۳)  $(2^x + 3)(2^x - 1) =$

۴)  $(x + 5)(x + 6) =$

۵)  $(2x + 4)(2x + 3) =$

۶)  $(x - 5)(x + 7) =$

۷)  $(y - 2)(y - 3) =$

۸)  $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 3) =$



عبارات زیر را تجزیه کنید.

مثال ۴۵

الف)  $a^2 + 2ab - 15b^2 =$

ب)  $9^x + 3^{x+1} + 2 =$

ج)  $a^2 + b^2 + a(b+1) + b(a+1) - 12 =$

د)  $25x^2 - 10x - 35 =$

هـ)  $3x^2 - 5x + 2 =$

و)  $7x^2 - 4x - 3 =$

عبارت  $(a+1)(a+3)(a+5)(a+7) + 15$  را تجزیه کنید.

مثال ۵۵

اتحاد مربع سه جمله‌ای

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$$

به کمک اتحادها محاسبه کنید.

مثال ۵۶

الف)  $(a+2b-3)^2 =$

ب)  $(xy + \frac{2}{x} + \frac{1}{y})^2 =$

ج)  $(ab+ac+bc)^2 =$



مثال ۵۷

در صورتی که  $a+b+c=0$  و  $a^2+b^2+c^2=1$  عبارت  $A=a^4+b^4+c^4$  را حساب کنید.

نکته

اتحاد مربع سه جمله‌ای تجزیه جالبی ندارد ولی عکس آن در برخی از مسائل استفاده می‌گردد.

مثال ۵۸

عبارت  $A=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$  را تا حد امکان تجزیه کنید.

اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

مثال ۵۹

حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها حساب کنید.

الف)  $(a^2-a-2)(a^2+2a+4)(a^2-a+1)=$

ب)  $\sqrt[6]{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{56}+1} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{7}+1}=$

ج)  $(2^{x+1}+2)(4^x-2^x+1)=$

مثال ۶۰

جاهای خالی را طوری پر کنید که اتحاد برقرار گردد.

$$(2^{x-1} + \dots)(\dots - 2) = 8^{x-1} + \dots$$

مثال ۶۱

عبارت  $A = (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1})(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{(x-1)^2})$  برابر با کدام گزینه است؟

x-2 (۴)

2 (۳)

2x (۲)

x+2 (۱)



مقدار  $a$  را در رابطه‌ی  $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1 = 2(a+1)$  به دست آورید.

مثال ۶۲

تجزیه اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

تجزیه کنید.

مثال ۶۳

الف)  $x^6 + y^6 =$

ب)  $a^3 + a^2 - b^3 - b^2 =$

عبارت  $A = x^6 - 1$  به کدام یک از عبارات زیر بخش پذیر نیست؟

مثال ۶۴

د)  $x^2 + x + 1$

ج)  $x^2 - x - 1$

ب)  $x + 1$

الف)  $x - 1$

نکته

در عبارات توانی عددی به توان خاصی را مجهول جدیدی به نام  $y$  می گیریم سپس عبارات را ساده می کنیم.

معادله‌ی روبه‌رو چند جواب صحیح دارد؟  $\frac{8^x + 27}{4^x - 9} = 13$

مثال ۶۵

کسر زیر را ساده کنید.

مثال ۶۶

$$A = \frac{a^f + a^2 b^2 + b^f}{a^f - b^f}$$



اتحاد مکعب مجموع و تفاضل دو جمله‌ای

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها بیابید.

مثال ۶۷

الف)  $(x+2)(x^2-2x+4) =$

ب)  $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}(2-\sqrt{3}) =$

پ)  $(x+\frac{1}{x})^3 =$

تجزیه عبارات‌های جبری

## روش‌های تجزیه

۱. فاکتورگیری: در صورت وجود عامل مشترک در عبارات‌های داده شده، ابتدا از آن عامل فاکتور می‌گیریم. یعنی:

$$\begin{array}{c} a \underline{x} + b \underline{x} = x(a+b) \\ | \quad | \\ \text{عامل مشترک} \end{array}$$

۲. در بحث خود اتحادها بحث و بررسی شده است.

۳. دسته‌بندی: معمولاً برای تجزیه عبارتهایی که شامل بیش از سه جمله هستند از طریق دسته‌بندی به تجزیه می‌پردازیم. عبارتها را باید طوری دسته‌بندی کنیم که اولاً قابل تجزیه باشند. ثانیاً بتوان در ادامه از اتحادها یا فاکتورگیری به تجزیه آن پرداخت.

۱)  $a^2 + b^2 + 2ab - c^2$

۲)  $6x^2 + 9xy - 2xy - 3y^2$

۳)  $1 - 4a^2 - b^2 - 4ab$



۴. (روش A): در عبارتهای شامل سه جمله ضریب متغیر، مربع کامل نیست از این روش استفاده می‌کنیم. به این ترتیب که:

(۱) عبارت را برابر A قرار می‌دهیم.

(۲) طرفین را در ضریب متغیر مربع کامل ضرب می‌کنیم.

(۳) عبارت به دست آمده را با استفاده از اتحاد یک جمله‌ی مشترک تجزیه می‌کنیم.

(۴) طرفین را بر عدد ضرب شده تقسیم می‌کنیم.

$$۱) ۳x^2 - x - 2$$

$$۲) ۵x^2 - x - 6$$

$$۳) ۷x^2 + x - 6$$

کاربرد تجزیه در ب‌م‌م و ک‌م‌م

ابتدا عبارتها را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم. سپس

ب‌م‌م = حاصل ضرب عامل‌های مشترک با توان کم‌تر

ک‌م‌م = حاصل ضرب عامل‌های مشترک با توان بیش‌تر  $\times$  عامل‌های غیرمشترک

ب‌م‌م و ک‌م‌م عبارتهای زیر را بیابید.

مثال ۶۷

الف)  $a^3 - 1$  ,  $a^2 - 2a + 1$

ب)  $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$  ,  $a^4 + a^2 + 1$

پ)  $a^4 - b^2$  ,  $a^4 + 2a^2b + b^2$

ت)  $2x^3 + 6x^2$  ,  $8x^3 - 72x$  ,  $x^5 + 6x^4 + 9x^3$





هر عبارت کسری را که صورت و مخرج آن چند جمله ای است.

کدامیک از عبارتهای زیر گویا است؟

مثال ۶۸

الف)  $\frac{x^4 + x}{y^2 - y}$

ب)  $\frac{x + \sqrt{x}}{x^2 + 1}$

پ)  $\frac{|x^2| + 4}{y + 3}$

ت)  $\frac{x + x^{\frac{1}{3}}}{y^2 - 1}$

ث)  $\frac{x + |x|}{y + 2}$

حاصل عبارتهای زیر را تا حد امکان ساده کنید.

مثال ۶۹

الف)  $\frac{3}{2x} + \frac{1}{6x^2} - \frac{2}{3x} =$

ب)  $\frac{1}{a^2 - 1} + \frac{1}{a^2 + 2a + 1} =$

ج)  $\frac{a + 5}{a - 1} - \frac{6}{a^2 + a + 1} - \frac{6(a^2 + 2)}{a^3 - 1} =$



بطور کلی ممکن است با یکی از سه حالت زیر مواجه شویم:

(۱) اگر با عبارت  $\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}$  مواجه بودیم از روش زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}} \times \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \begin{cases} \frac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}, & n = 2k + 1 \\ \frac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{|a|}, & n = 2k \end{cases}$$

(۲) اگر با عبارت  $\frac{c}{b \pm \sqrt{a}}$  مواجه بودیم از روش زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{c}{b \pm \sqrt{a}} \times \frac{b \mp \sqrt{a}}{b \mp \sqrt{a}} = \frac{c(b \mp \sqrt{a})}{b^2 - a}$$

(۳) اگر با عبارت  $\frac{c}{b \pm \sqrt[3]{a}}$  مواجه بودیم از روش زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{c}{\sqrt[3]{a} \pm b} \times \frac{\sqrt[3]{a^2} \mp b\sqrt[3]{a} + b^2}{\sqrt[3]{a^2} \mp b\sqrt[3]{a} + b^2} = \frac{c(\sqrt[3]{a^2} \mp b\sqrt[3]{a} + b^2)}{a \pm b^3}$$

$$A = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}$$

کسرهای زیر را گویا و سپس ساده کنید.

مثال ۷۰

حاصل عبارات زیر را تا حد امکان ساده کنید.

مثال ۷۱

الف)  $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} =$

ب)  $1 + \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}}{4+\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n^2-n}} =$