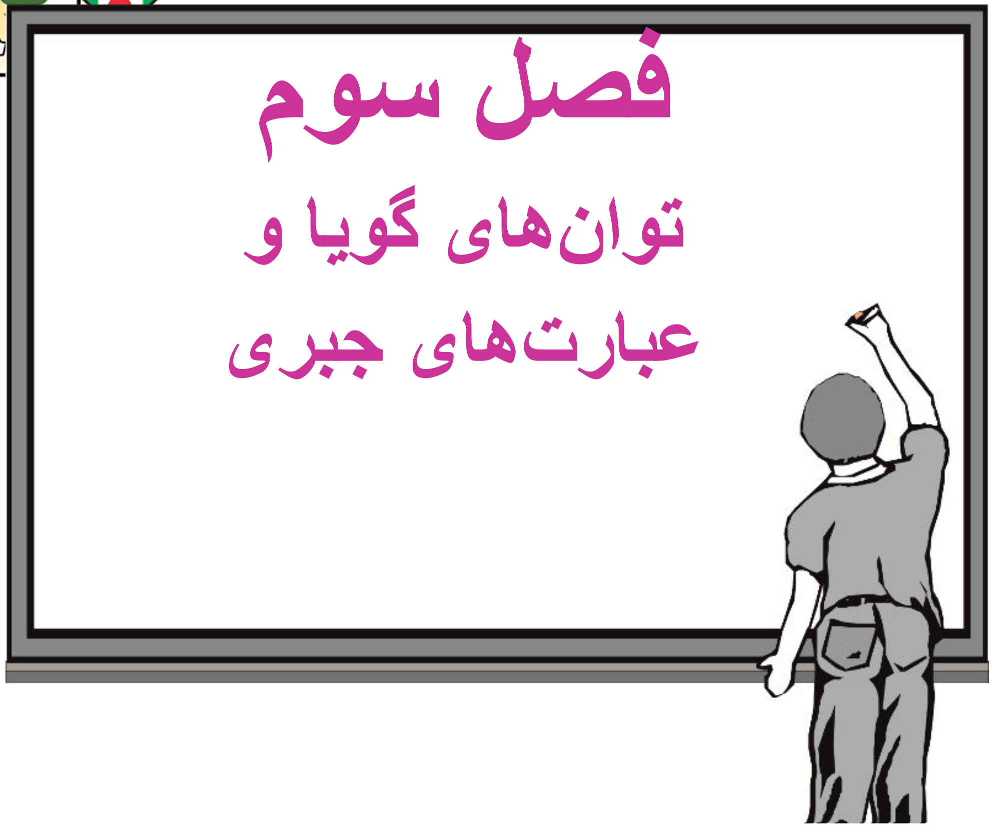
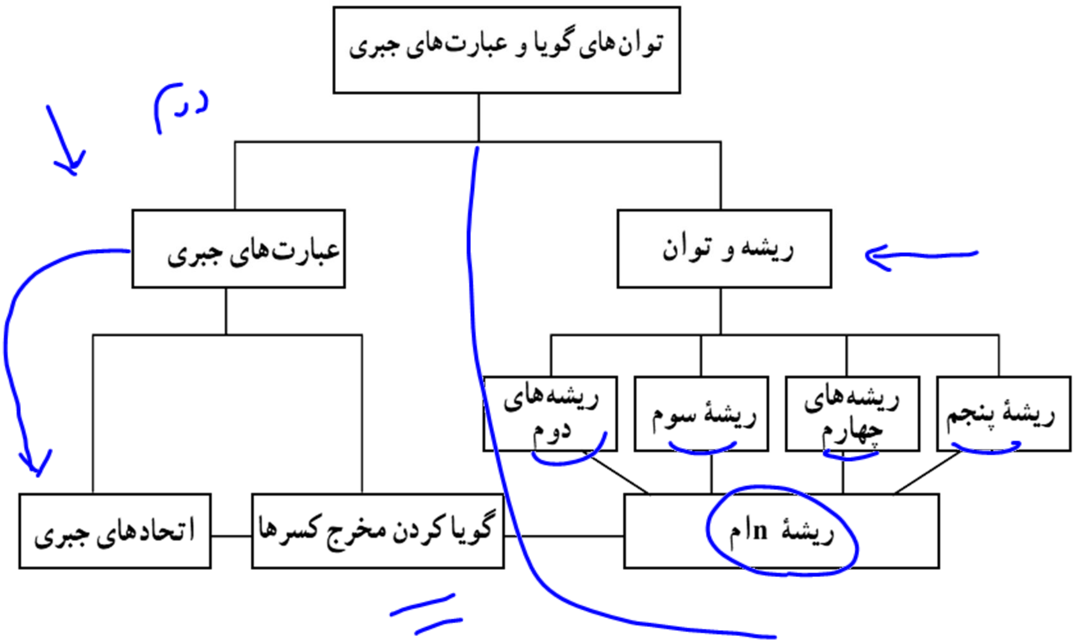

فصل سوم
توان‌های گویا و
عبارت‌های جبری


توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
ریشه و توان
عبارت‌های جبری
ریشه‌های دوم
ریشهٔ سوم
ریشه‌های چهارم
ریشهٔ پنجم
ریشهٔ nام
گویا کردن مخرج کسرها
اتحادهای جبری
در

درس اول: ریشه و توان

ریشه و توان رابطه‌ای دو سویه دارند یعنی عمل ریشه‌گیری عکس عمل توان رسانی است.

ریشه دوم: عدد b را یک ریشه دوم عدد a می‌نامیم هرگاه $b^2 = a$.

$\pm b = \sqrt{a} \Leftarrow$ $a^2 = 4$, $a = \pm 2$ $\sqrt{4} = 2$

نکته

$-b$ هم دیگر ریشه دوم عدد a است.

$$\boxed{b^2 = a \xrightarrow{a>0} a \text{ ریشه‌های دوم } b = \pm\sqrt{a}}$$

نتیجه: اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، آنگاه $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ ریشه‌های دوم a هستند.

مثال ۱ ریشه‌های دوم ۱۶ و ۰/۰۴ را تعیین کنید.

$x^2 = 16 \to x = \pm 4$ $\sqrt{16} = 4$

$x^2 = 0/04$ $x = \pm 0/2$ $\sqrt{0/04} = 0/2$

۱) عددهای منفی، ریشه دوم ندارند مثلا $\sqrt{-3}$ تعریف نشده است.

۲) ریشه دوم عدد صفر، صفر است یعنی $\sqrt{0} = 0$

۳) هر عدد حقیقی مثبت، دو تا ریشه دوم دارد که با هم قرینه‌اند.

ریشه سوم: عدد حقیقی b را ریشه سوم عدد a می‌نامیم هرگاه $a = \sqrt[3]{b}$.

هر عدد حقیقی مانند a، دقیقا یک ریشه سوم دارد که با خود a هم علامت است.

$$\boxed{b^3 = a \xrightarrow{a \in \mathbb{R}} a = b = \sqrt[3]{a} \text{ ریشه سوم}}$$

مثال ۲ ریشه سوم ۸ و ۶۴- را تعیین کنید.

$x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[3]{-64} = -4$

اگر a یک عدد حقیقی باشد، آنگاه:

$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$ $\boxed{\sqrt[3]{a^3} = a}$ $\boxed{\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}}$

$\sqrt{(x^2+1)^2} = |x^2+1| = x^2+1$

مثال ۳ عبارت‌های $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}, \sqrt{x^4+2x^2+1}, \sqrt[3]{0/008}, \sqrt[3]{-0/064}$ را ساده کنید.

$|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1$ $0/2$ $-0/4$

$\sqrt[4]{16} = |2| = 2$

$\sqrt[5]{-32} = -2$

ریشه چهارم و پنجم: ریشه‌های چهارم و پنجم عدد حقیقی a نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند.

$$b^4 = a \xrightarrow{a\in\mathbb{R}^+} b = \pm\sqrt[4]{a}$$

$$b^5 = a \xrightarrow{a\in\mathbb{R}} b = \sqrt[5]{a}$$

مثال ٤ ریشه چهارم ۸۱ و ریشه پنجم ۳۲- را تعیین کنید.

$\sqrt[4]{81}=3$

$x^4=81 \to x=\pm 3$

$x^5=-32 \to x=-2$

نکته اعداد منفی، ریشه دوم، چهارم، ششم و به طور کلی ریشه مرتبه زوج ندارند مثلاً $\sqrt[4]{-8}$ وجود ندارد.

مثال ٥ اگر $a=0/00243$ و $b=-0/00032$ باشند، حاصل $\sqrt[5]{a}$ و $\sqrt[5]{b}$ را تعیین کنید.

$(-0/2)^5$

$-0/2$

$\sqrt[5]{(0/3)^5}=0/3$

$\boxed{\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}}$ *

$\sqrt[3]{5^6}=5^{6/3}=5^2=25$

مثال ٦ اگر b ریشه سوم عدد ۵ باشد، حاصل $\left|b^6-(2b)^3\right|$ را بیابید.

$\boxed{b=\sqrt[3]{5}}$

$\left|(\sqrt[3]{5})^6-(2\sqrt[3]{5})^3\right|$

$5^2 \quad 8\times5$

$|5^2-8\times5|=|25-40|=15$

مثال ٧ عددی را بیابید که ریشه پنجم آن عدد، نصف ریشه سوم آن باشد. مسأله چند جواب دارد؟

$\left(\sqrt[5]{x}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}\right)^{15} \Rightarrow \sqrt[15]{x^{15}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{15}\sqrt[15]{x^{15}}$

$x^3=\left(\frac{1}{2}\right)^{15}x^5$

$2^{15}x^3=x^5$

$2^{15}x^3-x^5=0 \quad x^3(2^{15}-x^2)=0$

$\boxed{x=0}$

$x^2=2^{15}$

$\boxed{x=\pm\sqrt{2^{15}}}$

محاسبه تقریبی ریشه‌ها

رادیکال‌هایی مانند $\sqrt{a}$ که $a>0$ مربع کامل نباشد و یا $\sqrt[3]{b}$ که b مکعب کامل نباشد، اعداد حقیقی گنگ و اعشاری بوده که تعداد ارقام اعشاری آن‌ها بی‌شمار و دارای دوره تناوب نیستند. هیچ‌گاه مقدار دقیق آن‌ها به صورت اعشاری قابل نمایش نیست و فقط می‌توانیم مقدار تقریبی آنها را به دست آوریم.

مثال ٨ تقریبی از $\sqrt{93}$ با یک رقم اعشار به دست آورید.

$\sqrt{81}<\sqrt{93}<\sqrt{100}$

$9 \quad \boxed{9/6} \quad 10$

$81 < 93 < 100 \xrightarrow{\sqrt{}} 9 < \sqrt{93} < 10$

x	۹/۵	۹/۶	۹/۷
x^2	۹۰/۲۵	۹۲/۱۶	۹۴/۰۹

از دو عدد $(9/6)^2 = 92/16$, $(9/7)^2 = 94/09$، عدد ۹۲/۱۶ به عدد ۹۳ نزدیک‌تر است.

بنابراین مقدار تقریبی $\sqrt{93}$ با تقریب ۰/۱ برابر ۹/۶ $\sqrt{93}$ است.

مثال ۹ بین کدام اعداد صحیح متوالی قرار دارد؟ و تقریبی از آن با یک رقم اعشار به دست آورید.

$40401 = 40000 + 400 + 1 = (200+1)^2$

مثال ۱۰ ثابت کنید $\sqrt{4n^2+4n+1}$ یک عدد صحیح است و به کمک آن مشخص کنید که عدد $\sqrt{40201}$ بین چه اعداد صحیح متوالی قرار دارد؟ $(n \in \mathbb{N})$

$\sqrt{(2n+1)^2} = 2n+1$

$\underbrace{\sqrt{40000}}_{200} < \sqrt{40201} < \underbrace{\sqrt{40401}}_{201}$

$200 < \ldots < 201$

درس دوم: ریشهٔ n ام

تعریف: عدد حقیقی b را یک ریشه‌ی n ام عدد a می‌نامیم هرگاه $b^n = a$:$(n\in \;, n\geq 2)$

$$b^n = \to b = \begin{cases} \sqrt[n]{a} & n \text{ فرد} \\ \pm\sqrt[n]{a} & a>0 \text{ و } n \text{ زوج} \end{cases}$$

خواص ریشهٔ n ام

تمام روابط زیر به شرطی برقرارند که ۲ نکته رعایت شود:

۱) زیر رادیکال با فرجه زوج منفی نشود. ۲) علامت عبارت رادیکالی تغییر نکند.

۱) $(\sqrt{a})^2 = a$	۲) $(\sqrt[n]{a^n}) = \begin{cases} a & n \text{ فرد} \\ \lvert a\rvert & n \text{ زوج} \end{cases}$	۳) $\sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} a\sqrt[n]{b} & n \text{ فرد} \\ \lvert a\rvert\sqrt[n]{b} & n \text{ زوج} \end{cases}$

نکته: در حالت کلی $\sqrt[n]{a^n} \neq (\sqrt[n]{a})^n$ مثلاً $\sqrt[4]{(-3)^4} \neq (\sqrt[4]{-3})^4$

در واقع تساوی فوق وقتی برقرار است که n فرد یا a مثبت باشد.

$\boxed{\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}}$, $\sqrt[n]{ab}\neq\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$: $\boxed{\sqrt{(-۳)(-۵)}\neq\sqrt{-۳}\times\sqrt{-۵}}$

$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\neq\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$: $\boxed{\sqrt{\frac{-۸}{-۲}}\neq\frac{\sqrt{-۸}}{\sqrt{-۲}}}$

$۲\sqrt{۵}=\sqrt{۲^۲\times۵}=\sqrt{۴\times۵}=\sqrt{۲۰}$

$\boxed{(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}}$, $\sqrt[n]{a^m}\neq(\sqrt[n]{a})^m$: $\boxed{\sqrt[۴]{(-۲)^۴}\neq\left(\sqrt[۴]{(-۲)}\right)^۴}$

$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}}=\sqrt[nmp]{a}}$: $\sqrt{\sqrt[۳]{-۸}}\neq\sqrt[۶]{-۸}$ تعریف نشده

$\boxed{\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b\sqrt[p]{c}}}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[nm]{b}\times\sqrt[nmp]{c}}$

$\sqrt{۲}\times\sqrt[۳]{۵}=\sqrt[۶]{۲^۳}\times\sqrt[۶]{۵^۲}=\sqrt[۶]{۸}\times\sqrt[۶]{۲۵}=\sqrt[۶]{۲۰۰}$

$\boxed{a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}}$: $\cancel{-۳\sqrt[۴]{۵}\neq\sqrt[۴]{(-۳)^۴\times۵}}$

$\boxed{\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[n]{a}}$: $\sqrt[۶]{(-۵)^۲}\neq\sqrt[۳]{-۵}$

$\boxed{\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{a}=\sqrt[nm]{a^{m+n}}}$

$\sqrt[۳]{۵۱۲}=\sqrt[۳]{۲^۹}=۲^۳=۸$, $x^۳=\sqrt{۵۱۲}=$

$x^۳=۸\rightarrow \boxed{x=۲}$

$x^۲=۴\rightarrow x=\pm۲$

مثال ۱۱ ریشه سوم $\sqrt[۳]{۵۱۲}$ و ریشه دوم $\sqrt{۶۴}$ را بدست آورید.

مثال ۱۲ در چه صورت $\sqrt[۴]{x^{۱۲}}=-x^۳$ صحیح است؟

$x\leq۰$

مثال ۱۳ در مورد شرایط برقراری تساوی های $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ و $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ بحث کنید.

$a,b\geq۰$, $b\neq۰$

$\sqrt{۲\times۲}=\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}$

$\sqrt[۳]{۲x\times\sqrt{\frac{۱}{۴x^۲}}}$

مثال ۱۴ اگر $x<۰$ باشد، حاصل $\sqrt[۳]{۲x\sqrt{\frac{۱}{۴x^۲}}}$ را بیابید.

$\sqrt[۳]{۲x\times\frac{۱}{|۲x|}}=\sqrt[۳]{۲x\times\frac{۱}{-۲x}}=\sqrt[۳]{-۱}=-۱$

مثال ۱۵ اگر ریشه پنجم $16\sqrt[3]{a}$ یک عدد طبیعی باشد، مقدار a را بیابید.

$x^5 = 16\sqrt[3]{a} \Rightarrow x = \sqrt[5]{16\sqrt[3]{a}} = \sqrt[5]{2^4 \times \sqrt[3]{a}} =$ طبیعی

$\sqrt[5]{2^4 \times 2} = \sqrt[5]{2^5} = 2 \quad \boxed{a=8}$

مثال ۱۶ در صورتی که $x = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ باشد، مقدار x^5 را بیابید.

$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2 \times 2}} = \sqrt[6]{2^3} = \boxed{\sqrt{2}}$

$x = \sqrt{2} \Rightarrow x^5 = (\sqrt{2})^5 = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \boxed{4\sqrt{2}}$

مثال ۱۷ به ازای چه مقدار m، رابطه $\sqrt[3]{a\sqrt[m]{a^4}} = a$ برقرار است؟

$\sqrt[3]{a\sqrt[m]{a^4}} = \sqrt[3m]{a^m \times a^4} = \sqrt[3m]{a^{m+4}} = a^{\frac{m+4}{3m}} = a^1$

$\frac{m+4}{3m} = 1 \quad 3m = m+4 \quad 2m = 4 \quad \boxed{m=2}$

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} \qquad a^{-b} = \frac{1}{a^b}$

مثال ۱۸ حاصل هر یک از عبارت های زیر را بیابید.

الف) $(2+\sqrt{3})\sqrt{7-4\sqrt{3}} =$

$\sqrt{(2+\sqrt{3})^2(7-4\sqrt{3})} = \sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} = \sqrt{7^2 - 48} = \sqrt{49-48} = 1$

$(2+\sqrt{3})^2 = 4+3+4\sqrt{3}$

$\frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$(2-\sqrt{3})^2 = 4+3-4\sqrt{3} = 7-4\sqrt{3}$

$(1-2\sqrt{3})^2 = 1+12-4\sqrt{3} = 13-4\sqrt{3}$

ب) $(3+\sqrt{5})\sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{(3+\sqrt{5})^2(14-6\sqrt{5})} = \sqrt{(14+6\sqrt{5})(14-6\sqrt{5})}$

$(3+\sqrt{5})^2 = 9+5+6\sqrt{5}$

$= \sqrt{14^2 - 6^2 \times 5} = \sqrt{196-180} = \sqrt{16} = 4$

$\boxed{\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}}$

پ) $\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\right)^{10} + \left(\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\right) =$

$\left(\sqrt[5]{\sqrt{2}}\right)^{10} + \left(\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{4}}\right) = 2 + 2 = 4$

$\left(\sqrt{2}\right)^{2} = 2$

نکته اگر در زیر رادیکال دو جمله‌ای باشد، سعی کنیم در صورت امکان، آن را به عبارتی تبدیل کنیم که توانش با فرجه برابر باشد تا از زیر رادیکال بیرون بیاید.

رادیکال‌های مسلسل

$ax^2+bx+c=0$ $\quad \Delta=b^2-4ac>0$ $\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x^2-x-2=0$ $\quad a=1,\ b=-1,\ c=-2$ $\quad \Delta=(-1)^2-4(1)(-2)=9$ $\quad x=\frac{1\pm\sqrt9}{2\times1}$ $\frac{1+3}{2}=2$, $\frac{1-3}{2}=-1$

در این حالت حاصل را x می‌گیریم و با به توان رساندن طرفین معادله و قرار دادن بخشی از معادله برابر با x، معادله را حل کرده و x را می‌یابیم.

مثال ۱۹ حاصل رادیکال زیر چیست؟ (از اتحاد جمله مشترک ($x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$) کمک بگیرید.

$$\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots}}}}_{x}}=x$$

$\Rightarrow (\sqrt{2+x}=x)^2 \Rightarrow 2+x=x^2 \Rightarrow x^2-x-2=0$

$x^2-x-2=(x-2)(x+1)=0$ $\quad x-2=0,\ x=2$ $\quad x+1=0,\ x=-1$ ✗

نکته در متون ریاضی $1/618=\frac{1+\sqrt5}{2}$ را عدد طلائی می‌نامند و رادیکال مسلسل $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$ مولّد آن است.

مثال ۲۰ مقدار x را در روابط زیر بیابید:

$\sqrt{1+\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}_{x}}=x \Rightarrow (\sqrt{1+x}=x)^2$

$1+x=x^2 \Rightarrow x^2-x-1=0$ $\quad \Delta=(-1)^2-4(1)(-1)=5$ $\quad x=\frac{1\pm\sqrt5}{2}$ $\quad \frac{1+\sqrt5}{2}$ ✓ $\quad \frac{1-\sqrt5}{2}$ ✗

الف) $\sqrt{3\underbrace{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{\dots}}}}_{x}}=x$

$\Rightarrow (\sqrt{3x}=x)^2 \Rightarrow 3x=x^2$ $\quad x^2-3x=0$ $\quad x(x-3)=0$ $\quad x=0$ ✗, $x=3$ ✓

ب) $\sqrt{6+\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\dots}}}_{x}}=x$

$\Rightarrow (\sqrt{6+x}=x)^2 \Rightarrow 6+x=x^2$

$x^2-x-6=0$ $\quad \Delta=(-1)^2-4(1)(-6)=1+24=25$ $\quad x=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}$ $\quad 3,\ -2$

$(x-3)(x+2)=0$ $\quad x=3$ ✓, $x=-2$

پ) $2\sqrt{3+\underbrace{2\sqrt{3+2\sqrt{3+\dots}}}_{x}}=x$

$(2\sqrt{3+x}=x)^2$ $\quad a=1$ $\quad x^2-4x-12=0$

$(x-6)(x+2)=0$ $\quad x=6$ ✓, $x=-2$

$a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$

$41+24\sqrt2$ $\quad 2ab$ $\quad 12\sqrt2$

$(12+\sqrt2)^2=144+2+24\sqrt2$

$(4+3\sqrt2)^2=\underbrace{16+18}_{34}+24\sqrt2$

$(3+4\sqrt2)^2=\underbrace{9+32}_{41}+24\sqrt2$

$(1+12\sqrt2)^2=$

رابطهٔ رادیکال مرکب

$$\boxed{\sqrt{A\pm m\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}}}$$

که در آن $\boxed{C=\sqrt{A^2-m^2B}}$ است. توجه شود که می‌توان به جای حفظ کردن رابطه فوق، برای حل چنین مسائلی کافی است زیر رادیکال را به صورت مربع کامل نوشت.

$C=\sqrt{41^2-24^2\times2}$

مثال ۲۱ حاصل $\sqrt{41+24\sqrt2}$ را بیابید.

A $\quad m$ $\quad B$

$\sqrt{(3+4\sqrt2)^2}=3+4\sqrt2$

نکته در حل بسیاری از سؤالات رادیکالی خصوصاً از دو اتحاد مربع دوجمله‌ای و مزدوج استفاده فراوان می‌گردد.

$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$ مزدوج , $\boxed{(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2}$ اتحاد مربع دو جمله

اگر $a^2-b^2=1$ شود، همیشه $(a+b)=(a-b)^{-1}$ و بالعکس.

مثال ۲۲ حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{9-6\sqrt{2}}=$

$7+4\sqrt3=(2+\sqrt3)^2$, $9-6\sqrt2=3(3-2\sqrt2)=3(\sqrt2-1)^2$

ب) $\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{2+2\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}=$

$\sqrt{(\sqrt2+1)^2}-(\sqrt2+1)=\sqrt2+1-(\sqrt2+1)$

$4+2\sqrt3=(\sqrt3+1)^2$

مثال ۲۳ ریشه‌ی دوم اعداد $8+4\sqrt{3}$ و $8-4\sqrt{3}$ را در صورت وجود بیابید.

$x^2=8+4\sqrt3=2(4+2\sqrt3)=(\sqrt6+\sqrt2)^2$

$x^2=2(\sqrt3+1)^2$

$x=\pm\sqrt2(\sqrt3+1)=\pm(\sqrt6+\sqrt2)$

نکته در بعضی موارد با ضرب رادیکالی در رادیکال بزرگ‌تر، زیر رادیکال بزرگ مربع کامل می‌شود.

$\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{4+2\sqrt3}=\sqrt{(\sqrt3+1)^2}=\sqrt3+1$

درس سوم: توان‌های گویا

تعریف $a^{\frac{1}{n}}$: اگر a یک عدد حقیقی مثبت و n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲ باشد، آن‌گاه توان $\frac{1}{n}$ عدد a به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{a \in (0,+\infty),\ n \in \{2,3,\dots\}\ ,\ : a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \qquad 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3} \qquad \pi^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\pi}$$

نکته
اگر a منفی باشد آن‌گاه $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف نمی‌کنیم مثلاً $(-1)^{\frac{1}{3}}$ یا $(-3)^{\frac{1}{4}}$ تعریف نمی‌شود. $\sqrt[4]{(-3)}$

تعریف $a^{\frac{m}{n}}$: اگر a یک عدد حقیقی مثبت و m و n هر دو عدد طبیعی و n بزرگتر یا مساوی ۲ باشد، آن‌گاه توان $\frac{m}{n}$ عدد a را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{a \in \mathbb{R}^{+}\ ,\ m,n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq 2\ :\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}}}$$

$$3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2} = \sqrt[7]{9} \qquad 5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4]{125} \qquad 16^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{16^5} = \sqrt[4]{(2^4)^5} = \sqrt[4]{2^{20}} = 2^5 =$$

نکته
اگر a منفی باشد آنگاه $a^{\frac{m}{n}}$ تعریف نمی‌شود.

تعریف $a^{-\frac{m}{n}}$: اگر a یک عدد حقیقی مثبت و m و n هر دو عدد طبیعی و n بزرگ‌تر یا مساوی ۲ باشد آنگاه $a^{-\frac{m}{n}}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{a \in \mathbb{R}^{+}\ ,\ m,n \in \mathbb{N}\ \ n \geq 2\ :\ a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}}$$

$$16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{16^{1/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2} \qquad 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad 81^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{81^{3/4}} = \frac{1}{(3^4)^{3/4}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

قواعد توان‌های گویا

قواعد توان‌های گویا مانند قواعد توان‌های صحیح است یعنی اگر r و s دو عدد گویا و a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، آن‌گاه:

$$1)\ a^r \times a^s = a^{r+s} \qquad 2)\ a^r \div a^s = a^{r-s} \qquad 3)\ (a^r)^s = a^{rs}$$

$$4)\ a^r \times b^r = (ab)^r \qquad 5)\ a^r \div b^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r \qquad 6)\ a^{-r} = \frac{1}{a^r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r$$

مثال ۲۴ حاصل اعداد $6^{-\frac{1}{2}}$ و $(\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}$ و $\sqrt[6]{16^{\frac{3}{4}}}$ را به‌صورت رادیکال بنویسید.

$$6^{-1/2} = \frac{1}{6^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$(\sqrt{2})^{3/2} = (2^{1/2})^{3/2} = \boxed{2^{3/4}} = \sqrt[4]{2^3} = \boxed{\sqrt[4]{8}}$$

$$\sqrt[6]{(2^4)^{3/4}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

توان‌های گنگ

بحث توان‌های گنگ، جزء مطالب تکمیلی در این فصل مطرح می‌شود لکن باید در نظر داشت که در عمل وقتی با عددی توان دار با توان گنگ سروکار داریم باید آن را با یک تقریب مناسب گویا کرده و با عدد تقریب شده گویا کار کنیم

مثلا برای محاسبه $3^{\sqrt{2}}$ داریم:

$$\sqrt{2} = 1/4 \Rightarrow 3^{\sqrt{2}} = 3^{1/4} = 3^{\frac{14}{10}} = 3^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{3^7} = 3\sqrt[5]{3^2} = \boxed{3\sqrt[5]{9}}$$

نکته: تمام قواعد توان‌های گنگ مانند قواعد توان‌های گویا است.

مثال ۲۵ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $(8)^{\frac{4}{3}} - (0/25)^{-1/5} + (\sqrt{3}^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{2}}$

$$(2^3)^{4/3} = 2^4 = 16 \qquad \frac{1}{4} = (2^{-2})^{-1/5} \to 2^3 = 8 \qquad (\sqrt{3})^{2\times 2} = \sqrt{3}^4 = \sqrt{81} = 9$$

$$= 16 - 8 + 9 = 17$$

ب) $\sqrt{2}(\sqrt{50} - \sqrt[4]{4}) + 8^{-\frac{2}{3}}$

$$\sqrt{2}(\sqrt{50} - \sqrt{2}) = \sqrt{100} - \sqrt{4} = 10 - 2 = 8$$

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \qquad (2^3)^{-2/3} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$= 8 + \frac{1}{4} = 8\frac{1}{4} = \boxed{\frac{33}{4}}$$

مثال ۲۶ با فرض تعریف‌پذیری هر یک از عبارات داده شده حاصل هر یک از آن‌ها را تا حد امکان ساده کنید.

$\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$

۱) $x^{2}\sqrt{x^{2}\sqrt{x^{2}}}\div\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=$

۲) $2^{-2/5}\times\frac{1}{\sqrt[5]{4^{-7}}}\times2^{1/5}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{(\frac{1}{2})^{5}}=$

$=2^{-2/5}\times2^{1/5}\times\dots$

۳) $(1+\sqrt{2})^{\sqrt{8}}(3-\sqrt{8})^{\sqrt{2}}=$

$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$=((3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}))^{\sqrt{2}}=(9-8)^{\sqrt{2}}=1^{\sqrt{2}}=1$

۴) $27^{0/17}\times4^{0/46}\times3^{0/99}\times2^{0/58}\times\sqrt{6^{3}}=$

$=3^{0/51}\times2^{0/92}\times3^{0/99}\times2^{0/58}=3^{1/5}\times2^{1/5}=6^{1/5}$

۵) $(17+12\sqrt{2})^{0/25}\times(48-32\sqrt{2})^{0/5}=$

$=4(\sqrt{2}-1)$

۶) $(\sqrt[6]{2}-1)(\sqrt[6]{2}+1)(\sqrt[3]{4}+1+\sqrt[3]{2})=$

$=(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+1+\sqrt[3]{2})=\sqrt[3]{2}^{3}-1=2-1=1$

مثال ۲۷ مقدار x را در معادلات زیر بیابید.

۱) $\sqrt{x}^{\sqrt{2}}\times x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=4$

$x=\pm\sqrt{4^{\sqrt{2}}}$

۲) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^{2}}\sqrt{x^{2}}}}=2$

$x=2^{3}=8$

نکته اگر a^{n} و $\sqrt[n]{a}$ برای $n\geq2$ و $n\in\mathbb{N}$ تعریف شده باشند در این صورت می‌توان آن‌ها را به حالات زیر با هم مقایسه کرد:

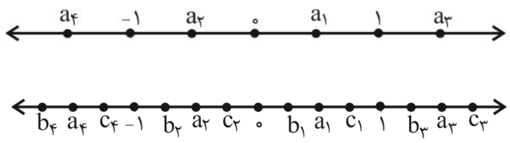
۱) در صورتی که $a>1$ باشد: $1<\dots<\sqrt[4]{a}<\sqrt[3]{a}<\sqrt{a}<a<a^{2}<a^{3}<a^{4}\dots$

۲) در صورتی‌که $0<a<1$ باشد: $0<\dots<a^{4}<a^{3}<a^{2}<a<\sqrt{a}<\sqrt[3]{a}<\sqrt[4]{a}<\dots<1$

۳) در صورتی‌که $-1<a<0$ باشد: $-1<\dots<\sqrt[5]{a}<\sqrt[3]{a}<a<a^{3}<a^{5}<\dots<0$

۴) در صورتی‌که $a<-1$ باشد: $\dots<a^{5}<a^{3}<a<\sqrt[3]{a}<\sqrt[5]{a}<\dots<-1$

مثال ۲۸ هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه سوم آن عدد است، وصل کنید.



مثال ۲۹ اعداد $2^{-\sqrt{2}}$ و $(\sqrt{2})^{-2}$ را با هم مقایسه کنید.

$2^{-\sqrt{2}} = 2^{-1.4} = 2^{-14/10} = \frac{1}{2^{14/10}} = \frac{1}{2^{7/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^7}}$

$\sqrt{2}^{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}^2} = \frac{1}{2}$

$2^{-\sqrt{2}} < (\sqrt{2})^{-2}$

مثال ۳۰ اگر $-1 \le a \le 2$ باشد، عدد a^5 بزرگ‌تر است یا a^7؟ بحث کنید.

$a = -1 \quad a^5 = a^7 = -1$

$a = 2 \quad a^5 = 32 < a^7 = 128$

مثال ۳۱ اگر a^6 گنگ باشد و b^2 گویا، چه تعداد از اعداد زیر گنگ است؟

الف) $a^4 + b^4$ ب) $a^8 + b^6$ پ) $\frac{(ab)^2 + (ab)^4}{a^2 b^4}$ ت) $\sqrt{a^4 \times b^3}$

عبارات جبری

تعریف: هر عبارتی شامل متغیری مانند x و y و ... و توان‌هایی از آن‌ها را عبارت جبری می‌نامیم. در حالت خاص یک عدد را هم عبارت جبری گوییم.

مثال ۳۲ کدام یک از عبارت زیر جبری‌اند:

$\sqrt{3}\ ,\ \pi x^2\ ,\ xy\ ,\ \frac{1}{2}x\ ,\ 4x^2\ ,\ a|b|\ ,\ \sqrt{a^2+b^2}\ ,\ \frac{x^4 y^2}{z}$

مثال ۳۳ در شکل مقابل یک دایره به شعاع r داخل یک مربع قرار داده شده است. مساحت قسمت رنگی را به‌صورت یک عبارت جبری بنویسید و در حالی که $r=5$ باشد مقدار این عبارت را حساب کنید.

$2r$

$S_{هاشور} = S_{مربع} - S_{دایره}$

$=(2r)^2 - \pi r^2 = 4r^2 - \pi r^2 = \boxed{(4-\pi)r^2}$

$(4-\pi)\times 5^2 = (4-\pi)\times 25$

مثال ۳٤ هر یک از روابط زیر را به‌صورت هندسی تفسیر کنید.

الف) $2(a+b)$ ب) $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$

محیط مستطیل

$=\sqrt{a^2+b^2}$

مثال ۳۵ حاصل عبارت جبری $(y^z)^{x+1}$ را به‌ازای $y=\sqrt{2}$ و $x=1$ و $z=-1$ حساب کنید.

$(\sqrt{2}^{-1})^{1+1} = (\sqrt{2}^{-1})^2 = \sqrt{2}^{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}^2} = \frac{1}{2}$

مثال ۳٦ در عبارت جبری $\sqrt{a^2+b^2}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ مقدار عبارت را در هر یک از حالات زیر در صورت وجود بیابید.

الف) $b=-1, a=1$ ب) $b=4, a=3$ ج) $b=2, a=0$

$\boxed{P=\frac{a+b+c}{2}}$ $S=$

مثال ۳۷ عبارت جبری زیر مربوط به محاسبه مساحت یک مثلث دلخواه است که P نصف محیط می‌باشد. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a را به کمک این عبارت جبری حساب کنید.

دستور هرون

$$\boxed{S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}$$

مثال ۳۸ مساحت مثلثی که طول اضلاعش ۱۰، ۸ و ۷ می‌باشد را به‌دست آورید.

$P=\frac{7+8+10}{2}=12.5$

$S=\sqrt{12.5(12.5-10)(12.5-8)(12.5-7)}$

مثال ۳۹ در صورتی که $a+3b=5$ و $b+3c=7$ باشد حاصل $4(a+c)+5(3b+c)$ چند است؟

$a=2 \quad c=2 \quad b=1$

$c=2 \qquad 3b=5-a$

$4a+4c$

$4(a+c)+5(5-a+c)$

$\rightarrow 4a+4c+25-5a+5c = 25-a+9c = 25+16 = 41$

$16+25=41$

$a+3b=5$

$-3 \, | \, b+3c=7$

$a+3b=5$

$-3b-9c=-21$

$a-9c=-16$

$-a+9c=16$

مثال ۴۰ در صورتی که $A=1-2x^2$ و $B=3x^2-4x+1$ و $C=x^2-1$ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $3A-2B+3C$

$3(1-2x^2)-2(3x^2-4x+1)+3(x^2-1)=$

$=\cancel{3}-6x^2-6x^2+8x-2+3x^2-\cancel{3}=-9x^2+8x-2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$a^2-\cancel{ab}+\cancel{ab}-b^2$

ب) $B+(x+1)A+2xC$

$3x^2-4x+1+(x+1)(1-2x^2)+2x(x^2-1)$

$3x^2-4x+1+x-2x^3+1-2x^2+2x^3-2x=x^2-5x+2$

ج) $A\times B+6x^4-x^2$

$=(1-2x^2)(3x^2-4x+1)+6x^4-x^2$

$=3x^2-4x+1-6x^4+8x^3-2x^2+6x^4-x^2=8x^3-4x+1$

$(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2$

اتحادها و تجزیه

تعریف: اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسان داشته باشند، برابری جبری حاصل از آن‌ها را اتحاد جبری می‌نامیم.

اتحاد مربع دوجمله‌ای $\leftarrow$ $a,b\in\mathbb{R}$

۱) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

۲) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

اتحاد مربع سه‌جمله‌ای

۳) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

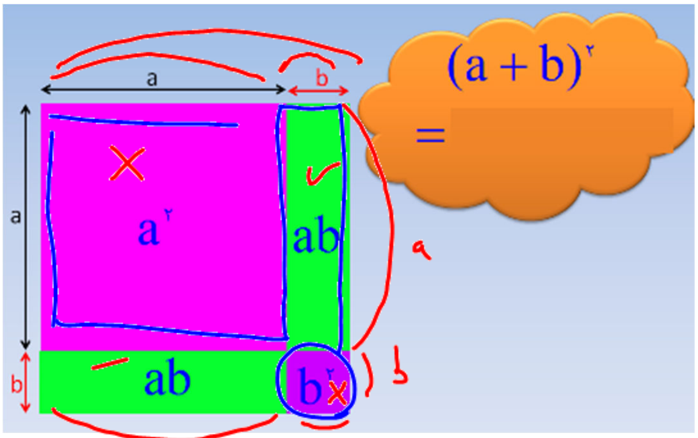
اتحاد مزدوج

۴) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

اتحاد جمله مشترک

۵) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

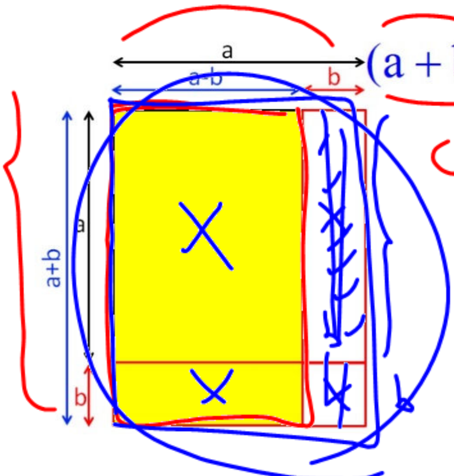
اثبات هندسی اتحاد مربع دوجمله‌ای



$S_{مربع} = (a+b)^2$

$S_{مربع} = S_{\square} + S_{\square} + 2S_{\square} = a^2 + b^2 + 2ab$

اثبات هندسی اتحاد مزدوج



$(a+b)(a-b) = a(a+b) - b^2 - ab$

مستطیل

$= a^2 + ab - b^2 - \cancel{ab} = a^2 - b^2$

مثال ۴۱ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید. (بسط اتحاد)

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

۱) $(۳x+۱)^۲ = (3x)^2 + 1^2 + 2(3x)(1) = 9x^2 + 1 + 6x$

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

۳) $(x^۳ - \frac{۱}{۲})^۲ = (x^3)^2 + (\frac{1}{2})^2 - 2(x^3)(\frac{1}{2}) = x^6 + \frac{1}{4} - x^3$

۴) $(d - ۳\sqrt{۲})^۲ = d^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times d \times 3\sqrt{2} = d^2 + 18 - 6\sqrt{2}d$

$a^2 + 2(a)(b) + b^2 = (a+b)^2$

۶) $(۲/۷)^۲ + ۲(۲/۷)(۳/۳) + (۳/۳)^۲ = (2/7 + 3/3)^2 = 6^2 = 36$

۷) $(x^n-1)(x^n-1)= (x^n-1)^2=(x^n)^2+1^2-2(x^n)(1)$
$= \boxed{x^{2n}+1-2x^n}$

۸) $\begin{cases} 1001^2 = (1000+1)^2 = 1000^2+1^2+2(1000)(1) = 1000000+1+2000 = \boxed{1002001} \\ 9999^2 = (10000-1)^2 = 100000000+1-20000 \end{cases}$

۹) $(3^{1+x}+3^{1-x})^2 = (3^{1+x})^2+(3^{1-x})^2+2(3^{1+x})(3^{1-x}) = 3^{2+2x}+3^{2-2x}+2\times 3^2$

18

مثال ۴۲ جای خالی را در تساوی زیر چنان پر کنید که این عبارت به یک اتحاد تبدیل شود.

۱) $(y-5x^2)^2 = y^2 - 10yx^2 + 25x^4$

۲) $(x^3+y^3)^2 = x^6 + 2x^3y^3 + y^6$

۳) $(\frac{1}{m^2}+7)^2 = \frac{1}{m^4} + \frac{14}{m^2} + 49$

۴) $(xy-\frac{1}{2})^2 = x^2y^2 - xy + \frac{1}{4}$

۵) $(x^2-\frac{1}{x^2})^2 = x^4 - 2 + \frac{1}{x^4}$

۶) $(\ldots\ldots+\ldots\ldots)^2 = 4x^{-2}y^2z^2 + \ldots\ldots + \frac{9}{4}x^2z^{-4}$

$(2x^{-1}yz + \frac{3}{2}xz^{-2})^2$

نکته نتایجی از اتحاد مربع دوجمله‌ای:

الف) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

ب) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

پ) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

مثال ۴۳ اگر $a+b=5$ و $a-b=3$ باشد حاصل a^4+b^4 را به‌دست آورید.

$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2 = [(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2$

$\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=3 \end{cases}$ $2a=8$, $a=4$, $b=1$

$4^4+1^4=256+1=\boxed{257}$

مثال ۴۴ معادله‌ی $(2^{x+1}+4^x)^2+(2^{x+1}-4^x)^2=24$ را حل کنید.

$2((2^{x+1})^2+(4^x)^2)=24 \Rightarrow 2^{2x+2}+2^{4x}=12 \Rightarrow 4(2^{2x})+(2^{2x})^2=12$

$2^{2x}=(2^2)^x=4^x=A$

$\boxed{A^2+4A=12}$

$A^2+4A-12=0$

$(A+6)(A-2)=0$

$A=2=2^1$, $A=-6$ ✗

$2^{2x}=2 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=1/2$

مثال ۴۵ اگر $2^{x+3}=a$ و $4^{2x-1}=b$ باشد، رابطهٔ بین a و b را بیابید.

ابتدا بین رو ببرد

$4^{2x-1}=(2^2)^{2x-1}=2^{4x-2}$

$\frac{a}{b}=\frac{2^{x+3}}{4^{2x-1}}=\frac{2^{x+3}}{2^{4x-2}}=2^{-3x+5}$

$x+3-(4x-2)=-3x+5$

$A=\frac{\sqrt[3]{9(x^3+y^3+z^3)}}{x}=\frac{\sqrt[3]{9(x^3+x^3+x^3)}}{x}=\frac{\sqrt[3]{9x\cdot 3x^3}}{x}=\frac{3x}{x}=3$

نکته: اگر مجموع مربعات چند عبارت صفر گردد آن‌گاه تک‌تک عبارات را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

مثال ۴۶ در صورتی‌که $x^2+y^2+z^2=xy+xz+yz$ باشد ابتدا ثابت کنید که $x=y=z$ سپس حاصل $A=\frac{\sqrt[3]{9(x^3+y^3+z^3)}}{x}$ را محاسبه کنید. $(x\neq 0)$

$2x^2+2y^2+2z^2=2xy+2xz+2yz$

$x^2+x^2+y^2+y^2+z^2+z^2-2xy-2xz-2yz=0 \Rightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0$

$x-y=0 \quad x=y \quad x=z \quad y=z \Rightarrow x=y=z$

مثال ۴۷ هرگاه $\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{11}$ باشد در این صورت ریشه‌ی دوم $x-\frac{1}{x}$ چه عددی است؟

$\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^4+1}{x^2}}=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{11} \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=11 \Rightarrow (x-\frac{1}{x})^2+2=11$

$\Rightarrow (x-\frac{1}{x})^2=9 \Rightarrow x-\frac{1}{x}=\pm 3$

مثال ۴۸ هرگاه $a+b=1$ باشد ثابت کنید: $a^2(a^2-2)+b^2(b^2-2)=2a^2b^2-1$

۱: $a^4-2a^2+b^4-2b^2=a^4+b^4-2(a^2+b^2)$

۲ ۳: $=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2-2((a+b)^2-2ab)$

$2a^2b^2-1$

۴: $(1-2ab)^2-2a^2b^2-2(1-2ab)$

$(a+b)^2-2ab$

۵: $\Rightarrow 1-\cancel{4ab}+\cancel{4a^2b^2}-\cancel{2a^2b^2}-2+\cancel{4ab}$

تجزیه به کمک اتحاد مربع

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2=(a\pm b)(a\pm b)$$

$15=3\times 5$

مثال ۴۹ به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$x^2+10x+25,\ 4a^2+4ax+x^2,\ x^2y^2-8xy+16,\ x^4-2x^2yz+y^2z^2=(x^2-yz)^2$

$(x+5)^2 \quad (2a+x)^2 \quad (xy-4)^2$

$2(ab+a+b+1)$

مثال ۵۰ عبارت $A=a^2+b^2+2(a+1)(b+1)-1$ را تجزیه کنید.

$a^2+b^2+2ab+2a+2b+2-1$

$a^2+b^2+2ab+2a+2b+1$

$(a+b)^2+2(a+b)+1=(a+b+1)^2$

پویش علمی جهاد

تجزیه به کمک اتحاد مزدوج

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

مثال ۵۱ حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱) $4x^2-\frac{1}{4}y^2=(2x+\frac{1}{2}y)(2x-\frac{1}{2}y)$

۲) $(2x+1)^2-y^2=[(2x+1)-y][(2x+1)+y]$

۳) $(2x+1)^2-(3x+4)^2=[(2x+1)-(3x+4)][(2x+1)+(3x+4)]=(-x-3)(5x+5)=-5(x+3)(x+1)$

۴) $(3a-\sqrt{8}b)(3a+\sqrt{8}b)=(3a)^2-(\sqrt{8}b)^2=9a^2-8b^2$

۵) $(2x+5)(2x-5)=4x^2-25$

۶) $(5ab-\frac{3}{c})(5ab+\frac{3}{c})=(5ab)^2-(\frac{3}{c})^2=25a^2b^2-\frac{9}{c^2}$

۷) $(4a^3+1)(4a^3-1)=(4a^3)^2-1^2=16a^6-1$

۸) $(a-b+1)(a+b-1)=[a-(b-1)][a+(b-1)]=a^2-(b-1)^2$

$2^{-1}=\frac{1}{2}$

۹) $(2^{x-1}+2^{x+1}-\frac{15}{2})(2^x+3)=$ $\frac{2^x}{2}+\frac{2^x\times 2}{1}-\frac{15}{2}=\frac{2^x+4\times 2^x}{2}-\frac{15}{2}=\frac{5\times 2^x}{2}-\frac{15}{2}$

$2^{x-1}=2^x\times 2^{-1}=2^x\times\frac{1}{2}=\frac{2^x}{2}$

$\boxed{\frac{5}{2}(2^x-3)}$

$\boxed{\frac{5}{2}(2^x-3)(2^x+3)}$

مثال ۵۲ عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}=(\frac{x}{2}-\frac{z}{3})(\frac{x}{2}+\frac{z}{3})$ ✓

ب) $x^2y^4-9z^2=(xy^2-3z)(xy^2+3z)$

پ) $x^3-81x=x(x^2-81)=x(x-9)(x+9)$

ت) $a^2+b^2-c^2-2ab=a^2+b^2-2ab-c^2=(a-b)^2-c^2=(a-b-c)(a-b+c)$

ث) $4^x-9^y=(2^2)^x-(3^2)^y=(2^x)^2-(3^y)^2=(2^x-3^y)(2^x+3^y)$

ج) $4x^3-36x=4x(x^2-9)=4x(x-3)(x+3)$

تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک

$$x^2 + Ax + B = (x+\alpha)(x+\beta)$$

که در آن $A = \alpha + \beta$ و $B = \alpha.\beta$.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

مثال۵۳ حاصل عبارات زیر را به‌کمک اتحاد به‌دست آورید.

۱) $(a-3b)(a+5b) = a^2 + (-3b+5b)a + (-3b)(5b) = a^2 + 2ab - 15b^2$

۲) $(x^3-2)(x^6+1)(x^3+2) = (x^3-2)(x^3+2)(x^6+1) = (x^6-4)(x^6+1)$

$(x^3)^2 \quad x^6 - 4$

$= (x^6)^2 + (-4+1)x^6 + (-4)(1)$

$= x^{12} - 3x^6 - 4$

۳) $(2^x+3)(2^x-1) = (2^x)^2 + (3+(-1))\,2^x + 3(-1)$

$= 2^{2x} + 2\times 2^x - 3$

۴) $(x+5)(x+6) = x^2 + (5+6)x + 5\times 6 = x^2 + 11x + 30$

۵) $(2x+4)(2x+3) = (2x)^2 + (4+3)(2x) + 4\times 3$

$= 4x^2 + 14x + 12$

۶) $(x-5)(x+7) = x^2 + (-5+7)(x) + (-5)(7) = x^2 + 2x - 35$

۷) $(y-2)(y-3) = y^2 + (-2-3)(y) + (-2)(-3) = y^2 - 5y + 6$

۸) $(x-2)(x+2)(x^2+3) = (x^2-4)(x^2+3) = (x^2)^2 + (-4+3)x^2 + (-4)(3)$

$= x^4 - x^2 - 12$

مثال ٥٤ عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $a^2+2ab-15b^2=$ $a^2+2a-15$

$=(a+5b)(a-3b)$

ب) $9^x+3^{x+1}+2=$ $(3^x)^2+3\times 3^x+2$

$=(3^x+1)(3^x+2)$

ج) $a^2+b^2+a(b+1)+b(a+1)-12=$

$a^2+b^2+ab+a+ab+b-12$

$a^2+b^2+2ab+a+b-12$

$(a+b)^2+(a+b)-12$

$(a+b+4)(a+b-3)$

د) $25x^2-10x-35=$ $(5x)^2-2(5x)-35=$

$(5x-7)(5x+5)$

$(5x-7)\times 5(x+1)$

هـ) $3x^2-5x+2$

و) $7x^2-4x-3=$

مثال ٥٥ عبارت $(a+1)(a+3)(a+5)(a+7)+15$ را تجزیه کنید.

اتحاد مربع سه جمله‌ای

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$$

مثال ٥٦ به کمک اتحادها محاسبه کنید.

الف) $(a+2b-3)^2=$ $a^2+(2b)^2+(-3)^2+2(a)(2b)+2(a)(-3)+2(2b)(-3)$

$=a^2+4b^2+9+4ab-6a-12b$

ب) $(xy+\frac{2}{x}+\frac{1}{y})^2=$

ج) $(ab+ac+bc)^2=$

مثال ۵۷ در صورتی که $a+b+c=0$ و $a^2+b^2+c^2=1$ عبارت $A=a^4+b^4+c^4$ را حساب کنید.

نکته: اتحاد مربع سه جمله‌ای تجزیه جالبی ندارد ولی عکس آن در برخی از مسائل استفاده می‌گردد.

مثال ۵۸ عبارت $A=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$ را تا حد امکان تجزیه کنید.

اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

مثال ۵۹ حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها حساب کنید.

الف) $(a^2-a-2)(a^2+2a+4)(a^2-a+1)=$

ب) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{56}+1}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{7}+1}=$

ج) $(2^{x+1}+2)(4^x-2^x+1)=$

مثال ۶۰ جاهای خالی را طوری پر کنید که اتحاد برقرار گردد.

$(2^{x-1}+.......)(.......+.......-2)=8^{x-1}+.......$

مثال ۶۱ عبارت $A=(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2})$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $x+2$ ۲) $2x$ ۳) 2 ۴) $x-2$

مثال ۶۲ مقدار a را در رابطه‌ی $\sqrt[3]{a^{2}}-\sqrt[3]{a}+1=2(a+1)$ به‌دست آورید.

تجزیه اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات

$$\boxed{A^{3}-B^{3}=(A-B)(A^{2}+AB+B^{2})}$$

$$\boxed{A^{3}+B^{3}=(A+B)(A^{2}-AB+B^{2})}$$

مثال ۶۳ تجزیه کنید.

الف) $x^{6}+y^{6}=$

ب) $a^{3}+a^{2}-b^{3}-b^{2}=$

مثال ۶۴ عبارت $A=x^{6}-1$ به کدام‌یک از عبارات زیر بخش‌پذیر نیست؟

الف) $x-1$ ب) $x+1$ ج) $x^{2}-x-1$ د) $x^{2}+x+1$

نکته: در عبارات توانی عددی به توان خاصی را مجهول جدیدی به نام y می‌گیریم سپس عبارات را ساده می‌کنیم.

مثال ۶۵ معادله‌ی روبه‌رو چند جواب صحیح دارد؟ $\frac{8^{x}+27}{4^{x}-9}=13$

مثال ۶۶ کسر زیر را ساده کنید.

$$A=\frac{a^{4}+a^{2}b^{2}+b^{4}}{a^{6}-b^{6}}$$

اتحاد مکعب مجموع و تفاضل دوجمله‌ای

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

مثال ۶۷ حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها بیابید.

الف) $(x+2)(x^2-2x+4)=$

ب) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\,(2-\sqrt{3})=$

پ) $(x+\frac{1}{x})^3=$

تجزیه عبارت‌های جبری

روش‌های تجزیه

۱. فاکتورگیری: در صورت وجود عامل مشترک در عبارت‌های داده شده، ابتدا از آن عامل فاکتور می‌گیریم. یعنی:

$$a\underline{x}+b\underline{x}=x(a+b)$$

عامل مشترک

۲. در بحث خود اتحادها بحث و بررسی شده است.

۳. دسته‌بندی: معمولاً برای تجزیه عبارت‌هایی که شامل بیش از سه جمله هستند از طریق دسته‌بندی به تجزیه می‌پردازیم. عبارت‌ها را باید طوری دسته‌بندی کنیم که اولاً قابل تجزیه باشند. ثانیاً بتوان در ادامه از اتحادها یا فاکتورگیری به تجزیه آن پرداخت.

۱) $a^2+b^2+2ab-c^2$

۲) $6x^2+9xy-2xy-3y^2$

۳) $1-4a^2-b^2-4ab$

۴. (روش A): در عبارت‌های شامل سه جمله ضریب متغیر، مربع کامل نیست از این روش استفاده می‌کنیم. به این ترتیب که:

۱) عبارت را برابر A قرار می‌دهیم.

۲) طرفین را در ضریب متغیرِ مربع کامل ضرب می‌کنیم.

۳) عبارت به‌دست آمده را با استفاده از اتحاد یک جمله‌ی مشترک تجزیه می‌کنیم.

۴) طرفین را بر عدد ضرب شده تقسیم می‌کنیم.

۱) $3x^2-x-2$ ۲) $5x^2-x-6$ ۳) $7x^2+x-6$

کاربرد تجزیه در ب‌م‌م و ک‌م‌م

ابتدا عبارت‌ها را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم. سپس

ب‌م‌م = حاصل‌ضرب عامل‌های مشترک با توان کم‌تر

ک‌م‌م = حاصل‌ضرب عامل‌های مشترک با توان بیش‌تر × عامل‌های غیرمشترک

مثال ۶۷ ب‌م‌م و ک‌م‌م عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $a^3-1 \quad , \quad a^2-2a+1$

ب) $a^5+a^4+a^3+a^2+a+1 \quad , \quad a^4+a^2+1$

پ) $a^4-b^2 \quad , \quad a^4+2a^2b+b^2$

ت) $2x^3+6x^2 \quad , \quad 8x^3-72x \quad , \quad x^5+6x^4+9x^3$

تعریف عبارت گویا

هر عبارت کسری را که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای است.

مثال ۶۸ کدام‌یک از عبارت‌های زیر گویا است؟

الف) $\dfrac{x^{۴}+x}{y^{۲}-y}$

ب) $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^{۲}+۱}$

پ) $\dfrac{|x^{۲}|+۴}{y+۳}$

ت) $\dfrac{x+x^{\frac{۱}{۳}}}{y^{۲}-۱}$

ث) $\dfrac{x+|x|}{y+۲}$

مثال ۶۹ حاصل عبارت‌های زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $\dfrac{۳}{۲x}+\dfrac{۱}{۶x^{۲}}-\dfrac{۲}{۳x}=$

ب) $\dfrac{۱}{a^{۲}-۱}+\dfrac{۱}{a^{۲}+۲a+۱}=$

ج) $\dfrac{a+۵}{a-۱}-\dfrac{۶}{a^{۲}+a+۱}-\dfrac{۶(a^{۲}+۲)}{a^{۳}-۱}=$

گویا کردن مخرج کسر

بطور کلی ممکن است با یکی از سه حالت زیر مواجه شویم:

۱) اگر با عبارت $\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}$ مواجه بودیم از روش زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}\times\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\begin{cases}\dfrac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}, & n=۲k+۱\\[2ex] \dfrac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{|a|}, & n=۲k\end{cases}$$

۲) اگر با عبارت $\frac{c}{b\pm\sqrt{a}}$ مواجه بودیم از روش زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{c}{b\pm\sqrt{a}}\times\frac{b\mp\sqrt{a}}{b\mp\sqrt{a}}=\frac{c(b\mp\sqrt{a})}{b^۲-a}$$

۳) اگر با عبارت $\frac{c}{b\pm\sqrt[۳]{a}}$ مواجه بودیم از روش زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{c}{\sqrt[۳]{a}\pm b}\times\frac{\sqrt[۳]{a^۲}\mp b\sqrt[۳]{a}+b^۲}{\sqrt[۳]{a^۲}\mp b\sqrt[۳]{a}+b^۲}=\frac{c(\sqrt[۳]{a^۲}\mp b\sqrt[۳]{a}+b^۲)}{a\pm b^۳}$$

مثال ۷۰ کسرهای زیر را گویا و سپس ساده کنید.

$$A=\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۱}}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}$$

مثال ۷۱ حاصل عبارات زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۴}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{۹۹}+\sqrt{۱۰۰}}=$

ب) $۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}+\frac{\sqrt{۳}}{۳+\sqrt{۶}}+\frac{\sqrt{۴}}{۴+\sqrt{۱۲}}+\dots+\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n^۲-n}}=$