فصل چهارم

- ۱) حل معادله درجه دوم
  - فرمول کلی
  - ریشه‌گیری
  - مربع کامل
  - تجزیه
- ۲) سهمی
  - رسم سهمی
- ۳) تعیین علامت
  - نامعادله
    - دوگانه
    - قدرمطلق
  - تعیین علامت چندجمله‌ای‌های درجه اوّل و دوم
  - تعیین علامت ضرب و تقسیم چندجمله‌ای‌های درجه اوّل و دوم

ریشه سریع

$a+b+c=0 \to 1 \,,\, \frac{c}{a}$

$a+c=b \to -1 \,,\, -\frac{c}{a}$

اول $ax^1+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$

معادله‌ی درجه دوم

معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ که در آن $(a\neq 0)$ است و یا هر معادله‌ای که پس از ساده کردن به این شکل ظاهر شود یک معادله درجه دوم خوانده می شود. در این معادله بزرگ‌ترین توان متغیر (x) از درجه دوم است.

تذکر ۱: در معادله درجه دوم هر یک از اعداد حقیقی a ، b و c را ضـرایب معادله می‌نامند و ریشــه‌های معادله (جواب‌های معادله) را که حداکثر ۲ مورد می‌باشد به صورت (x', x'') و یا (x_1, x_2) نشان می‌دهند.

تذکر ۲: یک معادله‌ی درجه دوم حداکثر دو جواب دارد.

نکته در معادلـه درجـه دوم اگـر هـر یـک از اعـداد (مقـادیر) c یـا b و یـا هـر دو صـفر باشـند، معادلـه را نـاقص درجه دوم می‌نامند.

مثال ۱

$7x^2=0$ $3x^2-7=0$ $4x^2+3x=0$

روش‌های حل معادله درجه دوم

ویژگی حاصل‌ضرب صفر: اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $A\times B=0$ آن‌گاه دست‌کم یکی از آن‌ها صفر است.

$$A\times B=0 \Rightarrow A=0 \text{ یا } B=0$$

۱) روش تجزیه: در این روش به کمک قواعد تجزیه سعی می‌کنیم معادله را به صورت حاصل‌ضرب دو عبارت درجه اول بنویسیم، سپس هر یک را مساوی صفر قرار داده، و ریشه‌ها را به‌دست آوریم.

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \underbrace{(\ldots\ldots)}_{A}\times\underbrace{(\ldots\ldots)}_{B}=0 \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ \text{یا} \\ B=0 \end{cases}$$

$A=5x^2-4x-1$

$5A=25x^2-4(5x)-5$

$=(5x)^2-4(5x)-5$

$=(5x-5)(5x+1)=0$ $x=1$ $-\frac{1}{5}$

مثال ۲ معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

$5x^2-4x-1=0 \Rightarrow 5x^2-5x+x-1=0$

$5x(x-1)+(x-1)=0 \rightarrow (x-1)(5x+1)=0 \begin{cases} x-1=0 & \boxed{x=1} \\ 5x+1=0 & x=-\frac{1}{5} \end{cases}$

$x^3-2x^2-x+2=0$

$x^2(x-2)-(x-2)=0 \quad (x-2)(x^2-1)=0 \begin{cases} x-2=0 & x=2 \\ x^2-1=0 & x^2=1 \quad x=\pm 1 \end{cases}$

$\sqrt{9}=|3|=3$ $\qquad x^{2}=9 \longrightarrow x=\pm 3$

۲) روش ریشه‌گیری: هرگاه u یک عبارت جبری برحسب x و a عدد حقیقی فرض شود، در این صورت معادلات درجه دوم به صورت $u^2=0$ یا $u^2=a$ یا $u^2=a^2$ با جذر گرفتن یا ریشه دوم گرفتن از طرفین آن‌ها ما را به جواب معادله می‌رساند. توجه شود که: $a\geq 0$

$u^2=-2$ ✗

$u^2=a^2 \longrightarrow u=\pm a$

نکته بدیهی است در حالتی که $u^2=a$ باشد، معادله وقتی جواب دارد که $a\geq 0$ باشد.

مثال ۳ معادلات زیر را به روش ریشه‌گیری حل کنید.

$1)\ (3x-2)^2=4 \Rightarrow 3x-2=\pm 2$

$3x-2=2 \longrightarrow 3x=4 \quad x=\frac{4}{3}$

$3x-2=-2 \longrightarrow 3x=0 \quad x=0$

$2)\ t^2+5=0 \longrightarrow t^2=-5$ ✗ معادله جواب ندارد

مثال ۴ هر یک از معادلات زیر را به روش تجزیه یا ریشه‌گیری حل کنید.

✓ $1)\ 3x^2+2x=0 \longrightarrow x(3x+2)=0$

$x=0$

$3x+2=0 \quad x=-\frac{2}{3}$

✓ $2)\ x^2-11x+10=0 \quad (x-10)(x-1)=0$

$x=1$

$x=10$

✗ $3)\ 2a^2-10a+12=0$

✗ $4)\ 4t^3-t=0$

✗ $5)\ 3x^2-3x-18=0$

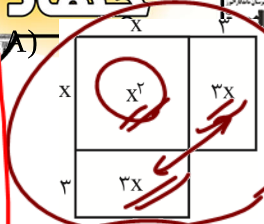
✓ $6)\ (3x-2)^2=4 \longrightarrow (3x-2)=\pm 2$

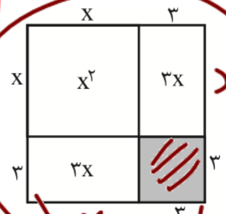
$3x-2=2 \longrightarrow 3x=4 \quad x=\frac{4}{3}$

$3x-2=-2 \longrightarrow x=0$

✗ $7)\ (x-\frac{7}{6})^2=\frac{1}{36}$

(A





۳) روش مربع کامل: «تعبیر هندسی»

برای درک بهتر این روش به تعبیر هندسی مربع کردن در معادله $x^2+6x=7$ توجه کنید.

فرض کنید مساحت شکل مقابل برابر با ۷ سانتی‌متر مربع باشد. یعنی $x^2+6x=7$

کافی است مربع 3×3 زیر را به شکل A اضافه کنیم.

یعنی (مربع نصف ضریب x) را به شکل می‌افزاییم.

$$x^2+6x+9=7+9$$

اکنون مربع بزرگی به طول ضلع $(x+3)$ به‌وجود آمده است که مساحت آن برابر است با:

$$(x+3)^2=16$$

$x+3=-4 \quad x=-7$

پس ضلع مربع برابر با ۴ است.

$$x+3=4$$

و

$$x=1$$

مثال ۵ با تکمیل هر یک از مثال‌ها، آن‌ها را به یک مربع کامل تبدیل کرده، به‌صورت عبارتی دارای یک مربع دو جمله‌ای درآورید.

$-\frac{2}{2}=-1 \to (-1)^2=1$

۱) $x^2-2x+\ldots1\ldots=(\ldots x-1\ldots)^2$

۲) $x^2-3x+\ldots\frac{9}{4}\ldots=(\ldots x-\frac{3}{2}\ldots)^2$

$-\frac{3}{2} \to \frac{9}{4}$

۴) روش جبری حل معادله درجه ۲ با مربع کامل: برای حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

الف) در این روش ضریب x^2 یعنی a باید عدد ۱ باشد، اگر نبود طرفین را به ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم.

ب) ثابت عددی c را به طرف دیگر معادله انتقال می‌دهیم.

$\frac{4}{3}/2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \to \frac{4}{9}$

ج) به طرفین معادله مقدار $\frac{b^2}{4}$ را اضافه می‌کنیم که همان مربع نصف ضریب x است.

د) یک طرف معادله قابل تبدیل به اتحاد مربع مجموع یا تفاضل دو جمله می‌شود و طرف دیگر یک عدد حقیقی است.

هـ) با ریشه دوم گرفتن (جذر) از طرفین جواب‌های معادله به‌دست می‌آیند. به هنگام گرفتن ریشه دوم توجه کنید که:

$$a^2=b^2 \Rightarrow a=\pm b$$

تذکر: بدیهی است اگر جواب اتحاد یک عدد منفی شود، معادله جواب حقیقی ندارد.

مثال ۶ معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۱) $2x^2+4x-7=0 \to 2(x^2+\frac{4}{2}x-\frac{7}{2})=0 \Rightarrow x^2+\frac{4}{3}x=\frac{7}{2}$ ... $(x+\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}$

$x+\frac{2}{3}=\pm\frac{5}{3}$

$x+\frac{2}{3}=\frac{5}{3} \to x=1$

$x+\frac{2}{3}=-\frac{5}{3} \to x=-\frac{7}{3}$

۲) $2x^2-4x+5=0$

$2x^2-7x+4=0$

۱

$x^2-2x+4=0$

$8x^2+2x-3=0$

۵) روش دلتا (دســتور کلی): با اعمال روش مربع کامل روی معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ در نهایت به فرمول کلی حل معادله‌ی درجه ۲خواهیم رسیم.

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \Rightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\Delta=b^2-4ac \geq 0$

بدیهی اسـت معادله وقتی جواب دارد که زیر رادیکال که به آن مبین یا Δ می‌گویند بزرگ‌تر یا مسـاوی صـفر باشـد. (Δ را دلتا بخوانید.)

$$\boxed{\Delta=b^2-4ac \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

بحث در مورد Δ و ریشه‌های معادله

الف) اگر $\Delta>0$ باشد معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز می‌باشد.

$$\boxed{x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}} \quad , \quad \boxed{x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

ب) اگر $\Delta=0$ باشد معادله دارای دو ریشه مساوی می‌باشد که گفته می‌شود معادله دارای ریشه مضاعف است.

$$\boxed{x_1=x_2=-\frac{b}{2a}}$$

تذکر: برای حل معادله درجه دوم به روش Δ ابتدا ضـرایب معادله را مشـخص و سـپس Δ را محاسـبه و فرمول تعیین ریشه‌ها را استفاده می‌کنیم.

مثال ۸ معادله‌های زیر را به روش کلی حل کنید. (روش Δ)

۱) $۲x^۲+۵x-۱۲=۰$

$$\Delta=b^2-4ac=5^2-4(2)(-12)=25+96=121$$

$$32-20-12=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{121}}{4}\begin{cases}\dfrac{-5+11}{4}=\dfrac{3}{2}\\[2mm]\dfrac{-5-11}{4}=-4\end{cases}$$

۲) $۷x^۲-۳x=۴$

$$7x^2-3x-4=0$$

$$\Delta=(-3)^2-4(+7)(-4)=9+112=121$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{121}}{14}\begin{cases}\dfrac{14}{14}=1\\[2mm]-\dfrac{8}{14}=-\dfrac{4}{7}\end{cases}$$

۳) $۴x^۲-۵x+۸=۰$

$$ax^2+bx+c=0$$

نکته اگر در حل معادله به روش کلی ضریب x یعنی b عددی زوج باشد یعنی $(b=2b')$ می‌توان معادله را به روش زیر نیز حل کرد که به نام روش Δ' مشهور است.

$$\boxed{\Delta'=b'^2-ac\Rightarrow x=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}}$$

$$b'=\frac{b}{2}$$

مثال ۹ با توجه به نکته بالا معادلات زیر را حل کنید.

۱) $۳x^۲+۱۰x-۸=۰$

$$\Delta=100-4(3)(-8)=100+96=196 \qquad x=\frac{-10\pm14}{6}\begin{cases}\dfrac{2}{3}\\[2mm]-4\end{cases}$$

$$\Delta'=5^2-3(-8)=25+24=49 \qquad x=\frac{-5\pm7}{3}=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\\[2mm]-4\end{cases}$$

۲) $۵x^۲+۴x=۱$

مثال ۱۰ هریک از معادلات زیر را به روش کلی (روش دلتا) حل کنید.

۱) $۹t^۲-۱۲t+۴=۰$

۳) $t - t^2 = 3$

۴) $(5x-3)(x-5) = (2x+5)^2 + 90$

$$5x^2 - 25x - 3x + 15 = 4x^2 + 20x + 25 + 90$$

$$x^2 - 48x - 100 = 0$$

$$x^2 - 48x = 100 \rightarrow (x-24)^2 = 676$$

$$x - 24 = \pm\sqrt{676} = 26$$

$$x - 24 = 26 \rightarrow x = 50$$

$$x - 24 = -26 \rightarrow x = -2$$

$24 \times 24 = 576$، $576 + 100 = 676$

۵) $x(2x+1) = 2$

۶) $4y^2 - 20y + 25 = 0$

مثال ۱۱ m را چنان بیابید که معادله‌ی روبه‌رو شرایط خواسته شده را داشته باشد. $mx^2 + (2m+1)x + m = 0$

الف) دارای دو ریشه حقیقی متمایز است. $\Delta > 0$

ب) دارای ریشه مضاعف است. $\Delta = 0$

ج) ریشه حقیقی ندارد. $\Delta < 0$

د) ریشه حقیقی دارد. $\Delta \geq 0$

$$\Delta = (2m+1)^2 - (4m)(m) = 0$$

$$= \cancel{4m^2} + 4m + 1 - \cancel{4m^2} = 0 \qquad m = -\tfrac{1}{4}$$

مثال ۱۲ مقدار m را طوری بیابید که یک ریشه‌ی معادله $\frac{m(x-1)}{3} - 6x^2 = 1 - m$ برابر عدد ۱- باشد.

$x = -1$

$$\frac{m(-2)}{3} - 6(-1)^2 = 1 - m$$

$$-\tfrac{2}{3}m - 6 = 1 - m$$

$$-\tfrac{2}{3}m + m = 1 + 6$$

$$\tfrac{1}{3}m = 7 \qquad m = 21$$

$a+c=b$ ⟨ -1 , $-c/a$

$a+b+c=0$ ⟨ 1 , c/a

نکته

اگر مجموع ضرایب معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ برابر صفر باشد، یکی از جواب های این معادله برابر ۱ و جواب دیگر آن $\frac{c}{a}$ است. همچنین اگر $a+c=b$ ، یکی از جواب های این معادله برابر با ۱- و جواب دیگر آن برابر با $-\frac{c}{a}$ است.

مثال ۱۳ معادله $(1-\sqrt{2})x^2-2(2+\sqrt{2})x+3+3\sqrt{2}=0$ دارای

۱) دو ریشه مثبت است.
۲) دو ریشه منفی است.
۳) دو ریشه مختلف العلامه است.
۴) ریشه ندارد.

$1-\sqrt{2}-4-2\sqrt{2}+3+3\sqrt{2}=0$

$x=1$, $x=\frac{3+3\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

تذکر: گاهی برای ساده‌تر کردن معادله‌ی داده شده می‌توان از تغییر متغیر یا همان متغیر کمکی استفاده کرد.

مثال ۱۴ معادله زیر را حل کنید.

$$(x^2+x)^2+3(x^2+x)-10=0$$

$\Rightarrow A^2+3A-10=0$, $(A+5)(A-2)=0$

$A=2=x^2+x \to x^2+x-2=0$, $x=1$, $x=-2$

$A=-5=x^2+x \to x^2+x+5=0$, $\Delta<0$

$x^2+x=A$

حل مسئله به کمک مدل سازی ریاضی

مثال ۱۵ برای هر یک از مسائل زیر یک مدل ریاضی بنویسید و سپس آن را حل کنید.

الف) عددی طبیعی بیابید که مربع آن از ۳ برابر آن عدد ۴۰ واحد بیش‌تر باشد.

$x^2=3x+40$

$x^2-3x-40=0$, $(x-8)(x+5)=0$

$x=8$, $x=-5$

$8^2=3\times 8+40$

$64=24+40$

ب) اگر مجموع یک عدد با وارونش برابر $\frac{16}{3}$ باشد آن عدد را بیابید.

$x+\frac{1}{x}=\frac{16}{3} \to \frac{x^2+1}{x}=\frac{16}{3}$

$3x^2+3=16x \to 3x^2-16x+3=0$

$\Delta=16^2-4(3)(3)=256-36=220$

$x=\frac{16\pm\sqrt{220}}{6}$

پ) اگر تفاضل ۲ عدد صحیح ۴ و مجموع مربعات آن‌ها ۱۳۶ باشد این ۲ عدد را بیابید.

ت) از یک رشته سیم به طول ۵۰ سانتی‌متر یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ سانتی‌متر مربع می‌سازیم. ابعاد این مستطیل را بیابید.

ث) دو عدد طبیعی زوج متوالی بیابید که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۷۲۸ باشد.

ج) اگر مساحت مستطیلی ۱۲ سانتی‌مترمربع و اندازه قطر آن $\sqrt{۲۶}$ سانتی‌متر باشد، ابعاد مستطیل را بیابید.

چ) می‌خواهیم یک قالی به مساحت ۸ مترمربع داخل اتاق به ابعاد ۴×۶ پهن کنیم. در صورتی‌که فاصله لبه قالی تا دیوار یکسان باشد، این فاصله را مشخص کنید.

$\frac{-b}{2a}$ = بزرگترین یا کمترین x

$= ax^2+bx+c = 0$

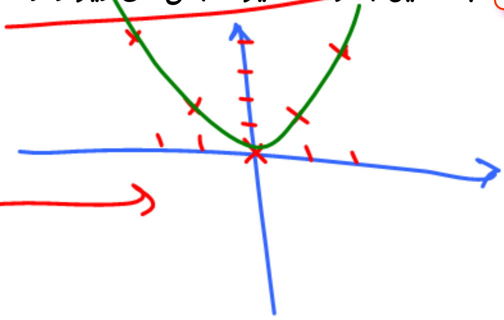
سهمی

نمودار هر معادله به شکل $y = ax^۲ + bx + c$ با شرط $a \neq ۰$ را یک سهمی می‌گوییم. همانند $y = ۳x^۲ - ۷x + ۴$ ، $y = x^۲ - ۱$ و $y = (x-۳)^۲ + ۱$ و ...

مثال ۱۶ با تکمیل جدول مقادیر، سهمی‌های زیر را رسم کنید.

$y = x^۲$

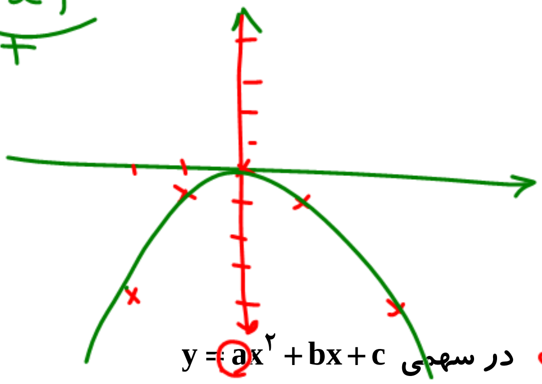
x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	۴	۱	۰	۱	۴



$y = -x^2$

$-x^2 \neq (-x)^2$

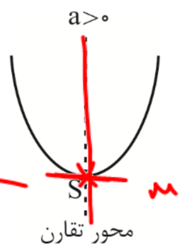
x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	-1	-4



در سهمی $y = ax^2 + bx + c$

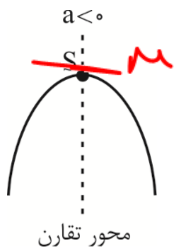
الف) اگر $a > 0$ باشد نمودار سهمی به‌صورت شکل زیر می‌باشد و سهمی در نقطه‌ی S دارای min می‌باشد.

$x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن



min (مینیمم)

ب) اگر $a < 0$ باشد نمودار سهمی به‌صورت شکل زیر می‌باشد و سهمی در نقطه‌ی S دارای max می‌باشد.



max (ماکزیمم)

رأس و محور تقارن سهمی

نقطه S که ماکزیمم یا مینی موم سهمی است، رأس سهمی نامیده می‌شود و همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد محور تقارن سهمی نامیده می‌شود.

نکته

می‌توانیم معادله سهمی $y = ax^2 + bx + c$ را به کمک مربع‌سازی به‌صورت $\boxed{y = a(x-h)^2 + k}$ بنویسیم که در این معادله مختصات رأس سهمی $\boxed{\text{نقطه } (h, k)}$ و محور تقارن $\boxed{\text{خط } x = h}$ می‌باشد.

نکته

در معادله سهمی $y = ax^2 + bx + c$ معادله محور تقارن سهمی از رابطه $\boxed{x = \frac{-b}{2a}}$ و مختصات رأس سهمی از رابطه $\boxed{S(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})}$ به‌دست می‌آورید. چرا؟

$-\Delta / 4a$

مثال ۱۷ معادله سهمی $y = x^2 - 4x + 5$ را می‌توان به‌صورت .... نوشت.

$(x-2)^2 + 1$

$S = (2, 1)$

$= x^2 - 4x + 4 + 1$

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$

رأس سهمی

برای رسم سهمی ابتدا مختصات رأس سهمی را معین کنید. سپس به طول رأس سهمی یک واحد (یک اندازه) اضافه و کم کنید. با مشخص کردن ۳ نقطه از سهمی می‌توانید شکل سهمی را رسم کنید.

برای رسم سهمی یکی از دو حالت زیر را استفاده می‌کنیم:

الف) حالت استاندارد: در معادله‌ی سهمی به شکل $y = a(x-h)^۲ + k$ از نقاط زیر برای رسم استفاده می‌کنیم.

x	$h-۱$	h	$h+۱$
y	$a+k$	k	$a+k$

ب) حالت کلی: در سهمی به معادله‌ی $y = ax^۲ + bx + c$ ، پس از تعیین طول رأس سهمی یعنی $x = -\frac{b}{۲a}$ جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

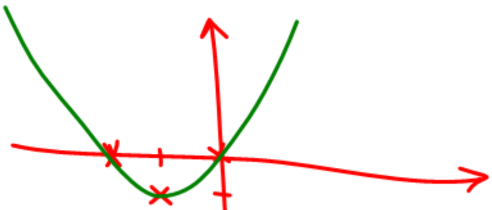
x	y
$-\frac{b}{۲a}-۱$	
$\frac{-b}{۲a}$	$\frac{-\Delta}{۴a}$
$\frac{-b}{۲a}+۱$	

مثال ۱۸ نمودار سهمی‌های زیر را رسم کنید.

۱) $y = (x+۱)^۲ - ۱$

$x=-1$

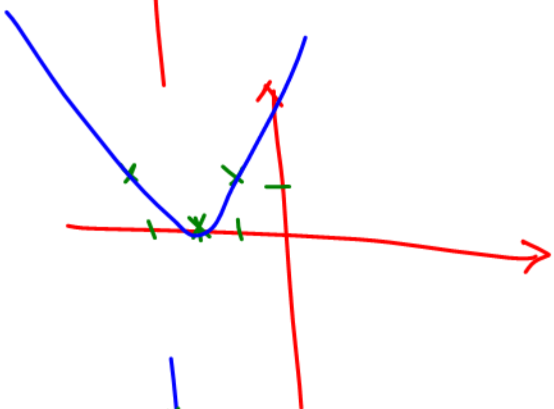
x	-2	-1	0
y	0	-1	0



۲) $y = x^۲ + ۴x + ۴ = (x+2)^2 + 0$

$x=-2$

x	-3	-2	-1
y	1	0	1

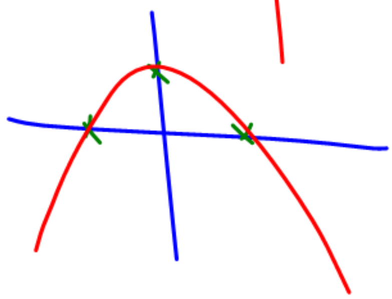


۳) $y = ۱ - x^۲ = -x^2 + 1$

a c

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(-1)} = 0$

x	-1	0	1
y	0	1	0



۴) $y = -۱ - (x-۲)^۲$

1

$x=2$

x	1	2	3
y	-3	-2	-3

مثال ۱۹ سهمی‌های زیر را رسم کنید. مختصات رأس سهمی و معادله‌ی خط تقارن هر یک را بیابید.

$x = -\frac{b}{2a} =$ خط تقارن

۲) $y = \frac{(x+2)^2 - 3}{2}$

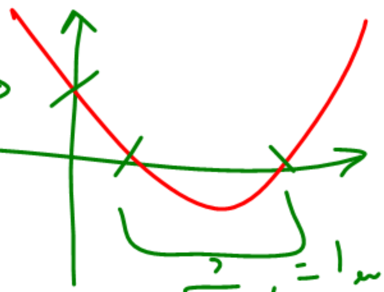
$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{3}{2}$

۳) $y = 2x^2 - 4x + 4$

۴) $y = x^2 - 6x$

$x=0$ عرض از مبدأ

$y = ax^2 + bx + c = 0$



ریشه = جواب = صفر

$y=0$ طول از مبدأ = ریشه

تذکر ۱: برای مشخص کردن مختصات محل تلاقی سهمی با محور x ها باید در معادله سهمی به جای y صفر قرار دهیم.

تذکر ۲: سـهمی تحت هر شـرایطی محور y را قطع می‌کند برای تعیین مختصـات نقطه برخورد کافی اسـت در معادله سهمی $x = 0$ قرار دهیم.

$\begin{cases} y = \cancel{ax^2} + \cancel{bx} + c \\ x = 0 \end{cases}$

عرض از مبدأ

مثال ۲۰ در معادله سهمی $y = x^2 - 5x + 6$ نقاط برخورد سهمی با محور x و y را بیابید.

ریشه

$x = 0 \rightarrow y = 6 = c$ عرض از مبدأ

$x^2 - 5x + 6 = 0, \quad (x-2)(x-3) = 0$

نکته در مسائل سهمی منظور از مقدار ... و ... سهمی همان عرض رأس سهمی می‌باشد.

$y=-x^2$

S	$x=-\frac{b}{2a}$	(محور تقارن سهمی) طول رأس سهمی
	$y=-\frac{\Delta}{4a}$	عرض رأس سهمی (max یا min سهمی)

تعیین علامت

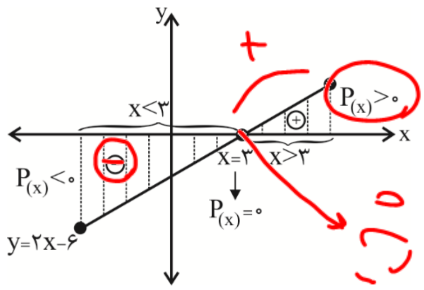
منظور از تعیین علامت یک عبارت جبری آن است که معین کنیم آن عبارت به ازای چه مقادیری از x و یا در چه فاصله‌ای از اعداد حقیقی مقدارش مثبت (بزرگ‌تر از صفر) و یا منفی (کوچک‌تر از صفر) و یا برابر با صفر است.

نکته برای تعیین علامت می‌توانیم از ویژگی نامساوی‌ها یا رسم نمودار و یا جدول تعیین علامت استفاده کنیم.

تفسیر هندسی تعیین علامت

می‌توانیم به کمک رسم نمودار عبارت را تعیین علامت کنیم:

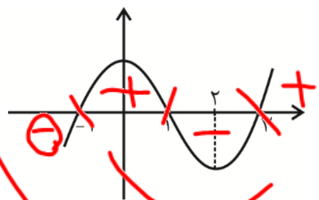
همواره محل برخورد نمودار با محور x ها بیانگر جوابی است که حاصل عبارت به ازای آن برابر صفر است (ریشه) و قسمت‌هایی از نمودار که بالای محور x ها قرار دارد حاصل عبارت مثبت و آن قسمت از نمودار که پایین محور x ها قرار دارد حاصل عبارت منفی می‌باشد.



دقت کنید که مطالب عنوان شده را می‌توانیم در قالب یک جدول مرتب کنیم.

x	$-\infty$	x<۳	x=۳	x>۳	$+\infty$
$P_{(x)}=2x-6$		$-$	۰	$+$	

مثال ۲۱ نمودار زیر را تعیین علامت کنید.



تعیین علامت عبارت درجه اول $p(x) = ax + b$

برای تعیین علامت عبارت درجه اول به کمک جدول تعیین علامت، ابتدا عبارت را برابر صفر قرار دهید تا به کمک حل معادله ریشه آن را به‌دست آورید و به کمک جدول زیر آن را تعیین علامت کنید.

$$P = ax + b \Rightarrow ax + b = ۰ \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

x	$-\infty$	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$	$+\infty$
P=ax+b		مخالف علامت a	۰	موافق علامت a	

نکته

مهم ترین عبارت های همواره نامنفی در ریاضی عبارتند از:

$۱)\ |A| \geq ۰$ $\quad$ $۲)\ A^{۲k} \geq ۰$ $\quad$ $۳)\ \sqrt[۲k]{A} \geq ۰$

مثال ۲۲ عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

$۱)P = |x + ۳|$

$۲)P = \sqrt{x^۲ + ۲x + ۱}$

$۳)P = x^۲ - ۴x + ۴$

نکته

اگر یک عبارت درجه اول به توان فرد برسد یا زیر رادیکال با فرجه فرد باشد برای تعیین علامت این‌گونه عبارات از همان قاعده کلی تعیین علامت عبارت درجه اول استفاده کنید. یعنی توان‌های فرد و فرجه‌های فرد تأثیری در تعیین علامت ندارند.

مثال ۲۳ عبارات زیر را تعیین علامت نمایید.

$۱)P = (-x - ۱)^۳$

$۲)P = \sqrt[۵]{۲x - ۴}$

تذکر: در تعیین علامت عباراتی که به‌صورت حاصل‌ضرب یا تقسیم یا تلفیقی از ضرب و تقسیم چند عبارت درجه اول باشد به‌صورت زیر عمل کنید:

الف) هر عبارت را برابر صفر قرار دهید و جواب آن را به‌دست آورید.

ب) در جدول تعیین علامت جواب‌های به‌دست آمده را از کوچک به بزرگ (از چپ به راست) در سطر اول بنویسید.

ج) عبارات درجه اول را زیر هم نوشته و هر عبارت را در جدول در ردیفی جداگانه تعیین علامت کنید.

د) سرانجام حاصل‌ضرب ستونی علامت‌ها، همان حاصل تعیین علامت عبارت اولیه است.

هـ) اگر عبارت به‌صورت کسری بود در جدول تعیین علامت در سطر آخر به‌ازای جواب مخرج به جای نوشتن عدد صفر حروف (ن = نامعنی یا ت.ن= تعریف نشده) قرار دهید.

مثال ۲۴ عبارت را تعیین علامت کنید.

مثال ۲۵ هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

۱) P = [illegible]

۲) P = [illegible]

۳) P = [illegible]

$۴)\ P = \frac{(-x+۲)(۹-\ [illegible]}{[illegible]}$

نکته اگر عبارت درجه اول دارای ریشه باشد در جدول تعیین علامت در آن نقطه تغییر علامت می‌دهد، اما اگر عبارت فاقد ریشه باشد (شیب خط صفر باشد) عبارت همواره مثبت یا همواره منفی می‌شود.

مثال ۲۶ عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $P =$

ب) $P = -$

ج) $P = |$

د) $P = -|$

نکته برای تعیین علامت عبارت قدرمطلق‌دار می‌توانیم از تعریف قدرمطلق و رسم نمودار کمک بگیریم.

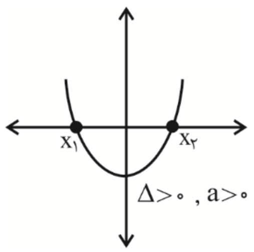
مثال ۲۷ عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $P = x - |۲x - ۶|$

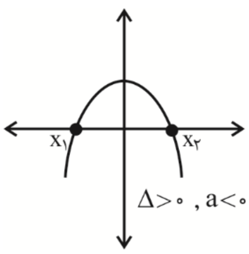
ب) $P = |x - ۲| - ۱$

تعیین علامت عبارت درجه دوم : $P = ax^۲ + bx + c$

حالت اول: اگر $\Delta > ۰$ باشد سهمی محور x ها را در ۲ نقطه قطع می‌کند.

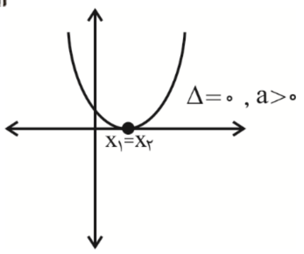


x	$-\infty$		$x_۱$		$x_۲$		$+\infty$
$P = ax^۲ + bx + c$		+	۰	−	۰	+	

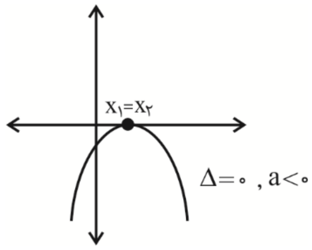


x	$-\infty$		$x_۱$		$x_۲$		$+\infty$
$P = ax^۲ + bx + c$		−	۰	+	۰	−	

حالت دوم: اگر $\Delta = 0$ باشد سهمی بر محور x ها مماس است.

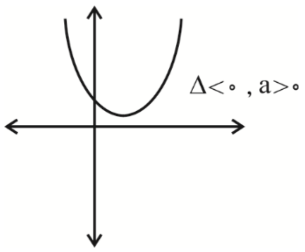


x	$-\infty$	$x=-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P=ax^2+bx+c$	+	0	+

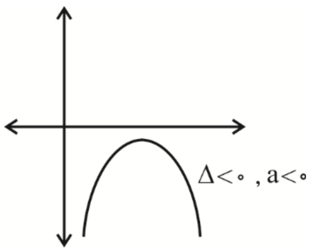


x	$-\infty$	$x=-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P=ax^2+bx+c$	−	0	−

حالت سوم: اگر $\Delta < 0$ باشد سهمی محور x ها را قطع نمی‌کند.



x	$-\infty$ $+\infty$
$P=ax^2+bx+c$	+



x	$-\infty$ $+\infty$
$P=ax^2+bx+c$	−

نکته

با توجه به حالت سوم در قسمت بالا می‌توان گفت:

سه جمله‌ای $P = ax^2 + bx + c$ به ازای جمیع مقادیر x (همواره)

الف) منفی است هرگاه $\Delta < 0$, $a < 0$

ب) مثبت است هرگاه $\Delta < 0$, $a > 0$

ج) نامنفی است هرگاه $\Delta \le 0$ و $a > 0$

د) نا مثبت است هرگاه $\Delta \le 0$ و $a < 0$

مثال ۲۸ هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $P = 3x^2 - 5x + 2$

ب) $P = x^{۲} - ۴x + ۴$

ج) $P = -۲x^{۲} + ۴x - ۹$

مثال۲۹ حدود m را طوری بیابید که سه جمله‌ای $P = (m+۱)x^{۲} + (۲m+۳)x + m$ به ازای جمیع مقادیر x منفی باشد.

نامعادله و حل آن

هر عبارت جبری که دارای علامت نامساوی است، یک نامعادله خوانده می‌شود. برای حل یک نامعادله ابتدا همه عبارات جبری را به یک طرف نامساوی انتقال دهید، آن‌گاه جدول تعیین علامت را برای آن عبارت تشکیل دهید. و در پایان در جدول تعیین علامت با توجه به جهت نامساوی، محدوده‌ی مناسب (بازه) را انتخاب کنید.

مثال۳۰ مجموعه جواب نامعادله را به‌صورت بازه نوشته و بر روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

$۳x^{۲} \leq ۵x - ۲$

نامعادلات دوگانه (توأم) و حل آن

ـدی حاصل می‌شود که به آن نامعادله دوگانه می‌گویند که برای حل آن‌ها نامعادله را به دو قسمت تقسیم کرده و هر یک را جداگانه حل می‌کنیم و سرانجام در بین جواب‌های به‌دست آمده اشتراک می‌گیریم.

مثال ۳۱ مجموعه جواب نامعادلات را به‌صورت بازه و بر محور اعداد حقیقی نشان دهید.

نامعادله قدرمطلقی

همان‌طور که از اسم آن پیداست نامعادله‌ای که در آن قدرمطلق به کار رفته باشد، نامعادله قدرمطلقی خوانده می‌شود، از تعریف قدر مطلق برای حل نامعادله قدرمطلق استفاده می‌شود.

روش حل نامعادله قدرمطلقی

حالت اول: اگر یک طرف نامساوی تنها یک قدرمطلق و طرف دیگر آن یک عدد حقیقی باشد، با توجه به شرایط زیر می‌توان از خواص قدرمطلق برای حل نامعادله استفاده کرد. (با فرض این‌که $a > 0$ داریم.)

الف) اگر $|u| \le a \Rightarrow -a \le u \le a$

ب) اگر $|u| \ge a \Rightarrow u \ge a$ یا $u \le -a$

ج) اگر $|u| \le -a \Rightarrow x \in \varnothing$

د) اگر $|u| \ge -a \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

هـ) اگر $|u| > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{$ریشه درون قدرمطلق$\}$

و) اگر $|u| < 0 \Rightarrow x \in \varnothing$

ز) اگر $|u| \le 0 \Rightarrow u = 0$

ح) اگر $|u| \ge 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

مثال ۳۲ نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $|2x-3| \le 7$

۲) $|2x-4| > 0$

حالت دوم: اگر در هر طرف نامساوی، فقط یک قدرمطلق باشد، برای حل نامعادله عبارات درون قدرمطلق را به توان ۲ می‌رسانیم تا نماد قدرمطلق حذف شود و سپس آن نامعادله را حل می‌کنیم.

مثال ۳۳ نامعادله قدرمطلقی زیر را حل کنید.

$|x-۲|\geq ۱$

حالت سـوم: اگر قدرمطلق همراه عبارت جبری باشـد ابتدا با توجه به تعریف قدرمطلق، نماد قدرمطلق را حذف می‌کنیم و سپس نامعادله های بدست آمده را حل می‌کنیم و در هر حالت با شرط قدرمطلق اشتراک می‌گیریم و سرانجام بین جواب‌های به‌دست آمده اجتماع می‌گیریم.

مثال ۳۴ نامعادلات قدرمطلقی زیر را حل کنید.

الف) $۲x-|x-۱|>۸$

ب) $|۲x-۳|\geq ۵x+۱۲$

شیوه تبدیل بازه به یک نامعادله‌ی قدرمطلقی

الف) $\begin{cases} x\in(a,b) \Leftrightarrow \left|x-\dfrac{a+b}{۲}\right|<\dfrac{b-a}{۲} \\ x\in[a,b] \Leftrightarrow \left|x-\dfrac{a+b}{۲}\right|\leq\dfrac{b-a}{۲} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x\in(-\infty,a)\cup(b,+\infty) \Leftrightarrow \left|x-\dfrac{a+b}{۲}\right|>\dfrac{b-a}{۲} \\ x\in(-\infty,a]\cup[b,+\infty) \Leftrightarrow \left|x-\dfrac{a+b}{۲}\right|\geq\dfrac{b-a}{۲} \end{cases}$

(چرا؟)

مثال ۳۵ یک نامعادله قدرمطلقی بنویسید که جواب آن بازه $(۵,۷)$ باشد.

مثال ۳۶ یک نامعادله قدرمطلقی بنویسید که جواب آن بازه $(-\infty,۱]\cup[۵,+\infty)$ باشد.